粒子と共鳴準位の混合効果について

益川敏英

名古屋大学 物理教室

1967. 2.

§1 序

近年 素粒子物理学において多くの発展がなされた。SU(6)-理論[1]は質量の軽い重粒子 Octet Baryon と Decuplet Baryon をスピンをも考慮に入れて"56-plet"に体系化し，分類することに成功した。このことはこれ等の重粒子が urbaryon からおもにスピン，ユニタリースピンによらない力により構成されていることを示唆している。

一方において重粒子の分析等からも明らかなように，Yukawa 相互作用が中間子と重粒子の間に存在しており，この Yukawa 相互作用が SU(6)-対称性と相容れないものであることは，SU(6)-対称性の理論が提案されると同時に多くの人々により指摘された。

この問題を解明するために Ohnuki と Toyoda[2] は複合模型の立場にたって，次のように考えた。すなわち"urbaryon の間に働く相互作用ハミルトニヤンは次のように二つの部分に分けることが出来る。

$$H^{int} = H_{I}^{int} + H_{II}^{int}$$

ここで H_I は SU(6)-不変な部分であり，H_{II} はそうでない部分を表わしている。Yukawa 相互作用は SU(6) 対称性を破る部分 H_{II} から導びかれると考えられよう。この故にまず最初に H_I により urbaryon から核子が構成され，質量スペクトルが決められる。そしてそれ等が H_{II} により中間子の雲を着る。このとき H_{II} によって重粒子の質量スペクトラムは多少修正されても質的な変化はもたらされないと考える"

しかしながら Yukawa 相互作用は十分に弱いとは考えられない。実際に Chew[3] は static meson theory を使って，パイオン(π)と核子(N)の散乱においてアイソスピン $I=\frac{3}{2}$，全角運動量 $J=\frac{3}{2}$ の状態で位相のずれが $\frac{\pi}{2}$ を切ることが出来ることを示した。同じ結果が static[4] な又は相対論的な[5] 分散式を使った理論で得られている。この場合 π-N 散乱における (3,3) 状態に二つの共鳴状態が期待出来るかもしれない。一つは H_I から作られ，もう一つは中間子-核子間

相互作用から作られる。ここで前者をタイプⅠと名づけ，後者をタイプⅡとする。もしタイプⅠの共鳴状態がYukawa相互作用を通じて他の重粒子や中間子と作用し合ったならば，タイプⅠとタイプⅡの共鳴状態に混合が生ずるであろう。この混合のエネルギーはタイプⅡの共鳴状態を共鳴させているエネルギーと同じほどの大きさである。両者がH_{II}より生ずるエネルギーであるが故に。

このような情況の下で共鳴状態のどのようなふるまいが期待出来るであろうか？　同じチャンネルに二つの共鳴状態が現われるであろうか又は現われないのであろうか？　又実際に観測されている重粒子の質量スペクトラムの中には同じチャンネルの中で二つの共鳴状態が存在している例が多く知られている。($S=0$, $I=\frac{1}{2}$, $J=\frac{1}{2}^{+}$ で $N(940)$ と $N^{*}(1400)$. $S=0$ $I=\frac{1}{2}$ $J=\frac{1}{2}^{-}$ で $N^{*}(1570)$ と $N^{*}(1700)$. $S=-1$, $I=0$, $J=\frac{1}{2}^{-}$ で $\Lambda^{*}(1405)$ と $\Lambda^{*}(1670)$. $S=-1$, $I=0$, $J=\frac{3}{2}^{-}$ で $\Lambda^{*}(1520)$ と $\Lambda^{*}(1690)$) どのような情況の下で一つのチャンネルの中にタイプⅠとタイプⅡが共存出来るであろうか？　これ等の問題を研究するためには，それ等の系を力学的に取りあつかわねばならない。

著者はかつて次のような系でタイプⅠとタイプⅡの共鳴状態が共存しているときに生ずる混合の効果を調べるよう提案した。ここではそれに従ってstatic近似が使われるが十分一般的な方法でその混合の効果が調べられる。そして具体的な問題に適用することが出来るように，十分よい精度で近似解が求められる。

ここで我々は核子N_0，裸の(3,3)粒子Δ_0とπ－中間子の系に話をかぎることにする。それ等は$SU(6)$不変な力H_Iによりurbaryonから構成されていると考えられる。それ等の間に次のYukawa相互作用が存在するものとする。

$$N_0 N_0 \pi\,,\quad \Delta_0 N_0 \pi\,,\quad \Delta_0 \Delta_0 \pi$$

N_0, Δ_0, π は H_Iによるurbaryonの十分かたい結合系と考えること

が出来るので計算は Yukawa 相互作用においては摂動として取りあつかえると仮定する。

§2で我々は中間子論を基にして π-N_0 と π-Δ_0 の散乱振巾に対する連立積分方程式を提案し，それを十分意味のある近似で解く方法を提案する。§3において，その積分方程式より導びかれる解の一般的性質より混合の効果についての議論がなされる。

