円分関数体の相対合同ゼータ関数について

塩見 大輔 (名古屋大学)

2008年11月22日

有限体上の一変数有理関数体 $k = \mathbb{F}(T)$ とモニック多項式 $M \in \mathbb{F}[T]$ を考える. k に Carlitz-module の M-等分点を添加してできる体を M-円分関数体と呼ぶ. Rosen は, p-分体の相対類数公式である Maillet 行列式の円分関数体でのアナロジーとして, 既約多項式 P に対して, P-円分関数体の相対類数に行列式表示を与えた. 本講演では, Rosen の結果の拡張として, 円分関数体の相対合同ゼータ関数に行列式表示を与える.
モニック多項式 M に対して, M-円分関数体 k_M の合同ゼータ関数 $\zeta(s, k_M)$ は整数係数多項式 $P_M(X)$ を用いて,

$$\zeta(s, k_M) = \frac{P_M(q^{-s})}{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})}$$

と表すことができる. $P_M(X)$ をプラスパートとマイナスパートに次のように分解する。

$$P_M(X) = P_M^+(X) P_M^-(X).$$

前回のセミナーでは, 合同ゼータ関数のプラスパートの部分に関して行列式表示を与えた. 今回の講演の目標は, マイナスパートの部分に行列式表示を与えることである. 以下が主結果である.

主結果 1. *モニック多項式 M に対して,*

$$\det D_M^-(X) = P_M^-(X) J_M^-(X).$$

ただし, $J_M^-(X)$ は M から容易に計算可能な整数係数の多項式. 特に, M が既約多項式のベキの形であるときは, $J_M^-(X) = 1$ であり, $P_M^-(X) = \det D_M^-(X)$ である.

特に, M が既約多項式のとき, $X = 1$ を両辺に代入すれば Rosen の結果を得る. また, 相対合同ゼータ関数の行列式表示の応用として, $P_M^-(X)$ の低次の係数が決定できる. $\det D_M^-(X) = 1 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$ の低次の項の係数 a_1, a_2 が以下のように計算できる.

主結果 2. 次数 2 以上のモニック多項式 M に対して次のことが成り立つ.

$$
\begin{aligned}
(1)\ a_1 &= 0 \\
(2)\ a_2 &= 0 \quad (if \quad \deg M > 2) \\
(3)\ a_2 &= \frac{N_M}{2}\{(q-1)(1-C_M)+N_M-1\} \quad (if \quad \deg M = 2)
\end{aligned}
$$

ただし、C_M, N_M は M から定まる定数.

セクション 1, 2 において円分関数体とその相対合同ゼータ関数の説明をする. セクション 3 では, 円分関数体の合同ゼータ関数に行列式公式を与え, その系として類数公式が導けることを説明する. セクション 4 では, 行列式公式の応用として, 合同ゼータ関数に付随する多項式の低次の係数を求める. 最後のセクションに, いくつかの行列式の具体例を表示した.

1 円分関数体の復習

まず, 円分関数体の復習から始める. 詳細は Hayes [4] を参考のこと. $\mathbb{F}_q$ を q 個からなる有限体, 不定元 T を固定し, $k = \mathbb{F}_q(T)$, $R = \mathbb{F}_q[T]$ とおく. k の代数的閉包 k^{ac} の $\mathbb{F}$ 上の線形写像 φ, μ を,

$$
\begin{aligned}
\varphi : k^{ac} &\longrightarrow k^{ac} \qquad (x \mapsto x^q) \\
\mu : k^{ac} &\longrightarrow k^{ac} \qquad (x \mapsto Tx)
\end{aligned}
$$

