

図・本館

# 殻の弾/粘塑性変形問題に関する研究

名古屋大学図書  
和 1030379

昭和63年9月

埜 克 己

報告番号 乙 第 3511 号

## 目 次

第1章 序 論	1
第2章 薄肉回転対称殻の準静的応答	13
2.1 薄肉回転対称殻の基礎関係式	13
2.2 フーリエ級数展開と無次元方程式	18
2.3 境界条件と接続条件	22
2.4 基礎方程式の差分近似と数値計算法	23
2.5 計 算 例	26
2.6 計算結果と考察	28
第3章 厚肉回転対称殻の準静的応答	33
3.1 厚肉回転対称殻の基礎関係式	34
3.2 フーリエ級数展開と無次元方程式	37
3.3 数 値 計 算 法	41
3.4 計 算 例	41
3.5 計算結果と考察	43
第4章 直交異方性厚肉回転対称殻の準静的応答	49
4.1 軸対称荷重を受ける場合	49
4.1.1 直交異方性厚肉回転対称殻の基礎関係式	50
4.1.2 数 値 計 算 法	56
4.1.3 実 験	57
〔1〕 試験片と材料定数	57
〔2〕 実 験 方 法	59
〔3〕 計算条件の設定	61
〔4〕 実験値と計算値の比較	62
4.2 非軸対称荷重を受ける場合	68
4.2.1 直交異方性厚肉回転対称殻の基礎関係式	68
4.2.2 フーリエ級数展開と支配方程式	70

4. 2. 3	数 値 計 算 法	72
4. 2. 4	実 験	72
〔1〕	試験片および実験方法	73
〔2〕	計算条件の設定	74
〔3〕	実験値と計算値の比較	75
第5章	薄肉回転対称殻の動的応答	81
5. 1	薄肉回転対称殻の基礎関係式	81
5. 2	数 値 解 法	84
5. 3	計 算 例	87
5. 4	計算結果と考察	89
第6章	一般形状の薄肉殻の動的応答	95
6. 1	一般形状の薄肉殻の基礎関係式	95
6. 2	数 値 解 法	98
6. 3	計 算 例	100
6. 4	計算結果と考察	102
第7章	薄肉回転対称殻の動的応答に対する弾／粘塑性 Overlay モデルの適用	108
7. 1	薄肉回転対称殻の基礎関係式	109
7. 2	無次元方程式	111
7. 3	数 値 解 法	112
7. 4	計 算 例	114
7. 5	計算結果と考察	118
第8章	厚肉回転対称殻の動的応答	125
8. 1	厚肉回転対称殻の基礎関係式	125
8. 2	フーリエ級数展開と無次元方程式	127
8. 3	計 算 例	129
8. 4	計算結果と考察	130

第 9 章 厚肉回転対称殻の動的応答に対する回転慣性の影響	136
9. 1 回転慣性を考慮した厚肉回転対称殻の基礎関係式	136
9. 2 フーリエ級数展開と無次元方程式	139
9. 3 数 値 計 算 法	140
9. 4 計 算 例	141
9. 5 計算結果と考察	142
第 10 章 薄肉回転対称殻の動的応答の解析結果と実験結果との比較	148
10. 1 円筒殻試験片および材料定数	148
10. 1. 1 円筒殻試験片の作製	148
10. 1. 2 材料定数の決定	148
〔1〕 静的引張試験	148
〔2〕 Split Hopkinson Bar 法による衝撃圧縮試験	150
10. 2 円筒殻衝撃試験	152
10. 3 計算条件の設定	153
10. 4 実験値と計算値の比較	154
第 11 章 結 論	158
謝 辞	164
参考文献	165
付 録	
2. 1 式(2.28)の各係数	174
2. 2 式(2.37)の各係数	177
3. 1 式(3.19)の各係数	178
3. 2 式(3.25)の各係数	181
4. 1 異方性パラメータ $G, H, F, N$ および 粘性パラメータ $\gamma, \Psi$ の決定法	182
4. 2 連立微分方程式の係数マトリックス	185

5. 1	式(5.15)の各係数	-----	188
6. 1	式(6.12)の各係数	-----	189

## 第 1 章 序 論

殻は、機械や建築構造物および化学プラント等の重要な構成要素として、従来から多方面に用いられている。特に回転対称殻は、強度上の利点や加工の容易さなどのため、最も広く利用されている。これらの構成要素の設計に際して、殻の応力解析は基本的に重要な役割を演じている。殻の数値解析手法は、近年の殻理論の発展、数値計算手法の開発、計算機の発達により、信頼性、安全性を要求される分野の設計において、ますます重要な役割を果たすようになってきた。

今日、高い信頼性、安全性と共に、高機能化、高経済性が追求されるにつれ、塑性変形を考慮しない弾性設計から、部分的に塑性変形を認める設計が必要になり、さらには火力、原子力発電ならびに高速増殖炉等の高温、高圧機器では、材料特性を最大限生かして利用する非弾性設計が不可避となってきた。これに対処するには、まず第 1 に使用材料の特性を正確に把握し、構造設計に適合するようにモデル化する方法を確立すること、第 2 はこの材料特性と構造物の負荷履歴に対して、応力や変形を解析する数値シミュレーション技術の確立、第 3 は複雑な非線形挙動を示す材料の破壊基準の確立が必要とされている [1]。

このうち、第 2 の項目に関連する殻構造物の非弾性解析においては、これまで静的荷重が作用した場合の、クリープ変形問題 [2-11] や弾塑性変形問題 [12-15] の解法に関する多数の研究結果が報告されている。これらの研究では、クリープ変形はもっぱら時間に依存する変形で、与えられた応力の下で有限なひずみ速度で進行するクリープひずみに原因し、一方塑性変形は時間と無関係な永久ひずみによって生じるものと仮定されている。しかしながら、実際には両変形は不可分の関係にあり、高分子材料ばかりでなく金属材料からなる殻においても、塑性領域に入ると常温においても材料の粘性の影響が現われることは実験事実より明らかであり [16,17]、塑性領域で材料の粘性を考慮した粘塑性解析の必要性がうかがえる。

また殻構造物に衝撃荷重が作用する場合の動的応答問題に関しても、これまでに円筒殻 [18-22] や球殻 [23] など単純な形状に限らず、複雑な一般の軸対称殻の問題 [24-27] についても解析がなされてきたが、これらの研究のほとんどが弾性（粘弾性）理論か、あるいは塑性領域で材料の粘性を考慮しない従来の塑性理論に基づくものである。衝撃荷重を受ける殻の弾塑性動的応答問題においてはひずみ速度が大きくなるため、塑性領域において粘性を考慮に入れることが特に重要になってくる。

本研究の開始の頃（1973年頃）は、固体粘性を考慮に入れた研究では、殻の粘弾性変形に関する二、三の論文 [22,28,29] が発表されていたが、粘塑性変形に関する研究はほとんど行われていなかった。そこで本研究では以上の点を考慮に入れて、主に回転対称殻を取り上げ、静的および動的荷重が作用する場合の、塑性領域において材料の粘性の影響を考慮に入れた弾塑性応答問題の解析方法を示し、実験によってその解法の妥当性を検討することを目的とした。

まず本研究を遂行するにあたって、殻理論および非弾性構成式の導入、数値解析手法の選択を行うために、これらに関する従来の研究を展望する。

殻の力学的な特徴として、殻の支持部や殻と殻の接合部付近、また集中荷重が作用する場所や分布荷重の大きさが急変するところでは、膜応力だけでなく必ず曲げモーメントを伴う。殻理論では線形理論であっても、はりや平板のように面内変形と面外変形を相互に独立させて取り扱うことはできず、両変形を連成させた複雑な理論構成となり、有効な解が得られる問題の範囲が極めて限られてくる。殻理論の多くは、主曲率半径に比べて殻厚が十分小さい殻を対象としており、殻厚方向の垂直応力が他の応力成分と比較して無視できると仮定することにより、理論はかなり簡略化される。さらに殻厚方向のひずみや応力分布の取り扱いに関して、次の近似法がよく用いられる。

(1) 殻の厚さが薄いので、応力はその厚さにわたって等分布と仮定し、曲げ応力を無視して殻中央面内のひずみによる応力だけを考える膜理論による解析法：

曲げが無視できるような前提条件があれば、応力解析の問題は大いに簡単になる。

(2) 中央面に垂直な平面は変形後も中央面に垂直で、平面を保つと仮定したKirchhoff-Loveの仮説に基づく曲げ理論による解析法：

上述の薄肉に関する仮定に基づいて殻理論の基礎式を導き、微小量を評価して基礎式を簡略化する段階で、考え方や方法の違いによって基礎式の表示が異なり、その結果 Reissner [30]、Love [31]、Sanders, Jr. [32]、Timoshenko [33]、Novozhilov [34]、Flügge [35] 理論など多くの理論が提案された。これらはいずれも上記仮定のもとで同等の精度を持つ合理的な理論であることが明らかにされている [例えば 36]。

(3) 殻厚方向のせん断変形の影響を考慮に入れた曲げ理論による解析法：

殻厚方向のせん断変形の影響を考慮に入れて、殻厚に対する最小主曲率半径の比が大きくなる場合にも適用可能で、Naghdi [37,38]、Reissner [39] の理論が



ある。

殻理論の基礎式には、用いる座標系の種類やひずみ、合応力の表現の近似度と適用範囲等によって多くの異なった手法が存在し、後述の構成関係式と共に、実際の現象との対比によって、ケースバイケースの処理をしなければならない。本研究ではより一般性のある(2)、(3)の曲げ理論を使用する。

次に材料の特性を示す構成式には、材料のひずみ速度依存性を考慮に入れることの他に、多軸応力下の挙動を正確に表現できること、数値解析手法に適用が容易であること、式中の材料パラメータが簡便な試験データから決定できることなどが要求される。

金属の変形抵抗が変形速度によって変化すること、すなわち金属が粘性的に挙動することは古くから知られており、数多くの研究者によって衝撃引張試験 [40]、Hopkinson bar 法による圧縮試験 [41-46] や衝撃ねじり試験 [47-50] が行われ、材料のひずみ速度依存性に関する研究が数多く報告されてきた。

これらの動的変形過程における材料の応力(変形抵抗)-ひずみ関係より、多くの構成式が提案されているが、代表的なものとして、塑性ひずみ速度が動的応力と静的応力との差、すなわち超過応力(excess stress)に比例するとした Prandtl [51] および Malvern [52] の式がある。さらに Perzyna [53] や Fyfe [54] は三次元応力状態において、この Malvern 形の構成式をより一般化した形で与えている。

一方ひずみ速度依存性は、衝撃負荷によりもたらされる高速変形のみならず、クリープに代表されるような準静的な変形過程においても存在する。これまで高温、高荷重下での非弾性変形問題では、非弾性ひずみを時間と無関係な塑性ひずみと時間に関係するクリープひずみに分離し、個々独立に定式化してきた。しかしながら、塑性領域での材料の粘性の影響は、別個の構成式では表現不可能で、クリープ変形と塑性変形の両変形を統一的に記述する構成式、すなわち粘塑性構成式が提案されている。井上は塑性-クリープ相互作用下での非弾性構成式に関して、次の各モデルを取り上げて概略を説明し、実験結果との比較を示している [55]。

- (1) 改良重ね合わせ形構成式 (Pughら [56])
- (2) 粘弾性理論の拡張 (Krempfら [57]、Valanisら [58])
- (3) フラクションモデル (Besseling [59]、鈴木ら [60])
- (4) 塑性硬化の回復理論 (Mrózら [61]、Miller [62])
- (5) 超過応力理論 (Perzyna [53]、Chabocheら [63]、井上ら [64])

(6) 非硬化ひずみ領域を考慮した理論(村上、大野 [65,66]、鈴木 [67])

これらのモデルを用いても、複雑な負荷における実際の材料挙動を十分に反映できるとは言えず、今後の構成式の理論の構築が望まれると結んでいる。

本研究の開始の頃はまだこれらのモデルは知られておらず、本論文では高速変形における速度依存性を記述するために多く用いられていたPerzynaの超過応力理論を、動的ならびに静的負荷の両問題に採用した。このモデルは、静的降伏曲面を考え、速度の増大によって曲面から外に出た応力成分(excess stress)が、粘性係数を介して塑性ひずみ速度を支配するものとする。さらにこのモデルでは、(1)等方性、(2)塑性域における非圧縮性、(3)降伏条件が静水圧に無関係なこと、(4)応力の主軸が塑性ひずみまたは塑性ひずみ増分の主軸と一致すること、の四つの仮定を基礎としており、塑性変形によって生じる異方性とバウシinger効果の重要な要素は考えられていない。

そこで本研究では、Perzynaの構成式を殻の曲げ理論に導入して、塑性領域において材料の粘性の影響を考慮に入れた殻の弾塑性応答問題の解法を示すと共に、これまであまり研究がなされていない粘塑性領域での異方性とバウシinger効果の表現も試みる。

最後に、数値解析の手法に関しては、電子計算機の大形化、高速化により、高度な各種の方法が開発され、普及している。特に変分原理に基づく有限要素法の発展、普及は著しく、また最近境界積分方程式に基づく境界要素法も急速な進展を遂げている。有限要素法は、計算機のプログラムに適していること、および汎用性に優れていること等から、今日構造物の強度問題に対する数値解析法の代表的手法の一つとなっている。一方従来から用いられてきた、支配微分方程式を階差方程式で近似する差分法にも、データ入力の手間や計算機にのせるまでの手間が少ないなど、まだ評価できる点も残っていると思われる。本研究は、一般回転対称殻の非軸対称曲げ問題に対して、おもにSanders, Jr.の弾性殻理論に基づくBudianskyらの差分近似法による解法[68]を、材料非線形性を考慮に入れて発展させたものであり、その点からも本論文では一貫して差分法を適用している。

以上、解析を行うにあたって問題となる殻理論、粘塑性構成式、解析手法について、研究紹介ならびに適用方針を述べてきたが、本研究を遂行するうちに、粘塑性構成式を材料の構成関係として、構造物の数値解析に取り入れた研究が多くなされてきたので、ここに紹介する。

まず準静的な変形問題については、微小変形の範囲内で丸穴付き平板の引張や一様分布荷重が作用する周辺単純支持円板の問題例をあげて、時間増分の安定限界を示した

Zienkiewicz 及び Cormeau ら [69-71]、回転対称殻の幾何学的非線形性を取り扱った Nagarajan ら [72]、Kanchi ら [73]、および竹園ら [74,75]、丸穴付き平板の単軸引張を取り上げて、幾何学的非線形性を取り扱った Klee ら [76] の論文が挙げられる。これらの論文では、粘塑性モデルが合理的に材料の塑性挙動を表しており、弾／粘塑性変形理論によって得られる最終状態（定常状態）の値が、従来の粘性の影響を無視した、時間を考慮しない塑性理論による結果と一致することを、確かめている。

さらに粘塑性構成式を構造物の動的な変形問題に適用した研究には、円板での実験とモード近似法による解析解の比較を試みた Symonds ら [77,78]、中空球および円筒殻に衝撃内圧が作用する問題を取り扱った畑 [79-81]、Kollmann ら [82]、幾何学的非線形性を考慮して大変形動的応答を取り扱った Nagarajan ら [83]、および Atkatsch ら [84]、円筒殻の動的座屈を取り扱った村瀬ら [85]、および Wojewódzki ら [86] の論文が挙げられる。準静的問題を含めて、これらの論文のほとんどが Perzyna に代表される超過応力理論 (excess stress theory) を導入し、おもに有限要素法を用いて解析を行っている。これらの粘塑性構造解析は、おもに最近13~15年間に集中しており、構成式の確立と、差分法、境界要素法を含めて数値解析法の発展ならびに電子計算機の大形化、高速化によるところが大きい。

これらの粘塑性問題に関する論文の中で、本研究と比較的類似した計算例を取り上げているのは、準静的問題については球殻、円環殻ならびに円筒殻からなる圧力容器に、内圧が作用する例題を取り上げた Nagarajan ら [72]、Kanchi ら [73] および竹園ら [74,75]、厚肉円筒殻に内圧が作用する例題を解析した Zienkiewicz ら [71]、さらに動的応答問題では Kollmann ら [82] のものが挙げられる。しかしながらこれらの例題は、軸対称荷重の場合に限られていること、論文に材料定数が示されていないこと、また実験値との比較がなされていないこと等により、本論文の解法の妥当性を検討することは困難であり、新たに実験との比較、検討が求められる。

以上より、本論文の目的をまとめると次のようになる。

- 1) 非弾性設計の一助として、殻構造物、おもに回転対称殻に静的および動的荷重が作用する場合の、塑性領域において材料の粘性の影響を考慮に入れた弾塑性応答問題の解析手法を示す。
- 2) 高温高圧機器では、耐圧部では厚肉化が図られているので、殻厚方向のせん断変形の影響を考慮に入れて、中程度の厚さの殻にも粘塑性解析の対象を広げる。

- 3) 殻構造物は製造工程で圧延、押し出しおよび引抜き等により材料の異方性を伴うので、Hillの異方性理論を導入し、直交異方性を考慮に入れた解法を示す。
- 4) 応力が反転する時にはバウシinger効果が生じ、Perzynaの等方硬化理論では表現が不十分である。弾/粘塑性Overlayモデルを考案し、バウシinger効果と粘性の影響を共に考慮に入れた解法を示す。
- 5) 殻の厚肉化ならびに動的負荷により殻の変形加速度が大きくなると、回転慣性の影響が生じてくる。そこで回転慣性の影響を考慮に入れた解法を示し、その影響を調べる。
- 6) 中程度の厚さの円筒殻に、軸対称荷重および局所的分布荷重を静的に、また薄肉円筒殻に、局所的分布荷重を動的に負荷する実験を行い、理論解との比較検討を行う。  
なお本論文では、これらの問題の解析に際して、以下の仮定を設けている。
  - (1) 固体は塑性変形時だけにひずみ速度依存性を示し、弾性域では依存性がないと仮定する。この変形特性は『弾/粘塑性応答』とよばれ、実際に多くの金属材料の非弾性変形挙動をモデル化するのに適用されている。
  - (2) 薄肉殻の応答問題に対しては、Kirchhoff-Loveの仮説に基づくSanders, Jr. [32, 87]の殻の曲げ理論を、また厚肉殻については、殻厚方向のせん断変形の影響を考慮に入れたNaghdi [38]およびReissner [39]の理論を採用する。
  - (3) 構成式には、塑性ひずみ速度が超過応力の任意の関数形として表されるPerzyna [53]の式、および動的応答問題の一部では、関数形に指数関数を用いたFyfe [54]の式を適用する。
  - (4) 第4章1節、第5章および第6章では、やや大きなひずみまで考慮する。他の章では、ひずみは微小と仮定する。
  - (5) 温度等の諸環境条件は一定とする。
  - (6) 数値解法にはすべて差分法を適用する。また時間に関しては、微小時間内で粘塑性ひずみ速度を一定とし、逐次積分法により解を求める。
  - (7) 数値計算はすべて倍精度で行う。

これらの要点を踏まえて、本論文ではまず第2章から第5章で、静的な荷重が作用する場合の準静的な変形問題を対象とした解析を行う。構成関係式には各章ともすべてPerzynaの式を適用する。

第2章 [88,89] では、薄肉回転対称殻に非軸対称荷重が作用する場合の解法を示す。Sanders, Jr.の弾性微小変形殻理論の解法の諸式 [32] を増分形で表し、各変数を円周方向

にフーリエ級数展開して支配常微分方程式を導く。数値例として、両端支持アルミ円筒殻の端部に非軸対称な曲げモーメントが作用する問題を解析し、定常状態に至るまでの変位および内力成分の時間的変化を考察する。

第3章 [90,91] では、殻厚の主曲率半径に対する比が1/20から1/5程度の中程度の厚さの回転対称殻に、非軸対称な荷重が作用する場合の問題を取り扱う。厚肉の場合に考慮すべき殻厚方向のせん断変形には、Reissner-Naghdiの理論を採用して基礎式を導き、第2章と同じくフーリエ級数展開を行う。数値例として、局所的分布荷重を受ける中程度の厚肉円筒殻の問題を取り上げ、第2章のせん断変形の影響を考慮しない薄肉殻理論による結果との比較を試みる。

第4章では、弾/粘塑性構成式に Hill の異方性理論を導入し、材料が直交異方性を有する場合の、やや肉厚の大きい回転対称殻の問題を取り扱う。第1節 [92,93] では、Reissner-Naghdiの殻理論および竹園らの弾/粘塑性問題の解法 [74,75] を用いて、軸対称荷重の場合に限られるが、幾何学的非線形性を考慮して、変形が比較的大きな領域まで解析可能な解法を示す。さらに両端自由のチタン円筒殻中央部に軸対称荷重を加え、円筒殻外表面のひずみの時間的変化を測定し、計算値と比較して解法の妥当性を検討する。第2節 [94] では、第3章の解法を直交異方性の場合に拡張し、非軸対称荷重を受ける場合の変形量の小さい領域を対象とした解法を導く。そして両端自由のチタン円筒殻中央部に局所的分布荷重を加えた実験を行い、解法の妥当性、有効性を検討する。

次に第5章から第10章では、動的荷重を受ける殻の応答問題を取り扱う。

第5章 [95,96] では、薄肉回転対称殻に一般の非軸対称な動的荷重が作用する場合の弾/粘塑性応答問題を取り扱う。殻の運動方程式にはSanders, Jr.の殻の非線形理論式 [87] に慣性項を加え、構成関係にはPerzynaの理論に基づくFyfeの構成式を用いる。数値例として、両端固定のアルミ円筒殻の半周部に衝撃外圧が作用する問題を解析し、内力および変位の時間的変化の様子を明らかにする。

第6章 [97,98] では、第5章の回転対称殻に対する解法を発展させて、一般の任意形状を有する薄肉殻に動的荷重が作用する問題の数値解法を取り扱う。数値例としてアルミ楕円筒殻を取り上げ、半周部分に衝撃荷重が作用する問題を解析する。

第5章と第6章では、塑性領域においてバウシinger効果を無視して等方硬化を仮定しているため、降伏後変形とともにひずみ硬化する材料では、応力が反転する場合には、十分正確な解法とは言えない。そこで第7章 [99] では、弾/粘塑性overlayモデル（多層毛

デル)を用いて、バウシinger効果とひずみ速度依存性を表し、この難点を解決する。第2章の解法において、慣性項を平衡方程式に加えて運動方程式とし、構成関係に Overlay モデルを導入する。数値例として、球殻、円環殻および円筒殻からなるアルミ容器に、衝撃内圧が作用する問題を取り上げ、等方硬化による結果と比較する。

第8章 [100,101] では、殻の厚さ方向のせん断変形の影響を考慮に入れた、中程度の厚さを有する回転対称殻の解法を示す。この解法は、第3章の基礎式において、平衡方程式に慣性項を加えて、動的応答問題に発展させたものである。数値例として、非軸対称な衝撃外圧を受ける両端固定の厚肉円筒殻の問題を取り上げ、せん断変形を考慮しない Sanders, Jr. の殻理論に基づく結果と比較検討する。

また第9章 [102,103] では、第8章の解法を拡張して、回転慣性を考慮に入れて、厚肉回転対称殻の弾/粘塑性動的応答問題の解析を行う。厚肉の場合に考慮すべき殻厚方向のせん断変形と回転慣性には、Naghdi の理論を採用する。数値例として衝撃内圧を受ける両端固定の厚肉円筒殻の問題を取り上げ、殻厚を種々変えて回転慣性の影響を調べる。

第10章では、両端自由の薄肉アルミ円筒殻の中央部に、局所的に衝撃荷重を加えて、荷重および変形の時間的変化を求める実験を行い、第7章の解法による計算結果と比較することにより、解法の妥当性、有効性を検討する。

最後に第11章においては、本研究で得られた結果の総括を行う。

## 記 号

本論文で用いる主な記号は次のとおりである。

$a$  : 代表長さ

$b$  :  $=1/(1-\nu^2)$

$c$  : 応力波の伝播速度 ( $=\sqrt{E/\rho_0}$ )

[ $D$ ] : 応力-ひずみマトリックス

$$\left( = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \text{ または } \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \right)$$

$d$  :  $=1/\{12(1-\nu^2)\}$

$E, E_{\xi}, E_{\theta}$  : 縦弾性係数

$e_{\xi m}, e_{\theta m}, e_{\xi\theta m}, e_{\xi\zeta m}, e_{\theta\zeta m}$  :  $\varepsilon_{\xi m}, \varepsilon_{\theta m}, \varepsilon_{\xi\theta m}, \varepsilon_{\xi\zeta m}, \varepsilon_{\theta\zeta m}$  のフーリエ係数

$F, G, H, L, M, N$  : 材料の異方性パラメータ

$f$  : 応力の超過率 ( $=(\bar{\sigma} - \sigma^*)/\sigma^*$ )

$H, V$  : 半径および軸方向の内力成分 (単位長さ当たり)

$H(t)$  : 単位ステップ関数

$h$  : 殻厚

$I_{\xi}, I_{\theta}, I_{\zeta}, I_1, I_2, I$  : 単位面積当たりの力積

$J_2$  : 偏差応力の第2不変量

$K$  : 殻厚方向の格子点数

$k_{\xi}, k_{\theta}, k_{\xi\theta}, k_{\theta\xi}$  :  $\kappa_{\xi}, \kappa_{\theta}, \kappa_{\xi\theta}, \kappa_{\theta\xi}$  のフーリエ係数

$L_{\xi}, L_{\theta}$  : 殻の任意点  $(\xi, \theta, \zeta)$  における曲率半径と、点  $(\xi, \theta, 0)$  における曲率半径の比 ( $=1 + \zeta/R_{\xi}, 1 + \zeta/R_{\theta}$ )

$l$  : 殻の全長

$M_{\xi}, M_{\theta}, M_{\xi\theta}, M_{\theta\xi}, M_{11}, M_{22}, M_{12}$  : 合モーメント (単位長さ当たり)

$\bar{M}_{\xi\theta}$  : 修正ねじりモーメント (単位長さ当たり)

$m_{\xi}, m_{\theta}, m_{\xi\theta}, m_{\theta\xi}, \bar{m}_{\xi\theta}$  :  $M_{\xi}, M_{\theta}, M_{\xi\theta}, M_{\theta\xi}, \bar{M}_{\xi\theta}$  のフーリエ係数

$N$  : 差分点数

$N_{\xi}, N_{\theta}, N_{\xi\theta}, N_{\theta\xi}, N_{11}, N_{22}, N_{12}$  : 合応力 (単位長さ当たり)  
 $\bar{N}_{\xi\theta}$  : 修正面内せん断力 (単位長さ当たり)  
 $\widehat{N}_{\xi\theta}$  : 境界における有効面内せん断力 (単位長さ当たり)  
 $n$  : フーリエ指数  
 $n_{\xi}, n_{\theta}, n_{\xi\theta}, n_{\theta\xi}, \bar{n}_{\xi\theta}$  :  $N_{\xi}, N_{\theta}, N_{\xi\theta}, N_{\theta\xi}, \bar{N}_{\xi\theta}$  のフーリエ係数  
 $P_{\xi}, P_{\theta}, P_{\zeta}, \bar{M}_{\xi}, \bar{M}_{\theta}, P_1, P_2, P_n$  : 殻の中央面の分布荷重 (単位面積当たり)  
 $P_{\xi}^+, P_{\theta}^+, P_{\zeta}^+$  : 殻の外面に作用する分布荷重  
 $P_{\xi}^-, P_{\theta}^-, P_{\zeta}^-$  : 殻の内面に作用する分布荷重  
 $p_{\xi}, p_{\theta}, p_{\zeta}, \bar{m}_{\xi}, \bar{m}_{\theta}$  :  $P_{\xi}, P_{\theta}, P_{\zeta}, \bar{M}_{\xi}, \bar{M}_{\theta}$  のフーリエ係数  
 $p_H$  : 殻の中央面の分布荷重の半径方向成分 (単位面積当たり)  
 $p_U$  : 殻の中央面の分布荷重の軸方向成分 (単位面積当たり)  
 $Q, Q_{\xi}, Q_{\theta}$  : 横せん断力 (単位長さ当たり)  
 $\widehat{Q}_{\xi}$  : 境界における有効横せん断力 (単位長さ当たり)  
 $q_{\xi}, q_{\theta}$  :  $Q_{\xi}, Q_{\theta}$  のフーリエ係数  
 $R_{\xi}, R_{\theta}$  : 中央面上の点における子午線方向および周方向の曲率半径  
 $R_1, R_2$  : 中央面上の点における  $\xi_1, \xi_2$  方向の曲率半径  
 $r$  : 対称軸から殻の中央面上の任意点までの距離  
     Lankfordの  $r$  値  
 $r, \theta, y$  : 殻の中央面の円筒座標  
 $S$  : 平均垂直応力  
 $S_{ij}$  : 偏差応力  
 $s$  : 殻の中央面において子午線に沿って測った長さ  
 $t, \Delta t$  : 時間および時間増分  
 $U_{\xi}, U_{\theta}, W$  : 中央面の変位の子午線方向、円周方向および法線方向成分  
 $u_{\xi}, u_{\theta}, w$  :  $U_{\xi}, U_{\theta}, W$  のフーリエ係数  
 $u, v$  : 中央面の変位の半径方向および軸方向成分  
 $Y$  : ひずみ速度が十分小さい場合の完全弾塑性体の降伏応力  
 $\alpha$  : 粘性定数  
 $\alpha, \beta, \gamma$  : 異方性主軸  $\xi, \theta, \zeta$  からの方向角  
 $\gamma$  :  $= \rho' / \rho$



