有限体上の単純正規交叉曲面に対する類体論の相互写像の核について

杉山　倫（名古屋大学）

2008 年 11 月 29 日

本稿では有限体上の単純正規交叉曲面に対する不分岐可換類体論の相互写像から引き起こされる写像の核について著者が最近得た結果について述べる．

この原稿を書く機会を与えて下さった塩見大輔氏に心より感謝します.

1　有限体上の多様体に対する不分岐類体論

有限体 k 上の固有な多様体 X に対する不分岐可換類体論は有限体上の一変数関数体に対する類体論の高次元化または幾何学化である．その主要な内容は X 上の 0-サイクルの有理同値類がなす Chow 群 $CH_0(X)$ から X の有限アーベル被覆を統制する基本群 $\pi_1^{ab}(X)$ への相互写像と呼ばれる標準的な準同型写像

$$\rho_X : CH_0(X) \longrightarrow \pi_1^{ab}(X)$$

の存在とその様子に集約される．この写像は閉点 x を x での Frobenius 置換に対応させる写像で，次のことが知られている：

・X が正規のとき，稠密な像をもつ [L].

・X が滑らかなとき，単射である [KS].

・ρ_X が単射でないような射影的で正規な曲面 X がある [MSA].

Remark 1.1. (1) k 上射影的で滑らかな多様体 X に対して，相互写像によって同型

$$CH_0(X)^\wedge \simeq \pi_1^{ab}(X)$$

が成り立つ [KS]．ここで，$CH_0(X)^\wedge$ は副有限完備化を表す．

(2) 上の最後の射影的正規な曲面 X の中には，任意の係数拡大に対して相互写像 ρ_X が単射にならないものがある．

また単純正規交叉曲面 X に対して，次の完全列があることが知られている：

$$H_2(\Gamma_X, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\epsilon_{X,n}} CH_0(X)/n \xrightarrow{\rho_X/n} \pi_1^{ab}(X)/n \longrightarrow H_1(\Gamma_X, \mathbb{Z}/n) \to 0.$$

ここで，Γ_X は dual graph と呼ばれる有限単体的複体である．

この完全列より，$\mathrm{Ker}(\rho_X/n)$ は単純正規交叉曲面 X の dual graph の第２ホモロジー群 $H_2(\Gamma_X, \mathbb{Z}/n)$ が統制していることがわかる．しかし，ここで注意することは，ϵ という写像がそのままでは具体的に計算することが困難であることである．

1.1 主結果

著者は以下で述べる単純正規交叉曲面の相互写像の核についての結果を得ることができた．その結果は，単純正規交叉曲面 Y で，任意の有限次拡大 F/k に対して，係数拡大した曲面 Y_F に対する写像 ρ_{Y_F}/n が単射にならない例の構成に大きな役割を果たす．このような単純正規交叉曲面が構成されたことにより，抽象的な写像であった $\epsilon_{Y,n}$ について，一般に零写像でないこと，さらに係数拡大しても零写像にならないことがわかる．

得られた結果について述べる：Y_0 を有限体 k 上の滑らかな射影的曲面とし，D を Y_0 上の単純正規交叉因子でループをなすものとする．そして，次の単純正規交叉曲面 Y を考える：

$$Y := \big(Y_0 \times_k O\big) \cup \big(Y_0 \times_k \infty\big) \cup \big(D \times_k \mathbb{P}^1\big) \quad \subset Y_0 \times_k \mathbb{P}^1.$$

ここで，$O = (0:1)$，$\infty = (1:0) \in \mathbb{P}^1$ である．

この Y に対する写像 ρ_Y/n の核について，重要な役割を果たす二つの写像が次である：

$$\begin{aligned}\delta_n &: H_2(\Gamma_Y, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow CH_0(Y)/n,\\ \alpha_n &: H_1(\Gamma_{\overline{D}}, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow \Theta/n.\end{aligned}$$

ここで，C は D の既約成分の直和を表し，

$$\Theta := \mathrm{Coker}\big(\pi_1^{ab}(\overline{C}) \longrightarrow \pi_1^{ab}(\overline{Y_0})\big)$$

である．

このとき，次が成り立つことが示される．

Theorem 1.2. Y_0, D, Y は上記の通りとし，次の二つを仮定する：

$$(*) D \text{ の特異点はすべて } k\text{-有理点である．}$$
$$(**) G_k \text{ は } \Theta/n \text{ に自明に作用する．}$$

このとき，次の同型がある：

$$\mathrm{Ker}(\rho_Y/n) \simeq \mathrm{Im}(\alpha_n).$$

この証明には étale homology 理論や cohomological Hasse 原理などを用いる．その鍵となるのは，曲面 Y 以外にもう一つ相性のよい曲面とそれらの閉部分スキームを用いることである．これにより上記の写像 δ_n が定義され，写像 δ_n はその像が $\mathrm{Ker}(\rho_Y/n)$ と一致することも示される．最後に $H_2(\Gamma_Y, \mathbb{Z}/n)$ の構造についての補題を用いて，$\mathrm{Im}(\delta_n)$ と $\mathrm{Im}(\alpha_n)$ が一致することを示し証明が完成する．