最后に Appendix A と B で我々の近似についての議論とその近似の下での解の具体的な形が与えられる。

§2 混合の効果についての定式化

我々は特に低いエネルギー領域で議論するから，static 近似を採用する。この近似で N_0, Δ_0 と π の相互作用は次のように表わされる。

$$H_{int} = \frac{1}{3\pi}\sum_{i,\alpha}\int dk\cdot k^2 u(k)\,\omega_k^{-\frac{1}{2}}\, a_k^{i\alpha}\Big[\frac{f}{m_\pi}\sigma^i\tau^\alpha + \frac{1}{6}\frac{g}{m_\pi}(\kappa^i\lambda^\alpha + \kappa^{*i}\lambda^{*\alpha}) + \frac{4}{9}\cdot\frac{h}{m_\pi}\mu^i\nu^\alpha\Big] \qquad (1)$$

ここで

$$a_k^{i\alpha} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int d\cos\theta\, d\varphi\; i k^i \pi^\alpha(\vec{k}) \qquad (2)$$

(1)式の右辺の括弧内の第一，第二，第三項はそれぞれ N_0-N_0-π，N_0-Δ_0-π，Δ_0-Δ_0-π 相互作用に対応し，その強さが f, g, h で表わされている。さらに(1)式の k, ω_k, m_π は π 中間子の運動量，エネルギー，質量である。マトリックス σ, κ, μ はスピン空間でのマトリックスであり，τ, λ と ν はアイソスピン空間でのそれである。その具体的な表示は次のように与えられる。

$$\sigma^1 = \tau^1 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \tau^2 = \begin{pmatrix} 0, & -i \\ i, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^3 = \tau^3 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix},$$

$$\kappa^1=\lambda^1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}, & 0, & -1, & 0\\ 0, & 1, & 0, & -\sqrt{3}\end{pmatrix},\quad \kappa^2=\lambda^2=\begin{pmatrix}\sqrt{3}i, & 0, & i, & 0\\ 0, & i, & 0, & \sqrt{3}i\end{pmatrix},$$

$$\kappa^3=\lambda^3=\begin{pmatrix}0, & -2, & 0, & 0\\ 0, & 0, & -2, & 0\end{pmatrix},$$

$$\mu^1=\nu^1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0, & \sqrt{3}, & 0, & 0\\ \sqrt{3}, & 0, & 2, & 0\\ 0, & 2, & 0, & \sqrt{3}\\ 0, & 0, & \sqrt{3}, & 0\end{pmatrix},\quad \mu^2=\nu^2=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3} & 0, & 0\\ -\sqrt{3}, & 0, & 2, & 0\\ 0, & -2, & 0, & \sqrt{3}\\ 0, & 0, & -\sqrt{3}, & 0\end{pmatrix}$$

$$\mu^3=\nu^3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -3\end{pmatrix}$$

$\pi^\alpha(k)$ なる量は π-中間子場のオペレーターであり，$u(k)$ は全相互作用に関して等しくとられている形状因子でその形は普通よく取られる形のものが使われる。 static近似においては N_0-N_0 と N_0-Δ_0 との π-中間子の相互作用は p-波でしか作用出来ないかつ Δ_0-Δ_0 に対しては f-波も許される。しかし低いエネルギーでは p-波に比べ f-波は重要でないと考えられるので f-波は省略する。

B_0-π 散乱を記述する振巾は図1で図示される積分方程式を満足する。

図 1

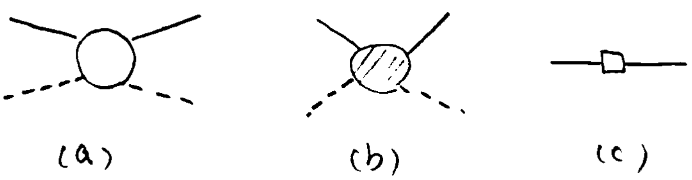

図 2、

図2のグラフ(a)は外線にいかなる自己エネルギーダイヤグラムも含まない全てのFeynmanダイヤグラムであり、この論文で計算しようとしている振巾に対応する。グラフ(b)は一本の重粒子内線又は一本の重粒子内線と一本のπ-中間子内線を切ったときにそのダイアグラムがけっして、初期状態と終状態の二つの部分に分かれてしまうことのないFeynmanダイヤグラムの全ての和である。グラフ(c)は全ての自己エネルギーダイヤグラムを含む重粒子の伝播函数に対応する。我々は図1で図示される積分方程式を次のように近似して解こう。