- $\gamma_0$  : 粘性定数  
 $\bar{\gamma}$  : 粘性定数 ( $= 2\gamma_0 / \sqrt{3}$ )  
 $\Delta, \Delta_\xi, \Delta_\theta$  : 無次元差分間隔、増分  
 $\Delta^-, \Delta^+$  : 接続点の前後の差分間隔  
 $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{\xi\theta}, \varepsilon_{\xi\xi}, \varepsilon_{\theta\xi}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$  : ひずみ  
 $\bar{\varepsilon}^{VP}$  : 相当粘塑性ひずみ  
 $\varepsilon_L^{VP}$  : 引張軸方向の粘塑性ひずみ  
 $\varepsilon_b^{VP}$  : 引張軸方向に垂直な幅方向の粘塑性ひずみ  
 $\zeta, \eta$  : 殻の中央面に対する法線方向の座標  
 $\theta$  : 円周方向の位置を示す角  
 $\bar{\theta}$  : 殻の境界の円周方向座標  
 $\vartheta$  :  $\varphi$  の変化量  
 $\kappa_\xi, \kappa_\theta, \kappa_{\xi\theta}, \kappa_{\xi\xi}, \kappa_{\theta\xi}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}$  : 曲率の変化量  
 $\lambda$  : 無次元厚さ ( $= h/a$ )、〔第4章1節では、 $1/R_s - 1/R_\theta$ 〕  
 $\nu, \nu_{\xi\theta}, \nu_{\theta\xi}$  : ポアソン比  
 $\xi$  : 殻の中央面の無次元子午線方向座標 ( $= s/a$ )  
 $\bar{\xi}$  : 殻の境界の無次元子午線方向座標  
 $\xi_1, \xi_2$  : 殻の中央面の曲線座標  
 $\rho$  : 無次元半径 ( $= r/a$ )  
 $\rho_0$  : 密度  
 $\sigma_\xi, \sigma_\theta, \sigma_{\xi\theta}, \sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\theta\xi}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  : 応力  
 $\sigma^*$  : ひずみ速度が十分小さい通常の引張試験から得られる応力  
 $\bar{\sigma}$  : ミーゼスの相当応力 ( $= \sqrt{3J_2}$ )  
 $\sigma_0$  : 代表応力  
 $\sigma_Y$  : 初期降伏応力  
 $\tau$  : 無次元時間 [ $= \sqrt{E/\rho_0} (t/a)$ ]  
 $\Phi_\xi, \Phi_\theta, \Phi_n, \Phi_1, \Phi_2$  : 殻の中央面の回転  
 $\varphi_\xi, \varphi_\theta, \varphi_n$  :  $\Phi_\xi, \Phi_\theta, \Phi_n$  のフーリエ係数  
 $\varphi, \Phi$  : 変形前、後の中央面の法線と対称軸のなす角 ( $\Phi = \varphi + \vartheta$ )  
 $\omega_\xi, \omega_\theta$  : 無次元曲率 ( $= a/R_s, a/R_\theta$ )

- ( )' :  $\xi$ に関する導関数 (=  $d( ) / d\xi$ )、〔第4章1節では、 $d( ) / ds$ 〕  
 (·) : 時間 (又は時間と共に単調に変化する量)に関する導関数  
 ( )<sub>,i</sub> :  $\xi_i$ に関する偏導関数 (=  $\partial( ) / \partial \xi_i$ )

添 字

- e : 弾性成分  
 i j :  $i, j = \xi, \theta, \zeta$  または 1, 2, 3  
 k : k番目の層  
 m : 殻の中央面  
 up : 粘塑性成分  
 { }<sup>T</sup> : 転置行列

行 列

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \{ \Delta m_{\xi}^{up(n)}, \Delta m_{\theta}^{up(n)}, \Delta \bar{m}_{\xi\theta}^{up(n)}, 0 \}^T \text{ または} \\ &\quad \{ \Delta m_{\xi}^{up(n)}, \Delta m_{\theta}^{up(n)}, \Delta m_{\xi\theta}^{up(n)}, \Delta m_{\theta\xi}^{up(n)}, 0 \}^T \\ \mathbf{N} &= \{ \Delta n_{\xi}^{up(n)}, \Delta n_{\theta}^{up(n)}, \Delta \bar{n}_{\xi\theta}^{up(n)}, 0 \}^T \text{ または} \\ &\quad \{ \Delta n_{\xi}^{up(n)}, \Delta n_{\theta}^{up(n)}, \Delta n_{\xi\theta}^{up(n)}, \Delta n_{\theta\xi}^{up(n)}, 0 \}^T \\ \mathbf{P} &= \{ \Delta p_{\xi}^{(n)}, \Delta p_{\theta}^{(n)}, \Delta p_{\zeta}^{(n)}, 0 \}^T \text{ または} \\ &\quad \{ \Delta p_{\xi}^{(n)}, \Delta p_{\theta}^{(n)}, \Delta p_{\zeta}^{(n)}, 0, 0 \}^T \text{ または} \\ &\quad \{ \Delta p_{\xi}^{(n)}, \Delta p_{\theta}^{(n)}, \Delta p_{\zeta}^{(n)}, \Delta \bar{m}_{\xi}^{(n)}, \Delta \bar{m}_{\theta}^{(n)} \}^T \\ \mathbf{Q} &= \{ \Delta q_{\xi}^{up(n)}, \Delta q_{\theta}^{up(n)}, 0, 0, 0 \}^T \\ \mathbf{y} &= \{ \Delta n_{\xi}^{(n)}, \Delta \hat{n}_{\xi\theta}^{(n)}, \Delta \hat{q}_{\xi}^{(n)}, \Delta \varphi_{\xi}^{(n)} \}^T \text{ または} \\ &\quad \{ \Delta n_{\xi}^{(n)}, \Delta n_{\xi\theta}^{(n)}, \Delta q_{\xi}^{(n)}, \Delta m_{\xi}^{(n)}, \Delta m_{\xi\theta}^{(n)} \}^T \\ \mathbf{z} &= \{ \Delta u_{\xi}^{(n)}, \Delta u_{\theta}^{(n)}, \Delta w^{(n)}, \Delta m_{\xi}^{(n)} \}^T \text{ または} \\ &\quad \{ \Delta u_{\xi}^{(n)}, \Delta u_{\theta}^{(n)}, \Delta w^{(n)}, \Delta \varphi_{\xi}^{(n)}, \Delta \varphi_{\theta}^{(n)} \}^T \end{aligned}$$

## 第2章 薄肉回転対称殻の準静的応答 [88,89]

電子計算機の大形化、高速化、および差分法、有限要素法、境界要素法等の数値計算手法の確立により、構造物の線形挙動ばかりでなく非線形挙動についても、精度良い解析が可能となってきた。薄肉回転対称殻の解析においても、線形弾性問題に限らず、弾塑性やクリープ等の非線形問題の解法が多く報告されている。しかしながら、本研究を始めた1973年頃は、非軸対称荷重が作用する場合の非線形問題については、取り扱いがかなり複雑になることや、計算機の容量および計算速度の制限等により、実用上の重要性にもかかわらず、あまり研究がなされていなかった。また、第1章で解析の必要性を示した殻の粘塑性応答問題についても、ほとんど研究されていなかった。

本章では、Sanders, Jr. の弾性薄肉殻理論 [32] に基づくBudianskyらの線形弾性問題に対する数値解法 [68] を、弾/粘塑性問題に拡張することを試みる。すなわち、Sanders, Jr. の弾性変形問題の解法の諸式を増分形で表し、構成関係式には塑性領域において粘性の影響を考慮した Perzyna の構成式 [53] を用いる。さらにすべての従属変数を円周方向にフーリエ級数展開することにより、殻の子午線方向の独立変数に関する支配微分方程式を導く。ここで粘塑性によるみかけの内力増分のフーリエ係数は、粘塑性ひずみ増分から求められる粘塑性によるみかけの応力増分を殻の厚さ方向に数値積分し、それを数値的にフーリエ展開して求める。差分法により微分方程式を数値的に解き、得られた増分解を積分して任意の時刻での解を得る。

計算例として、実用上重要な両端単純支持の円筒殻の端部に、非軸対称な曲げモーメントが作用する問題を取り扱う。

なお、本解法と類似の解法が、弾塑性問題では浜田ら [15]、クリープ問題では竹園ら [8] の論文で示され、特に浜田らは円板について実験値および有限要素解と比較し、解法の妥当性を調べている。

### 2.1 薄肉回転対称殻の基礎関係式

図2.1 に示すように、対称軸から殻の中央面上の任意点Pまでの距離を $r$ とし、殻の中央面の形を $r = r(s)$ で与えると、中央面の点Pにおける無次元曲率 $\omega_s (= a/R_s)$ 、 $\omega_\theta (= a/R_\theta)$  および無次元半径 $\rho (= r/a)$ の間には次の幾何学的関係が常に成立す

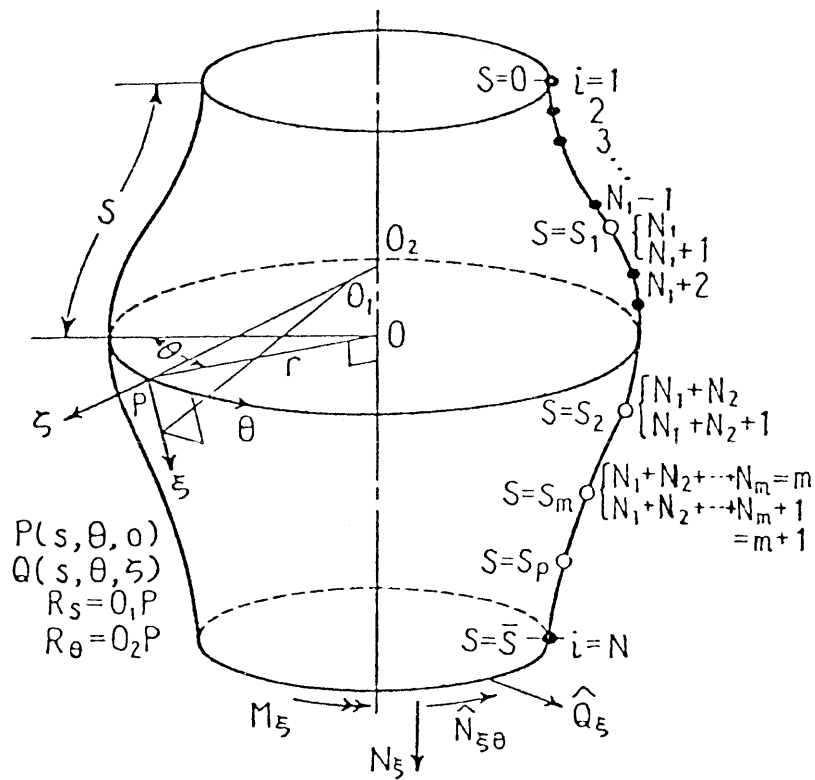


図 2.1 殻の形状，座標および差分点

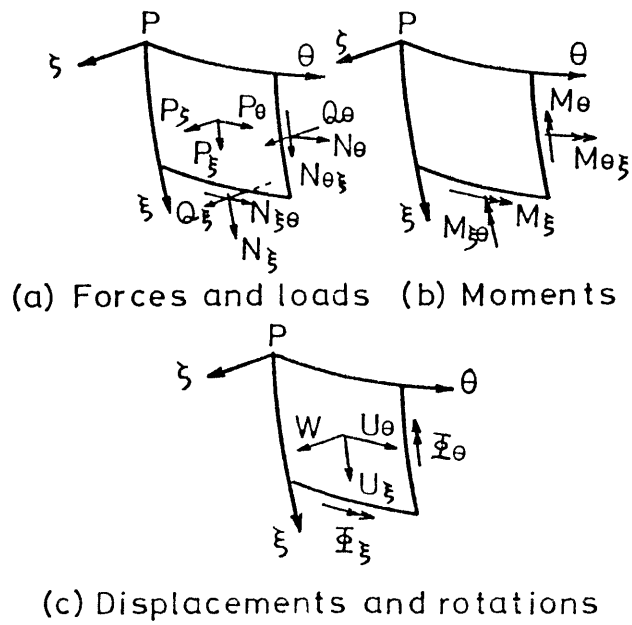


図 2.2 内力と変位

る。ただし、 $s$  は殻の中央面において子午線に沿って測った長さであり、 $a$  は代表長さである [68]。

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= -(\gamma' + \gamma^2)/\omega_0, & \omega_0 &= \sqrt{1 - (\rho')^2}/\rho, & \omega_0' &= \gamma(\omega_\xi - \omega_0) \\ \rho''/\rho &= -\omega_\xi\omega_0, & \gamma &= \rho'/\rho, & \xi &= s/a, & ( )' &= d( )/d\xi \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式(2.1)<sub>3</sub>、(2.1)<sub>4</sub>は、Codazziの恒等式である。また、殻の任意点 $Q$ を表すのに、直交座標 $(\xi, \theta, \zeta)$ を用いる。ここに、 $\theta$ は円周方向の角であり、 $\zeta$ は中央面から外向きに測った長さである。

さて多くの薄肉殻理論の中で、Budianskyらにより最良と評価されているSanders, Jr.の線形殻理論 [32] は、仮想仕事の原理を用いて、Loveの第一近似理論 [31] を改良したもので、複雑化することなく剛体運動によるひずみの発生をなくしている。Sanders, Jr.により導かれた微小変形理論に基づく回転対称殻の平衡方程式から、横せん断力 $Q_\xi$ 、 $Q_\theta$ を消去し、時間または荷重について微分すると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{N}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{N}_{\xi\theta}) - \rho' \dot{N}_\theta \right] + \omega_\xi \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_{\xi\theta}) - \rho' \dot{M}_\theta \right] \\ + \frac{1}{2} (\omega_\xi - \omega_0) \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_{\xi\theta}) + a^2 \rho \dot{P}_\xi = 0 \\ a \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{N}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{N}_{\xi\theta}) + \rho' \dot{N}_{\xi\theta} \right] + \omega_0 \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_{\xi\theta}) + \rho' \dot{M}_{\xi\theta} \right] \\ + \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} [(\omega_0 - \omega_\xi) \dot{M}_{\xi\theta}] + a^2 \rho \dot{P}_\theta = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_{\xi\theta}) - \rho' \dot{M}_\theta \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{M}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_{\xi\theta}) + \rho' \dot{M}_{\xi\theta} \right] \\ - a \rho (\omega_\xi \dot{N}_\xi + \omega_0 \dot{N}_\theta) + a^2 \rho \dot{P}_\zeta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

ここに、 $N_\xi$ 、 $N_\theta$ 、 $N_{\xi\theta}$  および  $M_\xi$ 、 $M_\theta$ 、 $M_{\xi\theta}$  は図2.2に示すように殻の単位長さ当りの合応力および合モーメントであり、 $P_\xi$ 、 $P_\theta$ 、 $P_\zeta$  は殻の単位面積当りの分布荷重の $\xi$ 、 $\theta$ 、 $\zeta$ 方向の成分である。また、 $\bar{N}_{\xi\theta}$  および  $\bar{M}_{\xi\theta}$  は修正面内せん断力および修正ねじりモーメントで、次式で表されている。

$$\dot{N}_{\xi\theta} = (\dot{N}_{\xi\theta} + \dot{N}_{\theta\xi})/2 + [(1/R_\theta) - (1/R_\xi)] (\dot{M}_{\xi\theta} - \dot{M}_{\theta\xi})/4, \quad \dot{M}_{\xi\theta} = (\dot{M}_{\xi\theta} + \dot{M}_{\theta\xi})/2 \quad (2.3)$$

なお図2.1に示す  $\widehat{N}_{\xi\theta}$  と  $\widehat{Q}_\xi$  は、境界  $s=0$  または  $s=\bar{s}$  に作用する単位長さ当りの有効面内せん断力と有効横せん断力で、次に定義されるものである。

$$\dot{N}_{\xi\theta} = \dot{N}_{\xi\theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{R_\theta} - \frac{1}{R_s} \right) \dot{M}_{\xi\theta}, \quad \dot{Q}_\xi = \frac{1}{a\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \dot{M}_\xi) + 2 \frac{\partial \dot{M}_{\xi\theta}}{\partial \theta} - \rho' \dot{M}_\theta \right] \quad (2.4)$$

次に平衡方程式の導出と同時に、仮想仕事の原理から導かれたひずみと変位の関係は、次のようになる [32]。まず、中央面のひずみ  $\varepsilon_{\xi m}$ 、 $\varepsilon_{\theta m}$ 、 $\varepsilon_{\xi\theta m}$  と  $\xi$ 、 $\theta$ 、 $\zeta$  方向の変位  $U_\xi$ 、 $U_\theta$ 、 $W$  との関係は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{U}_\xi) + \omega_\xi \dot{W} \right], & \dot{\varepsilon}_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{U}_\theta) + \gamma \dot{U}_\xi + \omega_\theta \dot{W} \right] \\ \dot{\varepsilon}_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dot{U}_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{U}_\theta) - \gamma \dot{U}_\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

ここに、 $\varepsilon_{\xi\theta m}$  は工学上のせん断ひずみの 1/2 である。また、曲率の変化量  $\kappa_\xi$ 、 $\kappa_\theta$ 、 $\kappa_{\xi\theta}$  を変位で表すと、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\kappa}_\xi &= \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{\Phi}_\xi}{\partial \xi}, & \dot{\kappa}_\theta &= \frac{1}{a} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_\theta}{\partial \theta} + \gamma \dot{\Phi}_\xi \right) \\ \dot{\kappa}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{\Phi}_\theta}{\partial \xi} - \gamma \dot{\Phi}_\theta + \frac{1}{2a} (\omega_\xi - \omega_\theta) \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_\xi}{\partial \theta} - \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \xi} - \gamma \dot{U}_\theta \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

ここに  $\Phi_\xi$ 、 $\Phi_\theta$  は中央面の回転を示し

$$\dot{\Phi}_\xi = \frac{1}{a} \left( -\frac{\partial \dot{W}}{\partial \xi} + \omega_\xi \dot{U}_\xi \right), \quad \dot{\Phi}_\theta = \frac{1}{a} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \theta} + \omega_\theta \dot{U}_\theta \right) \quad (2.7)$$

である。Kirchhoff の仮説を用い、 $\zeta/R_s$ 、 $\zeta/R_\theta$  は 1 に比較して十分小さいものとする、中央面から  $\zeta$  の距離にある点 Q のひずみ  $\varepsilon_\xi$ 、 $\varepsilon_\theta$ 、 $\varepsilon_{\xi\theta}$  は次のように表される。

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_m\} + \zeta \{\kappa\} \quad (2.8)$$

ただし

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{\xi\theta}\}, \quad \{\varepsilon_m\}^T = \{\varepsilon_{\xi m}, \varepsilon_{\theta m}, \varepsilon_{\xi\theta m}\}, \quad \{\kappa\}^T = \{\kappa_\xi, \kappa_\theta, \kappa_{\xi\theta}\} \quad (2.9)$$

で、 $\{\ }^T$  は転置行列を示す。

さて、本研究では構成関係に塑性領域において粘性の影響を考慮した Perzyna の弾/粘塑性式 [53] を用いる。Perzyna の理論は、主に動的変形過程におけるひずみ速度依存性を記述するために多く用いられているが、数値解析への適用に向いているため、準静的変形過程の挙動においても、いくつかの数値解析例が報告されている [69-76]。最近では、この Perzyna の理論を発展させて、準静的変形過程の挙動に適用したモデルも考案されている [63,64]。粘塑性ひずみ速度  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$  は Perzyna の理論では、次式で表される。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \gamma_0 \langle \Psi(f) \rangle S_{ij} J_2^{-1/2} \quad (2.10)$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$  は時間に関する微分を示し、 $S_{ij}$  および  $\varepsilon_{ij}^{vp}$  は偏差応力および粘塑性

ひずみである。  $\gamma_0$  は粘性を表す定数、  $J_2$  は偏差応力の第2不変量である。 また、  $\langle \Psi(f) \rangle$  は次の定義によるものである。

$$\begin{cases} \langle \Psi(f) \rangle = 0, & f \leq 0 \\ \quad = \Psi(f), & f > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

ここに、  $f$  は

$$f = (\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma^* \quad (2.12)$$

で、応力の超過率を示し、  $f = 0$  はミーゼスの降伏曲面を表す。また、  $\bar{\sigma}$  はミーゼスの相当応力 ( $= \sqrt{3J_2}$ ) であり、さらに応力  $\sigma^*$  はひずみ速度が十分小さい通常の引張試験における応力-ひずみ関係から得られ、一般に相当粘塑性ひずみ  $\bar{\varepsilon}^{VP}$  の関数となる。相当粘塑性ひずみは増分形で次式のように表される。

$$d\bar{\varepsilon}^{VP} = 2 \{ (d\varepsilon_{\xi}^{VP})^2 + (d\varepsilon_{\theta}^{VP})^2 + d\varepsilon_{\xi}^{VP} d\varepsilon_{\theta}^{VP} + (d\varepsilon_{\xi\theta}^{VP})^2 \}^{1/2} / \sqrt{3} \quad (2.13)$$

全ひずみが弾性ひずみ  $\{\varepsilon^e\}$  と粘塑性ひずみ  $\{\varepsilon^{VP}\}$  の和で表されるものとする、殻の理論で通常仮定される平面応力状態において、次式が成り立つ。

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}^e\} + \{\dot{\varepsilon}^{VP}\} \quad (2.14)$$

ただし

$$\{\dot{\varepsilon}^e\}^T = \{\dot{\varepsilon}_{\xi}^e, \dot{\varepsilon}_{\theta}^e, \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^e\}, \quad \{\dot{\varepsilon}^{VP}\}^T = \{\dot{\varepsilon}_{\xi}^{VP}, \dot{\varepsilon}_{\theta}^{VP}, \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^{VP}\}$$

弾性ひずみは Hooke の法則により、次の関係式を満たしている。

$$\{\dot{\varepsilon}^e\} = [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} \quad (2.15)$$

ただし

$$\{\dot{\sigma}\}^T = \{\dot{\sigma}_{\xi}, \dot{\sigma}_{\theta}, \dot{\sigma}_{\xi\theta}\}, \quad [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$E$ 、 $\nu$  は縦弾性率およびポアソン比である。式(2.10)を書き改めると次式のようになる。

$$\{\dot{\varepsilon}^{VP}\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_0 \langle \Psi \left( \frac{\bar{\sigma} - \sigma^*}{\sigma^*} \right) \rangle \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \{\sigma\} \quad (2.17)$$

式(2.14)に式(2.8),(2.15)を代入し  $\{\sigma\}$  について解くと、次式が得られる。

$$\{\dot{\sigma}\} = [D] [\{\dot{\varepsilon}_m\} + \zeta \{\dot{\kappa}\}] - \{\dot{\sigma}^{VP}\} \quad (2.18)$$

ここに、  $\{\sigma^{VP}\}$  は粘塑性ひずみによるみかけの応力で、次式で表される。

$$\{\dot{\sigma}^{VP}\} = [D] \{\dot{\varepsilon}^{VP}\} \quad (2.19)$$

殻の単位長さ当りの合応力、合モーメント成分と中央面のひずみ、曲率の変化量との関係、また式(2.5)~(2.7)を用いて変位成分との関係を得るために、式(2.18)を用いて殻厚方向に積分を行うと、合応力および合モーメントは次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}_\xi, \dot{N}_\theta, \dot{N}_{\xi\theta}\}^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}\} d\zeta = h [D] \{\dot{\epsilon}_m\} - \{\dot{N}_\xi^{vp}, \dot{N}_\theta^{vp}, \dot{N}_{\xi\theta}^{vp}\}^T \\ \{\dot{M}_\xi, \dot{M}_\theta, \dot{M}_{\xi\theta}\}^T &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}\} \zeta d\zeta = \frac{h^3}{12} [D] \{\dot{\kappa}\} - \{\dot{M}_\xi^{vp}, \dot{M}_\theta^{vp}, \dot{M}_{\xi\theta}^{vp}\}^T \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

ここで、 $\dot{N}_\xi^{vp}$ 、 $\dot{N}_\theta^{vp}$ 、 $\dot{N}_{\xi\theta}^{vp}$  および  $\dot{M}_\xi^{vp}$ 、 $\dot{M}_\theta^{vp}$ 、 $\dot{M}_{\xi\theta}^{vp}$  は粘塑性によるみかけの合応力および合モーメントの変化率であり、次式によってみかけの応力変化率から計算できる。なお、 $h$  は殻厚である。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}_\xi^{vp}, \dot{N}_\theta^{vp}, \dot{N}_{\xi\theta}^{vp}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\xi^{vp}, \dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp}\} d\zeta \\ \{\dot{M}_\xi^{vp}, \dot{M}_\theta^{vp}, \dot{M}_{\xi\theta}^{vp}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\xi^{vp}\zeta, \dot{\sigma}_\theta^{vp}\zeta, \dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp}\zeta\} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

以上で32個の未知数  $\dot{N}_\xi$ 、 $\dot{N}_\theta$ 、 $\dot{N}_{\xi\theta}$ 、 $\dot{M}_\xi$ 、 $\dot{M}_\theta$ 、 $\dot{M}_{\xi\theta}$ 、 $\dot{U}_\xi$ 、 $\dot{U}_\theta$ 、 $\dot{W}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\xi m}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\theta m}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\xi\theta m}$ 、 $\dot{\kappa}_\xi$ 、 $\dot{\kappa}_\theta$ 、 $\dot{\kappa}_{\xi\theta}$ 、 $\dot{\phi}_\xi$ 、 $\dot{\phi}_\theta$ 、 $\dot{\sigma}_\xi$ 、 $\dot{\sigma}_\theta$ 、 $\dot{\sigma}_{\xi\theta}$ 、 $\dot{\sigma}_\xi^{vp}$ 、 $\dot{\sigma}_\theta^{vp}$ 、 $\dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_\xi^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_\theta^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{N}_\xi^{vp}$ 、 $\dot{N}_\theta^{vp}$ 、 $\dot{N}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{M}_\xi^{vp}$ 、 $\dot{M}_\theta^{vp}$ 、 $\dot{M}_{\xi\theta}^{vp}$  に対して、式(2.2)、(2.5)~(2.7)、(2.17)~(2.21)の32個の式が用意されたことになる。

## 2. 2 フーリエ級数展開と無次元方程式

一般に非軸対称曲げ問題を解析するには、各変数を  $\theta$  方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。そこで上に示した32個の変数のうち  $\dot{\epsilon}_\xi^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_\theta^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{vp}$  を除く29個の変数および分布荷重を次のようにフーリエ級数で表す。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}_\xi, \dot{N}_\xi^{vp}, \dot{N}_\theta, \dot{N}_\theta^{vp}\} &= \sigma_0 h \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{n}_\xi^{(n)}, \dot{n}_\xi^{vp(n)}, \dot{n}_\theta^{(n)}, \dot{n}_\theta^{vp(n)}\} \cos n\theta \\ \{\dot{N}_{\xi\theta}, \dot{N}_{\xi\theta}^{vp}\} &= \sigma_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \{\dot{n}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{vp(n)}\} \sin n\theta \\ \{\dot{M}_\xi, \dot{M}_\xi^{vp}, \dot{M}_\theta, \dot{M}_\theta^{vp}\} &= \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{m}_\xi^{(n)}, \dot{m}_\xi^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)}\} \cos n\theta \\ \{\dot{M}_{\xi\theta}, \dot{M}_{\xi\theta}^{vp}\} &= \frac{\sigma_0 h^3}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \{\dot{m}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{vp(n)}\} \sin n\theta \\ \{\dot{U}_\xi, \dot{W}, \dot{\epsilon}_{\xi m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\kappa}_\xi, \dot{\kappa}_\theta, \dot{\phi}_\xi\} &= \frac{\sigma_0}{E} \sum_{n=0}^{\infty} \{a \dot{u}_\xi^{(n)}, a \dot{w}^{(n)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$



$$\left. \begin{aligned}
& \dot{e}_{\xi m}^{(n)}, \dot{e}_{\theta m}^{(n)}, \frac{k_{\xi}^{(n)}}{a}, \frac{k_{\theta}^{(n)}}{a}, \dot{\varphi}_{\xi}^{(n)} \} \cos n\theta \\
\{\dot{U}_{\theta}, \dot{e}_{\xi \theta m}, \dot{k}_{\xi \theta}, \dot{\Phi}_{\theta}\} &= \frac{\sigma_0}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a \dot{u}_{\theta}^{(n)}, \dot{e}_{\xi \theta m}^{(n)}, \frac{k_{\xi \theta}^{(n)}}{a}, \dot{\varphi}_{\theta}^{(n)} \right\} \sin n\theta \\
\{\dot{\sigma}_{\xi}, \dot{\sigma}_{\xi}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta}, \dot{\sigma}_{\theta}^{vp}, \dot{P}_{\xi}, \dot{P}_{\zeta}\} &= \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \dot{s}_{\xi}^{(n)}, \dot{s}_{\xi}^{(n)vp}, \dot{s}_{\theta}^{(n)} \right. \\
& \left. \dot{s}_{\theta}^{(n)vp}, \frac{h}{a} \dot{p}_{\xi}^{(n)}, \frac{h}{a} \dot{p}_{\zeta}^{(n)} \right\} \cos n\theta \\
\{\dot{\sigma}_{\xi \theta}, \dot{\sigma}_{\xi \theta}^{vp}, \dot{P}_{\theta}\} &= \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \dot{s}_{\xi \theta}^{(n)}, \dot{s}_{\xi \theta}^{(n)vp}, \frac{h}{a} \dot{p}_{\theta}^{(n)} \right\} \sin n\theta
\end{aligned} \right\}$$

ただし、 $\sigma_0$  は代表応力である。式(2.22)は、 $\theta = 0^\circ$ の子午線面に対して面对称な荷重が作用する場合であるが、より一般性を持たせるには、各フーリエ展開式において  $\sin$  で表されているものには  $\cos$  の級数を、 $\cos$  で表されているものには  $\sin$  の級数を付加する。