この主張で注目する点は，$\mathrm{Im}(\alpha_n)$ は係数拡大と無関係な群であることである．よって，$\mathrm{Im}(\alpha_n)$ が自明でなければ，任意の係数拡大 F/k に対して写像 ρ_{Y_F}/n は単射ではないことが従う．そして，$\mathrm{Im}(\alpha_n)$ が自明でない例を構成することができる．

以下，2 節で Theorem 1.2 の証明のための準備をし，3 節で証明する．3.4 節で単純正規交叉曲面 Y で，任意の有限次拡大 F/k に対して，係数拡大した曲面 Y_F に対する写像 ρ_{Y_F}/n が単射にならない例を与える．

1.2 記号と定義

ここでは，いくつかの記号と定義について述べる．

(0.1) アーベル群 A と正整数 n に対して，A/n は写像 $A \xrightarrow{\times n} A$ の余核，A_{tors} は A のねじれ部分群，$A^{\oplus n}$ は A の n 個の直和を表す．

(0.2) 体 k に対して，$k^\times$ はその乗法群，k^{sep} は固定いる分離閉包を表す．G_k は絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$，G_k^{ab} は G_k の最大アーベル商群を表す．

連結スキーム X に対して，$\pi_1^{ab}(X)$ は étale 基本群の最大 Abel 商群を表す．$X = Spec(k)$ に対しては $\pi_1^{ab}(X) = G_k^{ab}$ である．さらに，k-スキーム X に対して，$\mathrm{Ker}\big(\pi_1^{ab}(X) \longrightarrow G_k^{ab}\big)$ を $\pi_1^{geo}(X)$ と表す．

(0.3) k を体とし，X を k-スキームとする．このとき，体の拡大 F/k に対して，$X \times_{Spec(k)} Spec(F)$ を X_F と表す．特に，分離閉包 k^{sep}/k に対しては $X_{k^{sep}}$ を $\overline{X}$ と表す．

また，$X(F)$ で X 上の F-有理点全体の集合を表す．

(0.4) スキーム X と整数 $q \geq 0$ に対して，

$$X^q : X \text{ 上の余次元 } q \text{ の点全体の集合}$$

とする．X が体上有限型であるとき，

$$X_q : \dim(\overline{\{x\}}) = q \text{ なる点 } x \in X \text{ 全体の集合}$$

とする．$d := \dim(X)$ とすると，$X_q = X^{d-q}$ である．

$x \in X$ に対して，$\kappa(x)$ でその剰余類体を表す．整スキーム X に対して，$k(X)$ でその関数体を表す．

体 k 上有限型で純 d 次元のスキーム X に対して，

$$CH_0(X) := \mathrm{Coker}\Big(\partial_1 : \bigoplus_{x \in X^{d-1}} \kappa(x)^\times \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^d} \mathbb{Z}\Big)$$

と定義する．ここで，∂_1 は離散付値である．

また，X が k 上固有であるとき，次数写像

$$CH_0(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

があり，その核を $A_0(X)$ と表す．

(0.5) X を体 k 上有限型の同次元的なスキームとする．X が k 上 d 次元の**正規交叉多様体**であるとは，k 上分離的で，いたるところ étale 局所的に次のアフィンスキームと同型であるときをいう：

$$Spec\big(k[T_0, \ldots, T_d]/(T_0 \ldots T_r)\big) \quad (0 \leq r \leq d).$$

また，正規交叉多様体が**単純**であるとは，任意の既約成分が k 上滑らかであるときをいう．

体 k 上の d 次元の単純正規交叉多様体 X に対して，$\{X_i\}_{i\in I}$ を X の既約成分全体の集合とする．このとき，正整数 r に対して

$$X^{(r)} := \coprod_{\{i_1,i_2,\ldots,i_r\}\subset I} X_{i_1} \times_X X_{i_2} \times_X \cdots \times_X X_{i_r}$$

と定義する．

(0.6) Milnor K-群と étale cohomology 群をつなぐ Galois symbol についての主張である次の Bloch-Kato 予想がある．

Conjecture 1.3 (Bloch-Kato [BK])**.** k を体とする．i を非負整数とする．このとき，k の標数 $ch(k)$ と互いに素な正整数 n に対して，*Galois symbol*

$$h^i_{k,n} : K_i(k)/n \longrightarrow H^i(k, \mathbb{Z}/n(i))$$

は全単射である．

2　証明の準備

ここでは，Bloch-Ogus-Kato 複体や étale homology 理論について述べ，Theorem 1.2 の証明に必要となる定理・補題を準備する．