(i) 自己エネルギーグラフは二個以上のπ-中間子を含まないダイヤグラムの和で置き変える。

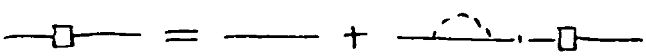

図 3

(ii) グラフ(b)は図4で示されるように近似する。

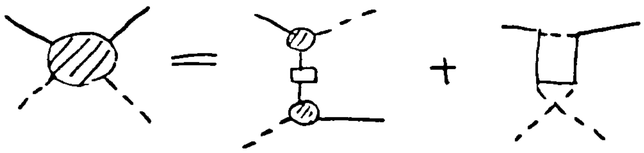

図 4

(iii) 図4の右辺才一項に現われるバーテックスは図5で示されるように近似する

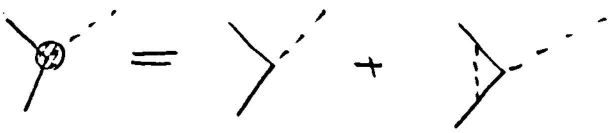

図 5

近似(i),(ii)と(iii)によって計算に取り入れられなかったダイヤグラムはその中間状態のエネルギーがエネルギーシェルから大きく離れるのでその寄与は小さいと考えられる。

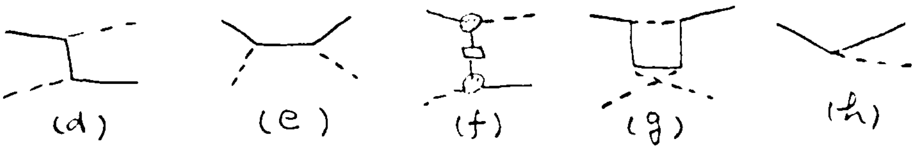

図 (6)

我々の近似はグラフ(b)をダイアグラム(d)で置き変え, B_0をN_0に制限することによりChewの近似になる。(ii)と(iii)の近似を取ることにより我々の近似は図1の括弧内のグラフに対応する積分核において2-orderより正確になっている。

図1で図示される積分方程式は次のように書ける

$$\varphi^A_{ab}(E,p,q) = K^A_{ab}(E,p,q) + \sum_c P\int dk\, \frac{k^4u^2(k)}{3\pi\omega_k} K^A_{ab}(E,p,q)$$
$$\times S_c(E-\omega_k)\,\varphi^A_{cb}(E,p,q)\,, \qquad \cdots\cdots \quad (5)$$

ここで φ^A, K^A はグラフ(a)と, グラフ(b)と(e)の和に対応する散乱振幅である。S_c はグラフ(c)により表わされる伝播函数である。(5)-式において E は全エネルギーであり p と q はそれぞれ終又は始状態のπ-中間子の運動量を表わす。上付添字 A は考えているチャンネルのアイソスピンと全角運動量を表わす。終又は始状態は添字 a(b) で区別する。すなわち a=1 のとき $N_0\pi$ 状態 a=2 のとき $\Delta_0\pi$ 状態を表わす。又同じ文字 a(b) が N_0 と Δ_0 の区別にも使われる。

(5)-式の被積分函数は $k^4u^2(k)$ なる因子をもっており, その因子は k のある領域で大きな値をもつ。このため我々はこの因子をδ-函数 $\eta\delta(k-k_0)$* で置き変えることが十分よい近似で出来る。ここで

$$k_0 = (\omega_0^2 - m_\pi^2)^{1/2}\,,$$

* Chew は Fredholm 展開の一次までを使って (5)-式に類似する積分方程式を解いた。[3] のちに同じ方程式を Gammel が数値的に解き二つの解はよい一致を見た。その一致は Fredholm 展開の高い次数よりの寄与が小さいことを意味する。これはここで提案された近似の正当性を示唆する。(この近似では Fredholm 展開の高い次数は消える。又高い次数が消えることは積分核がδ-函数的であることを意味する)

$$\omega_0 = \eta'/\eta \,,$$

$$\eta = \frac{1}{3\pi}\int dk\, \frac{k^4}{\omega_k} u^2(k) \,,$$

$$\eta' = \frac{1}{3\pi}\int dk \cdot k^4 u^2(k) \,.$$

（くわしい議論は Appendix A でなされる。）
すると (5)-式は次のようになる。

$$\varphi^A_{ab}(E,p,q) = K^A_{ab}(E,p,q) + \eta \sum_c K^A_{ac}(E,p,k_0) S_c(E-\omega_0) \times \varphi^A_{cb}(E,k_0,q) \,. \qquad (6)$$