次に、これらのフーリエ展開式を32個の基礎式に代入する。まず、平衡方程式(2.2)は

$$\left. \begin{aligned}
& \dot{n}_{\xi}' + \gamma (\dot{n}_{\xi} - \dot{n}_{\theta}) + (n/\rho) \dot{\bar{n}}_{\xi \theta} + \lambda^2 \{ \omega_{\xi} \dot{m}_{\xi}' + \gamma \omega_{\xi} (\dot{m}_{\xi} - \dot{m}_{\theta}) \\
& + (n/2\rho) (3\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \dot{\bar{m}}_{\xi \theta} \} + \dot{p}_{\xi} = 0 \\
& \dot{\bar{n}}_{\xi \theta}' + 2\gamma \dot{\bar{n}}_{\xi \theta} - (n/\rho) \dot{n}_{\theta} + \lambda^2 \{ - (n/\rho) \omega_{\theta} \dot{m}_{\theta} + 0.5 (3\omega_{\theta} \\
& - \omega_{\xi}) \dot{\bar{m}}_{\xi \theta}' + 0.5 [\gamma (3\omega_{\theta} + \omega_{\xi}) - \omega_{\xi}'] \dot{\bar{m}}_{\xi \theta} \} + \dot{p}_{\theta} = 0 \\
& - \omega_{\xi} \dot{n}_{\xi} - \omega_{\theta} \dot{n}_{\theta} + \lambda^2 \{ \dot{m}_{\xi}'' + 2\gamma \dot{m}_{\xi}' - \omega_{\xi} \omega_{\theta} \dot{m}_{\xi} + [\omega_{\xi} \omega_{\theta} - (n/\rho)^2] \dot{m}_{\theta} \\
& - \gamma \dot{m}_{\theta}' + (2n/\rho) \dot{\bar{m}}_{\xi \theta}' + (2\gamma n/\rho) \dot{\bar{m}}_{\xi \theta} \} + \dot{p}_{\xi} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

ここに、 $\lambda = h/a$ であり、フーリエ係数の添字 ( $n$ ) は便宜上省略する。

式(2.5)~(2.7)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
& \dot{e}_{\xi m} = \dot{u}_{\xi}' + \omega_{\xi} \dot{w}, \quad \dot{e}_{\theta m} = (n/\rho) \dot{u}_{\theta} + \gamma \dot{u}_{\xi} + \omega_{\theta} \dot{w} \\
& \dot{e}_{\xi \theta m} = (1/2) \{ \dot{u}_{\theta}' - \gamma \dot{u}_{\theta} - (n/\rho) \dot{u}_{\xi} \} \\
& \dot{k}_{\xi} = \dot{\varphi}_{\xi}', \quad \dot{k}_{\theta} = (n/\rho) \dot{\varphi}_{\theta} + \gamma \dot{\varphi}_{\xi} \\
& \dot{k}_{\xi \theta} = (1/2) \{ - (n/\rho) \dot{\varphi}_{\xi} + \dot{\varphi}_{\theta}' - \gamma \dot{\varphi}_{\theta} + (1/2) (\omega_{\theta} \\
& - \omega_{\xi}) [ (n/\rho) \dot{u}_{\xi} + \dot{u}_{\theta}' + \gamma \dot{u}_{\theta}] \} \\
& \dot{\varphi}_{\xi} = -\dot{w}' + \omega_{\xi} \dot{u}_{\xi}, \quad \dot{\varphi}_{\theta} = (n/\rho) \dot{w} + \omega_{\theta} \dot{u}_{\theta}
\end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

式(2.20)は、

$$\left. \begin{aligned}
& \dot{n}_{\xi} = b (\dot{e}_{\xi m} + \nu \dot{e}_{\theta m}) - \dot{n}_{\xi}^{vp}, \quad \dot{n}_{\theta} = b (\dot{e}_{\theta m} + \nu \dot{e}_{\xi m}) - \dot{n}_{\theta}^{vp} \\
& \dot{\bar{n}}_{\xi \theta} = b (1 - \nu) \dot{e}_{\xi \theta m} - \dot{\bar{n}}_{\xi \theta}^{vp}, \quad \dot{m}_{\xi} = d (\dot{k}_{\xi} + \nu \dot{k}_{\theta}) - \dot{m}_{\xi}^{vp} \\
& \dot{m}_{\theta} = d (\dot{k}_{\theta} + \nu \dot{k}_{\xi}) - \dot{m}_{\theta}^{vp}, \quad \dot{\bar{m}}_{\xi \theta} = d (1 - \nu) \dot{k}_{\xi \theta} - \dot{\bar{m}}_{\xi \theta}^{vp}
\end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

ここで、 $b = 1/(1-\nu^2)$ 、 $d = 1/\{12(1-\nu^2)\}$  である。

式(2.24)、(2.25)を式(2.23)に代入すると、 $\dot{u}_\xi$ 、 $\dot{u}_\theta$ 、 $\dot{w}$  の3変数に関する三元連立微分方程式が導かれるが、 $\dot{w}$  の4階の導関数が現れ、差分法による数値計算の精度上好ましくない。そこで、 $\dot{u}_\xi$ 、 $\dot{u}_\theta$ 、 $\dot{w}$  の他に $\dot{m}_\xi$  を未知数として残し、 $\dot{u}_\xi$ 、 $\dot{u}_\theta$ 、 $\dot{w}$ 、 $\dot{m}_\xi$  に関する四元連立二階微分方程式を導く。まず式(2.25)<sub>4,5</sub> より $k_\xi$ を消去すると

$$\dot{m}_\theta = \nu \dot{m}_\xi + d(1-\nu^2) \dot{k}_\theta + \nu \dot{m}_\xi^{vp} - \dot{m}_\theta^{vp} \quad (2.26)$$

式(2.23)に式(2.25)、(2.26)を代入し、式(2.24)を用いてひずみと曲率の変化量を消去すると、3つの式が得られる。残りの1つは、式(2.25)<sub>4</sub> の $\dot{m}_\xi$  を $\dot{u}_\xi$ 、 $\dot{u}_\theta$ 、 $\dot{w}$  で表すことにより得られる。以上より次式が得られる。

$$A_1 \mathbf{z}'' + A_2 \mathbf{z}' + A_3 \mathbf{z} = A_4 \mathbf{N}' + A_5 \mathbf{N} + A_6 \mathbf{M}' + A_7 \mathbf{M} + A_8 \mathbf{P} \quad (2.27)$$

ここで、 $\mathbf{z}$ 、 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{P}$ は、

$$\mathbf{z} = \{ \dot{u}_\xi^{(n)}, \dot{u}_\theta^{(n)}, \dot{w}^{(n)}, \dot{m}_\xi^{(n)} \}^T, \quad \mathbf{P} = \{ \dot{p}_\xi^{(n)}, \dot{p}_\theta^{(n)}, \dot{p}_\xi^{(n)}, 0 \}^T$$

$$\mathbf{N} = \{ \dot{n}_\xi^{vp(n)}, \dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{vp(n)}, 0 \}^T$$

$$\mathbf{M} = \{ \dot{m}_\xi^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{vp(n)}, 0 \}^T$$

であり、 $A_1 \sim A_8$ は殻の形状と材質によって定まる $4 \times 4$ の行列で、次式で表される。

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{15} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{24} & a_{27} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & a_4 & a_6 & a_8 \\ a_{10} & a_{13} & a_{16} & 0 \\ a_{19} & a_{22} & a_{25} & a_{28} \\ a_{30} & 0 & a_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_3 & a_5 & a_7 & a_9 \\ a_{11} & a_{14} & a_{17} & a_{18} \\ a_{20} & a_{23} & a_{26} & a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} & a_{36} \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & 0 \\ 0 & c_9 & c_{11} & 0 \\ c_{17} & c_{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{14} & 0 \\ c_{19} & c_{21} & c_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} c_5 & c_6 & c_7 & 0 \\ c_{12} & c_{13} & c_{15} & 0 \\ c_{20} & c_{22} & c_{24} & 0 \\ c_{26} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_8 = \begin{bmatrix} c_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_1 \sim A_3$ は、Budianskyらが導いた弾性殻理論 [68] に対するものと一致する。また式(2.27)の右辺は、殻の形状の他に荷重と粘塑性によるみかけの内力成分から定まる定数である。 $a_1 \sim a_{36}$  および  $c_1 \sim c_{26}$ を付録2.1に示す。

次に、式(2.25)は式(2.27)の解  $\mathbf{z}$  で次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \dot{n}_\xi &= b \left[ \dot{u}_\xi' + \nu \gamma \dot{u}_\xi + \frac{\nu n}{\rho} \dot{u}_\theta + (\omega_\xi + \nu \omega_\theta) \dot{w} \right] - \dot{n}_\xi^{\nu p} \\ \dot{n}_\theta &= b \left[ \nu \dot{u}_\xi' + \gamma \dot{u}_\xi + \frac{n}{\rho} \dot{u}_\theta + (\omega_\theta + \nu \omega_\xi) \dot{w} \right] - \dot{n}_\theta^{\nu p}, \quad \dot{\hat{n}}_{\xi\theta} = \frac{1}{2} b (1-\nu) \left[ -\frac{n}{\rho} \dot{u}_\xi + \dot{u}_\theta' - \gamma \dot{u}_\theta \right] - \dot{\hat{n}}_{\xi\theta}^{\nu p} \\ \dot{m}_\theta &= d(1-\nu^2) \left[ \gamma \omega_\xi \dot{u}_\xi + \frac{n}{\rho} \omega_\theta \dot{u}_\theta - \gamma \dot{w}' + \left( \frac{n}{\rho} \right)^2 \dot{w} \right] + \nu \dot{m}_\xi + \nu \dot{m}_\xi^{\nu p} - \dot{m}_\theta^{\nu p} \\ \dot{\hat{m}}_{\xi\theta} &= \frac{1}{4} d(1-\nu) \frac{n}{\rho} (\omega_\theta - 3\omega_\xi) \dot{u}_\xi + \frac{1}{4} d(1-\nu) (3\omega_\theta - \omega_\xi) \dot{u}_\theta' \\ &\quad + \frac{1}{4} d(1-\nu) \gamma (\omega_\xi - 3\omega_\theta) \dot{u}_\theta + d(1-\nu) \frac{n}{\rho} \dot{w}' - d(1-\nu) \frac{n\gamma}{\rho} \dot{w} - \dot{\hat{m}}_{\xi\theta}^{\nu p} \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

また、式(2.18)と式(2.20)からひずみと曲率の変化量を消去し、応力をフーリエ級数表示することにより、応力は内力成分から次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_\xi &= \dot{n}_\xi + \dot{n}_\xi^{\nu p} + 12 \frac{\zeta}{a} (\dot{m}_\xi + \dot{m}_\xi^{\nu p}) - \dot{s}_\xi^{\nu p}, \quad \dot{s}_\theta = \dot{n}_\theta + \dot{n}_\theta^{\nu p} + 12 \frac{\zeta}{a} (\dot{m}_\theta + \dot{m}_\theta^{\nu p}) - \dot{s}_\theta^{\nu p} \\ \dot{s}_{\xi\theta} &= \dot{\hat{n}}_{\xi\theta} + \dot{\hat{n}}_{\xi\theta}^{\nu p} + 12 \frac{\zeta}{a} (\dot{\hat{m}}_{\xi\theta} + \dot{\hat{m}}_{\xi\theta}^{\nu p}) - \dot{s}_{\xi\theta}^{\nu p} \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

式(2.27)～(2.30)の粘塑性に関する内力成分の変化率の各フーリエ係数は、式(2.19)、(2.21)、(2.22)からそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{\hat{n}}_\xi^{(n)\nu p}, \dot{\hat{m}}_\xi^{(n)\nu p} \} \cos n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} (\dot{\epsilon}_\xi^{\nu p} + \nu \dot{\epsilon}_\theta^{\nu p}) d\zeta \\ \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{\hat{n}}_\theta^{(n)\nu p}, \dot{\hat{m}}_\theta^{(n)\nu p} \} \cos n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} (\dot{\epsilon}_\theta^{\nu p} + \nu \dot{\epsilon}_\xi^{\nu p}) d\zeta \\ \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{\hat{n}}_{\xi\theta}^{(n)\nu p}, \dot{\hat{m}}_{\xi\theta}^{(n)\nu p} \} \sin n\theta &= \frac{E}{h} \frac{1}{1+\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} \dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{\nu p} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{s}_{\xi}^{(n)p}, \dot{s}_{\theta}^{(n)p} \} \cos n\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\epsilon}_{\xi}^{\nu p} + \nu \dot{\epsilon}_{\theta}^{\nu p}, \dot{\epsilon}_{\theta}^{\nu p} + \nu \dot{\epsilon}_{\xi}^{\nu p}) \\ \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_{\xi\theta}^{(n)p} \sin n\theta &= \frac{E}{1+\nu} \dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{\nu p} \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

右辺の粘塑性ひずみの変化率は、応力値から式(2.17)を用いて計算できる。また積分にはシンプソンの1/3則を用いる。

### 2.3 境界条件と接続条件

境界で式(2.27)の解  $\dot{u}_{\xi}$ ,  $\dot{u}_{\theta}$ ,  $\dot{w}$ ,  $\dot{m}_{\xi}$  の値が直接与えられる場合には問題はないが、他の量の値が与えられるときには、これを式(2.27)の解で表さなければならない。

Sanders, Jr. の殻理論によれば、境界  $s=0$  または  $s=\bar{s}$  における単位長さ当りの仮想仕事は次式により与えられる [32]。

$$\pm (N_{\xi} U_{\xi} + \hat{N}_{\xi\theta} U_{\theta} + \hat{Q}_{\xi} W + M_{\xi} \Phi_{\xi}) \quad (2.33)$$

前節と同様に、 $\hat{N}_{\xi\theta}$  と  $\hat{Q}_{\xi}$  もフーリエ級数で表すと、

$$\dot{\hat{N}}_{\xi\theta} = \sigma_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\hat{n}}_{\xi\theta} \sin n\theta, \quad \dot{\hat{Q}}_{\xi} = \sigma_0 h \sum_{n=0}^{\infty} \dot{\hat{q}}_{\xi} \cos n\theta \quad (2.34)$$

となり、式(2.4)に式(2.22)と(2.34)を代入して、各フーリエ係数の関係を導くと、

$$\dot{\hat{n}}_{\xi\theta} = \dot{\hat{n}}_{\xi\theta} + \frac{\lambda^2}{2} (3\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) \dot{m}_{\xi\theta}, \quad \dot{\hat{q}}_{\xi} = \lambda^2 \left[ \dot{m}_{\xi}' + \gamma (\dot{m}_{\xi} - \dot{m}_{\theta}) + \frac{2n}{\rho} \dot{m}_{\xi\theta} \right] \quad (2.35)$$

従って、 $\dot{\hat{n}}_{\xi}$ ,  $\dot{\hat{n}}_{\xi\theta}$ ,  $\dot{\hat{q}}_{\xi}$ ,  $\dot{\hat{\phi}}_{\xi}$  を式(2.27)の解  $\dot{u}_{\xi}$ ,  $\dot{u}_{\theta}$ ,  $\dot{w}$ ,  $\dot{m}_{\xi}$  で表すと、次のようになる。

$$\mathbf{y} = B_1 \mathbf{z}' + B_2 \mathbf{z} + B_3 \mathbf{N} + B_4 \mathbf{M} \quad (2.36)$$

ここで、 $\mathbf{y}$ ,  $B_1 \sim B_4$  は

$$\mathbf{y} = \{ \dot{\hat{n}}_{\xi}, \dot{\hat{n}}_{\xi\theta}, \dot{\hat{q}}_{\xi}, \dot{\hat{\phi}}_{\xi} \}^T$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_6 & b_8 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{13} & b_{15} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ b_5 & b_7 & b_9 & 0 \\ b_{10} & b_{12} & b_{14} & b_{16} \\ \omega_{\xi} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ d_4 & d_5 & d_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここに  $b_1 \sim b_{16}$  は殻の形状と  $\nu$  の値によって定まる係数であり [68]、また式(2.36)の  $B_3 \mathbf{N}$ 、 $B_4 \mathbf{M}$  は、これらと粘塑性ひずみから定まる定数項である。係数  $b_1 \sim b_{16}$  および  $d_1 \sim d_6$  を付録2.2に示す。

次に曲率が不連続のところでは、式(2.27)を差分近似する際にその係数が不連続になり、式(2.27)は成立しなくなる。従ってここでは次のような接続条件を使う。まず接続点の幾何学的適合条件から

$$\dot{u}_\xi^+ = \dot{u}_\xi^-, \quad \dot{u}_\theta^+ = \dot{u}_\theta^-, \quad \dot{w}^+ = \dot{w}^-, \quad \dot{\phi}_\xi^+ = \dot{\phi}_\xi^- \quad (2.38)$$

また平衡条件から

$$\dot{n}_\xi^+ = \dot{n}_\xi^-, \quad \dot{\hat{n}}_{\xi\theta}^+ = \dot{\hat{n}}_{\xi\theta}^-, \quad \dot{\hat{q}}_\xi^+ = \dot{\hat{q}}_\xi^-, \quad \dot{m}_\xi^+ = \dot{m}_\xi^- \quad (2.39)$$

ここで、添字+-は接続点の両側の各量を区別するために用いている。

## 2.4 基礎方程式の差分近似と数値計算法

ある任意の計算段階における内力と変位の変化率は、式(2.27)を適当な境界条件のもとで解けば得られることになるが、これを厳密に理論解析することは困難なので、差分法によって数値的に解を求める。

図2.1のように、子午線方向の座標  $s$  の領域  $(0, \bar{s})$  において、 $p$  個の不連続点が  $s = s_1, s_2, \dots, s_p$  に存在するものとする。この不連続点によって分けられた領域  $(0, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_p, \bar{s})$  をそれぞれ  $N_1 - 1, N_2 - 1, \dots, N_{p+1} - 1$  個に等分割し、これらの分割点(差分点)に  $s = 0$  を  $i = 1$  として順番に通し番号をつける。不連続点では図2.1のように二つの差分点番号を持たせると、 $s = \bar{s}$  における差分点番号は  $i = N_1 + N_2 + \dots + N_{p+1} \equiv N$  となる。各部分領域における  $s$  の無次元量  $\xi$  の増分はそれぞれ次のようになる。

$$\Delta_1 = s_1/a(N_1 - 1), \quad \Delta_2 = (s_2 - s_1)/a(N_2 - 1), \quad \dots, \quad \Delta_{p+1} = (\bar{s} - s_p)/a(N_{p+1} - 1) \quad (2.40)$$

差分点  $i$  における諸量を  $\mathbf{z}_i$  とすると、接続点および  $i = 1, N$  の境界を除く差分点においては、その導関数として次の差分式を用いる。

$$\mathbf{z}_i' = \frac{\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_{i-1}}{2\Delta}, \quad \mathbf{z}_i'' = \frac{\mathbf{z}_{i+1} - 2\mathbf{z}_i + \mathbf{z}_{i-1}}{\Delta^2} \quad (2.41)$$

境界点 ( $i = 1, N$ ) および不連続点 (たとえば  $i = m, m+1$ ) に対しては、その誤差が式(2.41)と同程度になるように、次に示す3点の境界差分式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}_1' &= \frac{-3\mathbf{z}_1 + 4\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3}{2\Delta_1}, & \mathbf{z}_N' &= \frac{3\mathbf{z}_N - 4\mathbf{z}_{N-1} + \mathbf{z}_{N-2}}{2\Delta_N} \\ \mathbf{z}_m' &= \frac{3\mathbf{z}_m - 4\mathbf{z}_{m-1} + \mathbf{z}_{m-2}}{2\Delta^-}, & \mathbf{z}_{m+1}' &= \frac{-3\mathbf{z}_{m+1} + 4\mathbf{z}_{m+2} - \mathbf{z}_{m+3}}{2\Delta^+} \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

ここに、 $\Delta^-$ 、 $\Delta^+$  は接続点の前後の差分間隔を示す。これらの差分式を式(2.27)および境界条件式、接続条件式に用いると、 $\mathbf{z}_i$  に関する  $N$  元一次連立方程式が得られる。

まず接続点および  $i = 1, N$  の境界を除く差分点に対しては、式(2.27)に式(2.41)を代入してマトリックス表示すると、次式が得られる。

$$A_i \mathbf{z}_{i-1} + B_i \mathbf{z}_i + C_i \mathbf{z}_{i+1} = D_i \quad (2.43)$$

ここで、 $A_i$ 、 $B_i$ 、 $C_i$  および  $D_i$  はそれぞれ  $(4 \times 4)$  および  $(4 \times 1)$  のマトリックスであり、式(2.27)の係数マトリックス  $A_1 \sim A_8$  を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} A_i &= 2A_1 - \Delta A_2, & B_i &= -4A_1 + 2\Delta^2 A_3, & C_i &= 2A_1 + \Delta A_2 \\ D_i &= -\Delta A_4 \mathbf{N}_{i-1} + 2\Delta^2 A_5 \mathbf{N}_i + \Delta A_4 \mathbf{N}_{i+1} - \Delta A_6 \mathbf{M}_{i-1} + 2\Delta^2 A_7 \mathbf{M}_i \\ &\quad + \Delta A_6 \mathbf{M}_{i+1} + 2\Delta^2 A_8 \mathbf{P}_i \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

接続点 ( $i = m, m+1$ ) では、接続条件式 (幾何学的適合条件と平衡条件) に式(2.42)を用いると、

$$\left. \begin{aligned} A_m \mathbf{z}_{m-2} + B_m \mathbf{z}_{m-1} + C_m \mathbf{z}_m + D_{m+1} \mathbf{z}_{m+1} + E_{m+1} \mathbf{z}_{m+2} + F_{m+1} \mathbf{z}_{m+3} &= 0 \\ G_m \mathbf{z}_{m-2} + H_m \mathbf{z}_{m-1} + I_m \mathbf{z}_m + J_{m+1} \mathbf{z}_{m+1} + K_{m+1} \mathbf{z}_{m+2} + L_{m+1} \mathbf{z}_{m+3} &= M_{m+1} \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

ここで、 $A_m \sim L_{m+1}$  および  $M_{m+1}$  はそれぞれ  $(4 \times 4)$  および  $(4 \times 1)$  のマトリックスであり、式(2.36)の係数マトリックスを用いて、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} A_m, B_m, E_{m+1}, F_{m+1} &: \text{零マトリックス}, & C_m &: \text{単位マトリックス} \\ D_{m+1} &= -C_m, & G_m &= -0.5 (B_1)_m / \Delta_m, & H_m &= 2 (B_1)_m / \Delta_m \\ I_m &= -1.5 (B_1)_m / \Delta_m - (B_2)_m \\ J_{m+1} &= -1.5 (B_1)_{m+1} / \Delta_{m+1} + (B_2)_{m+1} \\ K_{m+1} &= 2 (B_1)_{m+1} / \Delta_{m+1}, & L_{m+1} &= -0.5 (B_1)_{m+1} / \Delta_{m+1} \\ M_{m+1} &= (B_3)_m \mathbf{N}_m - (B_3)_{m+1} \mathbf{N}_{m+1} + (B_4)_m \mathbf{M}_m - (B_4)_{m+1} \mathbf{M}_{m+1} \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

境界  $s = 0$  ( $i = 1$ ) と  $s = \bar{s}$  ( $i = N$ ) では、境界条件は一般に次の形で与えられる。

$$A_1 z_1 + B_1 z_2 + C_1 z_3 = D_1, \quad A_N z_{N-2} + B_N z_{N-1} + C_N z_N = D_N \quad (2.47)$$

式(2.43), (2.45), (2.47)は、 $z_i (i=1 \sim N)$ に関する $N$ 元連立方程式を構成している。

以上は、ある任意の計算段階における解の変化率の計算であるが、一般に弾/粘塑性問題の解は、各段階の解の増分を積分することによって得られる。

以上まとめると、軸対称殻の弾/粘塑性問題の計算手順は次のようになる。

- (1) 与えられた殻の形状と荷重に対して、式(2.43), (2.45), (2.47)の( )を取り去り、粘塑性に関する項を除いて弾性計算を行い、殻の弾性限を求める。
- (2) 次に適当な荷重増分を与え、これに対する弾性解を求め、式(2.12)によって各点の $f$ の値を調べて降伏の判定を行う。降伏した部分に対しては、式(2.17)を用いて粘塑性ひずみ増分を計算する。この際、微小時間 $\Delta t_j$ の間、応力は一定であると仮定する。
- (3) 次に、この粘塑性ひずみ増分を式(2.31)の右辺に代入し、フーリエ展開によって $\dot{n}_\xi^{vp(m)} \sim \dot{m}_\xi^{vp(m)}$ の値を求め、式(2.43), (2.45), (2.47)の定数を決定する。降伏していない部分では、粘塑性ひずみ増分に関する量は零となる。また、フーリエ展開の際の項数は解の収束状態を見て決定する。式(2.43), (2.45), (2.47)を解いてこの間の解の増分量を計算し、これを前の計算段階での解に加えることによって、その段階における解とする。
- (4) 得られた解(各点の応力)から再び式(2.17)を用いて、(3)に示すように次の計算段階で生じる粘塑性ひずみ増分を求め、解を計算する。
- (5) 以下(4)を繰り返す。荷重が時間によって変化する場合には、荷重-時間曲線を微小な荷重増分と時間増分によって階段状の曲線に近似し、(2)~(4)を繰り返しながら所定の計算段階まで計算を続ける。

なお、ひずみ速度は時間と共に変化するので、時間間隔 $\Delta t_j$ の選び方によっては計算の無駄や誤差が大きくなる。本計算では、Zienkiewicz およびCorneau [69]による時間間隔 $\Delta t_j$ の安定限界

$$(\Delta t)_j \leq \frac{4(1+\nu)}{3\bar{\gamma} E} \left( \frac{\sigma^*}{\Psi'} \right)_j = \Delta t_0 \quad (2.48)$$

(ここで、 $\bar{\gamma} = 2\gamma_0 / \sqrt{3}$ 、また $\Psi' = d\Psi / df$ 、 $j$ : 計算段階)を参考にし、 $(\Delta t)_j = 0.9 \Delta t_0$ とした。

## 2.5 計算例

これまで述べてきた計算方法の妥当性を検討するため、一例として最も基本的な形状で、しかも殻構造物の代表的な構成要素である円筒殻を取り上げ、両端支持部に、時間に対して階段状の曲げモーメントが作用する問題（図2.3）を取り扱う。円筒殻材料には、数値計算に必要な材料特性（とくに粘性定数）が容易に得られること、ならびに粘塑性の影響が殻の変位や内力の挙動に顕著に現われることなどを考慮して、アルミ 1100-0材を採用する。

問題の対称性から、計算は1/8形状についてのみに行えば十分である。A B間の形状諸量および $\xi$ 方向の差分間隔 $\Delta\xi$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a = R, \quad \Delta\xi = l / (2R(N-1)), \quad \rho = 1, \quad \rho' = 0, \quad \gamma = 0 \\ \omega_\theta = 1, \quad \omega_\xi = \omega_{\xi'} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

境界条件は、点Aでは対称性により

$$\dot{U}_\xi = \dot{W}' = \dot{M}_\xi' = \dot{N}_{\xi 0} = 0 \quad (2.50)$$

ただし、負荷時（ $t = t_k, k = 0, 1, 2, \dots, t_0 = 0$ ）では（ $\dot{\quad}$ ）を取り除くものとする。点

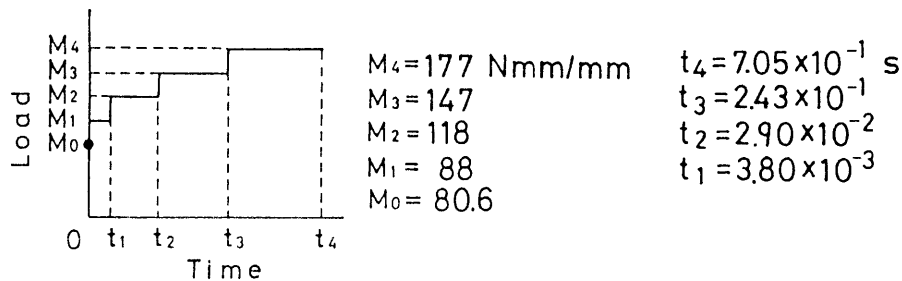
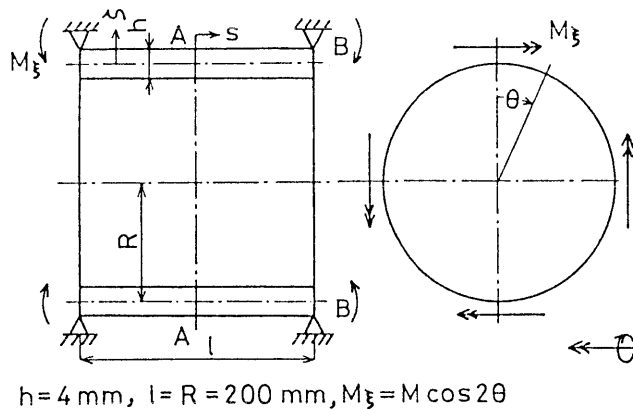


図 2.3 円筒殻と荷重



Bでは

$$\left. \begin{aligned} t = t_k \text{ (負荷時)} : M_\xi = M \cos 2\theta, U_\xi = U_\theta = W = 0 \\ t_k < t < t_{k+1} \text{ (遷移段階)} : \dot{M}_\xi = \dot{U}_\xi = \dot{U}_\theta = \dot{W} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

なお、式(2.22)の $\sigma_0$ は本計算では $\sigma_0 = 1$ とする。

材料特性はアルミ1100-O材について実験から求めた次のものを用いる [104]。

$$\left. \begin{aligned} E = 70.0 \text{ GPa}, \nu = 0.33, \text{初期降伏応力 } \sigma_Y = 26.9 \text{ MPa}, \gamma_0 = 61 \text{ 1/s} \\ \Psi(f) = ((\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma^*)^2, \sigma^* = 112 (0.00298 + \varepsilon^{VP})^{0.245} \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

図2.4に式(2.52)の特性値を用いて計算した単軸応力-ひずみ線図を示す。 $\dot{\varepsilon} = 0.1 \text{ 1/s}$ のひずみ速度でも5%程度の応力の上昇が認められる。

次に、差分点数による解の収束性を調べるため、図2.3のA B間をそれぞれ25, 50 および150等分して弾性計算を行った。その結果、解の値はそれぞれの最大値を示す位置で、 $N = 26$ と51の場合の差はほぼ1%、 $N = 51$ と151の場合の差はほぼ0.3%であることがわかった。従って計算機容量と計算時間を考慮して、 $N = 51$ を採用する。