以下，k は有限体とし，特に指定しない限り n は k の標数と互いに素な自然数とする．

2.1　Bloch-Ogus-Kato 複体

有限体上の固有かつ滑らかな曲面に対する cohomological Hasse 原理と呼ばれる定理を述べるために，Bloch-Ogus-Kato 複体を復習する．この複体はあとで述べる étale homology との関係も深い重要な複体である．

excellent スキーム X と任意の整数 $r, s > 0$，X 上で可逆な整数 $n > 0$ に対して，ホモロジー的な複体 $C^{r,s}(X,n)$:

$$\cdots \to \bigoplus_{x\in X_i} H^{r+i}(\kappa(x), \mathbb{Z}/n(s+i)) \to \bigoplus_{x\in X_{i-1}} H^{r+i-1}(\kappa(x), \mathbb{Z}/n(s+i-1))$$
$$\to \cdots \to \bigoplus_{x\in X_1} H^{r+1}(\kappa(x), \mathbb{Z}/n(s+1)) \to \bigoplus_{x\in X_0} H^{r}(\kappa(x), \mathbb{Z}/n(s))$$

が定義される [K2].

Remark 2.1. 複体の定義で整数 $n > 0$ を X 上可逆なものといるが，これは用いる étale 層として扱いやすいものに限るためであり，de Rham-Witt 層の *log* 部分を用いることにより，可逆でない n に対しても定義することができる．

Definition 2.2. X の $\mathbb{Z}/n$ を係数にもつ *Kato homology* を

$$H_i^{r,s}(X,n) := H_i(C^{r,s}(X,n))$$

と定義する．

この複体に関する予想はいくつかあるが，ここでは次の k 上の多様体に対するものを挙げる：

Conjecture 2.3 (Kato [K2]). X を k 上の連結で滑らかな射影的多様体とし，
$H_i^K(X,n) := H_i^{1,0}(X,n)$ とおく．このとき，

$$H_i^K(X,n) \simeq \begin{cases} 0 & i \neq 0 \text{ のとき}, \\ \mathbb{Z}/n & i = 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

$\dim(X) = 1$ のときの予想は古典的な結果であって，代数体 K に対する Brauer 群についての完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(K) \longrightarrow \bigoplus_v \mathrm{Br}(K_v) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

の有限体上の一変数関数体に対する類似である．

次の定理が cohomological Hasse 原理と呼ばれるもので，これは曲面に対して予想 2.3 が正しいことを示している．Colliot–Thélène-Sansuc-Soulé [CTSS] が k の標数と n が素な場合を証明し，加藤 [K2] が標数冪のときを証明した．

Theorem 2.4 (Colliot-Thélène-Sansuc-Soulé/Kato). X を k 上固有かつ滑らかで既約な曲面とし，n を自然数とする．このとき，*Bloch-Ogus-Kato* 複体：

$$0 \to H^3(k(X), \mathbb{Z}/n(2)) \to \bigoplus_{x \in X_1} H^2(\kappa(x), \mathbb{Z}/n(1)) \to \bigoplus_{x \in X_0} H^1(\kappa(x), \mathbb{Z}/n)$$

は完全であり，最後の写像の余核は $\mathbb{Z}/n$ と同型である．

加藤予想（予想2.3）については，素数ℓに対して係数を$\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$にした予想に対して次が知られている．$\mathrm{Char}(k) = p$と素な$\ell$のときをColliot-Thélène[CT]が証明し，p冪のときを諏訪[Sw]が証明した．

Theorem 2.5 (Colliot-Thélène/Suwa)**.** 任意の素数ℓに対して，$\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$係数にした予想2.3は次数$i \leq 3$で正しい．

$\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$係数での加藤予想と$\mathbb{Z}/\ell^\nu$係数での加藤予想との関係にはBloch-Kato予想（予想1.3）が関係している．$\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$係数で加藤予想が次数$i \leq m$で成立し，かつBloch-Kato予想が次数$i \leq m$で成立するならば，$\mathbb{Z}/\ell^\nu$係数で加藤予想が次数$i \leq m$で成立する．

次に，単純正規交叉多様体に対して定まる単体的複体を定義する．

Definition 2.6. ([JS, MSA]) Xをk上d次元の単純正規交叉多様体とする．このとき，**双対グラフ**と呼ばれる単体的複体Γ_Xを次のように定義する：

$\{X_i\}_{i\in I}$をXの既約成分全体の集合とし，添字集合Iに順序を入れ固定する．r-単体の集合$\mathfrak{S}_r$は$X^{(r)}$の既約成分であり，向き付けはIの順序からrについて帰納的に定める．

この双対グラフのhomology群とKato homology群の間には次の関係が成り立つことが知られている．

Theorem 2.7. (Jannsen-Saito [JS, Theorem 3.9]) Xをk上固有な純d次元の単純正規交叉多様体とする．ℓを素数，νを自然数とする．このとき，標準的な写像

$$\gamma_a : H_a^K(X, \ell^\nu) \longrightarrow H_a(\Gamma_X, \mathbb{Z}/\ell^\nu)$$