によって定義する. これらの線形写像を用いて,

$$M \cdot x = M(\varphi + \mu)(x) \tag{1}$$

と作用を定めることで, k^{ac} は R-加群になる. d 次モニック多項式 M に対して, k^{ac} の M-torsion point の集合

$$\Lambda_M = \{x \in k^{ac} | M \cdot x = 0\} \tag{2}$$

を考える. k に Λ_M を添加した体を k_M で表し, M-円分関数体という. このとき, k_M/k はガロア拡大であって, そのガロア群 $\mathrm{Gal}(k_M/k)$ は, $(R/(M))^\times$ と同型である.
$\mathrm{Gal}(k_M/k)$ と $(R/(M))^\times$ を同一視する. $\mathbb{F}_q^\times \Big(\subseteq (R/(M))^\times\Big)$ に対応する k_M/k の中間体を k_M^+ で表す. $\Phi(M)$ を $(R/M)^\times$ の位数とすれば, , $[k_M^+ : k] = \frac{\Phi(M)}{q-1}$ である. また, M が一次多項式のときは $k_M^+ = k$ であり, $q = 2$ のときは $k_M^+ = k_M$ である.

Proposition 1.1. P_∞ を k の無限素点とする. ただし, k の無限素点は対応する指数付置 v_{P_∞} が $v_{P_\infty}(T) < 0$ を満すものである. このとき,

1. k_M^+/k は P で完全分解する.

2. P_∞ 上にある k_M^+ の任意の素点は, k_M/k_M^+ で完全分岐する.

上の Proposition から, k を P_∞ で完備化した体を k_∞ とおけば, $k_M^+ = k_\infty \bigcap k_M$ となることが分かる.

次に, Dirichlet 指標と円分関数体との間の関係について述べる. モニック多項式 $M \in R$ に対して, X_M を $(R/(M))^\times$ の原始的指標からなる群とする. $\chi \in X_M$ が, $\chi|_{\mathbb{F}_q} = 1$ を満すとき real, そうでないとき, imaginary とよぶ. X_M の元で real な指標からなる群を X_M^+, imaginary からなるものを X_M^- とおく. 原始的な Dirichlet 指標全体のなす群を

$$\mathbb{D} = \bigcup_{M:monic} X_M \tag{3}$$

とおく. 一方,

$$\tilde{k} := \bigcup_M k_M \tag{4}$$

とおけば, 次の一対一対応がある.

$$\{\mathbb{D} \text{ の有限部分群 }\} \leftrightarrow \{\tilde{k}/k \text{ の } k \text{ 上有限次拡大体 }\}. \tag{5}$$

特に, X_M, X_M^+ に対応する k の拡大体は, k_M, k_M^+ である.

Theorem 1.1. *X を $\mathbb{D}$ の有限部分群とし, K を対応する部分体とする. 任意のモニック既約多項式 $P \in R$ に対して,*

$$Y := \{\chi \in X \mid \chi(P) \neq 0\}, \ \ Z := \{\chi \in X \mid \chi(P) = 1\}.$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} X/Y &\simeq \ K/k \text{ の } P \text{ における惰性群 }, \\ Y/Z &\simeq \ \text{位数 } f_P \text{ の巡回群}, \\ X/Z &\simeq \ K/k \text{ の } P \text{ における分解群} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, f_P は P の K/k における相対次数とする.

2　円分関数体の相対合同ゼータ関数

K を k 上の有限次分離拡大体とし, 合同ゼータ関数 $\zeta(s,K)$ を

$$\zeta(s,K)=\prod_{\mathcal{P}:prime}\left(1-\frac{1}{\mathcal{N}\mathcal{P}^s}\right)^{-1} \tag{6}$$

とおく. ただし, $\mathcal{N}\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}$ の剰余類体の元の個数である. 合同ゼータ関数の性質として次のことが成り立つ.

Theorem 2.1. *g を K の種数, h を K の類数とする. このとき, $2g$ 次の整数係数多項式 $P(X)$ が存在して, 次のことが成り立つ.*

1. $\zeta(s,K)=\frac{P(q^{-s})}{(1-q^{1-s})(1-q^{-s})}$.
2. $P(0)=1$, $P(1)=h$.
3. $q^gX^{2g}P(\frac{1}{qX})=P(X)$.
4. $P(X)$ の根は $|q|^{-\frac{1}{2}}$ 上にある.