$R/h = 50$ 、 $l/R = 2$ の形状の円筒殻の端部に $\cos n\theta$ 状の曲げモーメントが作用する場合の弾性解が、Budianskyらによって報告されている [68]。A B間を150等分し、 $n =$

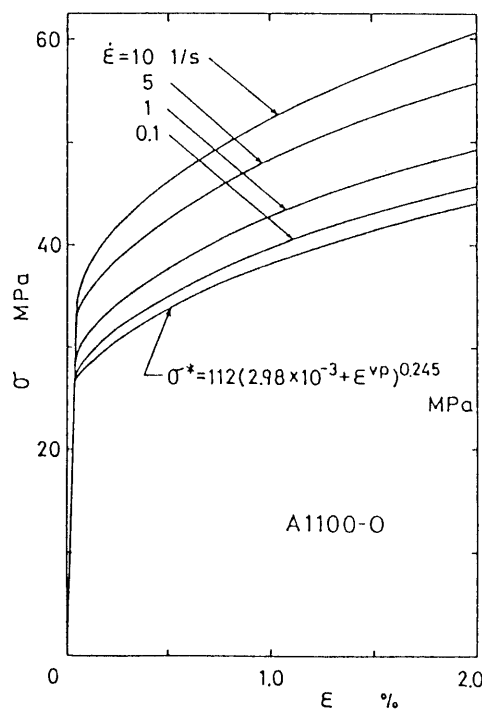


図 2.4 応力-ひずみ線図 ( $\dot{\varepsilon}$  : 一定)

0, 2, 5, 20 の各場合について、半径方向変位 $W$ と曲げモーメント $M_\xi$ の子午線方向分布が示されており、これらの解と本解法による結果を比較し、よく一致することを確認した。

また、粘塑性計算を行ってフーリエ級数の項数 [項数 $= (n+1)/2$ ] による解の収束性を検討したところ、 $n=5\sim 9$  ではまだ解にばらつきが認められるが、 $n=19, 23$  では差は僅かであり、計算機容量と計算時間を考慮して $n=19$  を採用する。解の収束性を支配する他の因子には、殻厚方向の格子点数を 19個とし、時間間隔の刻みは式(2.48)を用いて、 $(\Delta t)_j = 0.9 \Delta t_0$  とする。定常状態の判定には  $f = (\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma^* = 0.002$  を用い、 $f$  が 0.2 % になれば定常状態とみなして、次の荷重段階に移るように制御する。

## 2.6 計算結果と考察

円筒殻端部の曲げモーメントは、図2.3に示すように増分量を等しくし、4段階にわたって負荷させた。各段階において負荷の瞬間では弾性計算を行い、その後荷重を一定として十分時間が経過して定常状態に至るまで、粘塑性計算を行った。定常状態に至るまでの所要時間は $M_1\sim M_4$ の荷重段階で、各々 $3.80\times 10^{-3}$ ,  $2.52\times 10^{-2}$ ,  $2.14\times 10^{-1}$ ,  $4.62\times 10^{-1}$  sec と極めて短時間であった。より大きなひずみ速度依存性を表す材料では、所要時間はかなり長くなると思われる。図中の $M_0$ は弾性限であり、初期降伏は点B ( $\xi=0.5$ ,  $\theta=0^\circ$ ) の外面上に現れる。各荷重段階の負荷の瞬間から定常状態に至るまでの変形、内力、応力およびひずみ成分の時間的变化について考察する。

図2.5, 2.6は荷重段階  $M=M_3, M_4$  のときの負荷の瞬間(破線)と定常状態(実線)の変形および内力の分布を示す。 $M_1, M_2$ の段階では両者の差がほとんど見られないので割愛する。図2.5(a)は $\theta=0^\circ$ の子午線断面における変形状態である。点線は変位経路を示す。 $\xi=0.42$ 付近で最も大きな変位を示し、荷重が増すにつれて降伏領域が広がるため、負荷瞬間と定常状態の変形量の差が顕著になってくる。子午線方向変位 $U_\xi$ は $\xi=0.3$ 付近で最大値を示すが、半径方向変位 $W$ の約2%程度とかなり小さい。図2.5(b)は軸に垂直な断面( $\xi=0.4$ )の形状変化の様子である。 $W$ は $\theta=0^\circ$ と $90^\circ$ で絶対値が等しく最大となる。円周方向変位 $U_\theta$ は $\theta=0\sim 90^\circ$ で負の値を示し、 $\theta=45^\circ$ で絶対値が最大を示すが、 $W$ の最大値の5%程度の変位量である。図(a)は $W$ と $U_\xi$ を、図(b)は $W$ と $U_\theta$ を合成して示しているが、この程度の微小変形の範囲内では、 $W$ の分布がほぼ殻の形状を表現していると思なすことができる。負荷時と定常状態の変形量の差は、 $\theta=0^\circ$ の子午線上に沿って見られるが、 $\xi=0.4$ の断面では、 $\theta=(0^\circ, 90^\circ)\pm 15^\circ$ 付近に限られている。図2.6(a)は $\theta=0^\circ$ に

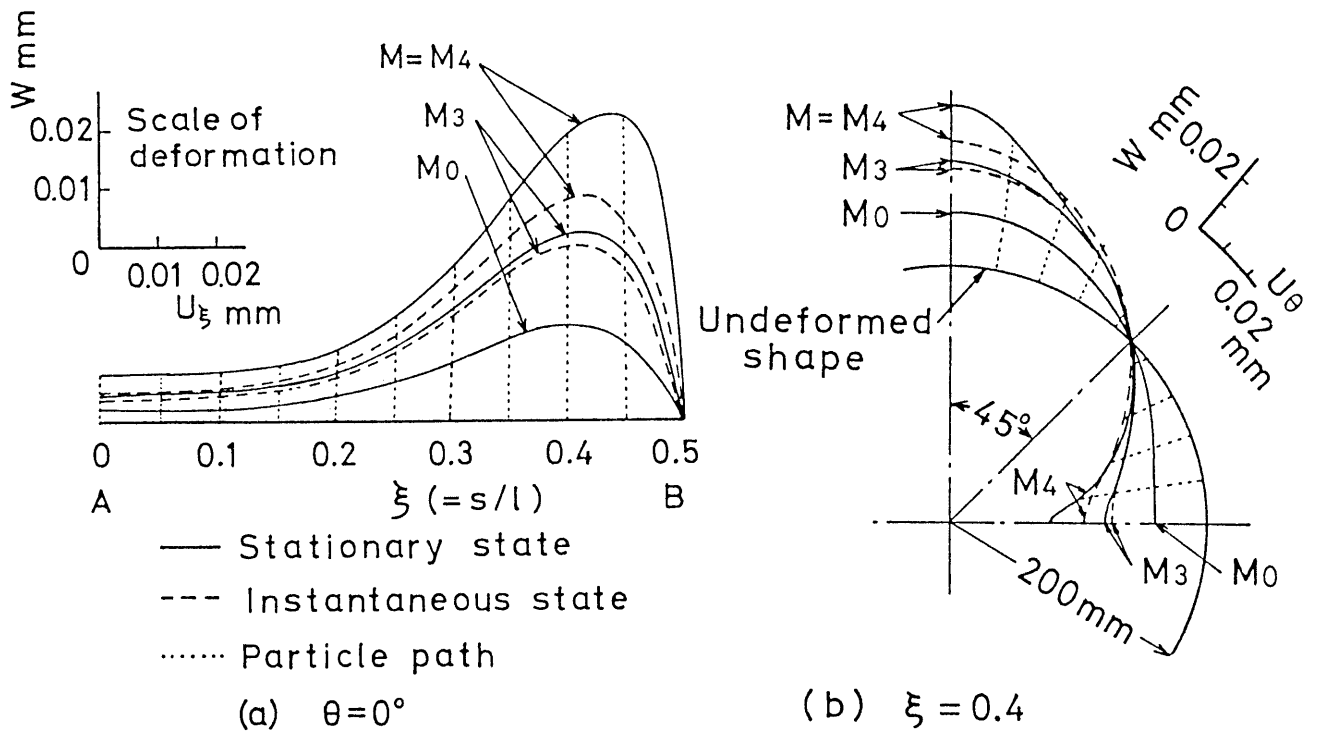


図 2.5 変形

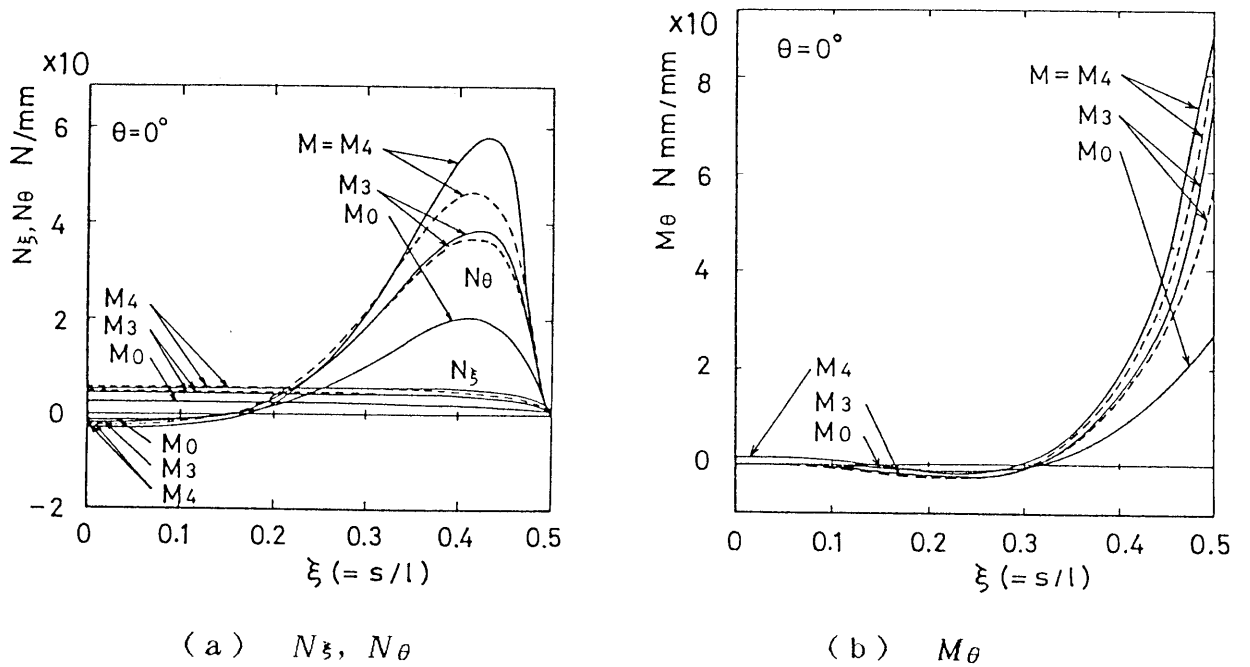


図 2.6  $N_\xi, N_\theta, M_\theta$ の子午線方向分布の時間的变化

における面内力  $N_{\xi}$ 、 $N_{\theta}$  の分布を示したものである。 $N_{\theta}$  は中央部付近で圧縮になるが、図2.5(a)の変形、すなわち  $W$  の子午線方向分布とほぼ類似の分布を示し、 $\xi = 0.42$  付近で負荷瞬間の値と定常状態の値の差が大きく現れている。しかしながら、この差は  $N_{\theta}$  の分布では図2.5(a)と異なり、 $N_{\theta}$  が最大を示す付近に限られている。 $N_{\xi}$  は一般に小さく、子午線方向にほぼ一様である。図2.6(b)は  $\theta = 0^{\circ}$  における曲げモーメント  $M_{\theta}$  の分布である。端部から離れるに従って急激に減少し、 $\xi = 0.3$  付近で負になる。また支持端付近で、負荷瞬間と定常状態の値に大きな差が現れている。図には示さなかったが、 $M_{\xi}$  の分布は  $M_{\theta}$  に類似し、大きさは2~3倍である。また負荷瞬間と定常状態の値に、あまり差は見られない。図2.5、2.6より薄肉円筒殻の場合、両端に負荷される曲げモーメントの影響は、変位、内力成分とも端部付近の  $\xi = 0.3 \sim 0.5$  に限られ、中央部付近では負荷時、定常時（定常状態に至った時刻）とも小さな値を示すことがわかる。

図2.7は降伏域の普及の様子を、また図2.8は点Bの  $\bar{\sigma}$  の殻厚方向分布を示したものである。図において破線は負荷の瞬間の値を、実線は定常状態における値を示す。 $M = M_0 (=$

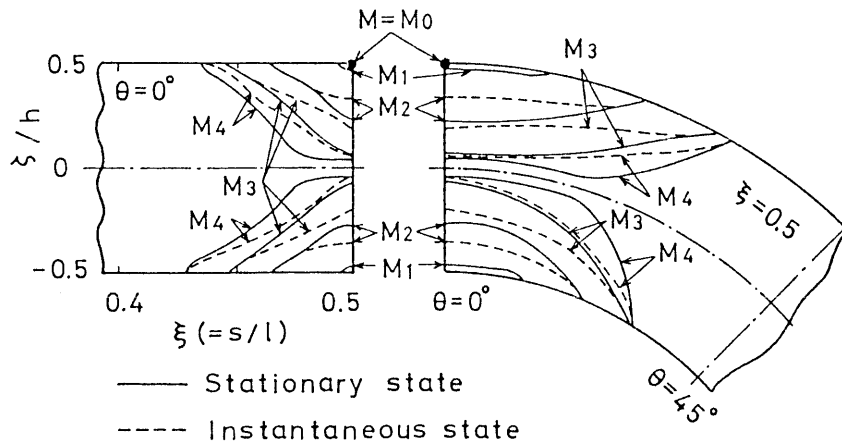


図 2.7 降伏領域の進展

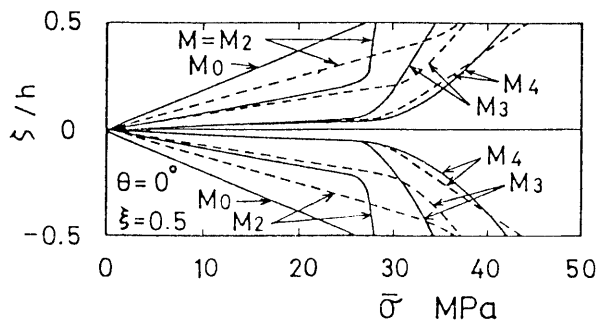


図 2.8 点Bにおける殻厚方向の  $\bar{\sigma}$  分布の時間的变化

80.6 Nmm/mm) のとき初めて降伏し、その位置は点B ( $\xi = 0.5, \theta = 0^\circ$ ) の外表面である。モーメント  $M$  とともに降伏域は殻の子午線方向、厚さ方向および円周方向に広がっていくが、子午線方向への広がり方は小さく、端部付近 ( $\xi = 0.44 \sim 0.5$ ) に限られている。また同一荷重段階における時間的変動は、主として厚さ方向に生じている。さらに中央面付近はかなり荷重が高くなっても弾性域のままである。点Bの相当応力  $\bar{\sigma}$  は、負荷瞬間から定常状態に至るまでの間に、内外面付近では減少し、殻厚中央面付近では増加しており、降伏域がモーメント  $M$  の増加とともに中央面に向かって広がっていく様子と対応している。また中央面付近では相当応力は極めて小さく、端部では曲げが支配的である。

次に荷重段階  $M = M_4$  のときの、 $\xi = 0.4$  における変位と内力成分の時間的変化を図2.9に示す。はじめ急激に変動した各成分は、その後緩やかに変化して定常状態に至っている。 $N_\xi$ 、 $\bar{N}_{\xi\theta}$ 、 $\bar{M}_{\xi\theta}$ の時間に対する変動量は比較的小さい。

図2.10は、荷重と最大ひずみ  $\varepsilon_{max}$  ( $\xi = 0.5, \theta = 0^\circ$  の外面の  $\varepsilon_\xi$ ) との関係を示したものである。荷重が高くなると、負荷瞬間のひずみに対してクリープひずみの占める割合が大きくなることがわかる。最大ひずみは  $M_4$  の定常時で1.41%を示し、この程度の荷重までは大ひずみを考慮に入れない本理論の仮定を、ほぼ満足しているものと思われる。定常状態の値を示す点を結ぶと破線のようになり、従来の塑性領域で粘性を考慮しない弾塑性

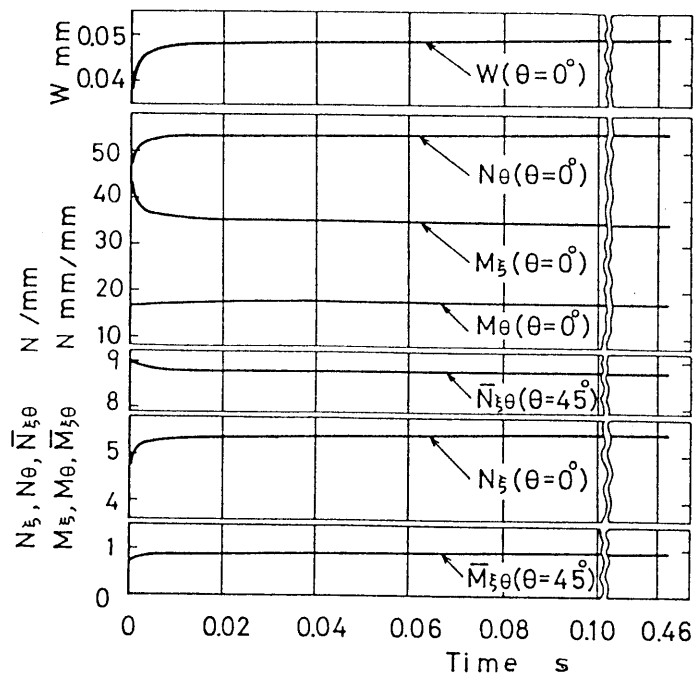


図 2.9  $\xi = 0.4$ における変位および内力成分の時間的変化 ( $M = M_4$ )

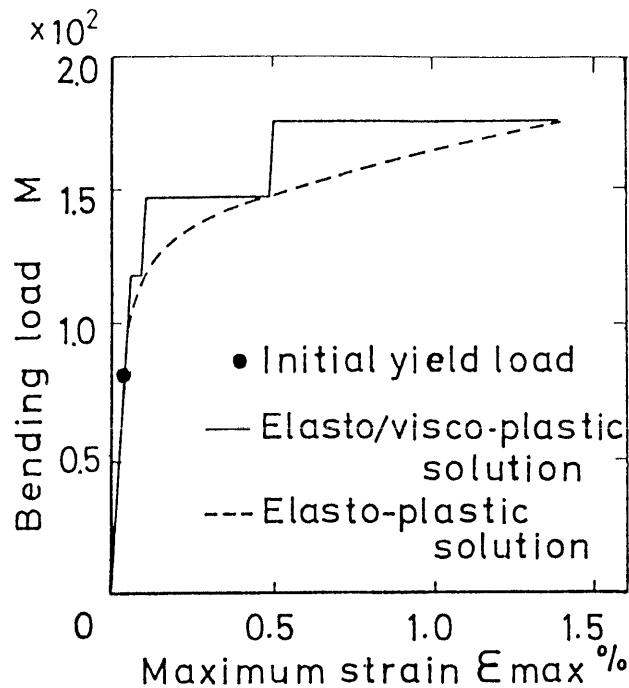


図 2.10 荷重と最大ひずみとの関係

理論による値になる。ここでは実際に弾塑性計算を行っていないが、両理論による結果が一致する事はいくつかの論文で報告されている [72,74]。

以上、計算結果をまとめると、得られる主な結論は次のようになる。

- (1) 荷重が高くなり降伏領域が広がってくると粘性の影響が顕著になり、全変形中クリープ変形の占める割合が大きくなる。
- (2) 例題では円筒殻の全長が半径に等しい場合を取り上げたが、薄肉殻の場合、両端に曲げモーメントを負荷しても、変位、内力成分は端部に近い領域で大きく現れ、中央部分はあまり影響を受けない。
- (3) 図2.4に表される程度のひずみ速度依存性を示す材料では、瞬間的に負荷してから定常時に至るまでの時間が極めて短い。ひずみ速度依存性が顕著に現われるような材料の使用、ならびに高温高圧等の環境下では、負荷時からの変位や応力等の変動が著しく大きくなることが想定される。これらの時間的履歴を把握しておくことは大切であり、粘塑性解析の重要性が認められると同時に、大ひずみ、大たわみを考慮に入れた解析手法の確立が望まれる。

計算には FACOM M-190 を使用し、本計算例の計算時間はおよそ90分である。

### 第3章 厚肉回転対称殻の準静的応答 [90,91]

原子炉や装置産業に用いられている一般の殻構造物は、近年、高温、高圧下に伴って、それに耐えるだけの厚肉化が計られている。Kirchhoff-Loveの仮説に基づく多くの薄肉殻理論（古典理論）では、殻厚方向の応力とせん断ひずみを省いているため、はりのたわみ理論におけるせん断変形の影響と同じく、殻厚が主曲率半径に対して大きくなってくると、解の精度が悪くなっていく。そこで、殻厚方向のせん断変形を考慮に入れた一般軸対称殻の微小変形線形理論が、Naghdi [37] およびReissner [39] によって、さらに殻厚方向の垂直応力も考慮に入れた理論が、同じくNaghdi [38]、Reissner [105] によって提案されている。殻厚方向の垂直応力とせん断ひずみを考慮に入れると、厚い殻の解析が可能になるが、計算はかなり煩雑になっていく。

Naghdi やReissnerの殻理論を一般軸対称殻に適用した数値解析例として、浜田ら [106] およびDas [107] らの論文が挙げられる。浜田らは、Sepetoskiらの解法 [108] にNaghdiの殻理論 [37] を導入し、球殻、円環殻および円筒殻からなる圧力容器に内圧が作用する問題を取り上げ、殻厚を種々変えて、せん断変形を考慮しない場合との比較を行っている。またDasは、Budianskyらの解法 [68] をReissner-Naghdiの線形殻理論 [38,109] に適用し、円筒殻に内圧が作用する場合と風圧を想定した余弦波状分布の外圧が作用する問題を取り上げ、Sanders, Jr.の薄肉殻理論に基づくBudianskyらの解と比較している。しかしながら、これらの論文は弾性解析を行ったものであり、粘塑性問題を取り扱った論文は少ないようである。

本章ではDasによる弾性解析を発展させて、中程度の厚さの回転対称殻に、非軸対称な荷重が作用する場合の弾／粘塑性変形問題を取り扱う。ここで中程度の厚さとは、殻厚方向のせん断変形は考慮に入れる必要があるが、殻厚方向の垂直応力は考慮しなくても良い程度の殻厚を示し、殻厚を $h$ 、主曲率半径を $R$ とした時、一般に  $1/20 < h/R < 1/5$  程度の厚さで与えられる。

弾／粘塑性の構成関係には Perzyna の式 [53] を用い、厚肉の場合に考慮すべき殻厚方向のせん断変形には、Reissner-Naghdi の線形殻理論 [30,38]（ひずみ-変位関係）を採用して基礎式を導く。ただし殻厚方向の垂直応力は考慮しないものとする。すべての変数を円周方向にフーリエ級数展開し、さらに各変数を消去して、変位と回転の5成分から成る常微分方程式を導く。差分法によって数値解析を行い、得られた増分解を積分して任意

の時刻の解を得る。

数値例として、局所的分布荷重を受ける中程度の厚肉円筒殻の問題を取り扱い、本解法による結果と、第2章のせん断変形の影響を無視した薄肉殻理論による結果とを比較検討する。

### 3.1 厚肉回転対称殻の基礎関係式

本章では、前章で述べた薄肉殻理論による解法と異なる点についてのみ記述する。

微小変形理論に基づく Reissner の線形薄肉殻理論 [30] による平衡方程式を軸対称殻に適用し、時間または時間とともに単調に変化する量について微分すると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{N}_\xi}{\partial \xi} + \gamma(\dot{N}_\xi - \dot{N}_\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_{\theta\xi}}{\partial \theta} + \omega_\xi \dot{Q}_\xi + a \dot{P}_\xi &= 0, & \dot{Q}_\xi - \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial \dot{M}_\xi}{\partial \xi} + \gamma(\dot{M}_\xi - \dot{M}_\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_{\theta\xi}}{\partial \theta} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \dot{N}_{\theta\xi}}{\partial \xi} + \gamma(\dot{N}_{\theta\xi} + \dot{N}_{\theta\xi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{N}_\theta}{\partial \theta} + \omega_\theta \dot{Q}_\theta + a \dot{P}_\theta &= 0, & \dot{Q}_\theta - \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial \dot{M}_{\theta\xi}}{\partial \xi} + \gamma(\dot{M}_{\theta\xi} + \dot{M}_{\theta\xi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{M}_\theta}{\partial \theta} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \dot{Q}_\xi}{\partial \xi} + \gamma \dot{Q}_\xi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{Q}_\theta}{\partial \theta} - (\omega_\xi \dot{N}_\xi + \omega_\theta \dot{N}_\theta) + a \dot{P}_\xi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

ここに、殻の中央面の単位面積当りの分布荷重  $P_\xi, P_\theta, P_\zeta$  は、殻の内、外面に作用する分布荷重  $\{P_\xi^-, P_\theta^-, P_\zeta^-\}$ 、 $\{P_\xi^+, P_\theta^+, P_\zeta^+\}$  と次の関係にある。

$$\{P_\xi, P_\theta, P_\zeta\} = \{P_\xi^-, P_\theta^-, P_\zeta^-\} h^- - \{P_\xi^+, P_\theta^+, P_\zeta^+\} h^+ \quad (3.2)$$

ただし、 $P_\xi, P_\xi^-$  などは座標方向のものを正とし、 $P_\xi^+$  などはこれと反対方向のものを正とする。また、

$$h^\pm = 1 \pm \frac{h}{2} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{1}{R_s R_\theta} \quad (3.3)$$

次にひずみと変位の関係式には、Naghdi [38] が導入した薄肉殻の微小変形理論に基づく Love の式 [31] を用いる。中央面のひずみ  $\varepsilon_{\xi m}, \varepsilon_{\theta m}, \varepsilon_{\xi\theta m}$  と  $\xi, \theta, \zeta$  方向の変位  $U_\xi, U_\theta, W$  の関係は、次式で表される [38]。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \omega_\xi W \right], & \varepsilon_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \gamma U_\xi + \omega_\theta W \right] \\ \varepsilon_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\xi}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial \xi} - \gamma U_\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

ここに  $\varepsilon_{\xi\theta m}$  は工学上のせん断ひずみの 1/2 である。



また、曲率の変化量  $\kappa_{\xi}, \kappa_{\theta}, \kappa_{\xi\theta}, \kappa_{\theta\xi}$  は、中央面の変位成分を用いて次のように表される [38]。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\kappa}_{\xi} &= \frac{1}{a} \frac{\partial \dot{\Phi}_{\xi}}{\partial \xi}, & \dot{\kappa}_{\theta} &= \frac{1}{a} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_{\theta}}{\partial \theta} + \gamma \dot{\Phi}_{\xi} \right) \\ \dot{\kappa}_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left( \frac{\partial \dot{\Phi}_{\theta}}{\partial \xi} - 2\omega_{\xi} \dot{\Phi}_n \right), & \dot{\kappa}_{\theta\xi} &= \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{\Phi}_{\xi}}{\partial \theta} - \gamma \dot{\Phi}_{\theta} + 2\omega_{\theta} \dot{\Phi}_n \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

ここに、 $\Phi_{\xi}, \Phi_{\theta}, \Phi_n$  は中央面の回転で、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\xi} &= \frac{1}{a} \left( -\frac{\partial \dot{W}}{\partial \xi} + \omega_{\xi} \dot{U}_{\xi} \right) + 2\dot{\epsilon}_{\xi\tau m}, & \Phi_{\theta} &= \frac{1}{a} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \theta} + \omega_{\theta} \dot{U}_{\theta} \right) + 2\dot{\epsilon}_{\theta\tau m} \\ \Phi_n &= \frac{1}{2a} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{U}_{\xi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{U}_{\theta}}{\partial \xi} + \gamma \dot{U}_{\theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

殻厚中央面からの距離にある点 Q のひずみ成分は、次式で表される [38]。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\xi} &= (\dot{\epsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\kappa}_{\xi}) / L_{\xi}, & \dot{\epsilon}_{\theta} &= (\dot{\epsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\kappa}_{\theta}) / L_{\theta}, & \dot{\epsilon}_{\xi\tau} &= \dot{\epsilon}_{\xi\tau m} / L_{\xi}, & \dot{\epsilon}_{\theta\tau} &= \dot{\epsilon}_{\theta\tau m} / L_{\theta} \\ \dot{\epsilon}_{\xi\theta} &= \{ (\dot{\epsilon}_{\xi\theta m} + \dot{\Phi}_n) / 2 + \zeta (\dot{\kappa}_{\xi\theta} + \dot{\Phi}_n / R_s) \} / L_{\xi} + \{ (\dot{\epsilon}_{\xi\theta m} - \dot{\Phi}_n) / 2 + \zeta (\dot{\kappa}_{\theta\xi} - \dot{\Phi}_n / R_{\theta}) \} / L_{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

ただし、 $L_{\xi}, L_{\theta}$  は殻の任意点  $(\xi, \theta, \zeta)$  における曲率半径と、点  $(\xi, \theta, 0)$  における曲率半径の比で、 $L_{\xi} = 1 + \zeta / R_s$ ,  $L_{\theta} = 1 + \zeta / R_{\theta}$  である。

さて本研究では、塑性領域において粘性の影響を考慮するために、前章と同じく Perzyna の構成式 [53] [式(2.10)～式(2.12)] を用いる。殻厚方向のせん断ひずみを含めて構成式を書き改めると、殻の応力状態において次のようになる。ただし殻厚方向の垂直応力  $\sigma_{\tau}$  は省略する。