がある．さらに，加藤予想（予想2.3）が$i \leq m$で成り立つとき，この写像は任意の$a \leq m$に対して同型である．

2.2 有限体上の単純正規交叉多様体について

ここでは，有限体上の多様体に対する類体論の相互写像を構成を復習し，単純正規交叉多様体に関する補題をいくつか準備する．

X を k 上固有な多様体とする．このとき，$x \in X_0$ に対して，$\kappa(x)$ は有限体であり，有限体に対する類体論の相互写像

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{Gal}(\kappa(x)^{ab}/\kappa(x)) \simeq \pi_1^{ab}(x)$$

がある．これと $\pi_1^{ab}(x) \longrightarrow \pi_1^{ab}(X)$ とを合成し，和を考えることで

$$\tilde{\rho_X} : \bigoplus_{x \in Y_0} \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1^{ab}(X)$$

が得られる．そして，次の補題により，相互写像

$$\rho_X : CH_0(X) \longrightarrow \pi_1^{ab}(X)$$

が得られる．

Lemma 2.8. $\tilde{\rho_X}$ は $\mathrm{Im}\big(\partial_1 : \bigoplus_{x \in X_1} \kappa(x)^\times \longrightarrow \bigoplus_{x \in X_0} \mathbb{Z}\big)$ 上で自明である．

Remark 2.9. 相互写像と Chow 群の次数写像 deg は次の図式が可換になるという関係をもっている：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_0(X) & \longrightarrow & CH_0(X) & \xrightarrow{\deg} & \mathbb{Z} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_X} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \pi_1^{geo}(X) & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(X) & \longrightarrow & G_k^{ab} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

次に単純正規交叉曲面（または曲線）に対して，相互写像から n に対して引き起こされる写像

$$\rho_X/n : CH_0(X)/n \longrightarrow \pi_1^{ab}(X)/n$$

の核と余核についての補題を準備する．

Lemma 2.10. X を k 上の単純正規交叉多様体とし，$\dim \leq 2$ とする．$X(k) \neq \emptyset$ のとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{Coker}\big(A_0(X)/n \longrightarrow \pi_1^{geo}(X)/n\big) \simeq H_1(\Gamma_X, \mathbb{Z}/n), \tag{2.1}$$

$$\mathrm{Ker}\big(A_0(X)/n \longrightarrow \pi_1^{geo}(X)/n\big) \simeq \mathrm{Ker}\big(\rho_X/n\big). \tag{2.2}$$

Proof. 次の完全可換図式に蛇の補題を適用すればよい：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_0(X)/n & \longrightarrow & CH_0(X)/n & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_X/n} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \\ 0 & \longrightarrow & \pi_1^{geo}(X)/n & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(X)/n & \longrightarrow & G_k^{ab}/n & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & H_1(\Gamma_X, \mathbb{Z}/n). & & & & \end{array}$$

□

次の Lemma は写像 α_n に対して重要な役割を果たす．その証明は [MSA, Lemma 1.2.(2), Lemma 1.3, Corollary 2.8] 参照.

Lemma 2.11 (Matsumi-Sato-Asakura [MSA])**.** D を k 上の単純正規交叉曲線とし，C は D の既約成分の直和とする.
(1) D の特異点がすべて k-有理点であるとき，次が成り立つ.
  (a) $H_1(\Gamma_{\overline{D}}, \mathbb{Z}/n) \simeq H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}/n)$
  (b) $A_0(C)/n \longrightarrow A_0(D)/n$ は全射である.
(2) 次の有限左 G_k-加群の完全列がある：

$$0 \longrightarrow \pi_1^{ab}(\overline{C})/n \longrightarrow \pi_1^{ab}(\overline{D})/n \longrightarrow H_1(\Gamma_{\overline{D}}, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow 0.$$

2.3 Étale homology 理論

Definition 2.12. k 上有限型で分離的なスキーム X と整数 $n > 0$ に対して，$\mathbb{Z}/n$ を係数にもつ étale homology を

$$H_i^{et}(X, \mathbb{Z}/n) := \mathrm{Hom}\big(H_c^i(X\mathbb{Z}/n), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)$$

と定義する．これは k 上有限型で分離的なスキーム X と固有 k-射のカテゴリー上の homology 理論となり，niveau スペクトル系列

$$E_{p,q}^1 = \bigoplus_{x \in X_p} H_{p+q}(x, \mathbb{Z}/n) \Longrightarrow H_{p+q}(X, \mathbb{Z}/n)$$

がある．ここで，$x \in X$ に対して

$$H_i(x, \mathbb{Z}/n) := \varinjlim H_i(U, \mathbb{Z}/n)$$

であり，lim は $\overline{\{x\}}$ で開であるような空でない集合 U 上でとる.