K^A と S_c の具体的な表示は Appendix B で与えられる。
$I=J=1/2$ $(A=(1,1))$ チァンネル 又は $I=J=\frac{3}{2}$ $(A=(3,3))$ チァンネルに対し，(6)-式の解は次のようになる。

$$\varphi^A_{ab} = N^A_{ab} / D^A \qquad (7)$$

$$D^A = (E-m^A) D_0^A - \gamma^A \qquad (8)$$

ここで $m^{(1,1)}$ は N_0 の質量を，$m^{(3,3)}$ は Δ_0 の質量を表わす。
そして $D^A/(E-m^A)$ は $1-\eta \cdot K(E,k_0,k_0) S_c(E-\omega_0)$ の行列式で定義され D_0^A は図6のグラフ(e)の寄与を $1-\eta \cdot K(E,k_0,k_0)$ からとりのぞいたもの それに対応する。γ^A の定義は Appendix B によってなされる。γ^A は次の二つの状態の間の混合のエネルギーの二乗に対応する。その二つの状態は 一つは ハダカの $\Delta_0(N_0)$ であり，もう一つは $\Delta_0(N_0)$ 状態が発見されることのない状態（芯のない状態）である。D^A, D_0^A, γ^A と N^A_{ab} は Appendix B により具体的に示される。(5)-式に直接 Fredholm の方法を応用するならば 近似なしの D^A, D_0^A, γ^A に対し同様にそれ等が(8)式を満すことをたしかめることが出来る。又，(5)-式の解は B_0-π の散乱振幅を表わしているが，重粒子 B のくりこみ常数 Z_2 (B_0に対応する現実の重粒子を B で表わす) 倍しておけば 現実の B-π

の散乱振幅になる。

B-π 散乱の位相のずれは次のように表わされる。

$$(\tan\delta^A)_{ab} = -\pi\left(\frac{\omega_p\omega_q}{pq}\cdot Z_2^a Z_2^b\right)^{1/2}\varphi^A_{ab}(E,p,q)V(p)V(q),$$

$$V(p) = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}\cdot\frac{p^2}{\omega_p^{1/2}}u(p)$$

$$Z_2^a = \lim_{E\to m_r^a}\frac{E-m_r^a}{E-m^{Aa}-\gamma^{Aa}/D_0^{Aa}}$$

ここで m_r は B の質量で A_a は B^a と同じ量子数をもったチァーネルを表わす。くりこまれた結合常数 f_r, g_r と h_r は くりこまれない f, g と h から次のように表わせる。

$$f_r = (Z_1^{11})^{-1}Z_2^1 f \quad ,$$

$$g_r = (Z_1^{21})^{-1}(Z_2^1 Z_2^2)^{1/2} g$$

$$h_r = (Z_1^{22})^{-1}Z_2\cdot h \quad .$$

ここで $(Z_1^{ab})^{-1}$ は次の式で表わされる。

$$(Z_1^{ab})^{-1} = \left[N_{bb}^{Aa}(m_r^a, im_\pi, im_\pi)/D_0^{Ao}(m_r^a)\right]^{1/2}\Gamma^{-1}_{ba}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3f, & g \\ 2g, & \frac{5}{3}h \end{pmatrix}$$

さて次に D_0^A の物理的意味を考えよう。(5)-式の Born 項とその方程式の積分核からグラフ(e)の寄与を取りのぞいたとき，その解 φ_0^A は次のように表わされる。

$$\varphi_0^A = \frac{N_0^A}{D_0^A} \qquad \text{-----} \qquad (9)$$

（N_0^A の具体的な表示は Appendix B で与える） 解 φ_0^A はそれの満す積分方程式からも分るように 図2の(b)で表わされるグラフのくりかえしの和である。すなわち今考えている4チャンネルにタイプIIの粒子が存在しないときの散乱振幅である。故に φ_0^A の極でそれが上向きに $\pi/2$ を切る位相のずれに対応しているならばそれはタイプIIの粒子すなわち π-B_0 Yukawa 相互作用（interactive force）により作られた粒子に対応する。 D_0^A は $1-K^A_{ab}(E,P,g)$ よりグラフ(e)の寄与を取りのぞいた積分核 $1-K^{A'}_{ab}(E,P,g)$ の Fredholm の意味での行列式であるが一般的に $K^{A'}_{ab}(E,P,g)$ は $E\to\pm\infty$ で 0 になることは明らかなので D_0^A は $E\to\pm\infty$ で $D_0^A\to 1$ になる。故に D_0^A が 0点を持つとすれば常に偶数個である。故に D_0^A のおおよその形は次のようになる。

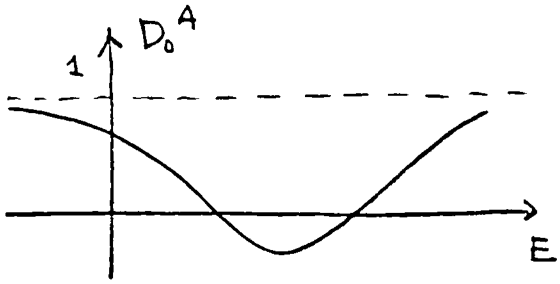

図7

§3. 二つの混合する状態のふるまい。

二つの素粒子 A と B が存在して，それ等がたがいを入れ変えさせる力が働いている場合を考えよう。図8に対応して A 粒子の伝播函数 S'_A は次のように与えられる。