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\epsilon}^{vp}\} \quad (3.8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \{\dot{\epsilon}\}^T &= \{\dot{\epsilon}_{\xi}, \dot{\epsilon}_{\theta}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}, \dot{\epsilon}_{\xi\tau}, \dot{\epsilon}_{\theta\tau}\}, \\ \{\dot{\sigma}\}^T &= \{\dot{\sigma}_{\xi}, \dot{\sigma}_{\theta}, \dot{\sigma}_{\xi\theta}, \dot{\sigma}_{\xi\tau}, \dot{\sigma}_{\theta\tau}\}, \\ \{\dot{\epsilon}^{vp}\}^T &= \{\dot{\epsilon}_{\xi}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\xi\tau}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\tau}^{vp}\}, \end{aligned} \quad [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\{\dot{\epsilon}^{vp}\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_0 \left\langle \Psi \left( \frac{\bar{\sigma} - \sigma^*}{\sigma^*} \right) \right\rangle \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \{\dot{\sigma}\} \quad (3.10)$$

式(3.8)に式(3.7)を代入し、応力について解くと、

$$\left. \begin{aligned}
\dot{\sigma}_\varepsilon &= \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\dot{\varepsilon}_{\varepsilon m} + \zeta \dot{\varepsilon}_\varepsilon) / L_\varepsilon + \nu (\dot{\varepsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\varepsilon}_\theta) / L_\theta \} - \dot{\sigma}_\varepsilon^{vp} \\
\dot{\sigma}_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \{ (\dot{\varepsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\varepsilon}_\theta) / L_\theta + \nu (\dot{\varepsilon}_{\varepsilon m} + \zeta \dot{\varepsilon}_\varepsilon) / L_\varepsilon \} - \dot{\sigma}_\theta^{vp} \\
\dot{\sigma}_{\varepsilon\theta} &= \frac{E}{1+\nu} \left\{ \left[ \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m} + \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta} + \frac{\dot{\Phi}_n}{R_s}) \right] / L_\varepsilon + \left[ \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m} - \dot{\Phi}_n) + \zeta (\dot{\varepsilon}_{\theta\varepsilon} - \frac{\dot{\Phi}_n}{R_\theta}) \right] / L_\theta \right\} - \dot{\sigma}_{\varepsilon\theta}^{vp} \\
\dot{\sigma}_{\varepsilon\zeta} &= \frac{E}{1+\nu} \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\zeta m} / L_\varepsilon - \dot{\sigma}_{\varepsilon\zeta}^{vp}, \quad \dot{\sigma}_{\theta\zeta} = \frac{E}{1+\nu} \dot{\varepsilon}_{\theta\zeta m} / L_\theta - \dot{\sigma}_{\theta\zeta}^{vp}
\end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
\dot{\sigma}_\varepsilon^{vp} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\varepsilon}_\varepsilon^{vp} + \nu \dot{\varepsilon}_\theta^{vp}), \quad \dot{\sigma}_\theta^{vp} = \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{\varepsilon}_\theta^{vp} + \nu \dot{\varepsilon}_\varepsilon^{vp}), \quad \dot{\sigma}_{\varepsilon\theta}^{vp} = \frac{E}{1+\nu} \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta}^{vp}, \\
\dot{\sigma}_{\varepsilon\zeta}^{vp} &= \frac{E}{1+\nu} \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\zeta}^{vp}, \quad \dot{\sigma}_{\theta\zeta}^{vp} = \frac{E}{1+\nu} \dot{\varepsilon}_{\theta\zeta}^{vp}
\end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

殻の単位長さ当りの合応力および合モーメントは、式(3.11)を用い、かつ積分に関する近似

$$\left. \begin{aligned}
\int_{-h/2}^{h/2} L_\theta / L_\varepsilon d\zeta &\simeq h \left[ 1 + \frac{h^2}{12R_s} \left( \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \right], \quad \int_{-h/2}^{h/2} L_\theta / L_\varepsilon \zeta d\zeta \simeq -\frac{h^3}{12} \left[ \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right] \\
\int_{-h/2}^{h/2} L_\theta / L_\varepsilon \zeta^2 d\zeta &\simeq \frac{h^3}{12} \left[ 1 + \frac{3}{20} \frac{h^2}{R_s} \left( \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \right]
\end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

を行うと、次式のようになる。なお  $h$  は殻厚である。

$$\left. \begin{aligned}
\dot{N}_\varepsilon &= \left\{ \int E d\zeta / (1-\nu^2) \right\} \left[ \dot{\varepsilon}_{\varepsilon m} + \nu \dot{\varepsilon}_{\theta m} - \frac{h^2}{12a} (\omega_\varepsilon - \omega_\theta) \dot{\varepsilon}_\varepsilon \right] - \dot{N}_\varepsilon^{vp} \\
\dot{N}_\theta &= \left\{ \int E d\zeta / (1-\nu^2) \right\} \left[ \dot{\varepsilon}_{\theta m} + \nu \dot{\varepsilon}_{\varepsilon m} - \frac{h^2}{12a} (\omega_\theta - \omega_\varepsilon) \dot{\varepsilon}_\theta \right] - \dot{N}_\theta^{vp} \\
\dot{N}_{\varepsilon\theta} &= \left\{ \int E d\zeta / (1+\nu) \right\} \left[ \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m} + \frac{h^2}{12a} (\omega_\varepsilon - \omega_\theta) \left\{ \frac{1}{2R_s} (\dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m} - \dot{\Phi}_n) - \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta} \right\} \right] - \dot{N}_{\varepsilon\theta}^{vp} \\
\dot{N}_{\theta\varepsilon} &= \left\{ \int E d\zeta / (1+\nu) \right\} \left[ \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m} + \frac{h^2}{12a} (\omega_\theta - \omega_\varepsilon) \left\{ \frac{1}{2R_\theta} (\dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m} + \dot{\Phi}_n) - \dot{\varepsilon}_{\theta\varepsilon} \right\} \right] - \dot{N}_{\theta\varepsilon}^{vp} \\
\dot{M}_\varepsilon &= \left\{ \int E \zeta^2 d\zeta / (1-\nu^2) \right\} \left[ \dot{\varepsilon}_\varepsilon + \nu \dot{\varepsilon}_\theta - \frac{1}{a} (\omega_\varepsilon - \omega_\theta) \dot{\varepsilon}_{\varepsilon m} \right] - \dot{M}_\varepsilon^{vp} \\
\dot{M}_\theta &= \left\{ \int E \zeta^2 d\zeta / (1-\nu^2) \right\} \left[ \dot{\varepsilon}_\theta + \nu \dot{\varepsilon}_\varepsilon - \frac{1}{a} (\omega_\theta - \omega_\varepsilon) \dot{\varepsilon}_{\theta m} \right] - \dot{M}_\theta^{vp} \\
\dot{M}_{\varepsilon\theta} &= \left\{ \int E \zeta^2 d\zeta / (1+\nu) \right\} \left[ \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta} + \dot{\varepsilon}_{\theta\varepsilon} - \frac{1}{2a} (\omega_\theta - \omega_\varepsilon) (\dot{\Phi}_n - \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m}) \right] - \dot{M}_{\varepsilon\theta}^{vp} \\
\dot{M}_{\theta\varepsilon} &= \left\{ \int E \zeta^2 d\zeta / (1+\nu) \right\} \left[ \dot{\varepsilon}_{\theta\varepsilon} + \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta} - \frac{1}{2a} (\omega_\theta - \omega_\varepsilon) (\dot{\Phi}_n + \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m}) \right] - \dot{M}_{\theta\varepsilon}^{vp} \\
\dot{Q}_\varepsilon &= \frac{5}{6} \left\{ \int E d\zeta / (1+\nu) \right\} \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\zeta m} - \dot{Q}_\varepsilon^{vp}, \quad \dot{Q}_\theta = \frac{5}{6} \left\{ \int E d\zeta / (1+\nu) \right\} \dot{\varepsilon}_{\theta\zeta m} - \dot{Q}_\theta^{vp}
\end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

ここで、( )<sup>vp</sup> は粘塑性によるみかけの内力成分を示し、次式によってみかけの応力の

変化率から計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}_{\xi}^{vp}, \dot{N}_{\theta\xi}^{vp}, \dot{Q}_{\xi}^{vp}, \dot{M}_{\xi}^{vp}, \dot{M}_{\theta\xi}^{vp}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_{\xi}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\xi}^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi\xi}^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi\xi}^{vp}\zeta, \dot{\sigma}_{\theta\xi}^{vp}\zeta\} L_{\theta} d\zeta \\ \{\dot{N}_{\theta}^{vp}, \dot{N}_{\theta\xi}^{vp}, \dot{Q}_{\theta}^{vp}, \dot{M}_{\theta}^{vp}, \dot{M}_{\theta\xi}^{vp}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_{\theta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\xi}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\theta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta\theta}^{vp}\zeta, \dot{\sigma}_{\theta\xi}^{vp}\zeta\} L_{\xi} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

また式(3.11)と(3.14)から、ひずみと曲率の変化量を消去することにより、応力 $\{\sigma\}$ は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_{\xi} &= \left[ \frac{\dot{N}_{\xi} + \dot{N}_{\xi}^{vp}}{h} + \frac{\dot{M}_{\xi} + \dot{M}_{\xi}^{vp}}{h^2/6} \frac{\zeta}{h/2} \right] L_{\theta}^{-1} - \dot{\sigma}_{\xi}^{vp} \\ \dot{\sigma}_{\theta} &= \left[ \frac{\dot{N}_{\theta} + \dot{N}_{\theta}^{vp}}{h} + \frac{\dot{M}_{\theta} + \dot{M}_{\theta}^{vp}}{h^2/6} \frac{\zeta}{h/2} \right] L_{\xi}^{-1} - \dot{\sigma}_{\theta}^{vp} \\ \dot{\sigma}_{\xi\theta} &= \left[ \frac{\dot{N}_{\xi\theta} + \dot{N}_{\xi\theta}^{vp}}{h} + \frac{\dot{M}_{\xi\theta} + \dot{M}_{\xi\theta}^{vp}}{h^2/6} \frac{\zeta}{h/2} \right] L_{\theta}^{-1} - \dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp} \\ \dot{\sigma}_{\xi\xi} &= \frac{3}{2} \frac{\dot{Q}_{\xi} + \dot{Q}_{\xi}^{vp}}{h} \left[ 1 - \left( \frac{\zeta}{h/2} \right)^2 \right] L_{\theta}^{-1} - \dot{\sigma}_{\xi\xi}^{vp} \\ \dot{\sigma}_{\theta\theta} &= \frac{3}{2} \frac{\dot{Q}_{\theta} + \dot{Q}_{\theta}^{vp}}{h} \left[ 1 - \left( \frac{\zeta}{h/2} \right)^2 \right] L_{\xi}^{-1} - \dot{\sigma}_{\theta\theta}^{vp} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

以上で50個の未知数  $\dot{N}_{\xi}$ 、 $\dot{N}_{\theta}$ 、 $\dot{N}_{\xi\theta}$ 、 $\dot{N}_{\theta\xi}$ 、 $\dot{M}_{\xi}$ 、 $\dot{M}_{\theta}$ 、 $\dot{M}_{\xi\theta}$ 、 $\dot{M}_{\theta\xi}$ 、 $\dot{Q}_{\xi}$ 、 $\dot{Q}_{\theta}$ 、 $\dot{U}_{\xi}$ 、 $\dot{U}_{\theta}$ 、 $\dot{W}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\xi m}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\theta m}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\xi\theta m}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\xi\xi m}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\theta\xi m}$ 、 $\dot{\kappa}_{\xi}$ 、 $\dot{\kappa}_{\theta}$ 、 $\dot{\kappa}_{\xi\theta}$ 、 $\dot{\kappa}_{\theta\xi}$ 、 $\dot{\phi}_{\xi}$ 、 $\dot{\phi}_{\theta}$ 、 $\dot{\phi}_n$ 、 $\dot{\sigma}_{\xi}$ 、 $\dot{\sigma}_{\theta}$ 、 $\dot{\sigma}_{\xi\theta}$ 、 $\dot{\sigma}_{\xi\xi}$ 、 $\dot{\sigma}_{\theta\xi}$ 、 $\dot{\sigma}_{\xi}^{vp}$ 、 $\dot{\sigma}_{\theta}^{vp}$ 、 $\dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{\sigma}_{\xi\xi}^{vp}$ 、 $\dot{\sigma}_{\theta\xi}^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\xi}^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\theta}^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\xi\xi}^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\theta\xi}^{vp}$ 、 $\dot{N}_{\xi}^{vp}$ 、 $\dot{N}_{\theta}^{vp}$ 、 $\dot{N}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{N}_{\theta\xi}^{vp}$ 、 $\dot{M}_{\xi}^{vp}$ 、 $\dot{M}_{\theta}^{vp}$ 、 $\dot{M}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{M}_{\theta\xi}^{vp}$ 、 $\dot{Q}_{\xi}^{vp}$ 、 $\dot{Q}_{\theta}^{vp}$  に対して、式(3.1)、(3.4)~(3.6)、(3.10)~(3.12)、(3.14)、(3.15)の50個の式が得られたことになる。

### 3.2 フーリエ級数展開と無次元方程式

一般に非軸対称問題を解析するには、第2章2節で述べたように各変数を $\theta$ 方向にフーリエ級数で表し、その係数を定めればよい。前節に示した50個の変数のうち、粘塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{\xi}^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\theta}^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\xi\xi}^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\theta\xi}^{vp}$  を除く45個の変数をフーリエ級数で表す。ここでは、殻厚方向のせん断変形を考慮することにより、式(2.22)に示した変数と異なった、あるいは新たに加わった変数のみを列挙する。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{Q}_{\xi}, \dot{Q}_{\xi}^{vp}\} &= \sigma_0 h \sum_{n=0}^{\infty} \{\dot{q}_{\xi}^{(n)}, \dot{q}_{\xi}^{vp(n)}\} \cos n \theta \\ \{\dot{N}_{\xi\theta}, \dot{N}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{N}_{\theta\xi}, \dot{N}_{\theta\xi}^{vp}, \dot{Q}_{\theta}, \dot{Q}_{\theta}^{vp}\} & \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_0 h \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{n}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{VP(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{VP(n)}, \dot{q}_{\theta}^{(n)}, \dot{q}_{\theta}^{VP(n)} \} \sin n \theta \\
&\left. \begin{aligned}
&\{ \dot{M}_{\xi\theta}, \dot{M}_{\xi\theta}^{VP}, \dot{M}_{\theta\xi}, \dot{M}_{\theta\xi}^{VP} \} \\
&= (\sigma_0 h^3 / a) \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{m}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{VP(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{VP(n)} \} \sin n \theta \\
&\{ \dot{\epsilon}_{\xi\zeta m}, \dot{\sigma}_{\xi\zeta}, \dot{\sigma}_{\xi\zeta}^{VP} \} = \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{\epsilon}_{\xi\zeta m}^{(n)} / E, \dot{s}_{\xi\zeta}^{(n)}, \dot{s}_{\xi\zeta}^{VP(n)} \} \cos n \theta \\
&\{ \dot{k}_{\theta\xi}, \dot{\sigma}_{\theta\xi}, \dot{\sigma}_{\theta\xi}^{VP}, \dot{\phi}_n \} \\
&= \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{k}_{\theta\xi}^{(n)} / (aE), \dot{s}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{s}_{\theta\xi}^{VP(n)}, \dot{\phi}_n^{(n)} / E \} \sin n \theta
\end{aligned} \right\} \quad (3.17)
\end{aligned}$$

さて、これらのフーリエ展開式を前節の基礎式に代入し、フーリエ係数に関する対応する式をつくり、これらの式から順次未知数を消去する。せん断変形を考慮しない第2章の薄肉殻理論では、式(2.27)に示すように  $\dot{u}_{\xi}^{(n)}$ 、 $\dot{u}_{\theta}^{(n)}$ 、 $\dot{w}^{(n)}$  および  $\dot{m}_{\xi}^{(n)}$  に関する四元連立二階微分方程式を導いたが、本章では変位  $\dot{u}_{\xi}^{(n)}$ 、 $\dot{u}_{\theta}^{(n)}$ 、 $\dot{w}^{(n)}$  および回転  $\dot{\phi}_{\xi}^{(n)}$ 、 $\dot{\phi}_{\theta}^{(n)}$  に関する次の五元連立二階微分方程式となる。

$$\left. \begin{aligned}
&A_1 \mathbf{z}'' + A_2 \mathbf{z}' + A_3 \mathbf{z} \\
&= A_4 \mathbf{N}' + A_5 \mathbf{N} + A_6 \mathbf{Q}' + A_7 \mathbf{Q} + A_8 \mathbf{M}' + A_9 \mathbf{M} + A_{10} \mathbf{P}
\end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

ここで、 $\mathbf{z}$ 、 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{P}$ は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{z} &= \{ \dot{u}_{\xi}^{(n)}, \dot{u}_{\theta}^{(n)}, \dot{w}^{(n)}, \dot{\phi}_{\xi}^{(n)}, \dot{\phi}_{\theta}^{(n)} \}^T, \\
\mathbf{N} &= \{ \dot{n}_{\xi}^{VP(n)}, \dot{n}_{\theta}^{VP(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{VP(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{VP(n)}, 0 \}^T \\
\mathbf{Q} &= \{ \dot{q}_{\xi}^{VP(n)}, \dot{q}_{\theta}^{VP(n)}, 0, 0, 0 \}^T \\
\mathbf{M} &= \{ \dot{m}_{\xi}^{VP(n)}, \dot{m}_{\theta}^{VP(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{VP(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{VP(n)}, 0 \}^T \\
\mathbf{P} &= \{ \dot{p}_{\xi}^{(n)}, \dot{p}_{\theta}^{(n)}, \dot{p}_{\zeta}^{(n)}, 0, 0 \}^T
\end{aligned}$$

であり、 $A_1 \sim A_{10}$ は殻の形状と $\nu$ の値によって定まる $5 \times 5$ の行列で、次式で表される。

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_8 & 0 \\ 0 & a_{14} & 0 & 0 & a_{19} \\ 0 & 0 & a_{25} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{37} & 0 \\ 0 & a_{43} & 0 & 0 & a_{49} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & a_4 & a_6 & a_9 & 0 \\ a_{12} & a_{15} & 0 & 0 & a_{20} \\ a_{22} & 0 & a_{26} & a_{28} & 0 \\ a_{32} & 0 & a_{35} & a_{38} & a_{40} \\ 0 & a_{44} & 0 & a_{47} & a_{50} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{pmatrix} a_3 & a_5 & a_7 & a_{10} & a_{11} \\ a_{13} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{21} \\ a_{23} & a_{24} & a_{27} & a_{29} & a_{30} \\ a_{33} & a_{34} & a_{36} & a_{39} & a_{41} \\ a_{42} & a_{45} & a_{46} & a_{48} & a_{51} \end{pmatrix}, & A_4 &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_5 &= \begin{pmatrix} c_2 & c_3 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & c_8 & c_9 & c_{10} & 0 \\ c_{14} & c_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_7 &= \begin{pmatrix} c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{16} & c_{17} & 0 & 0 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{28} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{19} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_9 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{20} & c_{21} & 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & c_{25} & c_{26} & c_{27} & 0 \end{pmatrix}, & A_{10} &= \begin{pmatrix} c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(3.19)

$A_1 \sim A_3$  はDasが導いた弾性殻理論 [107] に対するものと一致する。また式(3.18)の右辺は、殻の形状の他に荷重と粘塑性によるみかけの内力成分から定まる定数である。 $a_1 \sim a_{51}$  および  $c_1 \sim c_{28}$  を付録3.1に示す。

なお、式(3.14)に式(3.4)～(3.6)を代入し、フーリエ係数で表示すると、式(3.14)は式(3.18)の解  $\dot{u}_\xi$ 、 $\dot{u}_\theta$ 、 $\dot{w}$ 、 $\dot{\phi}_\xi$ 、 $\dot{\phi}_\theta$  で次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}
\dot{n}_\xi &= b \left[ \dot{u}'_\xi + \omega_\xi \dot{w} + \nu \left( \frac{n}{\rho} \dot{u}_\theta + \gamma \dot{u}_\xi + \omega_\theta \dot{w} \right) - \frac{\lambda^2}{12} (\omega_\xi - \omega_\theta) \dot{\phi}'_\xi \right] - \dot{n}_\xi^{vp} \\
\dot{n}_\theta &= b \left[ \frac{n}{\rho} \dot{u}_\theta + \gamma \dot{u}_\xi + \omega_\theta \dot{w} + \nu (\dot{u}'_\xi + \omega_\xi \dot{w}) - \frac{\lambda^2}{12} (\omega_\theta - \omega_\xi) \left( \frac{n}{\rho} \dot{\phi}_\theta + \gamma \dot{\phi}_\xi \right) \right] - \dot{n}_\theta^{vp} \\
\dot{n}_{\xi\theta} &= \frac{b(1-\nu)}{2} \left[ \dot{u}'_\theta - \frac{n}{\rho} \dot{u}_\xi - \gamma \dot{u}_\theta + \frac{\lambda^2}{12} (\omega_\xi - \omega_\theta) (\omega_\xi \dot{u}'_\theta - \dot{\phi}'_\theta) \right] - \dot{n}_{\xi\theta}^{vp}
\end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
\dot{n}_{\theta\epsilon} &= \frac{b(1-\nu)}{2} \left[ \dot{u}'_{\theta} - \frac{n}{\rho} \dot{u}_{\epsilon} - \gamma \dot{u}_{\theta} + \frac{\lambda^2}{12} (\omega_{\theta} - \omega_{\epsilon}) \left\{ \omega_{\theta} \left( -\frac{n}{\rho} \dot{u}_{\epsilon} - \gamma \dot{u}_{\theta} \right) + \frac{n}{\rho} \dot{\phi}_{\epsilon} + \gamma \dot{\phi}_{\theta} \right\} \right] - \dot{n}_{\theta\epsilon}^{vp} \\
\dot{m}_{\epsilon} &= d \left[ \dot{\phi}'_{\epsilon} + \nu \left( \frac{n}{\rho} \dot{\phi}_{\theta} + \gamma \dot{\phi}_{\epsilon} \right) - (\omega_{\epsilon} - \omega_{\theta}) (\dot{u}'_{\epsilon} + \omega_{\epsilon} \dot{w}) \right] - \dot{m}_{\epsilon}^{vp} \\
\dot{m}_{\theta} &= d \left[ \frac{n}{\rho} \dot{\phi}_{\theta} + \gamma \dot{\phi}_{\epsilon} + \nu \dot{\phi}'_{\epsilon} - (\omega_{\theta} - \omega_{\epsilon}) \left( \frac{n}{\rho} \dot{u}_{\theta} + \gamma \dot{u}_{\epsilon} + \omega_{\theta} \dot{w} \right) \right] - \dot{m}_{\theta}^{vp} \\
\dot{m}_{\epsilon\theta} &= \frac{d(1-\nu)}{2} \left[ \dot{\phi}'_{\theta} - \frac{n}{\rho} \dot{\phi}_{\epsilon} - \gamma \dot{\phi}_{\theta} + (\omega_{\theta} - \omega_{\epsilon}) \dot{u}'_{\theta} \right] - \dot{m}_{\epsilon\theta}^{vp} \\
\dot{m}_{\theta\epsilon} &= \frac{d(1-\nu)}{2} \left[ \dot{\phi}'_{\theta} - \frac{n}{\rho} \dot{\phi}_{\epsilon} - \gamma \dot{\phi}_{\theta} + (\omega_{\epsilon} - \omega_{\theta}) \left( -\frac{n}{\rho} \dot{u}_{\epsilon} - \gamma \dot{u}_{\theta} \right) \right] - \dot{m}_{\theta\epsilon}^{vp} \\
\dot{q}_{\epsilon} &= \frac{5}{12} b(1-\nu) [\dot{w}' - \omega_{\epsilon} \dot{u}_{\epsilon} + \dot{\phi}_{\epsilon}] - \dot{q}_{\epsilon}^{vp}, \quad \dot{q}_{\theta} = \frac{5}{12} b(1-\nu) \left[ -\frac{n}{\rho} \dot{w} - \omega_{\theta} \dot{u}_{\theta} + \dot{\phi}_{\theta} \right] - \dot{q}_{\theta}^{vp}
\end{aligned} \right\} (3.20)$$

ここで、 $b = 1/(1-\nu^2)$ 、 $d = 1/12(1-\nu^2)$  である。

また式(3.16)は、

$$\left. \begin{aligned}
\dot{s}_{\epsilon} &= \left\{ \dot{n}_{\epsilon} + \dot{n}_{\epsilon}^{vp} + 12 \frac{\zeta}{a} (\dot{m}_{\epsilon} + \dot{m}_{\epsilon}^{vp}) \right\} / L_{\theta} - \dot{s}_{\epsilon}^{vp}, & \dot{s}_{\theta} &= \left\{ \dot{n}_{\theta} + \dot{n}_{\theta}^{vp} + 12 \frac{\zeta}{a} (\dot{m}_{\theta} + \dot{m}_{\theta}^{vp}) \right\} / L_{\epsilon} - \dot{s}_{\theta}^{vp} \\
\dot{s}_{\epsilon\theta} &= \left\{ \dot{n}_{\epsilon\theta} + \dot{n}_{\epsilon\theta}^{vp} + 12 \frac{\zeta}{a} (\dot{m}_{\epsilon\theta} + \dot{m}_{\epsilon\theta}^{vp}) \right\} / L_{\theta} - \dot{s}_{\epsilon\theta}^{vp}, & \dot{s}_{\epsilon\epsilon} &= \left\{ \frac{3}{2} (\dot{q}_{\epsilon} + \dot{q}_{\epsilon}^{vp}) \left( 1 - 4 \frac{\zeta^2}{h^2} \right) \right\} / L_{\theta} - \dot{s}_{\epsilon\epsilon}^{vp} \\
\dot{s}_{\theta\epsilon} &= \left\{ \frac{3}{2} (\dot{q}_{\theta} + \dot{q}_{\theta}^{vp}) \left( 1 - 4 \frac{\zeta^2}{h^2} \right) \right\} / L_{\epsilon} - \dot{s}_{\theta\epsilon}^{vp}
\end{aligned} \right\} (3.21)$$

式(3.18), (3.20), (3.21)の粘塑性に関する内力成分の変化率の各フーリエ係数は、式

(3.12), (3.15), (3.17)からそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{n}_{\epsilon}^{vp(n)}, \dot{m}_{\epsilon}^{vp(n)} \} \cos n\theta &= \frac{1}{h(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} (\dot{\epsilon}_{\epsilon}^{vp} + \nu \dot{\epsilon}_{\theta}^{vp}) L_{\theta} d\zeta \\
\sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{n}_{\theta}^{vp(n)}, \dot{m}_{\theta}^{vp(n)} \} \cos n\theta &= \frac{1}{h(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} E \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} (\dot{\epsilon}_{\theta}^{vp} + \nu \dot{\epsilon}_{\epsilon}^{vp}) L_{\epsilon} d\zeta \\
\sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{n}_{\epsilon\theta}^{vp(n)}, \dot{m}_{\epsilon\theta}^{vp(n)} \} \sin n\theta &= \frac{1}{h(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} E \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta}^{vp} L_{\theta} d\zeta \\
\sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{n}_{\theta\epsilon}^{vp(n)}, \dot{m}_{\theta\epsilon}^{vp(n)} \} \sin n\theta &= \frac{1}{h(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} E \left\{ 1, \frac{a\zeta}{h^2} \right\} \dot{\epsilon}_{\theta\epsilon}^{vp} L_{\epsilon} d\zeta \\
\sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dot{q}_{\epsilon}^{vp(n)} \cos n\theta &= \frac{1}{h(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} E \dot{\epsilon}_{\epsilon\epsilon}^{vp} L_{\theta} d\zeta \\
\sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_{\theta}^{vp(n)} \sin n\theta &= \frac{1}{h(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} E \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{vp} L_{\epsilon} d\zeta
\end{aligned} \right\} (3.22)$$

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{s}_{\epsilon}^{vp(n)}, \dot{s}_{\theta}^{vp(n)} \} \cos n\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \{ \dot{\epsilon}_{\epsilon}^{vp} + \nu \dot{\epsilon}_{\theta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta}^{vp} + \nu \dot{\epsilon}_{\epsilon}^{vp} \} \\
\sigma_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_{\epsilon\theta}^{vp(n)} \sin n\theta, \sum_{n=0}^{\infty} \dot{s}_{\epsilon\epsilon}^{vp(n)} \cos n\theta, \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_{\theta\epsilon}^{vp(n)} \sin n\theta \right\} &= E/(1+\nu) \{ \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\epsilon\epsilon}^{vp}, \dot{\epsilon}_{\theta\epsilon}^{vp} \}
\end{aligned} \right\} (3.23)$$

式(3.22), (3.23)の右辺の粘塑性ひずみ速度は、応力値から式(3.10)によって計算できる。

また積分にはシンプソンの 1/3則を用いる。

### 3.3 数値計算法

ある任意の計算段階における変位と回転の変化率は、式(3.18)を適当な境界条件のもとで解けば得られ、またこれらを用いて内力成分の変化率は、式(3.20)と式(3.21)から求められる。本章でも前章の薄肉殻の場合と同じく、差分法によって数値的に解を求める(第2章4節参照)。なお境界条件が  $\mathbf{z} = \{\dot{u}_\xi^{(n)}, \dot{u}_\theta^{(n)}, \dot{w}^{(n)}, \dot{\varphi}_\xi^{(n)}, \dot{\varphi}_\theta^{(n)}\}^T$  の他に  $\mathbf{y} = \{\dot{n}_\xi^{(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{q}_\xi^{(n)}, \dot{m}_\xi^{(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{(n)}\}^T$  で与えられる場合、 $\mathbf{y}$  を  $\mathbf{z}$  の解で表すと次のようになる。

$$\mathbf{y} = B_1 \mathbf{z}' + B_2 \mathbf{z} + B_3 \quad (3.24)$$

ここで、

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_5 & 0 \\ 0 & b_7 & 0 & 0 & b_9 \\ 0 & 0 & b_{11} & 0 & 0 \\ b_{13} & 0 & 0 & b_{15} & 0 \\ 0 & b_{18} & 0 & 0 & b_{20} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ b_6 & b_8 & 0 & 0 & 0 \\ b_{10} & 0 & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & b_{14} & b_{16} & b_{17} \\ 0 & 0 & 0 & b_{19} & b_{21} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$B_3 = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}^T$$