この étale homology 理論は Poincáre 双対をみたすことが示され，上のスペクトル系列から次の命題が得られる．

Proposition 2.13. (Matsumi-Sato-Asakura [MSA, Proposition 2.4]) k-多様体 $X(\dim \leq 2)$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，スペクトル系列

$$E^1_{p,q}(X,n) := \bigoplus_{x \in X_p} H^{p-q+1}(\kappa(x), \mathbb{Z}/n(p)) \Longrightarrow H_{p+q}(X, \mathbb{Z}/n)$$

がある．$p<0$ または $q<0$ ならば $E^1_{p,q}=0$ である．さらに E^1-*terms* は *Bloch-Ogus-Kato* 複体である．

以下，$E^1_{p,q}(X,n) =: E^1_{p,q}(X)$ と n を省略して書く．

3 Theorem 1.2 の証明

ここでは，準備した定理・補題を用いて写像 δ_n，α_n を構成し，それを用いて Theorem 1.2 を証明する．最後に，有限体上の単純正規交叉曲面 Y で写像 ρ_Y/n が係数拡大しても単射にならない例を具体的に与える．

3.1 写像 δ_n の構成

Proposition 3.1. $D(k) \neq \emptyset$ を仮定する．このとき，写像

$$\delta_n : H_2(\Gamma_Y, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow CH_0(Y)/n$$

で，$\mathrm{Im}(\delta_n) = \mathrm{Ker}(\rho_Y/n)$ となるものが存在する．

この Proposition の証明には次の二つの Lemma を必要とする．

Lemma 3.2. 次の完全列がある：

$$0 \longrightarrow H_2(\Gamma_Y, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}/n)^{\oplus 2} \longrightarrow H_1(\Gamma_{D\times\mathbb{P}^1}, \mathbb{Z}/n).$$

Lemma 3.3. $D(k) \neq \emptyset$ のとき，次の二つの完全列がある：

$$(1)\ A_0(D)/n^{\oplus 2} \longrightarrow A_0(Y_0)/n^{\oplus 2} \oplus A_0(D\times\mathbb{P}^1)/n \longrightarrow A_0(Y)/n \longrightarrow 0, \tag{3.1}$$

$$(2)\ \pi_1^{geo}(D)/n^{\oplus 2} \longrightarrow \pi_1^{geo}(Y_0)/n^{\oplus 2} \oplus \pi_1^{geo}(D\times\mathbb{P}^1)/n \longrightarrow \pi_1^{geo}(Y)/n. \tag{3.2}$$

この二つの Lemma を認めて Proposition 3.1 を証明する．

Proof of Propositon 3.1. Lemma 2.10, 3.3 より，完全可換図式

$$
\begin{tikzcd}
A_0(D)/n^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d] & A_0(Y_0)/n^{\oplus 2} \oplus A_0(D \times \mathbb{P}^1)/n \arrow[r] \arrow[d] & A_0(Y) \to 0 \arrow[d, "\tau_Y/n"] \\
\pi_1^{geo}(D)/n^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1^{geo}(Y_0)/n^{\oplus 2} \oplus \pi_1^{geo}(D \times \mathbb{P}^1)/n \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1^{geo}(Y)/n \\
H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}/n)^{\oplus 2} \arrow[r] & H_1(\Gamma_{D \times_k \mathbb{P}^1}, \mathbb{Z}/n). &
\end{tikzcd}
\tag{3.3}
$$

を得る．この図式と Lemma 3.2 より全射準同型写像

$$H_2(\Gamma_Y, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow \mathrm{Ker}\big(\tau_Y/n\big)$$

を得る．これにより，写像

$$\delta_n : H_2(\Gamma_Y, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow \mathrm{Ker}\big(\tau_Y/n\big) \hookrightarrow A_0(Y)/n \hookrightarrow CH_0(Y)/n$$

が得られ，Lemma 2.10 に注意すると，

$$\mathrm{Im}(\delta_n) = \mathrm{Ker}(\rho_Y/n)$$

が成り立つ． □

Remark 3.4. Proposition 3.1 では $D(k) \neq \emptyset$ を仮定して，像が $\mathrm{Ker}(\rho_Y/n)$ となるものを構成している．それは次に構成する写像 α_n との関係がよいからであり，$D(k) \neq \emptyset$ という仮定は本質的ではない．実際，以下で得られる完全可換図式 (3.7), (3.8) より，像が $\mathrm{Ker}(\rho_Y/n)$ となる写像

$$H_2(\Gamma_Y, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow CH_0(Y)/n$$

が構成できる．

Lemma 3.2, 3.3 を証明するために，次のような曲面を考える：

$$S := \big(Y_0 \times_k O\big) \sqcup \big(Y_0 \times_k \infty\big) \sqcup \big(D \times_k \mathbb{P}^1\big).$$

さらに次の二つの閉部分スキームを考える：

$$\begin{aligned} Z &:= \big(Y_0 \times_k O\big) \cup \big(Y_0 \times_k \infty\big) \subset Y, \\ Z' &:= \big(Y_0 \times_k O\big) \sqcup \big(Y_0 \times_k \infty\big) \sqcup \big(D \times_k \{O, \infty\}\big) \subset S. \end{aligned}$$