$\tilde{k}$ に含まれる k の有限次拡大体 K に対して, これに対応する指標群を X_K とおく.

$$\zeta(s,\mathcal{O}_K)=\prod_{\mathcal{P}:finite}\left(1-\frac{1}{\mathcal{N}\mathcal{P}^s}\right)^{-1} \tag{7}$$

とおく. また, $\chi\in\mathbb{D}$ に対して L-関数を

$$L(s,\chi)=\prod_{P:irreducible}\left(1-\frac{\chi(P)}{N(P)^s}\right)^{-1} \tag{8}$$

とおく. このとき、$\zeta(s,\mathcal{O}_K)$ は次のように, L-関数の積で分解することができる.

Proposition 2.1.

$$\zeta(s,\mathcal{O}_K)=\prod_{\chi\in X_K}L(s,\chi). \tag{9}$$

次にモニック多項式 M に対し, k_M, k_M^+ とを考える. Theorem 2.1 から, それらの合同ゼータ関数 $\zeta(s,k_M)$, $\zeta(s,k_M^+)$ は, 整数係数多項式 $P_M(X)$, $P_M^+(X)$ を用いて次のようにかける.

$$\zeta(s,k_M)=\frac{P_M(q^{-s})}{(1-q^{1-s})(1-q^{-s})}, \tag{10}$$

$$\zeta(s,k_M^+)=\frac{P_M^+(q^{-s})}{(1-q^{1-s})(1-q^{-s})}. \tag{11}$$

このとき,

$$P_M^-(X) := \frac{P_M(X)}{P_M^+(X)} \tag{12}$$

とおけば, k_M/k_M^+ において無限素点が完全分岐することから, k_M の相対合同ゼータ関数 $\frac{\zeta(s,k_M)}{\zeta(s,k_M^+)}$ は,

$$\frac{\zeta(s,k_M)}{\zeta(s,k_M^+)} = P_M^-(q^{-s}) = \prod_{\chi \in X_M^-} L(s,\chi) \tag{13}$$

と表せる. $\chi \in X_M^-$ に関して f_χ を χ の conductor とすれば,

$$L(s,\chi) = \sum_{\substack{a:monic \\ \deg(a)<d}} \chi(a) q^{-\deg(a)\cdot s} \tag{14}$$

は複素数係数多項式となる. よって, $P_M^-(X)$ は複素数係数多項式となるが, $P_M^+(0) = 1$ であること, $P_M(X)$, $P_M^+(X)$ が整数係数多項式であることから, $P_M^-(X)$ も整数係数多項式となる. また, k_M の相対類数を h_M^- とおけば, $P_M^-(1) = h_M^-$.

3 相対合同ゼータ関数の行列式表示

このセクションでは, セクション 2 で定義した円分関数体の相対合同ゼータ関数に行列式表示を与える. そのために, いくつか記号を準備にする. モニック多項式 $M \in R$ に対して, $d := \deg M$, $N_M = \Phi(M)/(q-1)$ とおく. また, $\alpha \in (R/(M))^\times$ に対して, r_α を

$$\begin{aligned} r_\alpha &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots a_0 \quad (n = \deg r_\alpha < d) \\ r_\alpha &\equiv \alpha \mod M \end{aligned}$$

とおく. このとき,

$$\mathrm{Deg}(\alpha) = n, \quad L(\alpha) := a_n \in \mathbb{F}_q^\times$$

と定める. 次に, λ を $\mathbb{F}_q^\times$ 上の指標, $\alpha \in (R/(M))^\times$ に対して, $c^\lambda(\alpha) := \lambda^{-1}(L(\alpha))$ とおく. $\mathrm{Deg}(\alpha) < d$, $L(\alpha) = 1$ となるもの全体を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{N_M}$ で表す. このとき,

$$\begin{aligned} c_{ij}^\lambda &= c^\lambda(\alpha_i \alpha_j^{-1}) \ \ (i,j = 1,2,\cdots N_M) \\ d_{ij} &= \mathrm{Deg}(\alpha_i \alpha_j^{-1}) \ \ (i,j = 1,2,\cdots N_M) \end{aligned}$$