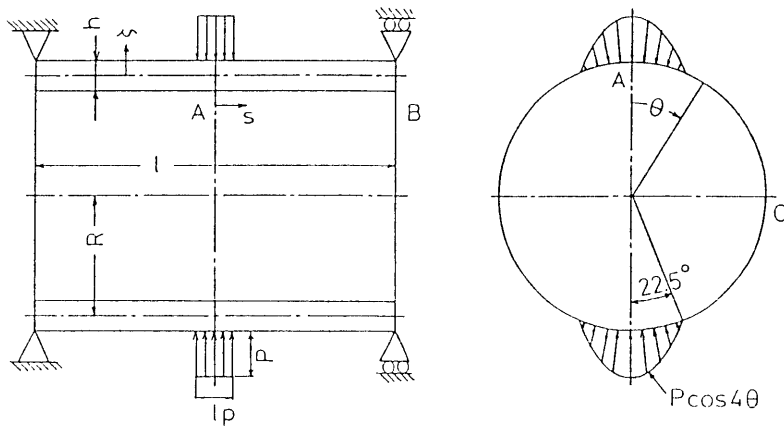
$b_1 \sim b_{21}$  は殻の形状と材質によって定まる係数であり [107]、また  $d_1 \sim d_5$  は粘塑性ひずみから定まる定数である [付録3.2参照]。

### 3.4 計算例

これまで述べてきた計算方法の妥当性を検討すると共に、殻厚方向のせん断変形の影響を無視した薄肉殻理論(古典理論)による結果と比較し、殻厚の影響について考察する。計算例として両端可動支持のアルミ円筒殻の中央部に、時間に対して階段状の局所的分布荷重が作用する問題(図3.1)を取り上げる。

使用する円筒殻は  $h/R=0.2$  と中程度の厚さの中でも比較的厚い殻とし、荷重を微小変形の範囲内で、2段階に分けて負荷させる。荷重の分布は円筒殻の一部に子午線方向に一様で、円周方向には  $\theta=0^\circ, 180^\circ$  を中心として  $\pm 22.5^\circ$  の範囲に、余弦波状に与える。問題の対称性から、計算は円筒殻の1/8形状についてのみ行えば十分である。円筒殻の形状諸量および子午線方向の差分間隔  $\Delta\xi$  は式(2.49)で与えられる。

境界条件は、点Aでは対称性により



$l = 600 \text{ mm}$ ,  $R = 200 \text{ mm}$ ,  $h = 40 \text{ mm}$ ,  $a = R$ ,  $t_p = 60 \text{ mm}$

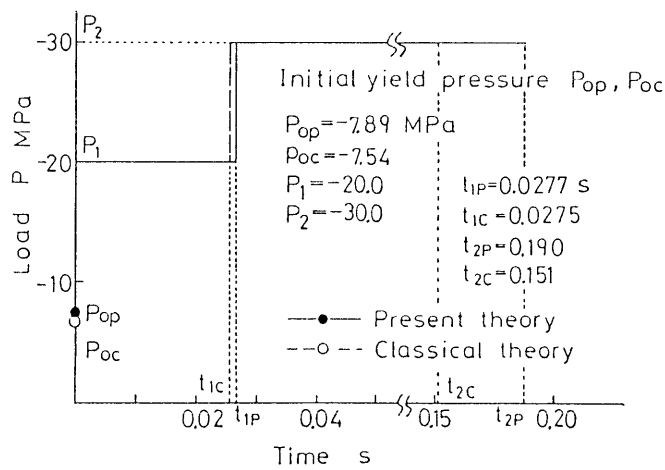


図 3.1 円筒殻と荷重

$$\dot{U}_t = \dot{\Phi}_t = \dot{N}_{t0} = \dot{M}_{t0} = \dot{Q}_t = 0 \quad (3.26)$$

ただし、負荷時 ( $t = 0, t_{1c}, t_{1p}, t_{2c}, t_{2p}$ ) では、(・) を取り除くものとする。

点 B では単純可動支持の条件を用いて、

$$\dot{U}_0 = \dot{W} = \dot{\Phi}_0 = \dot{M}_t = \dot{N}_t = 0 \quad (3.27)$$

なお、式(3.17)の  $\sigma_0$  は本計算では  $\sigma_0 = 1$  とする。

材料特性は前章の薄肉殻の場合と同じく、アルミ 1100-0 材について実験から求めた値 (式(2.52)) を用いる。

次に差分点数による解の収束性を調べるため、図3.1の A B間をそれぞれ50、および100等分して弾性計算を行った。その結果、解の値はそれぞれの最大値を示す位置で、 $N = 51$  と101の場合の差はほぼ1.6%であることがわかった。 $N$ が101以上では、 $N = 101$ の場合と



の差はより小さくなると思われるが、計算機の容量および計算時間を考慮して、本計算では  $N=101$  とする。また殻厚方向には19個の格子点を採用し、フーリエ級数の項数〔項数  $= (n+1)/2$ 〕は  $n=39$  とする。定常状態の判定には  $f = (\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma^* = 0.002$  を用い、 $f$  が 0.2% になれば定常状態とみなして、次の荷重段階に移るように制御する。これらの値は、解の収束性と計算機の能力を考慮して決定した。

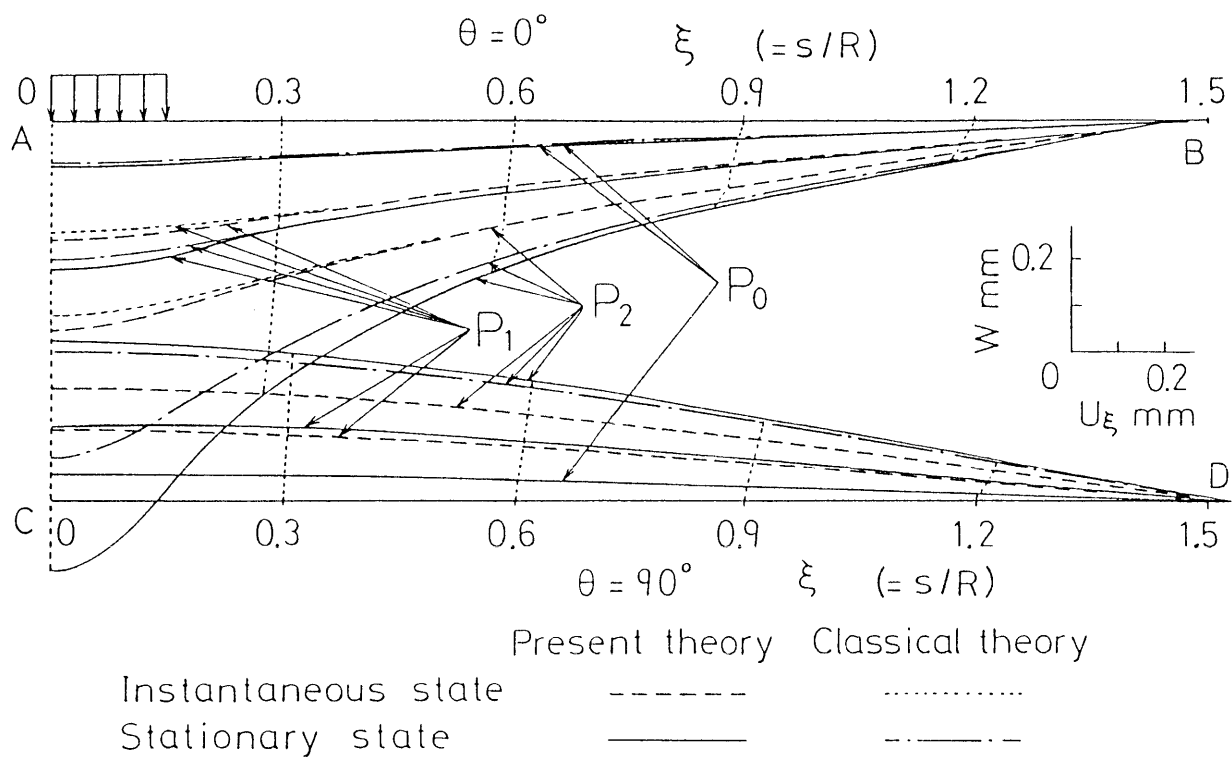
### 3.5 計算結果と考察

2段階に分けて負荷した荷重の各段階での持続時間は、図3.1 に示すように荷重  $P_1$ 、 $P_2$  で各々 0.028、0.163 s であり、極めて短時間で定常状態に至っている。図中、 $P_{0\rho}$  と  $P_{0c}$  はそれぞれ本理論と、殻厚方向のせん断変形の影響を考慮しない前章の薄肉殻理論（古典理論）による弾性限を示す。初期降伏はいずれの理論によっても、点A ( $\xi=0$ ,  $\theta=0^\circ$ ) の外表面に現れる。

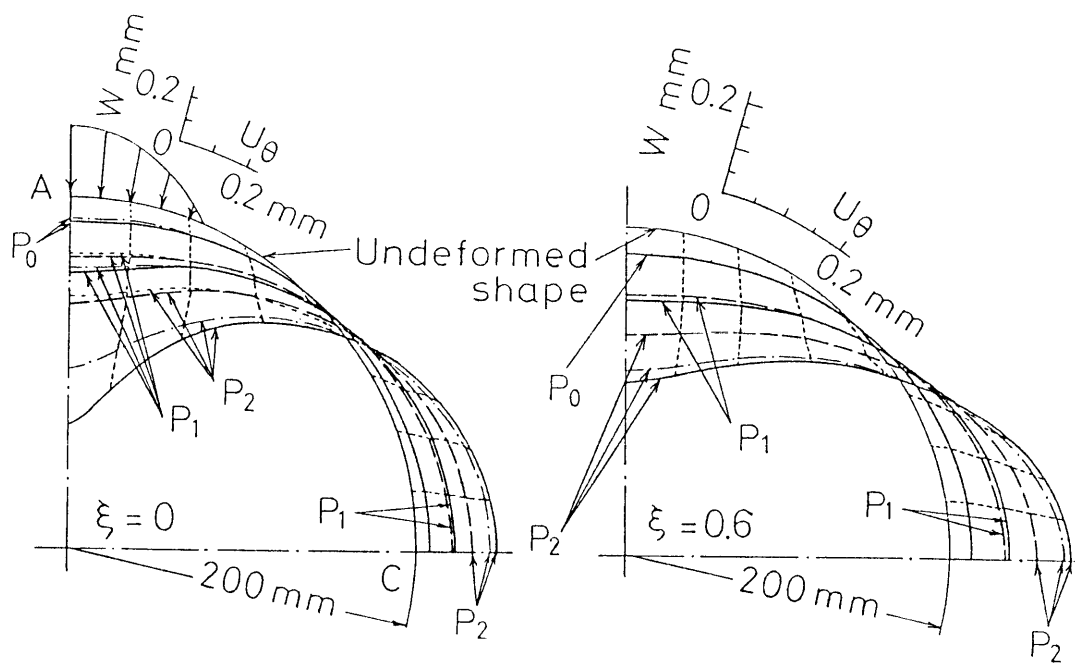
図3.2~3.5に、各荷重段階の負荷の瞬間（破線と点線）と十分時間が経過した定常状態（実線と一点鎖線）の変形、内力および応力分布の様子を示す。破線と実線は本理論によるものであり、点線と一点鎖線は薄肉殻理論によるものである。内力成分は両理論の差が大きく現れる  $N_\theta$ 、 $M_\theta$  の分布をおもに取り上げる。

図3.2(a)は、 $\theta=0^\circ$  と  $90^\circ$  の子午線における変形状態を示す。 $\theta=0^\circ$  で内側に、 $\theta=90^\circ$  で外側に変形し、荷重が直接作用する点A ( $\xi=0$ ,  $\theta=0^\circ$ ) で最も大きく内側に変位する。また円筒殻の子午線に沿って、変位  $U_\xi$  は端部で最大となり、点B ( $\xi=1.5$ ,  $\theta=0^\circ$ ) では中央に向かって変位し、 $P_2$  の定常時で点Aの半径方向変位  $W$  の7.1%の変位量を示す。また点D ( $\xi=1.5$ ,  $\theta=90^\circ$ ) では反対方向に変位し、点C ( $\xi=0$ ,  $\theta=90^\circ$ ) の  $W$  の16%の変位量である。荷重が増すにつれて降伏領域が広がるため、負荷の瞬間から定常時（定常状態に至った時刻）までの変形量が大きくなっている。図3.2(b)は  $\xi=0$  と0.6の軸に垂直な断面の形状変化の様子である。 $W$  は点A ( $\xi=0$ ,  $\theta=0^\circ$ ) でとくに大きくなり、円周方向変位  $U_\theta$  は  $\theta=40^\circ$  付近で大きくなっている。 $P_2$  の定常時の  $U_\theta$  の最大値は、点Aの  $W$  の23%である。図3.2(a)、(b)から、円筒殻の変形のだいたいの様子が把握できる。本理論による結果と薄肉殻理論による結果との差は弾性限ではわずかであるが、荷重が大きくなると点A付近で顕著になり、子午線方向および円周方向に広がっている。

図3.3は、 $N_\theta$  の子午線  $\theta=0^\circ$  上と円周  $\xi=0$  上の分布、および  $N_{\theta\xi}$  の子午線  $\theta=45^\circ$  上の分布である。 $N_\theta$  は  $\theta=0^\circ$  上では圧縮が支配的であり、 $\xi=0$  では全域にわたって圧縮とな



(a)  $\theta = 0^\circ, 90^\circ$



(b)  $\xi = 0, 0.6$

图 3.2 变形

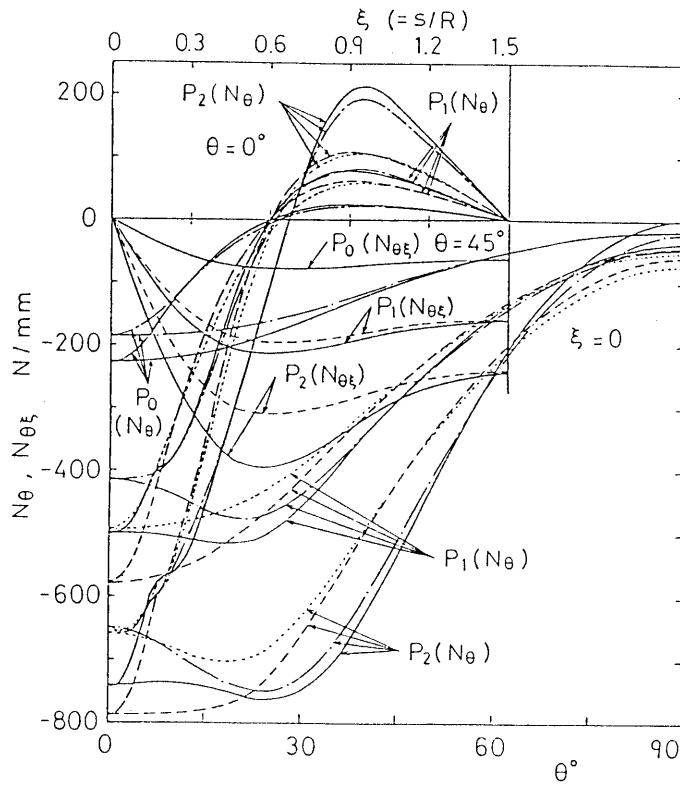


図 3.3 合応力  $N_\theta$ ,  $N_{\theta\xi}$

る。 $N_\theta$ について各荷重段階で負荷瞬間時と定常時を比較すると、子午線方向および円周方向とも、荷重が作用している領域では内力の緩和を示し、残る領域では増加が見られる。荷重が大きくなると共に、 $N_\theta$ の変動量は大きくなる。また両理論の差による結果に注目すると、荷重 $P_0$ の弾性限においても差は顕著であり、荷重が増すにつれて大きくなる。 $\theta = 0^\circ$ の子午線上ではおよそ $\xi = 0.25$ まで、中央断面の円周方向には $\theta = 50^\circ$ 回りまで両理論の差が見られるが、弾性限の段階と比べて広がり方は小さい。 $\theta = 45^\circ$ 上の $N_{\theta\xi}$ は $\xi = 0.6$ 付近でかなり大きくなり、荷重 $P_2$ のとき時間と共にかなり増大する。なおここには示さなかったが、 $N_{\xi\theta}$ と $N_{\theta\xi}$ の差はわずかである。

図3.4は、曲げモーメント $M_\theta$ の子午線 $\theta = 0^\circ$ と円周 $\xi = 0$ 上の分布である。 $\theta = 0^\circ$ に沿って負（外側圧縮）を示し、中央断面の円周方向では負荷部の境界付近（ $\theta = 22.5^\circ$ 程度）で正負が反転する。各荷重段階での負荷時と定常時を比較すると、負荷部で曲げモーメントの減少量は最も大きく、荷重が大きくなると共に変動を示す領域も、子午線方向および円周方向に広く広がっている。また本理論と薄肉殻理論の差は弾性限の荷重段階でほとんど見られないが、荷重の増加と共に変形量の大きい負荷部付近で現われている。

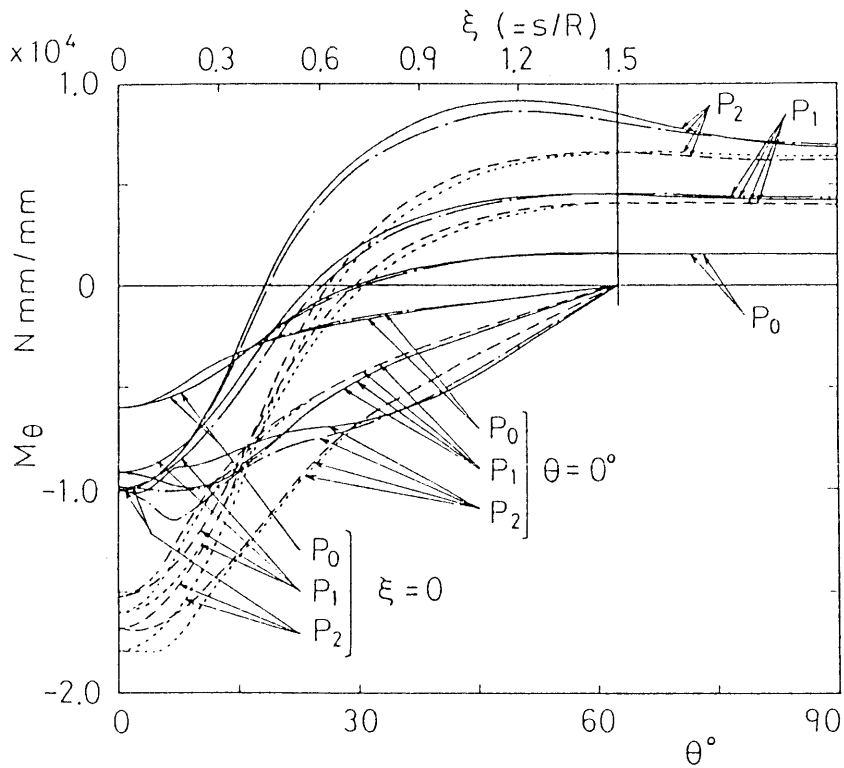


図 3.4 曲げモーメント  $M_\theta$

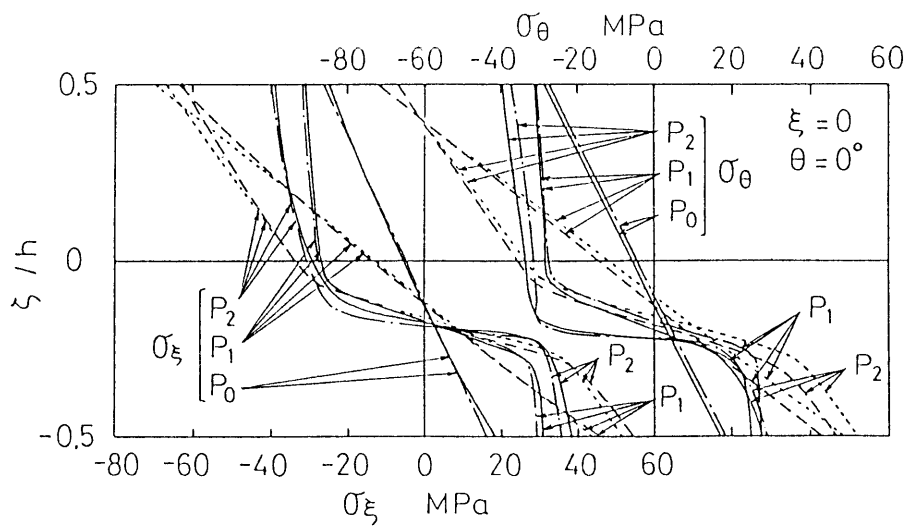


図 3.5  $\xi = 0, \theta = 0^\circ$  の点における殻厚方向の応力分布

次に、図3.5は点A ( $\xi = 0, \theta = 0^\circ$ ) における  $\sigma_\xi$  と  $\sigma_\theta$  の殻厚方向の分布である。  
 $\sigma_\xi, \sigma_\theta$  とも外表面の応力緩和が著しく、図3.4で示した円筒殻中央部の曲げモーメントが大きく緩和する原因となっている。一見  $\sigma_\xi, \sigma_\theta$  とも類似の分布を示しているが、両理論の差は  $\sigma_\theta$  成分が若干大きく、この差が  $N_\xi, M_\xi$  よりも  $N_\theta, M_\theta$  に両理論の差が大きく現わ

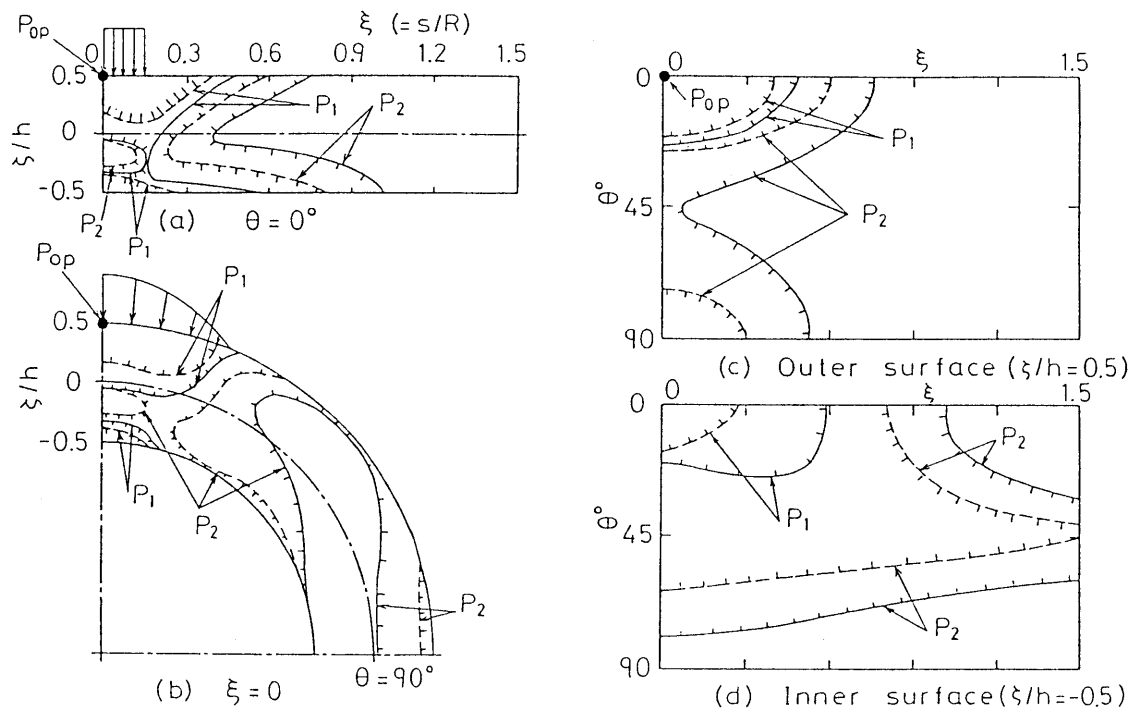


図 3.6 本理論による降伏領域進展の様子

れることと対応している。

最後に、図3.6は本理論による降伏域の進展の様子を示したものである。図において破線は負荷の瞬間の値を示す。 $P_c = P_{0p}$  ( $= -7.89$  MPa) のとき初めて降伏し、その位置は点A ( $\xi = 0$ 、 $\theta = 0^\circ$ ) の外表面である。降伏域は、荷重  $P_1$  の段階では時間とともに、おもに殻の子午線方向と厚さ方向に広がり、 $P_2$  の段階になると、急速に円周方向にも進展するようである。

以上、本計算例では殻厚と平均半径の比が 0.2 と比較的厚い円筒殻に、局所的分布荷重が作用した場合を取り扱ったが、その結果をまとめると次のようになる。

- (1) 荷重が大きくなり降伏域が広がってくると、粘性の影響が顕著になり、解の時間的变化が一般に大きくなる。本計算例では、負荷時から定常時に至る際の、変形の増加ならびに面内力、曲げモーメントの緩和が、荷重負荷部付近で顕著であった。
- (2) 本理論による結果とせん断変形の影響を無視した薄肉殻理論による結果との差は、弾性限の荷重段階では  $N_\theta$  成分を除いて小さいが、荷重の増加と共に変形が進むにつれて、かなり生じることが認められた。塑性変形を生じて変形量が大きくなる中程

度の厚さの殻では、殻厚方向のせん断変形の影響を考慮に入れた解析が不可欠である。

本計算例で使用した計算機は FACOM M-200 で、計算時間はおよそ200分である。

## 第4章 直交異方性厚肉回転対称殻の準静的応答 [92,93,94]

押しや引抜きならびに圧延材の曲げなどの塑性加工によって作られる殻は、一般に異方性を有している。それ故材料によっては、等方性の仮定を保ったままでは近似度が悪くなり、異方性を含めた数値解析が必要である。しかしながら、異方性材料から成る殻を取り扱った弾／粘塑性解析は、まだあまり行われていないようである。

静的な荷重が作用する回転対称殻の弾／粘塑性変形問題について、これまで薄肉殻、ならびに中程度の厚さを有する回転対称殻を対象として解法を述べてきたが、これらは全て等方性材料からなる殻に対するものである。

そこで本章では、半径、円周および子午線方向に異方性の主軸を持つ直交異方性材料からなる、中程度の厚さの回転対称殻を取り上げる。弾／粘塑性の構成式には、Hill の直交異方性塑性理論に従って、Perzyna の弾／粘塑性構成式 [53] を直交異方性の場合に拡張したものを用い、厚肉の場合に考慮すべきせん断変形には、Reissner-Naghdi の理論 [38, 39] (ひずみ-変位関係) を採用して基礎式を導く。基礎式の数値解法には、差分法を適用する。

第1節では軸対称荷重の場合に限られるが、幾何学的非線形性を考慮して、比較的大きな変形まで解析可能な解法を取り扱う。第2節では、第2章の解法を拡張し、微小変形理論ではあるが、非軸対称荷重が作用する場合に適用できる解法を示す。

また両端自由のチタン円筒殻中央部に、軸対称荷重を加えた実験および局所的分布荷重を加えた実験を行い、円筒殻の外表面のひずみの時間的変化を求め、解析結果と比較して解法の妥当性を検討する。

### 4.1 軸対称荷重を受ける場合 [92,93]

Reissnerが導いた軸対称殻の大たわみ弾性理論による平衡方程式 [110]、および殻厚方向のせん断変形を考慮したひずみ-変位関係 [39]、ならびにPerzynaの弾／粘塑性構成式 [53] を採用して、竹園らは中程度の厚さの回転対称殻の大たわみを考慮に入れた弾／粘塑性問題の解法を示した [75]。本節では、この解法にHillの直交異方性理論を導入して、材料が異方性を有する場合に拡張し、実験との比較を試みる。

#### 4. 1. 1 直交異方性厚肉回転対称殻の基礎関係式

殻の中央面の形状を、図4.1に示すように、次のパラメータ表示で与える。

$$r = r(s), \quad y = y(s) \quad (4.1)$$

ここで、 $s$  は殻の中央面において子午線に沿って測った長さであり、 $r$ 、 $y$  は中央面の座標である。このとき、幾何学的基礎関係式は次のようになる。

$$r' = \cos(\Phi - \vartheta), \quad y' = \sin(\Phi - \vartheta), \quad (r')^2 + (y')^2 = 1 \quad (4.2)$$

ただし

$$(\quad)' = d(\quad)/ds, \quad \Phi = \varphi + \vartheta$$

ここに、 $\vartheta$  は角変位である。

Reissner [110] による回転対称殻の微小部分の平衡方程式は、変化率の形で次式で与えられる。

$$\dot{\phi}_v + r\dot{p}_v = 0, \quad \dot{\phi}_H - \dot{N}_\theta + r\dot{p}_H = 0, \quad (r\dot{M}_\xi)' - \dot{M}_\theta \cos \Phi + \dot{\vartheta} M_\theta \sin \Phi - r\dot{Q} = 0 \quad (4.3)$$

ただし

$$\dot{\phi} = \dot{\vartheta}, \quad \dot{\phi}_H = r\dot{H}, \quad \dot{\phi}_v = r\dot{V} \quad (4.4)$$