このとき，

$$Y \backslash Z \cong S \backslash Z' \tag{3.4}$$

が成り立ち，これを U とおく．

Proposition 2.13 と (3.4) より，固定した q に対して複体の完全列が二つ得られる：

$$0 \longrightarrow E^1_{*,q}(Z) \longrightarrow E^1_{*,q}(Y) \longrightarrow E^1_{*,q}(U) \longrightarrow 0, \tag{3.5}$$

$$0 \longrightarrow E^1_{*,q}(Z') \longrightarrow E^1_{*,q}(S) \longrightarrow E^1_{*,q}(U) \longrightarrow 0. \tag{3.6}$$

Proof of Lemma 3.2. まず $q = 0$ に対する列 (3.5) から完全列

$$0 \to E^2_{2,0}(Z) \longrightarrow E^2_{2,0}(Y) \longrightarrow E^2_{2,0}(U) \longrightarrow E^2_{1,0}(Z) \to \cdots$$

が得られる．ここで，Theorem 2.4, 2.7 より

$$\begin{aligned} E^2_{2,0}(Z) &= E^2_{1,0}(Z) = 0 \\ E^2_{2,0}(Y) &\simeq H_2(\Gamma_Y, \mathbb{Z}/n) \end{aligned}$$

に注意すると，

$$H_2(\Gamma_Y, \mathbb{Z}/n) \simeq E^2_{2,0}(U)$$

を得る．

次に $q = 0$ に対する列 (3.6) から完全列

$$0 \to E^2_{2,0}(Z') \longrightarrow E^2_{2,0}(S) \longrightarrow E^2_{2,0}(U) \longrightarrow E^2_{1,0}(Z') \longrightarrow E^2_{1,0}(S) \to \cdots$$

が得られる．Theorem 2.4, 2.7 より

$$E^2_{i,0}(Z') \simeq \begin{cases} 0 & i = 2 \\ E^2_{1,0}(D \times \{O, \infty\}) \simeq H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}/n)^{\oplus 2} & i = 1, \end{cases}$$

$$E^2_{i,0}(S) \simeq \begin{cases} 0 & i = 2 \\ E^2_{1,0}(D \times \mathbb{P}^1) \simeq H_1(\Gamma_{D \times \mathbb{P}^1}, \mathbb{Z}/n) & i = 1 \end{cases}$$

であるから，完全列

$$0 \to E^2_{2,0}(U) \longrightarrow H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}/n)^{\oplus 2} \longrightarrow H_1(\Gamma_{D\times\mathbb{P}^1}, \mathbb{Z}/n) \to \cdots$$

を得る．以上をまとめれば，求める完全列が得られる． $\square$

Proof of Lemma 3.3. まず次の同型が成り立つ：

$$\begin{aligned} &E^2_{0,1}(Z) \simeq CH_0(Y_0)/n^{\oplus 2}, && E^2_{0,1}(Y) \simeq CH_0(Y)/n, \\ &E^2_{0,1}(Z') \simeq CH_0(Y_0)/n^{\oplus 2} \oplus CH_0(D)/n^{\oplus 2}, && E^2_{0,1}(S) \simeq CH_0(S)/n. \end{aligned}$$

これに注意すると，$q = 1$ に対して列 (3.5), (3.6) から得られる完全列を組み合わせることにより，次の完全可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
 & E^2_{1,1}(U) \arrow[d] \arrow[r, equal] & E^2_{1,1}(U) \arrow[d] & \\
CH_0(D)/n^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & CH_0(Y_0)/n^{\oplus 2} \oplus CH_0(D)/n^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d] & CH_0(Y_0)/n^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
CH_0(D)/n^{\oplus 2} \arrow[r] & CH_0(S)/n \arrow[r] \arrow[d] & CH_0(Y)/n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & E^2_{0,1}(U) \arrow[r, equal] & E^2_{0,1}(U). &
\end{tikzcd} \tag{3.7}$$

一方，次の同型が成り立つ：

$$\begin{aligned} &H_1(Z, \mathbb{Z}/n) \simeq \pi_1^{ab}(Y_0)/n^{\oplus 2}, && H_1(Y, \mathbb{Z}/n) \simeq \pi_1^{ab}(Y)/n, \\ &H_1(Z', \mathbb{Z}/n) \simeq \pi_1^{ab}(Y_0)/n^{\oplus 2} \oplus \pi_1^{ab}(D)/n^{\oplus 2}, && H_1(S, \mathbb{Z}/n) \simeq \pi_1^{ab}(S)/n. \end{aligned}$$