とおき, 行列

$$D_{M,\lambda}(X) = (c_{ij}^\lambda X^{d_{ij}})_{i,j=1,2,\cdots N_M}$$

を考える．このとき, これらの行列の積で構成できる次の行列

$$D_M^-(X) = \prod_{\lambda\neq 1} D_{M,\lambda}(X)$$

が $P_M^-(X)$ を表示するのに核なる行列である．ただし, 上の積において, λ は非自明な $\mathbb{F}_q^\times$ の指標を全体を渡る．次に,

$$J_M^-(X) := \prod_{\chi\in X_M^-}\prod_{Q|M}(1-\chi(Q)X^{\deg Q}), \tag{15}$$

を考える．$J_M^-(X)$ は, $D_M^-(X)$ と $P_M^-(X)$ との差を補正する多項式である．定義から, M がモニック既約多項式のベキとなる場合は, $J_M^-(X)=1$ となる．$J_M^-(X)$ に関しては次の Proposition が成り立つ.

Proposition 3.1.

$$J_M^-(X) = \prod_{Q|M}\frac{(1-X^{f_Q\deg Q})^{g_Q}}{(1-X^{f_Q^+\deg Q})^{g_Q^+}} \tag{16}$$

ただし, Q は M を割るモニック既約多項式を渡り, f_Q, f_Q^+ は, ぞれぞれ Q の k_M/k, k_M^+/k における相対次数, g_Q, g_Q^+ はそれぞれ Q 上にある k_M, k_M^+ の素点の個数である.

Proof. まず, k_M, k_M^+ に対応する指標群は X_M, X_M^+ であることに注意する. Q を一つ固定し,

$$Y_Q := \{\,\chi\in X_M \mid \chi(Q)\neq 0\,\},\ \ Z_Q := \{\,\chi\in X_M \mid \chi(Q)=1\,\}.$$

とおくと, Theorem1.1 から

$$\begin{aligned}\prod_{\chi\in X_M}(1-\chi(Q)X^{\deg Q}) &= \prod_{\chi\in Y_Q}\left(1-\chi(Q)X^{\deg Q}\right)\\ &= \prod_{\chi\in Y_Q/Z_Q}\prod_{\psi\in Z_Q}\left(1-\chi\psi(Q)X^{\deg Q}\right)\\ &= \Big(\prod_{\chi\in Y_Q/Z_Q}\left(1-\chi(Q)X^{\deg Q}\right)\Big)^{g_Q}\end{aligned}$$

Y_Q/Z_Q は f_Q 次の巡回群であることから,

$$\prod_{\chi\in Y_Q/Z_Q}\left(1-\chi(Q)X^{\deg Q}\right) = \left(1-X^{f_Q\deg Q}\right).$$

したがって,

$$\prod_{\chi\in X_M}\left(1-\chi(Q)X^{\deg Q}\right) = \left(1-X^{f_Q\deg Q}\right)^{g_Q}. \tag{17}$$

となる. 同様なことを, k_M^+ について行うと,

$$\prod_{\chi\in X_M^+}\left(1-\chi(Q)X^{\deg Q}\right)=\left(1-X^{f_Q^+\deg Q}\right)^{g_Q^+}. \tag{18}$$

となる. $X_M^- = X_M - X_M^+$ であることに注意すれば, 上の二つの等式から Propositon を得る. □

次の結果が今回の主定理である.

Theorem 3.1. M を次数が 2 以上のモニック多項式とする. このとき,

$$\det D_M^-(X) = P_M^-(X)J_M^-(X) \tag{19}$$

が成り立つ.