$$S'_A = S_A + S_A\sqrt{\gamma}\,S_B\sqrt{\gamma}\,S_A + \cdots\cdots$$

$$= \frac{E-m_B}{(E-m_A)(E-m_B)-\gamma}$$

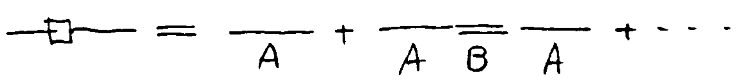

図8

混合のエネルギー $\sqrt{\gamma}$ の存在により，現実の粒子 A, B の質量はハダカの質量 m_A と m_B からずれる。それは次の式で表わされる。

$$(E-m_A)(E-m_B)-\gamma=0 \qquad (10)$$

同様の議論が §2 で述べて来た重粒子 B に対しても行なえる。(10)-式に対応してそれは次のようになる。

$$D^A=(E-m^A)D_0^A(E)-\gamma^A(E)=0 \qquad (11)$$

我々は同じチャンネル A にタイプⅠとタイプⅡの粒子が共存する場合すなわちタイプⅡの粒子が作られるほど Yukawa 相互作用が強くそのチャンネルにタイプⅠが存在する場合に興味をもっているので D_0^A が 0-点を持つと仮定する。 現実の重粒子 B^A の質量は (11)-式の 0-点として得られる。

(10) 式は混合のエネルギーの大きさのいかんを問ず常に二つの 0-点が存在したが 一方 (11)-式の根の数は常に一定とはかぎらない。定性的に γ 図で示されるように E の線形な函数でないからである。 観測される重粒子 B の質量はグラフ $(E-m^A)D_0^A(E)$ と $\gamma^A(E)$ の交点によって与えられる。これは図 9 に示される。*)

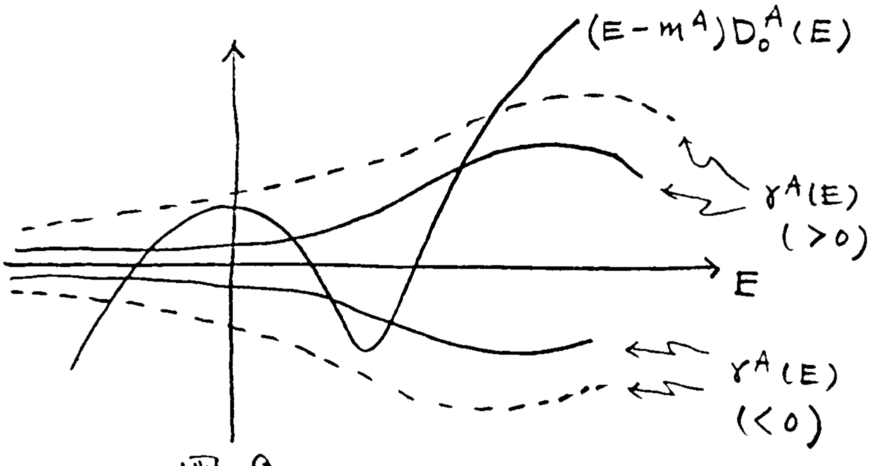

図 9

*) γ^A/D_0^A は B^A の自己エネルギーであり，γ^A/D_0^A の一般的な形より $E\to\pm\infty$ で $\gamma^A/D_0^A\to 0$。この故に交点の数は常に奇数である。D^A が三つの 0 点をもつとき，その一つは位相のずれが $\frac{\pi}{2}$ を上から切る場合に対応している。

図10において我々は γ^A に関する二つの混合する状態の質量のふるまいを与える。　図10のA又はBはそれぞれ $\gamma^A>0$（斥力）$\gamma^A<0$（引力）に対応している。　混合のエネルギーの強さが増大して行くと図9からも分るように共鳴状態の一つは消滅する（左－Xで）その境目での位相のずれのエネルギーによる変化が $|\gamma^A|>\gamma_0^A$ と $|\gamma^A|<\gamma_0^A$ に対して（γ_0^A は境目の混合エネルギー）図11で示されている。