この同型に注意すると，étale homology 群の局所化列を考えることに

より，次の完全可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_2(U,\mathbb{Z}/n) & = & H_2(U,\mathbb{Z}/n) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\pi_1^{ab}(D)/n^{\oplus 2} & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(Y_0)/n^{\oplus 2}\oplus\pi_1^{ab}(D)/n^{\oplus 2} & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(Y_0)/n^{\oplus 2} & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\pi_1^{ab}(D)/n^{\oplus 2} & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(S)/n & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(Y)/n & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H_1(U,\mathbb{Z}/n) & = & H_1(U,\mathbb{Z}/n). & &
\end{array} \tag{3.8}$$

仮定 $D(k)\neq\emptyset$ より，

$$Y(k)\neq\emptyset\ ,\ S(k)\neq\emptyset\ ,\ D\times\mathbb{P}^1(k)\neq\emptyset$$

となり，各次数写像 $\deg : CH_0(-)\longrightarrow\mathbb{Z}$ は全射である．そして図式 (3.7) に注意し，次の可換図式を考える：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & CH_0(D)/n^{\oplus 2} & \longrightarrow & CH_0(S)/n & \longrightarrow & CH_0(Y)/n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\deg} & & \downarrow{\scriptstyle\deg} & & \downarrow{\scriptstyle\deg} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n^{\oplus 2} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n^{\oplus 3} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

これに蛇の補題を適用すると，完全列 (3.1) が得られる．同様に図式 (3.8) に注意すると，完全可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \pi_1^{ab}(D)/n^{\oplus 2} & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(S)/n & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(Y)/n & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G_k^{ab}/n^{\oplus 2} & \longrightarrow & G_k^{ab}/n^{\oplus 3} & \longrightarrow & G_k^{ab}/n & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

が得られ，これより完全列 (3.2) が得られる． □

3.2 写像 α_n の構成

準同型写像

$$\alpha_n : H_1(\Gamma_{\overline{D}},\mathbb{Z}/n)\longrightarrow\Theta/n$$

は，Lemma 2.11(2) から得られる完全可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(\overline{C})/n & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(\overline{D})/n & \longrightarrow & H_1(\Gamma_{\overline{D}}, \mathbb{Z}/n) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(\overline{Y_0})/n & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \pi_1^{ab}(\overline{Y_0})/n & \longrightarrow & 0 & &
\end{array}$$

から得られる．ここで，$\Theta := \mathrm{Coker}\big(\pi_1^{ab}(\overline{C}) \to \pi_1^{ab}(\overline{Y_0})\big)$ である．

今，次の状況を考える：

$$(**)\ G_k \text{ は } \Theta/n \text{ に自明に作用する．}$$

このとき，C と Y_0 に対する類体論より，

$$\begin{aligned}
\Theta/n = \big(\Theta/n\big)_{G_k} &\simeq \mathrm{Coker}\big(\pi_1^{geo}(C)/n \longrightarrow \pi_1^{geo}(Y_0)/n\big) \\
&\simeq \mathrm{Coker}\big(A_0(C)/n \longrightarrow A_0(Y_0)/n\big)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，Theorem 1.2 の仮定 $(*)$，$(**)$ のもとで α_n は，Lemma 2.11(1) より，

$$H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow \mathrm{Coker}\big(A_0(D)/n \to A_0(Y_0)/n\big)$$

である．

3.3 証明の完成

Lemma 3.5. 次が成り立つ：

$$H_2(\Gamma_Y, \mathbb{Z}/n) = \{(a, -a) \mid a \in H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}/n)\}.$$

Proof. Γ_D と $\Gamma_{D\times\mathbb{P}^1}$ はホモトピックであることから，

$$H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}/n) \simeq H_1(\Gamma_{D\times\mathbb{P}^1}, \mathbb{Z}/n)$$

が成り立つ．よって，Lemma 3.2 に注意すると，

$$\{(a, -a) \mid a \in H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}/n)\} = H_2(\Gamma_Y, \mathbb{Z}/n)$$

を得る． □

この $H_2(\Gamma_Y, \mathbb{Z}/n)$ の構造から，$\mathrm{Im}(\delta_n)$ には $D\times\mathbb{P}^1$ の部分は影響しな位ことがわかる．これに注意すると，α_n の構成の仕方と写像,

$$\beta : \mathrm{Coker}\big(A_0(D)/n^{\oplus 2} \to A_0(Y_0)/n^{\oplus 2} \bigoplus A_0(D\times\mathbb{P}^1)/n\big) \longrightarrow A_0(Y)/n$$

が単射であることから,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\delta_n) &= \beta\big(\{(b,-b) \mid b\in \mathrm{Im}\big(\alpha_n\big)\}\big)\\ &\simeq \mathrm{Im}\big(\alpha_n\big)\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．従って，Prop3.1 より,

$$\mathrm{Im}\big(\alpha_n\big) \simeq \mathrm{Ker}\big(\rho_Y/n\big)$$

が成り立つ.

以上で Theorem 1.2 が示された.

3.4 応用

k 上の単純正規交叉曲面 Y で，写像 ρ_Y/n が係数拡大に関係なく単射でないものを紹介する.