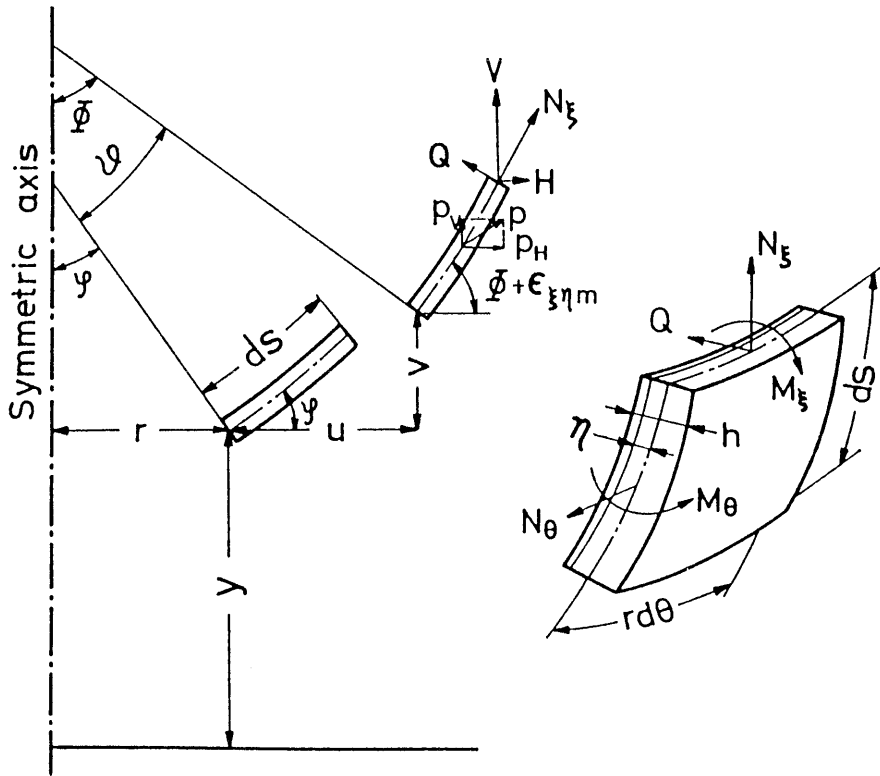


図 4.1 回転対称殻の記号



また、(・) は時間もしくは荷重に対する微分を表す。ここで、第2、3章で定義してきた曲げモーメント  $M_{\xi}$ 、 $M_{\theta}$  の方向 (図2.2) が、この節では反対であること、および座標がここでは反対方向の  $\eta$  座標として定義されていることに注意する必要がある (図4.1)。 $p_H$  と  $p_V$  は殻の中央面の単位面積当りの分布荷重の、半径方向成分と軸方向成分であり、殻の内外面 ( $\eta = \pm h/2$ ) に作用する分布荷重  $\{p_H^+, p_V^+\}$ 、 $\{p_H^-, p_V^-\}$  と次の関係にある。

$$p_H = p_H^+ h^+ - p_H^- h^-, \quad p_V = p_V^+ h^+ - p_V^- h^- \quad (4.5)$$

ただし

$$h^{\pm} = 1 \mp \frac{h}{2} \left( \frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_{\theta}} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{1}{R_S R_{\theta}} \quad (4.6)$$

$R_S$ 、 $R_{\theta}$  は中央面上の点における子午線方向および円周方向の曲率半径である。

また変形中の殻の単位長さ当りの各内力成分間には、次の関係が成り立つ [110]。

$$\left. \begin{aligned} r\dot{N}_{\xi} &= \dot{\psi}_H \cos \Phi + \dot{\psi}_V \sin \Phi - (\psi_H \sin \Phi - \psi_V \cos \Phi) \dot{\vartheta} \\ r\dot{Q} &= -\dot{\psi}_H \sin \Phi + \dot{\psi}_V \cos \Phi - (\psi_H \cos \Phi + \psi_V \sin \Phi) \dot{\vartheta} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

中央面のひずみ  $\varepsilon_{\xi m}$ 、 $\varepsilon_{\theta m}$ 、 $\varepsilon_{\xi \eta m}$  および曲率の変化量  $\kappa_{\xi}$ 、 $\kappa_{\theta}$  は、半径方向変位  $u$ 、軸方向変位  $v$  および角変位  $\vartheta$  によって次のように表される [39]。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\xi m} &= \dot{u}' \cos \Phi + \dot{v}' \sin \Phi + \dot{\vartheta} (v' \cos \Phi - u' \sin \Phi - \sin \vartheta) \\ \dot{\varepsilon}_{\theta m} &= \dot{u}' / r \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\varepsilon}_{\xi \eta m} &= \dot{v}' \cos \Phi - \dot{u}' \sin \Phi - \dot{\vartheta} (v' \sin \Phi + u' \cos \Phi + \cos \vartheta) \\ \dot{\kappa}_{\xi} &= \dot{\vartheta}', \quad \dot{\kappa}_{\theta} = \dot{\vartheta} \cos \Phi / r \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

ここに  $\varepsilon_{\xi \eta m}$  は工学上のせん断ひずみの1/2である。

また式(4.8)から次の適合条件式ならびに  $v$  の式を得る。

$$(r \dot{\varepsilon}_{\theta m})' - \dot{\varepsilon}_{\xi m} \cos \Phi + 2\dot{\varepsilon}_{\xi \eta m} \sin \Phi + \varepsilon_{\xi m} \dot{\vartheta} \sin \Phi + 2\varepsilon_{\xi \eta m} \dot{\vartheta} \cos \Phi = -\dot{\vartheta} \sin \Phi \quad (4.10)$$

$$\dot{v} = \int [\dot{\varepsilon}_{\xi m} \sin \Phi + 2\dot{\varepsilon}_{\xi \eta m} \cos \Phi + \{ (1 + \varepsilon_{\xi m}) \cos \Phi - 2\varepsilon_{\xi \eta m} \sin \Phi \} \dot{\vartheta}] d\xi \quad (4.11)$$

殻厚中央面から内側に  $\eta$  離れた点のひずみ成分、 $\varepsilon_{\xi}$ 、 $\varepsilon_{\theta}$ 、 $\varepsilon_{\xi \eta}$  は次のようになる [39]。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\xi} &= (\dot{\epsilon}_{\xi m} - \eta \dot{\kappa}_{\xi}) / (1 - \eta / R_{\xi}), & \dot{\epsilon}_{\theta} &= (\dot{\epsilon}_{\theta m} - \eta \dot{\kappa}_{\theta}) / (1 - \eta / R_{\theta}) \\ \dot{\epsilon}_{\xi\eta} &= \dot{\epsilon}_{\xi\eta m} / (1 - \eta / R_{\xi}) \end{aligned} \right\} (4.12)$$

ただし

$$R_{\xi} = 1 / \Phi', \quad R_{\theta} = r / \sin \Phi$$

次に、Hill の直交異方性理論を用いて、Perzyna の弾／粘塑性構成式 [53] を直交異方性の場合に拡張する。異方性の主軸を  $\xi$ 、 $\theta$ 、 $\eta$  とし、殻厚方向の垂直応力を省略すると、相当応力  $\bar{\sigma}$  は次の式で与えられる。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2(F+G+H)} [(G+H)\sigma_{\xi}^2 - 2H\sigma_{\xi}\sigma_{\theta} + (F+H)\sigma_{\theta}^2 + 2M\sigma_{\xi\eta}^2]} \quad (4.13)$$

ここで、 $F, G, H, M$  は材料の異方性パラメータである。式(4.13)の  $\bar{\sigma}$  を塑性ポテンシャルとするときの勾配は、

$$\left[ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \right] = \frac{3}{2\bar{\sigma}} [S_{\xi}, S_{\theta}, 2S_{\xi\eta}] = \frac{3}{2\bar{\sigma}} S_{ij} \quad (4.14)$$

ただし

$$S_{\xi} = \frac{(G+H)\sigma_{\xi} - H\sigma_{\theta}}{F+G+H}, \quad S_{\theta} = \frac{(F+H)\sigma_{\theta} - H\sigma_{\xi}}{F+G+H}, \quad S_{\xi\eta} = \frac{M\sigma_{\xi\eta}}{F+G+H} \quad (4.15)$$

全ひずみを弾性ひずみと粘塑性ひずみの和で表すと、直交異方性の場合の応力-ひずみ関係式は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_{\xi} &= \frac{E_{\xi}}{1 - \nu_{\xi\theta}\nu_{\theta\xi}} [\dot{\epsilon}_{\xi} + \nu_{\theta\xi}\dot{\epsilon}_{\theta} - (\dot{\epsilon}_{\xi}^{VP} + \nu_{\theta\xi}\dot{\epsilon}_{\theta}^{VP})], & \dot{\sigma}_{\theta} &= \frac{E_{\theta}}{1 - \nu_{\xi\theta}\nu_{\theta\xi}} [\nu_{\xi\theta}\dot{\epsilon}_{\xi} + \dot{\epsilon}_{\theta} - (\nu_{\xi\theta}\dot{\epsilon}_{\xi}^{VP} + \dot{\epsilon}_{\theta}^{VP})], \\ \dot{\sigma}_{\xi\eta} &= 2G_{\xi\eta} [\dot{\epsilon}_{\xi\eta} - \dot{\epsilon}_{\xi\eta}^{VP}] \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

ここに、粘塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}^{VP}$  は、Perzyna の式、(2.10)～(2.12)により与えられる。

( $\dot{\phantom{x}}$ ) は時間に関する微分を示し、 $E_{\xi}$ 、 $E_{\theta}$ 、 $G_{\xi\eta}$  は弾性係数、 $\nu_{\xi\theta}$ 、 $\nu_{\theta\xi}$  はポアソン比である。式(2.12)における  $f=0$  は Hill の降伏曲面を表し、式(2.13)の相当粘塑性ひずみ  $\bar{\epsilon}^{VP}$  は直交異方性の場合、次式のようになる。

$$d\bar{\epsilon}^{VP} = \sqrt{\frac{2}{3}(F+G+H)} \int \left\{ \frac{(F+H)d\epsilon_{\xi}^{2VP} + 2Hd\epsilon_{\xi}^{VP} \cdot d\epsilon_{\theta}^{VP} + (G+H)d\epsilon_{\theta}^{2VP} + 2d\epsilon_{\xi\eta}^{2VP}}{FG+GH+HF} \right\}^{1/2} \quad (4.17)$$

殻の単位長さ当りの合応力、合モーメントは、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{N}_\varepsilon, \dot{Q}, \dot{M}_\varepsilon\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\varepsilon, \dot{\sigma}_{\varepsilon\eta}, \dot{\sigma}_{\varepsilon\eta}\} (1-\eta/R_o) d\eta \\ \{\dot{N}_\theta, \dot{M}_\theta\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_{\theta\eta}\} (1-\eta/R_\varepsilon) d\eta \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

式(4.12)および式(4.16)を式(4.18)に代入し積分すると、合応力および合モーメントは、次のように表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{N}_\varepsilon \\ \dot{N}_\theta \\ \dot{Q} \\ \dot{M}_\varepsilon \\ \dot{M}_\theta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccccc} Tc_\varepsilon & T\nu_{\theta\varepsilon}c_\varepsilon & 0 & -D_\varepsilon\lambda & 0 \\ T\nu_{\varepsilon\theta}c_\theta & Tc_\theta & 0 & 0 & D_\theta\lambda \\ 0 & 0 & \frac{5}{6}G_{\varepsilon\eta}h & 0 & 0 \\ D_\varepsilon\lambda & 0 & 0 & -D_\varepsilon & -\nu_{\theta\varepsilon}D_\varepsilon \\ 0 & -D_\theta\lambda & 0 & -\nu_{\varepsilon\theta}D_\theta & -D_\theta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_{\varepsilon m} \\ \dot{\varepsilon}_{\theta m} \\ 2\dot{\varepsilon}_{\varepsilon\eta m} \\ \dot{\kappa}_\varepsilon \\ \dot{\kappa}_\theta \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \dot{N}_\varepsilon^{VP} \\ \dot{N}_\theta^{VP} \\ \dot{Q}^{VP} \\ \dot{M}_\varepsilon^{VP} \\ \dot{M}_\theta^{VP} \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

ここに

$$c_\varepsilon = E_\varepsilon h, \quad c_\theta = E_\theta h, \quad D_\varepsilon = \frac{E_\varepsilon h^3}{12(1-\nu_{\varepsilon\theta}\nu_{\theta\varepsilon})}, \quad D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_{\varepsilon\theta}\nu_{\theta\varepsilon})}, \quad \lambda = \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_o}, \quad T = \frac{1}{1-\nu_{\varepsilon\theta}\nu_{\theta\varepsilon}}$$

式(4.19)を  $\dot{\varepsilon}_{\xi m}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\theta m}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\xi\eta m}$ 、 $\dot{\kappa}_\xi$  および  $\dot{\kappa}_\theta$  について解くと、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\xi m} &= \frac{1}{c_\xi} (\dot{N}_\xi + \dot{N}_\xi^{VP}) - \frac{\nu_{\theta\xi}}{c_\theta} (\dot{N}_\theta + \dot{N}_\theta^{VP}) + k\lambda \dot{\kappa}_\xi + k\nu_{\theta\xi}\lambda \dot{\kappa}_\theta \\ \dot{\varepsilon}_{\theta m} &= -\frac{\nu_{\xi\theta}}{c_\xi} (\dot{N}_\xi + \dot{N}_\xi^{VP}) + \frac{1}{c_\theta} (\dot{N}_\theta + \dot{N}_\theta^{VP}) - k\nu_{\xi\theta}\lambda \dot{\kappa}_\xi - k\lambda \dot{\kappa}_\theta \\ 2\dot{\varepsilon}_{\xi\eta m} &= \frac{6}{5G_{\xi\eta}h} (\dot{Q} + \dot{Q}^{VP}) \\ \dot{\kappa}_\xi &= \frac{1}{1-\nu_{\theta\xi}\nu_{\xi\theta}} \left\{ \lambda \dot{\varepsilon}_{\xi m} + \nu_{\theta\xi}\lambda \dot{\varepsilon}_{\theta m} - \frac{1}{D_\xi} (\dot{M}_\xi + \dot{M}_\xi^{VP}) + \frac{\nu_{\theta\xi}}{D_\theta} (\dot{M}_\theta + \dot{M}_\theta^{VP}) \right\} \\ \dot{\kappa}_\theta &= \frac{1}{1-\nu_{\theta\xi}\nu_{\xi\theta}} \left\{ -\nu_{\xi\theta}\lambda \dot{\varepsilon}_{\xi m} - \lambda \dot{\varepsilon}_{\theta m} + \frac{\nu_{\xi\theta}}{D_\xi} (\dot{M}_\xi + \dot{M}_\xi^{VP}) - \frac{1}{D_\theta} (\dot{M}_\theta + \dot{M}_\theta^{VP}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

ただし  $k = D_\xi / c_\xi = D_\theta / c_\theta$  .

また、 $\dot{N}_\xi^{VP}$ 、 $\dot{N}_\theta^{VP}$ 、 $\dot{Q}^{VP}$  および  $\dot{M}_\xi^{VP}$ 、 $\dot{M}_\theta^{VP}$  はそれぞれ粘塑性によるみかけの合応力、合モーメントの変化率であり、次式によってみかけの応力変化率から計算できる。

$$\left\{ \begin{aligned} \{\dot{N}_\varepsilon^{VP}, \dot{Q}^{VP}, \dot{M}_\varepsilon^{VP}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\varepsilon^{VP}, \dot{\sigma}_{\varepsilon\eta}^{VP}, \dot{\sigma}_{\varepsilon\eta}^{VP}\} (1-\eta/R_o) d\eta \\ \{\dot{N}_\theta^{VP}, \dot{M}_\theta^{VP}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{\sigma}_\theta^{VP}, \dot{\sigma}_{\theta\eta}^{VP}\} (1-\eta/R_\varepsilon) d\eta \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

以上の諸式を用いて、 $\dot{\vartheta}$  および  $\dot{\psi}_H$  に関する2つの二階連立微分方程式を導くことができる。まず、式(4.19)<sub>4,5</sub>の $\dot{\epsilon}_{\xi m}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\theta m}$ に式(4.20)<sub>1,2</sub>を代入し、式(4.9)を用いて $\dot{M}_\xi$ 、 $\dot{M}_\theta$ を $\dot{\vartheta}$ で表すと、

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_\xi &= D_\xi \lambda \left\{ (\dot{N}_\xi + \dot{N}_\xi^{vp}) / c_\xi - \nu_{\theta\xi} (\dot{N}_\theta + \dot{N}_\theta^{vp}) / c_\theta \right\} \\ &\quad - D_\xi (1 - k \lambda^2) \dot{\vartheta}' - D_\xi \nu_{\theta\xi} (1 - k \lambda^2) \dot{\vartheta} \cos \Phi / r - \dot{M}_\xi^{vp} \\ \dot{M}_\theta &= D_\theta \lambda \left\{ (\dot{N}_\xi + \dot{N}_\xi^{vp}) \nu_{\xi\theta} / c_\xi - (\dot{N}_\theta + \dot{N}_\theta^{vp}) / c_\theta \right\} \\ &\quad - D_\theta \nu_{\xi\theta} (1 - k \lambda^2) \dot{\vartheta}' - D_\theta (1 - k \lambda^2) \dot{\vartheta} \cos \Phi / r - \dot{M}_\theta^{vp} \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

次に、式(4.22)に式(4.3)<sub>2</sub>、(4.7)を代入して $\dot{N}_\xi$ 、 $\dot{N}_\theta$ 、 $\dot{Q}$ を消去すると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_\xi &= -D_\xi (1 - k \lambda^2) \dot{\vartheta}' - (D_\xi \nu_{\theta\xi} / r) (1 - k \lambda^2) \dot{\vartheta} \cos \Phi \\ &\quad + k \lambda \left\{ \dot{\Psi}_U \sin \Phi / r + \dot{\Psi}_H \cos \Phi / r + (\Psi_U \cos \Phi / r - \Psi_H \sin \Phi / r) \dot{\vartheta} \right\} \\ &\quad - (D_\xi \lambda \nu_{\theta\xi} / c_\theta) (\dot{\Psi}_H' + r \dot{P}_H) + k \lambda \dot{N}_\xi^{vp} \\ &\quad - (D_\xi \lambda \nu_{\theta\xi} / c_\theta) \dot{N}_\theta^{vp} - \dot{M}_\xi^{vp} \\ \dot{M}_\theta &= -\nu_{\xi\theta} D_\theta (1 - k \lambda^2) \dot{\vartheta}' - (D_\theta / r) (1 - k \lambda^2) \dot{\vartheta} \cos \Phi \\ &\quad + (D_\theta \lambda \nu_{\xi\theta} / c_\xi) (\Psi_U \cos \Phi / r - \Psi_H \sin \Phi / r) \dot{\vartheta} \\ &\quad + (D_\theta \lambda \nu_{\xi\theta} / c_\xi) \left\{ (\cos \Phi / r) \dot{\Psi}_H + (\sin \Phi / r) \dot{\Psi}_U \right\} \\ &\quad - k \lambda \dot{\Psi}_H' - k \lambda r \dot{P}_H + (D_\theta \lambda \nu_{\xi\theta} / c_\xi) \dot{N}_\xi^{vp} - k \lambda \dot{N}_\theta^{vp} - \dot{M}_\theta^{vp} \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

式(4.23)、(4.7)<sub>2</sub>を式(4.3)<sub>3</sub>に代入して、二階連立微分方程式の最初の式が導かれる。

もう一つの式は、次の手順による。すなわち、式(4.19)<sub>1,2,3</sub>の $\dot{N}_\xi$ 、 $\dot{N}_\theta$ 、 $\dot{Q}$ にそれぞれ式(4.3)<sub>2</sub>、(4.7)を代入し、 $\dot{\kappa}_\xi$ 、 $\dot{\kappa}_\theta$ には式(4.9)を用いると、 $\dot{\epsilon}_{\xi m}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\theta m}$ 、 $\dot{\epsilon}_{\xi\eta m}$ は $\dot{\vartheta}$ と $\dot{\Psi}_H$ を用いて次式のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\xi m} &= \left\{ \dot{\Psi}_U \sin \Phi + \dot{\Psi}_H \cos \Phi + (\Psi_U \cos \Phi - \Psi_H \sin \Phi) \dot{\vartheta} \right\} / (c_\xi r) \\ &\quad - \nu_{\theta\xi} (\dot{\Psi}_H' + r \dot{P}_H) / c_\theta + k \lambda \dot{\vartheta}' + k \nu_{\theta\xi} \lambda \dot{\vartheta} \cos \Phi / r \\ &\quad + \dot{N}_\xi^{vp} / c_\xi - \nu_{\theta\xi} \dot{N}_\theta^{vp} / c_\theta \\ \dot{\epsilon}_{\theta m} &= -\nu_{\xi\theta} \left\{ \dot{\Psi}_U \sin \Phi + \dot{\Psi}_H \cos \Phi + (\Psi_U \cos \Phi - \Psi_H \sin \Phi) \dot{\vartheta} \right\} / (c_\xi r) \\ &\quad + (\dot{\Psi}_H' + r \dot{P}_H) / c_\theta - k \nu_{\xi\theta} \lambda \dot{\vartheta}' - k \lambda \dot{\vartheta} \cos \Phi / r \\ &\quad - \nu_{\xi\theta} \dot{N}_\xi^{vp} / c_\xi + \dot{N}_\theta^{vp} / c_\theta \\ 2\dot{\epsilon}_{\xi\eta m} &= \{6 / (5G \xi \eta r h)\} \left\{ \dot{\Psi}_U \cos \Phi - \dot{\Psi}_H \sin \Phi - (\Psi_U \sin \Phi + \Psi_H \cos \Phi) \dot{\vartheta} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$+ r \dot{Q}^{vp} \} \quad \Bigg) \quad (4.24)$$

式(4.24)を式(4.10)に代入して、第2番目の二階微分方程式が求められる。

以上より得られる異方性厚肉回転対称殻の大たわみ弾／粘塑性問題の基礎微分方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{bmatrix} \dot{x}'' + \begin{bmatrix} a_3, a_4 \\ b_3, b_4 \end{bmatrix} \dot{x}' + \begin{bmatrix} a_5, a_6 \\ b_5, b_6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\psi}_H \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

ここに、 $a_1 \sim a_6, b_1 \sim b_6$  および  $d_1, d_2$  は次のように表される。

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - k\lambda^2, & a_2 &= \frac{\nu_{\theta\epsilon}\lambda}{c_\theta} \\ a_3 &= \frac{(rD_\epsilon)'}{rD_\epsilon}(1 - k\lambda^2) - (k'\lambda^2 + 2k\lambda\lambda') + \frac{\nu_{\theta\epsilon}}{r}(1 - k\lambda^2) \cos \Phi - \frac{\lambda}{rc_\epsilon}(\psi_V \cos \Phi \\ &\quad - \psi_H \sin \Phi) - \frac{\nu_{\theta\epsilon}D_\theta}{rD_\epsilon}(1 - k\lambda^2) \cos \Phi \\ a_4 &= -\frac{\lambda}{rc_\epsilon} \cos \Phi + \frac{\nu_{\theta\epsilon}}{D_\epsilon} \left( \frac{D_\epsilon \lambda}{c_\theta} \right)' + \frac{\nu_{\theta\epsilon}\lambda}{c_\theta} \frac{r'}{r} - \frac{\lambda}{rc_\epsilon} \cos \Phi \\ a_5 &= \frac{\nu_{\theta\epsilon}}{rD_\epsilon} (D_\epsilon \cos \Phi)' (1 - k\lambda^2) - \frac{\nu_{\theta\epsilon}}{r} (k'\lambda^2 + 2k\lambda\lambda') \cos \Phi \\ &\quad - \frac{(k\lambda)'}{rD_\epsilon} (\psi_V \cos \Phi - \psi_H \sin \Phi) - \frac{\lambda}{rc_\epsilon} [\psi_V' \cos \Phi + \psi_V (\cos \Phi)' - \psi_H' \sin \Phi - \psi_H (\sin \Phi)'] \\ &\quad - \frac{D_\theta}{D_\epsilon} (1 - k\lambda^2) \frac{\cos^2 \Phi}{r^2} + \frac{D_\theta \lambda \nu_{\theta\epsilon}}{r^2 D_\epsilon c_\epsilon} (\psi_V \cos^2 \Phi - \psi_H \sin \Phi \cos \Phi) \\ &\quad - \frac{1}{rD_\epsilon} (\psi_V \sin \Phi + \psi_H \cos \Phi) - \frac{1}{rD_\epsilon} M_\theta \sin \Phi \\ a_6 &= -\frac{(k\lambda)'}{rD_\epsilon} \cos \Phi - \frac{\lambda}{rc_\epsilon} (\cos \Phi)' + \frac{D_\theta \lambda \nu_{\theta\epsilon}}{D_\epsilon c_\epsilon} \frac{\cos^2 \Phi}{r^2} - \frac{\sin \Phi}{(rD_\epsilon)}, & b_1 &= -\nu_{\theta\theta} D_\theta \lambda, & b_2 &= 1 \\ b_3 &= -\frac{\nu_{\theta\theta} C_\theta}{rc_\epsilon} (\psi_V \cos \Phi - \psi_H \sin \Phi) - \frac{\nu_{\theta\theta} C_\theta}{r} (k\lambda r)' - \frac{2\lambda D_\theta}{r} \cos \Phi, \\ b_4 &= -\frac{\nu_{\theta\theta} C_\theta}{rc_\epsilon} \cos \Phi + \frac{(r/c_\theta)'}{(r/c_\theta)} + \frac{\nu_{\theta\theta}}{r} \cos \Phi \\ b_5 &= -\frac{\nu_{\theta\theta} C_\theta}{r} \left( \frac{1}{c_\epsilon} \right)' (\psi_V \cos \Phi - \psi_H \sin \Phi) - \frac{\nu_{\theta\theta} C_\theta}{rc_\epsilon} [\psi_V' \cos \Phi + \psi_V (\cos \Phi)' - \psi_H' \sin \Phi - \psi_H (\sin \Phi)'] \\ &\quad - \frac{C_\theta}{r} (k\lambda \cos \Phi)' - \frac{C_\theta}{rc_\epsilon} \left( \psi_V \frac{\cos^2 \Phi}{r} - \psi_H \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{r} \right) - \lambda D_\theta \nu_{\theta\theta} \left( \frac{\cos \Phi}{r} \right)^2 - \frac{6C_\theta}{5G_{\theta\eta} h} \left[ \psi_V \left( \frac{\sin \Phi}{r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \psi_H \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{r^2} \right] + \frac{C_\theta}{r} \epsilon_{\theta m} \sin \Phi + \frac{C_\theta}{r} 2\epsilon_{\theta\eta m} \cos \Phi + \frac{C_\theta}{r} \sin \Phi \\ b_6 &= -\frac{\nu_{\theta\theta} C_\theta}{r} \left( \frac{1}{c_\epsilon} \right)' \cos \Phi - \frac{\nu_{\theta\theta} C_\theta}{rc_\epsilon} (\cos \Phi)' - \frac{C_\theta}{c_\epsilon} \left( \frac{\cos \Phi}{r} \right)^2 - \frac{6C_\theta}{5G_{\theta\eta} h} \left( \frac{\sin \Phi}{r} \right)^2 \\ d_1 &= \frac{\lambda}{rc_\epsilon} \sin \Phi \cdot \dot{\psi}_V + \left\{ \left[ \frac{(k\lambda)'}{rD_\epsilon} \sin \Phi + \frac{\lambda}{rc_\epsilon} (\sin \Phi)' \right] - \frac{D_\theta \lambda \nu_{\theta\theta}}{D_\epsilon c_\epsilon} \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{r^2} - \frac{\cos \Phi}{rD_\epsilon} \right\} \dot{\psi}_H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\nu_{\theta\epsilon}\left(\frac{D_{\epsilon}\lambda}{c_{\theta}}\right)'}{(r\dot{p}_H)} - \frac{\nu_{\theta\epsilon}\lambda}{c_{\theta}}(2r'\dot{p}_H + r\dot{p}'_H) + \frac{(k\lambda r\dot{N}_{\epsilon}^{VP})'}{rD_{\epsilon}} - \frac{\nu_{\theta\epsilon}\left(\frac{D_{\epsilon}\lambda}{c_{\theta}}r\dot{N}_{\theta}^{VP}\right)'}{rD_{\epsilon}} - \frac{(r\dot{M}_{\epsilon}^{VP})'}{rD_{\epsilon}} \\
& + \frac{\lambda}{c_{\epsilon}}\cos\Phi\cdot\dot{p}_H - \frac{D_{\theta}\lambda\nu_{\theta\theta}}{rc_{\epsilon}D_{\epsilon}}\cos\Phi\cdot\dot{N}_{\epsilon}^{VP} + \frac{\lambda}{rc_{\epsilon}}\cos\Phi\cdot\dot{N}_{\theta}^{VP} + \frac{\cos\Phi}{rD_{\epsilon}}\dot{M}_{\theta}^{VP} \\
d_2 = & \frac{\nu_{\theta\theta}c_{\theta}}{rc_{\epsilon}}\sin\Phi\cdot\dot{\psi}'_V + \left[\frac{\nu_{\theta\theta}c_{\theta}}{r}\left(\frac{1}{c_{\epsilon}}\right)'\sin\Phi + \frac{\nu_{\theta\theta}c_{\theta}}{rc_{\epsilon}}(\sin\Phi)'\right] + \frac{c_{\theta}}{c_{\epsilon}}\frac{\sin\Phi\cos\Phi}{r^2} \\
& - \frac{6c_{\theta}}{5G_{\theta\theta}h}\frac{\sin\Phi\cos\Phi}{r^2}\dot{\psi}_V \\
& - \left[\frac{(r/c_{\theta})'}{(r/c_{\theta})} + \frac{\nu_{\theta\theta}}{r}\cos\Phi\right](r\dot{p}_H) - r'\dot{p}_H - r\dot{p}'_H + \frac{c_{\theta}}{r}\left(\frac{\nu_{\theta\theta}r}{c_{\epsilon}}\dot{N}_{\epsilon}^{VP}\right)' - \frac{c_{\theta}}{r}\left(\frac{r}{c_{\theta}}\dot{N}_{\theta}^{VP}\right)' + \frac{c_{\theta}}{c_{\epsilon}}\frac{\cos\Phi}{r}\dot{N}_{\epsilon}^{VP} \\
& - \nu_{\theta\epsilon}\frac{\cos\Phi}{r}\dot{N}_{\theta}^{VP} - \frac{6c_{\theta}}{5G_{\theta\theta}h}\frac{\sin\Phi}{r}\dot{Q}^{VP}
\end{aligned}$$