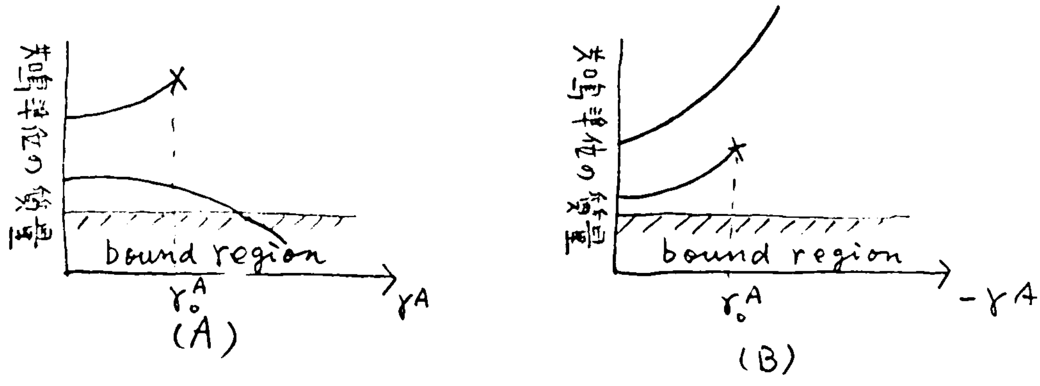

図 10

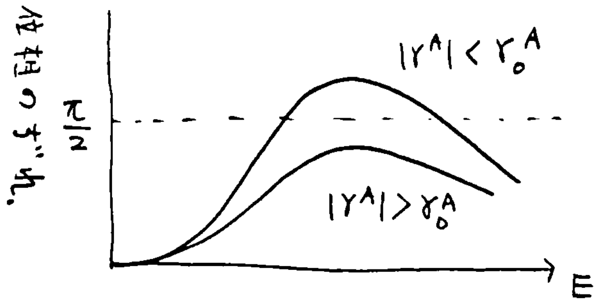

図 11

1400 MeV の $I=J=\frac{1}{2}$ をもった P-波共鳴準位が実験的に観測されている。　この共鳴準位は上に議論して来た意味での核子の相棒と考えることが出来るかもしれない。　今計算中の著者の中間的結果によると $N_{11}(1400)$ 共鳴準位のこの説明は物理的に意味のある結合常数 f, g, h を取ったとき，困難なように思われる。より くわしい結果が別な所で与えられるであろう。　最后に今までの議論は直接相対論に拡張することが出来ることを付記しておく。

おわりに

著者は共同研究者として我々のテーマ"固い粒子と柔い粒子の混合"について共に研究して来た近藤弘樹氏と牧二郎教授に負う所が多い。又坂田昌一教授ならびに我研究室の諸氏の有益な議論ならびに温たかい励ましに大いに感謝したい。そして有益な助言と議論をして下さった沢田昭二助教授と原稿を注意深く読んで下さった高和久博士に感謝するしだいである。

Appendix A.

我々はここで (5)式から(6)式を導くときに用いた近似について議論する。逐次法により(5)式の φ^A を展開したとき，その際生ずる各項を部分分数に分けることにより，各積分の被積分函数は常に次の形になる。

$$\frac{1}{3\pi}\int dk\cdot\frac{k^4u^2(k)}{A-\omega_k} \qquad (A.1)$$

容易に分かるように A は常に全エネルギー E より小さい。ここで A が $k^4u^2(k)$ が大きな値を持つ領域から十分離れていたなら (A.1) は次のように書きなおくことが出来る.

$$\frac{1}{3\pi}\int dk\cdot\frac{k^4u^2(k)}{A-\omega_0-(\omega_k-\omega_0)} = \frac{1}{3\pi}\cdot\frac{1}{A-\omega_0}\int dk\cdot\frac{k^4u^2(k)}{1-\frac{\omega_k-\omega_0}{A-\omega_0}} \qquad (A.2)$$

$$\cong \frac{1}{3\pi}\cdot\frac{1}{A-\omega_0}\int dk\cdot k^4u^2(k)\left[1+\frac{\omega_k-\omega_0}{A-\omega_0}\right] \qquad (A.3)$$

(A.3)式の右辺第二項が 0 になるように ω_0 を選ぶ。

すると

$$\omega_0 = \eta'/\eta$$

$$\eta = \frac{1}{3\pi}\int dk\cdot\frac{k^4}{\omega_k}u^2(k)$$

$$\eta' = \frac{1}{3\pi}\int dk\cdot k^4u^2(k)$$

$u(k)$ を箱型に取ったとき，数値的な計算によると上記でなされた近似は $A<\frac{\omega_0}{2}$ に対し 10% 以下の精度で成立つことが分かる。この故に我々は各積分をその結果として $\frac{\eta}{A-\omega_0}$ で置き変えることが十分よい近似で（よく $\frac{\omega_0}{2}$ の領域で）行なえる。このような操作ののち各項をまとめなおすことにより，我々は (6)式を得る。

Appendix B.