Example 3.6. $n>1$ を $(n, 6\cdot ch(k))=1$ となる自然数とし，k は 1 の原始 n 乗根 ζ を含む有限体とする．このとき，Fermat 曲面

$$V : T_0^n + T_1^n + T_2^n + T_3^n = 0 \ \subset \mathbb{P}_k^3$$

と，V 上の自由な作用

$$\sigma : \big(T_0 : T_1 : T_2 : T_3\big) \longmapsto \big(T_0 : \zeta T_1 : \zeta^2 T_2 : \zeta^3 T_3\big)$$

を考える．このとき，$Y_0 := V/<\sigma>$ は滑らかな射影的曲面である．

そして，V 上の $2n$ 本の直線を考える：$j=1,\ldots,n-1$

$$\begin{aligned}\ell_1 &: T_0 + T_1 = T_2 + T_3 = 0,\\ \ell_2 &: T_0 + T_1 = T_2 + \zeta T_3 = 0,\\ {\ell_1}^{\sigma^j} &: T_0 + \zeta^j T_1 = T_2 + \zeta^j T_3 = 0,\\ {\ell_2}^{\sigma^j} &: T_0 + \zeta^j T_1 = T_2 + \zeta^{j+1} T_3 = 0.\end{aligned}$$

このとき，

$$\ell = \ell_1 \cup \ell_2 \cup {\ell_1}^{\sigma^1} \cup \cdots \cup {\ell_1}^{\sigma^{n-1}} \cup {\ell_2}^{\sigma^{n-1}}$$

は V 上の連結単純正規交叉因子であり，ループをなす．また，ℓ は σ の作用で安定である．

$\varphi : V \longrightarrow Y_0$ とし，$C_i = \varphi_*(\ell_i)(i = 1, 2)$ とする．このとき，C_i は Y_0 上の非特異有理曲線であり，$D = C_1 \cup C_2$ は Y_0 上の単純正規交叉因子である．また，それはループをなし，特異点はすべて k-有理点である．この Y_0, D に対して

$$Y := \big(Y_0 \times_k O\big) \cup \big(Y_0 \times_k \infty\big) \cup \big(D \times_k \mathbb{P}^1\big)$$

とする．

$\overline{V}$ は $\mathbb{P}^3_{k^{sep}}$ 内の超曲面なので，$\pi_1^{ab}(\overline{V}) = 0$ である．よって，

$$\pi_1^{ab}(\overline{Y_0}) \simeq < \sigma > \simeq \mathbb{Z}/n$$

である．また，D の既約成分は有理曲線であるから，$\pi_1^{ab}(\overline{C}) = 0$ となる．従って，G_k は Θ/n に自明に作用することがわかる．

一方，自然な射 $V \longrightarrow Y_0$ は完全分解被覆 $\ell \longrightarrow D$ を引き起こすことから，写像

$$H_1(\Gamma_D, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow \pi_1^{ab}(\overline{Y_0})$$

は全射である．従って，

$$\mathrm{Im}(\alpha_n) \simeq \mathbb{Z}/n$$

となり，Theorem 1.2 より Y は任意の係数拡大 F/k に対して写像 ρ_{Y_F}/n が単射にならないような曲面ということがわかる．

参考文献

[BK] S.Bloch, K.Kato, p-adic étale cohomology, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **63** (1986) 107-152.

[CT] J.-L.Colliot-Thélène, On the reciprocity sequence in the higher class field theory of function fields, Algebraic K-Theory and Algebraic Topology (Lake Louise, AB,1991), (J.F.Jardine and V.P.Snaith, ed), 35-55, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[CTSS] J.-L.Colliot-Thélène, J.-J.Sansuc and C.Soulé, Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, Duke Math. J. **50** (1983) 763-801.

[JS] U.Jannsen, S.Saito, Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory over local fields, Documenta Math, (Extra Volume : Kazuya Kato's Fiftieth Birthday) (2003) 479-538.

[K2] K.Kato, A Hasse principle for two dimensional global fields, J.Reine Angew. Math. **366** (1986) 142-183.

[KS] K.Kato, S.Saito, Unramified class field thoery for arithmetic surfaces, Ann.of Math. **118** (1983) 241-274.

[L] S.Lang, Unramified class field theory over function fields in several varieties, Ann.of Math. **64** (1956) 285-325.

[MSA] K.Matsumi, K.Sato, M.Asakura, On the Kernel of the Reciprocity Map of Normal Surfaces over Finite Fields, K-Theory **18** (1999) 203-234.

[Sw] N.Suwa, A Note on Gersten's Conjecture for Logarithmic Hodge-Witt Sheaves, K-Theory **9** (1995) 245-271.

Rin Sugiyama
Graduate School of Mathmatics
Nagoya University
Chikusa-ku,Nagoya 464-8602
Japan
Mail : m07030z@math.nagoya-u.ac.jp