Proof. 任意の $\chi \in X_M^-$ に対して, f_χ を conductor とし, $\tilde{\chi}$ を,

$$\tilde{\chi} = \chi \circ \pi_\chi$$

によって定義する. ただし, $\pi_\chi : (R/M)^\times \to (R/(f_\chi))^\times$ は自然な写像である. このとき,

$$L(s,\tilde{\chi}) = L(s,\chi)\cdot\prod_{Q|M}\left(1-\chi(Q)q^{-s\deg Q}\right).$$

が成立する. また, λ を $\mathbb{F}_q^\times$ の非自明な指標とし, $\psi\in X_M^-$ ($\psi|_{\mathbb{F}_q^\times}=\lambda$) を固定する. このとき,

$$\psi\cdot X_M^+ = \{\chi\in X_M^- \mid \chi|_{\mathbb{F}_q^\times}=\lambda\} \tag{20}$$

となる. $\chi|_{\mathbb{F}_q^\times}=\lambda$ なる指標 $\chi\in X_M^-$ を取れば, ある $\phi\in X_M^+$ を用いて, $\chi=\psi\cdot\phi$ と表せる. このとき,

$$\begin{aligned} L(s,\tilde{\chi}) = &= \sum_{i=1}^{N_M}\tilde{\chi}(\alpha_i)q^{-\mathrm{Deg}(\alpha_i)s} \\ &= \sum_{i=1}^{N_M}\tilde{\psi}(\alpha_i)\tilde{\phi}(\alpha_i)c^\lambda(\alpha_i)q^{-\mathrm{Deg}(\alpha_i)s} \end{aligned}$$

が成り立つ. ϕ が X_M^+ 全体を渡るとき, $\tilde{\phi}$ は $(R/(M))^\times/\mathbb{F}_q^\times$ の指標全体を渡る. また, $\tilde{\psi}(\alpha)c^\lambda(\alpha)$, Deg は, $(R/(M))^\times/\mathbb{F}_q^\times$ 上の関数であり, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N$ は, その代表系である. よって, Frobenius の行列式公式から

$$\begin{aligned} \prod_{\chi|_{\mathbb{F}_q^\times}=\lambda} L(s,\tilde{\chi}) &= \det(\psi(\alpha_i\alpha_j^{-1})c_{ij}^\lambda q^{-sd_{ij}})_{i,j=1,2,\cdots N_M} \\ &= \det(c_{ij}^\lambda q^{-sd_{ij}})_{i,j=1,2,\cdots N_M} \\ &= \det D_M^\lambda(q^{-s}). \end{aligned}$$

また, X_M^- は,

$$X_M^- = \bigcup_{\lambda \neq 1} \{\chi \in X_M \mid \chi|_{\mathbb{F}_q^\times} = \lambda\}$$

と分解されることから結論を得る.

$\square$

Theorem の両辺に $X = 1$ を代入すれば, $P_M^-(1) = h_M^-$ であるから, 次の Corollary を得る.

Corollary 3.1. (Bae-Kang [1]) 定理と同じ記号において,

$$\prod_{\lambda \neq 1} \det(c_{ij}^{\lambda}) = W_M^- h_M^- \tag{21}$$

が成り立つ. ただし,

$$W_M^- = \begin{cases} \prod_{Q|M} f_Q^- & Q|M \text{ なる既約多項式に対して}, \ g_Q^- = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{22}$$

ここで,$f_Q^- = \frac{f_Q}{f_Q^+}$, $g_Q^- = \frac{g_Q}{g_Q^+}$.

4 相対合同ゼータ関数の低次の係数の計算

前のセクションで与えた相対合同ゼータ関数の行列式表示の応用として, $P_M^-(X)$ の低次の項の係数を具体的に表示する. モニック多項式 M に対して, $\det D_M^-(0) = 1$ より,

$$\det D_M^-(X) = 1 + a_1 X + a_2 X + \cdots \tag{23}$$

と表せる. このセクションでは, a_1, a_2 の値が M から具体的に計算できることを説明する.

Proposition 4.1. 次数 2 以上のモニック多項式 M に対して次のことが成り立つ.

$$(1)\ a_1 = 0 \tag{24}$$

$$(2)\ a_2 = 0 \quad (if \deg M > 2) \tag{25}$$

$$(3)\ a_2 = \frac{N_M}{2}\{(q-1)(1-C_M) + N_M - 1\} \quad (if \deg M = 2) \tag{26}$$

ただし、

$$C_M = |\{i = 1, 2, \cdots, N_M \mid L(\alpha_i^{-1}) = 1\}| \tag{27}$$

が成り立つ.