この Appendix において K^A, φ^A, D^A の具体的な形が与えられる。
K^A は三つの項 K_1, K_2 と K_3 の和で表わされ，K_1, K_2, K_3 はそれぞれ図6の (e), (f), (g) に対応する振巾である。

$$K^A = K_1^A + K_2^A + K_3^A \tag{B.1}$$

$$(K_1^A)_{ab} = \frac{B^A_{ab}}{E-m^A} \tag{B.2}$$

$$(K_2^A)_{ab} = \sum_c Z^*_{ca}(E-\omega_p, \omega_q)\, C^{c(A)}_{ab}\, S_c(E-\omega_p-\omega_q) \times Z_{cb}(E-\omega_q, \omega_p) \tag{B.3}$$

$$(K_3^A)_{ab} = \eta \sum_{\substack{\alpha',\beta' \\ i,j,k}} \left[\frac{c^i(\alpha',\beta')}{E-m^i-\omega_p-\omega_0} \cdot \frac{\xi^j}{E-m^j-\omega_p-\omega_q-\omega_0} \cdot \frac{c^k(\alpha',\beta')}{E-m^k-\omega_q-\omega_0} \right]_{ab} \times T^{\alpha'\alpha}_{ab}\, T^{\beta'\beta}_{ab} \tag{B.4}$$

ここで

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

上付索字 A 又は (α, β) はアイソスピン I と全角運動量 J のチャンネルを表わすのに使われる。($\alpha = 2J$, $\beta = 2I$) 上付索字 A_a は重粒子 B^a_0 と同じ量子数をもったチャンネルを表わす。
(B.2)-式の B^A_{ab} は次のように書ける。

$$B^{(1,1)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} 9f^2, & 6gf \\ 6gf, & 4g^2 \end{pmatrix}, \quad B^{(3,3)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} g^2, & \frac{5}{3}gh \\ \frac{5}{3}gh, & \frac{25}{9}h^2 \end{pmatrix}$$

その他は全部 0 行列である。

C^A は次の式で決められるキネマティカルな因子を含んだ結合常数の行列である。

$$[K^A(\text{図}(d))]_{ab} = \sum_c \frac{C_{ab}^{cA}}{E - m^c - \omega_p - \omega_q}$$

そして具体的には

$$C^{1(1,1)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} 4f^2, & \frac{5}{3}fg \\ \frac{5}{3}fg, & \frac{4}{9}g^2 \end{pmatrix}, \quad C^{1(1,3)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} -2f^2, & \frac{2\sqrt{10}}{3}fg \\ \frac{2\sqrt{10}}{3}fg, & -\frac{2}{9}g^2 \end{pmatrix},$$

$$C^{1(1,5)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{3}g^2 \end{pmatrix}, \quad C^{1(3,3)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} 4f^2, & \frac{5}{3}fg \\ \frac{5}{3}fg, & \frac{4}{9}g^2 \end{pmatrix},$$

$$C^{1(3,5)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & -\frac{2}{3}g^2 \end{pmatrix}, \quad C^{1(5,5)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & g^2 \end{pmatrix},$$

$$C^{2(1,1)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} \frac{16}{9}g^2, & \frac{50}{27}gh \\ \frac{50}{27}gh, & \frac{100}{81}h^2 \end{pmatrix}, \quad C^{2(1,3)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} \frac{4}{9}g^2, & \frac{-10\sqrt{10}}{27}gh \\ \frac{-10\sqrt{10}}{27}gh, & \frac{-110}{81}h^2 \end{pmatrix},$$

$$C^{2(1,5)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & -\frac{20}{27}h^2 \end{pmatrix}, \quad C^{2(3,3)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{9}g^2, & \frac{20}{27}gh \\ \frac{20}{27}gh, & \frac{121}{81}h^2 \end{pmatrix},$$

$$C^{2(3,5)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & \frac{11}{27}h^2 \end{pmatrix}, \quad C^{2(5,5)} = \frac{1}{m_\pi^2}\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & \frac{4}{9}h^2 \end{pmatrix}$$

そして $C^{a(\alpha,\beta)} = C^{a(\beta,\alpha)}$ なる関係がある。
T はスピン又はアイソスピン空間での crossing 行列である。具体的には

$$T_{ab}^{(1,1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}, & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}, & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad T_{ab}^{(1,3)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}, & \frac{\sqrt{10}}{6} \\ \frac{\sqrt{10}}{6}, & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$T_{ab}^{(1,5)} = \begin{pmatrix} 0 , & 0 \\ 0 , & \frac{1}{2} \end{pmatrix} , \qquad T_{ab}^{(3,1)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} , & \frac{\sqrt{10}}{3} \\ \frac{\sqrt{10}}{3} , & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} ,$$

$$T_{ab}^{(3,3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} , & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} , & \frac{11}{15} \end{pmatrix} , \qquad T_{ab}^{(3,5)} = \begin{pmatrix} 0 , & 0 \\ 0 , & \frac{2}{5} \end{pmatrix} ,$$

$$T_{ab}^{(5,1)} = \begin{pmatrix} 0 , & 0 \\ 0 , & \frac{3}{2} \end{pmatrix} , \qquad T_{ab}^{(5,3)} = \begin{pmatrix} 0 , & 0 \\ 0 , & \frac{3}{5} \end{pmatrix} ,$$

$$T_{ab}^{(5,5)} = \begin{pmatrix} 0 , & 0 \\ 0 , & \frac{1}{10} \end{pmatrix} .$$

図(5)に従って $Z_{ab}(E, \omega_p)$ を次のように定義する。

$$Z_{ab}(E, \omega_p) \Gamma_{ab} = \Gamma_{ab} + \eta \sum_{i,b} \frac{C_{ac}^{i(A_b)}}{E - m^i - \omega_p - \omega_0} \cdot \frac{1}{E - m^c - \omega_0} \Gamma_{cb} \qquad (B.5)$$

ここで Γ は 図(6)の(お)に対応する Vertix 函数：

$$\Gamma_{ab} = \frac{1}{m_\pi} \begin{pmatrix} 3f , & g \\ 2g , & \frac{5}{3}h \end{pmatrix}$$

(B.5)式より Z_{ab} は次のようになる。

$$Z_{ab}(E, \omega_p) = 1 + \eta \sum_{i,c} \frac{C_{ac}^{i(A_b)}}{E - m^i - \omega_p - \omega_0} \cdot \frac{1}{E - m^c - \omega_0} \Gamma_{cb} (\Gamma_{ab})^{-1} \qquad (B.6)$$

伝播函数 S_c は 図3に対応して，次の式で与えられる。

$$S_a(E) = [E - m^a - \eta \sum_i \frac{B_{ii}^{(A_a)}}{E - m^i - \omega_0}]^{-1} \qquad (B.7)$$

$$m^i = m^{A_i}$$

最后に，D_0^A，γ^A，N^A と N_0^A の具体的な形を与える。

$$D_0^A(E) = 1 - \mathrm{Tr}\, G^A(E) + \det G^A(E) \qquad (B, 8)$$

$$\gamma^A(E) = \mathrm{Tr}\, B'^A(E) - \mathrm{Tr}\, B'^A(E)\, \mathrm{Tr}\, G^A(E) + \mathrm{Tr}\left(B'^A(E)\, G^A(E)\right) \qquad (B, 9)$$

$$D^A(E) = (E - m^A)\, D_0^A - \gamma^A \qquad (B, 10)$$

$$\begin{aligned} N_{ab}^A(E,p,q) = \Big[& \left\{ K_2^A(E,p,q) + K_3^A(E,p,q) \right\} D^A(E) + D_0^A(E)\, B^A \\ & + \eta\, G^A(E,p,k_0) \left\{ (E - m^A) R^A(E) - \mathrm{Tr}\, B'^A(E) + B'^A(E) \right\} F^A(E,k_0,q) \\ & + \eta\, B'(E,p,k_0) R(E) F^A(E,k_0,q) + \eta\, G(E,p,k_0) R(E) B^A \Big]_{ab} \end{aligned} \qquad (B, 11)$$

行列 N_0^A は (B, 11)式で $B=0$ としたときに得られる N_{ab}^A に等しい。

$G^A(E)$　$G^A(E,p,q)$, $B'^A(E)$, $B'^A(E,p,q)$ と $R^A(E)$ は次のように書ける。

$$F^A(E,p,q) = K_2^A(E,p,q) + K_3^A(E,p,q) \qquad (B, 12)$$

$$G_{ab}^A(E,p,q) = F_{ab}^A(E,p,q)\, S_b(E - \omega_q) \qquad (B, 13)$$

$$G_{ab}^A(E) = \eta\, G_{ab}^A(E,k_0,k_0) \qquad (B, 14)$$

$$B'^A_{ab}(E,p,q) = B_{ab}^A\, S_b(E - \omega_q) \qquad (B, 15)$$

$$B'^A_{ab}(E) = \eta\, B'^A(E,k_0,k_0) \qquad (B, 16)$$

$$R^A(E) = 1 - \eta\, \mathrm{Tr}\, G^A(E) + \eta\, G^A(E) \qquad (B, 17)$$

References

1) F. Gursey and L.A. Radicati, Phys. Rev. Letter 13 (1964) 173.

2) Y. Ohnuki and A. Toyoda, Nuovo Cimento 36 (1965) 1403.

3) G.F. Chew, Phys. Rev. 94 (1954) 1748.
G.F. Chew, Phys. Rev. 94 (1954) 1755.
数値解については
G.F. Chew, Phys. Rev. 95 (1954) 285
F.F. Salzman and J.N. Snyder 95 (1954) 286
又は 6) を見よ.

4) G.F. Chew and F.E. Low, Phys. Rev. 101 (1956) 213.
C-L 方程式の数値解については
G. Salzman and F. Salzman, Phys. Rev 108 (1957) 1619.

5) 多沢の仕事があるが例えば
S.C. Franchi and J.D. Walecka, Phys. Rev. 120 (1960) 1486.
SU(6) への拡張は
A.W. Martin and K.C. Wali, Phys. Rev. 130 (1963) 2455.

6) J.L. Gammel, Phys. Rev. 95 (1954) 209.