これを示すために次の線形代数からの Lemma が必要である.

Lemma 4.1. $F(X) = (f_{ij}(X))_{i,j}$ を X に変数をもつ行列. $F(X)$ が $X = X_0$ で 2 階微分可能であって, かつ正則であるとき以下のことが成り立つ.

$$\begin{aligned}
(1)\ \left.\frac{d\det F(X)}{dX}\right|_{X=X_0} &= \det F(X_0)\cdot \mathrm{Tr}\Big(F(X_0)^{-1}\frac{dF}{dX}(X_0)\Big),\\
(2)\ \left.\frac{d^2\det F(X)}{dX^2}\right|_{X=X_0} &= \det F(X_0)\cdot\Big\{\ \mathrm{Tr}\Big(F(X_0)^{-1}\frac{d^2F}{dX^2}(X_0)\Big) -\\
&\quad \mathrm{Tr}\Big(F(X_0)^{-1}\frac{dF}{dX}(X_0)F(X_0)^{-1}\frac{dF}{dX}(X_0)\Big) +\\
&\quad \mathrm{Tr}\Big(F(X_0)^{-1}\frac{dF}{dX}(X_0)\Big)^2\ \Big\}.
\end{aligned}$$

上の Lemma を用いて Proposition を証明する.

Proof. まず, λ を一つ固定する.

$$D_{M,\lambda}(X) = 1 + a_1^\lambda X + a_2^\lambda X^2 + \cdots$$

このとき, $D_{M,\lambda}(0)$ が単位行列であり, $D_{M,\lambda}(X)$ の対角成分は 1 である. また,

$$\frac{dD_{M,\lambda}}{dX}(0) = (l_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,N}$$

ただし,

$$l_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } d_{ij} = 0 \text{ or } d_{ij} > 1 \\ c_{ij}^\lambda & \text{if } d_{ij} = 1 \end{cases} \tag{28}$$

となる. よって Lemma を用いれば, $a_1(\lambda) = 0$,

$$a_2(\lambda) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big(\ \frac{dD_M^\lambda}{dX}(0)\ \Big)^2$$

を得る. $\deg > 2$ においては, $d_{ij} = 1$, $d_{ji} = 1$ という組み合わせは存在しないので, $a_2(\lambda) = 0$ という結論を得る. よって, Proposition 4.1 の (1), (2) を得る. (3) は少し計算を要する. まず,(1) から

$$a_2 = \sum_{\lambda\neq 1} a_2(\lambda)$$

となる. $\deg M = 2$ であることに注意すると,

$$l_{ij} = \begin{cases} c_{ij}^\lambda & \text{if } i \neq j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{29}$$

となることから,

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\neq 1} a_2(\lambda) &= \sum_{\lambda\neq 1}\Big(\frac{N_M}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_M}\sum_{j=1}^{N_M}\lambda^{-1}(L(\alpha_i\alpha_j^{-1})L(\alpha_j\alpha_i^{-1})\Big) \\ &= \frac{N_M(q-2)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_M}\sum_{j=1}^{N_M} e_{ij}\end{aligned}$$

となる. ただし、

$$e_{ij} = \begin{cases} q-2 & \text{if } L(\alpha_i\alpha_j^{-1})L(\alpha_j\alpha_i^{-1}) = 1 \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{30}$$

とする. 任意の i, j に関して, $\gamma_{ij} \in \mathbb{F}_q^\times$ とモニック多項式 β_{ij} を用いて, $\alpha_i\alpha_j^{-1} = \gamma_{ij}\beta_{ij}$ と表せば,

$$L(\alpha_i\alpha_j^{-1})L(\alpha_j\alpha_i^{-1}) = L(\beta_{ij}^{-1}) \tag{31}$$

となる. このとき,

$$\{\beta_{ij}\ |j = 1, 2, \cdots N_M\} = \{\alpha_j\ |j = 1, 2, \cdots N_M\} \tag{32}$$

に注意すると,

$$\sum_{j=1}^{N_M} e_{ij} = (q-1)C_M - N_M \tag{33}$$

となる. このことから結論を得る. □

5 いくつかの具体例

Example 5.1. $q = 3,\ M = T^2 + 1$ のとき, $C_M = 3$ であり,

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = T,\ \alpha_3 = T+1,\ \alpha_4 = T+2,$$

とする.

$$\begin{aligned}\det D_M^-(x) &= \begin{vmatrix} 1 & -x & x & x \\ x & 1 & -x & x \\ x & -x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 - 2x^2 + 9x^4.\end{aligned}$$

$$P_M^-(x) = 1 - 2x^2 + 9x^4$$

Example 5.2. $q = 3,\ M = T^3$ のとき.

$$
\begin{aligned}
P_M^-(X) &= \det D_M^-(x) \\
&= \begin{vmatrix}
1 & x^2 & x & -x^2 & -x & -x^2 & x^2 & -x^2 & x^2 \\
x & 1 & x^2 & x^2 & -x^2 & -x^2 & -x^2 & -x^2 & x \\
x^2 & -x & 1 & -x^2 & -x^2 & x^2 & -x^2 & -x & x^2 \\
x & x^2 & x^2 & 1 & -x^2 & x^2 & x & x^2 & x^2 \\
x^2 & x^2 & -x^2 & x & 1 & x^2 & x^2 & x & -x^2 \\
x^2 & x & x^2 & x & x^2 & 1 & x^2 & -x^2 & x^2 \\
x^2 & x^2 & x & x^2 & -x^2 & x & 1 & -x^2 & -x^2 \\
x^2 & -x^2 & x^2 & x^2 & x^2 & x^2 & x & 1 & -x \\
x^2 & -x^2 & -x^2 & -x^2 & -x & -x & -x^2 & -x^2 & 1
\end{vmatrix} \\
&= 1 - 18x^4 + 27x^6 + 81x^8 - 486x^{10} + 2187x^{14}.
\end{aligned}
$$

Example 5.3. $q = 3,\ M = T^3 + 2T^2 + 1$ のとき.

$$
\begin{aligned}
P_M^-(X) &= \det D_M^-(x) \\
&= 1 + 17x^3 + 8x^4 + 43x^5 + 88x^6 + 186x^7 + 734x^8 + \\
&\quad 154x^9 + 2023x^{10} + 4541x^{11} + 3288x^{12} + 13122x^{13} + \\
&\quad 10460x^{14} + 40989x^{15} + 53505x^{16} + 13986x^{17} + \\
&\quad 183222x^{18} + 137538x^{19} + 186624x^{20} + 290871x^{21} + \\
&\quad 183708x^{22} + 1003833x^{23} + 1594323x^{26}.
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Bae, Sunghan and Kang, Pyung-Lyun; Class numbers of cyclotomic function fields. Acta Arith. **102** (2002), no. 3, 251-259.

[2] L.Carlitz and F. R. Olson; Maillet's determinant, Proc. Amer. Soc. **6** (1955), 265-269.

[3] Galovich, Steven and Rosen, Michael; The class number of cyclotomic function fields. J. Number Theory **13** (1981), no. 3, 363–375.

[4] Hayes, D. R.; Explicit class field theory for rational function fields.Trans. Amer. Math. Soc. **189** (1974), 77-91.

[5] 堀田　良之; 可換環と体, 岩波書店 ,2006 年

[6] M. Rosen; A note on the relative class number in function fields. Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1299-1303.

[7] D.Shiomi; Determinat formula of congruence zeta functions for maximal real cyclotomic functional fields, preprint.

[8] Washington, L.C.; Introduction to Cyclotomic Fields, Springer-Verlag. New York, 1982.

Daisuke Shiomi
Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602
Japan
Mail: m05019e@math.nagoya-u.ac.jp