式(4.25)において、 $c_{\xi}$ と $c_{\theta}$ 、 $D_{\xi}$ と $D_{\theta}$ 、 $\nu_{\xi\theta}$ と $\nu_{\theta\xi}$ をそれぞれ等しくすると、竹園らが以前に導いた等方性の厚肉殻に対する基礎式となる [75]。

境界条件としては、殻の端において次の様なものが考えられる。

1) 固定 (1) : 半径方向に移動可能な場合

$$\dot{g} = 0 \quad (\text{変形による回転角が零})、\dot{\Psi}_H = 0 \quad (\text{半径方向合応力成分が零}) \quad (4.26)$$

2) 固定 (2) : 半径方向移動を拘束する場合

$$\dot{g} = 0、\dot{u} = 0 \quad (\text{半径方向変位が零}) \quad (4.27)$$

3) 支持 (1) : 半径方向に移動可能な場合

$$\dot{M}_{\xi} = 0 \quad (\text{子午線方向曲げモーメントが零})、\dot{\Psi}_H = 0 \quad (4.28)$$

4) 支持 (2) : 半径方向移動を拘束する場合

$$\dot{M}_{\xi} = 0、\dot{u} = 0 \quad (4.29)$$

5) 殻が閉じている場合 (ただしその極に集中荷重が作用しない場合)

$$\dot{g} = 0、\dot{\Psi}_H = 0 \quad (4.30)$$

#### 4. 1. 2 数値計算法

ある任意の時刻と荷重段階における内力と変位の変化率は、式(4.25)を適当な境界条件のもとで解けば得られることになる。式(4.25)の右辺の値は、荷重速度と粘塑性ひずみ速度から求めることができるので、ある計算段階の解がわかっているならば、方程式の係数はすべて既知となり、この結果、基礎式は、線形化され、 $\dot{g}$ と $\dot{\psi}_H$ に関する二階連立線形微分方程式として解くことができる。式(4.25)の数値解法には差分法を用いる。差分式ならびに解析手順は、第2章4節とほぼ同様である。ただし本解法では、曲率が不連続な点でも

$r'$ が連続であれば、接続条件式は不要である。また式(2.43),(2.47)の $A_i$ 、 $B_i$ 、 $C_i$ および $D_i$ は、それぞれ $(2 \times 2)$ 、 $(2 \times 1)$ のマトリックスであり、式(2.43),(2.47)は $\dot{\vartheta}_i$ 、 $\dot{\Psi}_{ii}$ に関する $N$ 元連立方程式となる。

式(4.21)の積分には、殻厚方向に等間隔に $K$ 個の点を取って、シンプソンの1/3則を適用する。ある任意の時刻と荷重段階における内力と変位は、各計算段階における解の変化率を、時間と荷重に対して積分することによって得られる。また $\dot{u}$ に関する積分形式で表されている変位 $u$ の計算(式(4.11))には、修正オイラー法を用いる。

#### 4. 1. 3 実験

これまで述べてきた解法の妥当性を検討するため、ここでは形状が単純で、実験の容易な両端自由の円筒殻について準静的負荷実験を行い、計算結果と実験結果を比較する。円筒殻試験片材料には、常温、低ひずみ速度のもとでも顕著な粘性を示すチタンを取り上げる。チタンは強さ-比重比が鉄鋼材料などに比べて大きいため、強くても軽量化を必要とする航空機などの輸送機器用金属材料として、また高温、高圧下でも耐食性、耐熱性がよいため、化学工業用金属材料として広く用いられている。この種の金属の殻構造物の弾塑性応答の正確な解析を行うには、これまで展開してきた弾/粘塑性理論による取扱いが、特に必要である。

##### 〔1〕 試験片と材料定数

実験に用いた円筒殻試験片は、外径 60mm、内径46mm のチタン引抜管から、内外面を切削して仕上げた。形状寸法は、平均半径  $R=25.5$  mm、厚さ  $h=3$  mm、長さ  $l=86$  mm とし、寸法比  $R/h$  は8.5である。

一方、この材料の材料特性を知るため、まずこの引抜管から軸方向、円周方向および $45^\circ$ 方向の3方向の単軸引張試験片(図4.2)を切り出す。引抜管の外径が 60mm、厚さが 7mm であるから、軸方向の試験片は簡単に採取できるが、円周方向、 $45^\circ$ 方向の試験片はそのままでは切り出せないため、次のようにした。

円周方向の試験片については、まず図4.2に細線で示す幅 20mm の円環の内面の一部を、点線のように切削した。次にその平坦部分(後に引張試験片の標点間の中央部になる)の内外面に、当て金を当てて、バイスで十分強固に固定した後、左右の両端部を破線のように

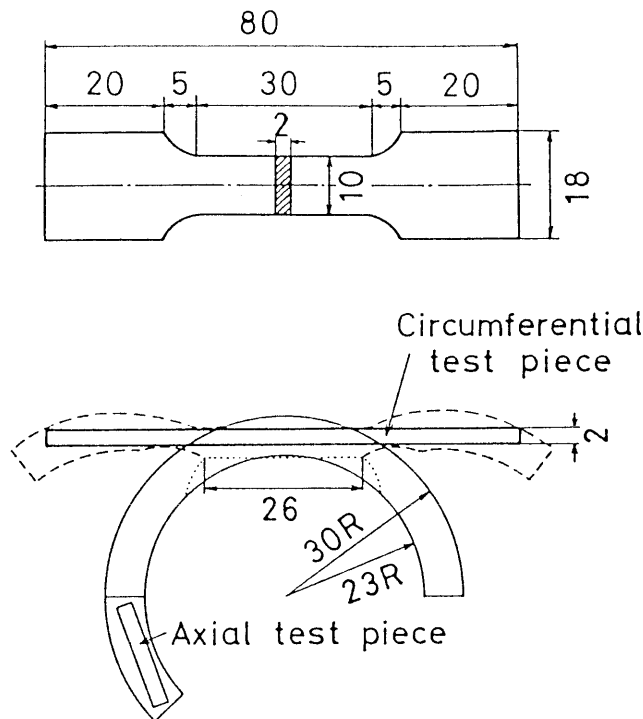


図 4.2 単軸引張試験片

に曲げ、これから切削によって太線で示すような試験片を作製した。左右の両端部を曲げるとき、塑性変形は主として、固定されていない厚さの小さい部分に限定されるので、固定部への影響は小さいと考えられる。実際に、固定部にひずみゲージを貼って変形の影響を調べたが、曲げによる永久ひずみは、ほとんどみられなかった。その際、当て金には溝を設け、ひずみゲージを圧迫しないようにした。なお、45°方向の試験片の場合には、引抜管から円環を切り出す際、軸線に対して45°傾けたほかは、上述の方法と全く同様である。

このようにして得られた試験片について、各々種々のひずみ速度 ( $\dot{\epsilon} = 0.05 \sim 300 \times 10^{-6} \text{ 1/s}$ ) で引張試験を行った。軸方向試験片による結果を、図4.3に例示する。子午線方向、円周方向および45°方向の3方向の引張試験結果に対して、ひずみおよびひずみ速度の広い範囲にわたって満足するように、粘性定数  $\tau_0$  と関数  $\Psi(f)$  を決定することは非常に困難であった。各方向とも、ひずみおよびひずみ速度が各々1.5%、 $100 \times 10^{-6} \text{ 1/s}$  以内で実験結果との差が5%以内になるように  $\tau_0$ 、 $\Psi$  を決定した。定めた材料定数の値を次式に示す(異方性パラメータの決め方は付録4.1参照)。

$$\left. \begin{array}{l} \text{ヤング率 } E_{\xi} = E_{\theta} = 107 \text{ GPa, ポアソン比 } \nu_{\xi\theta} = \nu_{\theta\xi} = 0.35 \\ \text{静的応力-ひずみ関係式 } \sigma^* = 482(9.18 \times 10^{-6} + \epsilon^{VP})^{0.13} \text{ MPa} \end{array} \right\}$$



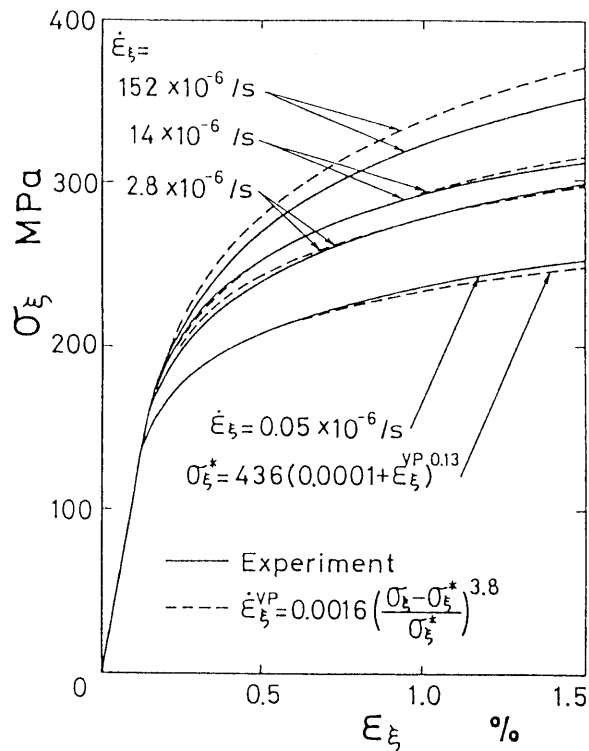


図 4.3 単軸引張試験 ( $\sigma_{\xi} - \varepsilon_{\xi}$ )

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{初期降伏応力 } \sigma_y = 144 \text{ MPa, 粘性パラメータ } \gamma_0 = 0.0013 \text{ 1/s} \\
 & \Psi(f) = [(\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma^*]^{3.8} \\
 & \text{異方性パラメータ } G/F = 1.59, H/F = 2.20, N/F = 6.30
 \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

図4.3において、破線は上記の材料定数の値を用いて計算した  $\sigma_{\xi} - \varepsilon_{\xi}$  の関係を示す。実験結果が、上記のひずみおよびひずみ速度の範囲内で、ほぼ近似できていることがわかる。

## 〔2〕 実験方法

円筒殻の半径方向に分布荷重を加える機構として、図4.4に示す実験装置を作製した。上下シリンダ①、② (S45C) に、電気油圧サーボ式試験機によって軸圧縮力  $\bar{W}$  を加えると、グリース潤滑を施した①のテーパ部によって、12分割した黄銅リング③が押し広げられ、チタン円筒殻試験片④に、半径方向の軸対称荷重（接触部の平均内圧  $\bar{P}$ ）が加わる。試験片外表面にひずみゲージを貼り、試験片外表面の軸方向ひずみ  $\varepsilon_{\xi}$ 、円周方向ひずみ  $\varepsilon_{\theta}$  の軸方向分布を計測した。

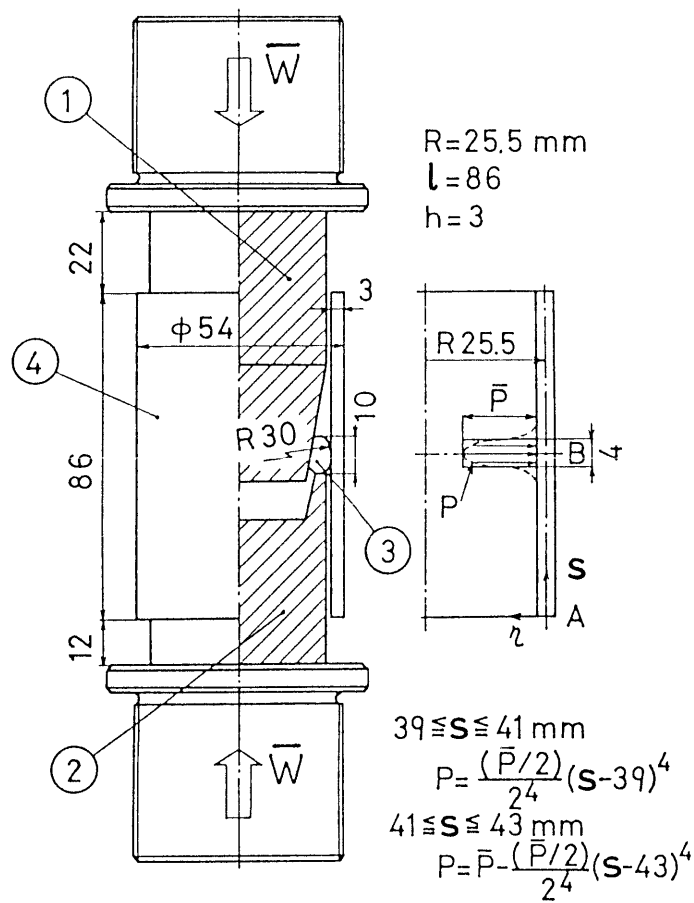


図 4.4 実験装置および円筒殻試験片

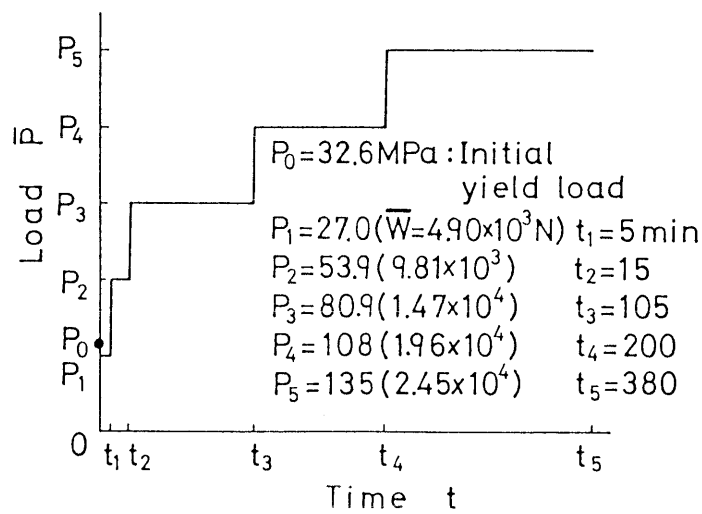


図 4.5 荷重

本実験では、分布荷重を円筒殻の円周方向に一様にするのが特に重要である。そこで、(1) S45Cやチタンに比べて軟質の黄銅をリング③に使用することにより、接触部分の馴染みをよくする、(2) ①と③のテーパ部の製作精度を高めて両者の接触を良くする、(3) 円筒殻試験片の変形の進行と共に生ずるリング③との片当たりを防ぐため、リング③に大きな曲率半径の丸みを設けるなど工夫を施した。そして円筒殻中央断面外周上に子午線方向および円周方向にひずみゲージを多数貼付して、変形の軸対称性を確認した。

荷重は図4.5に示すように、時間に対して階段状 ( $\bar{P} = 27.0 \sim 135$  MPa) に負荷し、負荷直後から定常状態に至るまで、5分ごとにひずみの測定を行った。それぞれの荷重段階において、最大のひずみの増加が、5分間に  $15 \times 10^{-6}$  以下になったとき、これを定常状態と見なし、次の荷重段階に移行した。図中、 $P_0$  は初期降伏荷重 (計算値) を示す。なお、 $\bar{W}$  と荷重  $\bar{P}$  との関係は、あらかじめ理論解のある内圧円環のひずみを測定することによって、較正した。

### (3) 計算条件の設定

円筒殻の中央部に作用する圧力の分布は、分割リング③と試験片④の間にはさんだ圧力判別シートの色の変化から、円周方向にはほぼ一様で、軸方向に4mmの分布幅を有することがわかった。本解析では、 $39 \leq s \leq 41$ 、 $41 \leq s \leq 43$  mm の範囲を、それぞれ次の  $s$  の4次式で表して計算を行った。

$$\left. \begin{array}{l} 39 \leq s \leq 41 \text{ mm: } p_{\dot{r}} = P = [(\bar{P}/2)/2^4](s-39)^4 \\ 41 \leq s \leq 43 \text{ mm: } p_{\dot{r}} = P = \bar{P} - [(P/2)/2^4](s-43)^4 \end{array} \right\} \quad (4.32)$$

荷重増分  $\Delta P$  は一定値 (1 MPa) とした。これは線形弾性解による弾性限の、およそ  $1/31$  となる。

円筒殻のひずみ速度は時間と共に変化するので、計算の際に時間間隔 ( $\Delta t$ )<sub>j</sub> の選び方によっては、計算の無駄や誤差が大きくなる。本計算では、Zienkiewicz および Cormeau [69] による時間間隔の安定限界を表す式 (2.48) を参照にし、 $(\Delta t)_j = 0.9 \Delta t_0$  を用いた。

境界条件は次のようになる。

$$\text{自由端の点A (} i = 1 \text{): } \dot{M}_{\xi} = 0, \dot{\psi}_H = 0 \quad (4.33)$$

$$\text{点B (} i = N \text{): } \dot{\eta} = 0, \dot{\psi}_H = 0 \quad (4.34)$$

差分点数  $N$  は子午線方向に  $N = 216$  とし、殻厚方向の格子点数  $K$  は  $K = 19$  とした。

これらの数値は、これを種々変化させたときの解の収束性と、利用した計算機の能力（FACOM M-382）を考慮して決定した。

異方性パラメータ  $M$  については、殻厚方向の試験片採取が困難なこと、またその影響が小さいことのために、 $S_{\xi\eta} = \sigma_{\xi\eta}$ 〔式(4.15)〕とみなし、 $M/F = 4.79$ とした。

#### 〔4〕 実験値と計算値の比較

図4.6、4.7は、それぞれ外表面の軸方向ひずみ  $\varepsilon_{\xi}$  と円周方向ひずみ  $\varepsilon_{\theta}$  の軸方向分布を示す。図中、黒円と破線は、負荷の瞬間の実験値と計算値であり、白円と実線は、定常状態のものである。点線および一点鎖線は、殻厚方向のせん断変形を考慮しない薄肉殻理論の場合の計算値で、負荷瞬間と定常状態の値を、荷重段階  $P_5$  についてのみ示している。

$\varepsilon_{\xi}$  は円筒殻中央部で最大引張ひずみを、 $s/l = 0.4$  付近で最大圧縮ひずみを示している。後述する  $M_{\xi}$  の子午線方向分布（図4.10）では、曲げモーメントがこれらの位置でそれぞれ最小、最大値を示し、かつ子午線上の  $N_{\xi}$  分布は零に近い値であることから、曲げ応力によるひずみが支配的である。一方  $\varepsilon_{\theta}$  は、 $s/l = 0.4$  付近では面内力  $N_{\theta}$  が大きな引張りを示し（図4.9）、 $\varepsilon_{\xi}$  分布と異なって  $s/l = 0.3 \sim 0.5$  で引張ひずみを生じている。殻の全長にわたって、 $\varepsilon_{\theta}$  分布は  $u$  の分布と符合している。また、 $\varepsilon_{\xi}$ 、 $\varepsilon_{\theta}$  とも円筒殻端部付近（ $s/l = 0 \sim 0.15$ ）では、ほとんどひずみが生じていない。図4.8に示す変位  $u$  の分布と併せて、荷重が大きくなっても円筒殻中央部付近で塑性変形が著しく進行し、ひずみの変動はほぼ  $s/l = 0.3$  以上の部分に限られている。

各荷重段階での負荷時と定常時を比較すると、荷重  $P_1$ 、 $P_2$  の段階では、ほぼ両者は一致する。さらに荷重が大きくなると、降伏領域の広がり（図4.11）と共に、粘塑性ひずみの増加が顕著になり、又定常状態に至るまでの所要時間も、図4.5に示すように長くなっている。

次に本解法による計算値と実験値を比較すると、 $\varepsilon_{\xi}$  は  $P_5$  の定常時で  $s/l = 0.4$  付近に多少差が見られるが、円筒殻中央部の荷重が直接作用する部分を除いて、 $\varepsilon_{\xi}$ 、 $\varepsilon_{\theta}$  の計算値と実験値はよく一致している。円筒殻中央部では、 $\varepsilon_{\xi}$  は分布の変化が著しいので実験値の評価は難しいが、 $\varepsilon_{\theta}$  は計算値が実験値よりも大きな値を示し、 $P_5$  の定常状態で両者の差が顕著である。この原因として、円筒殻中央部が変形するにつれて、荷重の分布が計算で仮定した  $s$  の4次式（式(4.32)）と異なってくることで、ならびに負荷部では、殻厚方向の垂直応力  $\sigma_{\xi}$  も含めた応力分布を考慮しなければならないこと等が考えられる。

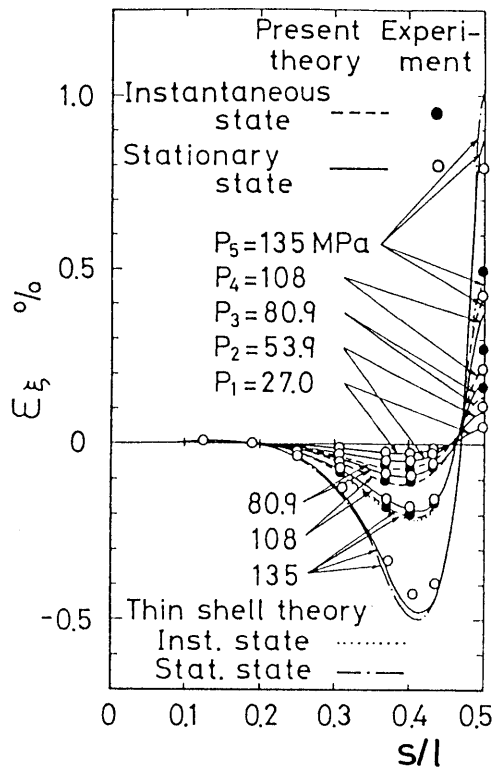


図 4.6  $\epsilon_{\xi}$  の軸方向分布

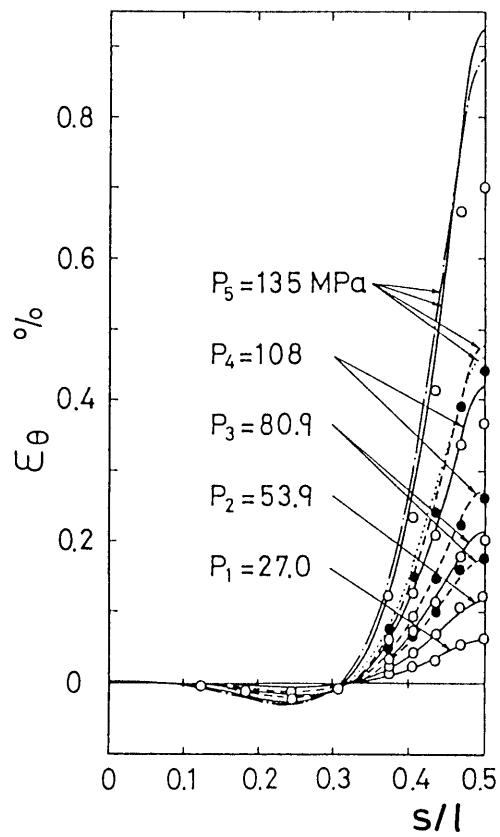


図 4.7  $\epsilon_{\theta}$  の軸方向分布

さらに、せん断変形を無視した薄肉殻理論による解と本理論による解との間には差が見られるが、その差は中央部を除いて小さい。

以上、実験結果と計算結果の比較より、次の事柄が明らかになった。

- (1) 実験値と計算値は、ひずみの軸方向分布ならびに時間的变化とも、荷重が直接作用する円筒殻中央部を除いてよく一致しており、本解法の妥当性が確かめられた。
- (2) 荷重が直接作用している領域では、負荷の増大と共に両者の差は大きくなる。荷重分布の時間的变化の評価、ならびに殻厚方向の垂直応力を含めた応力分布の考慮等が必要である。
- (3) 薄肉殻理論による解と、せん断変形の影響を考慮した本理論による解との間には、少し差が見られる。その差は、応力とひずみが共に大きな値を示す位置で大きい。この程度の厚さの殻 ( $h/R=1/8.5$ ) では、厚肉殻理論の適用が不可欠である。

なお薄肉殻理論では、せん断ひずみ  $\varepsilon_{\xi\eta}$  の影響は無視しているが、 $\bar{\sigma}$  を計算する際、せん断応力  $\sigma_{\xi\eta}$  は考慮に入れている。

図4.8～図4.11に、計算による変位成分、内力成分の分布、ならびに降伏領域の進展の様子を示す。図には初期降伏荷重  $P_0$ 、および  $P_3 \sim P_5$  の各荷重段階における負荷時と定常時のものを、それぞれ破線と実線で示す。本解法と比較するため、せん断変形の影響を考慮しない薄肉殻理論による解も併せ示す。

図4.8は、半径方向変位  $u$ 、ならびに軸方向変位  $v$  の分布である。変位  $u$  は主に  $s/l=0.3$ 以上の部分に限られ、0.3以内の部分では、断面はほぼ負荷前の形状を保っている。変位  $v$  および円筒殻中央部付近の  $u$  は、荷重が大きくなり変形が進むにつれて、せん断変形の影響が顕著になり、本理論による解が、せん断変形を無視した解に比べて、大きな値となる。また荷重が大きくなり、降伏領域が広がってくると、負荷瞬間の状態と定常状態の間に、次第に大きな差が現われる。また図には示していないが、本解法で考慮した幾何学的非線形性を無視した場合には、 $P_5$ の定常時で円筒殻中央部の  $u$  は1%大きく、又変位量の小さい  $v$  は端部で5%小さい値を示し、両変位の分布の形は本解法の場合とほぼ同一であった。荷重をさらに増して、変位とひずみが多少大きくなっても、本解法は適用可能と思われる。

図4.9は、円周方向の面内力  $N_\theta$  およびせん断力  $Q$  の分布を示す。両成分とも円筒殻中央部付近で、両理論による解に、多少の差が見られる。 $N_\theta$ 分布は変位  $u$ の分布と類似し、降伏が生じる中央部では、負荷時から定常時にかけて応力の緩和が見られる。また  $N_\theta$  は、

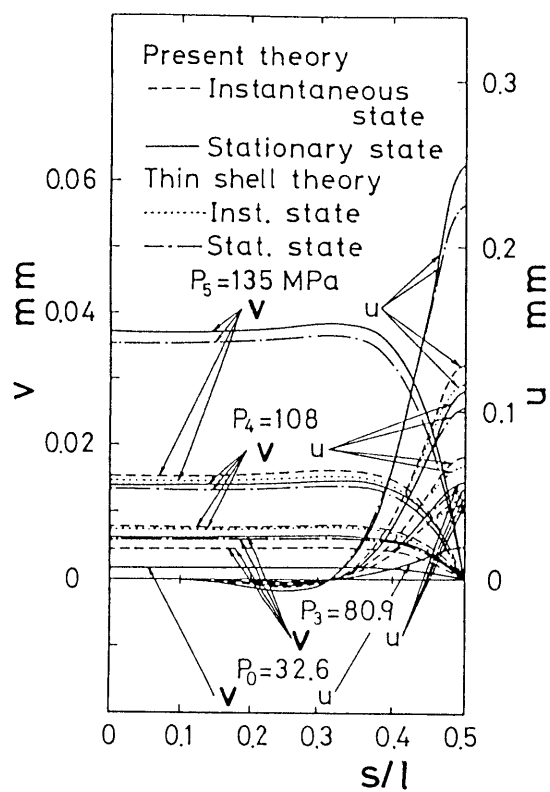


図 4.8  $u, v$  の軸方向分布

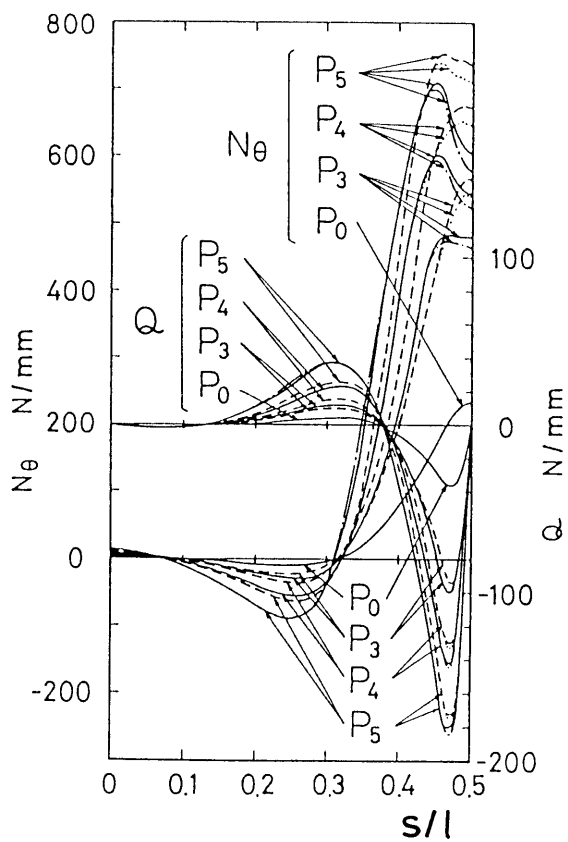


図 4.9  $N_{\theta}, Q$  の軸方向分布

全長にわたって負荷瞬間からの変動量が大きい。

図4.10は、軸方向および円周方向の曲げモーメント成分  $M_{\xi}$ 、 $M_{\theta}$  の分布である。両者とも類似した分布を示し、円筒殻中央部付近で局所的に変形しているために、中央部および  $s/l = 0.4$  付近で、大きな値を示している。 $s/l = 0.4$  付近では、負荷時から定常状態に至るまでの時間的変化が顕著である。せん断変形の影響は、 $M_{\xi}$ 、 $M_{\theta}$  とも円筒殻中央部で多少見られる。

図4.11に、降伏領域の進展の様子を示す。 $P = P_0$  のとき、円筒殻中央部の内表面において、はじめて降伏する。 $P_0$  の値は、本理論では32.6 MPa、せん断変形の影響を無視した薄肉殻理論では、33.8 MPa である。降伏領域は荷重  $P$  とともに広がり、またその時間的変動も大きくなる。 $P_4$ 、 $P_5$  の荷重段階では、中央面よりも内外面の広がり方が大きくなっている。

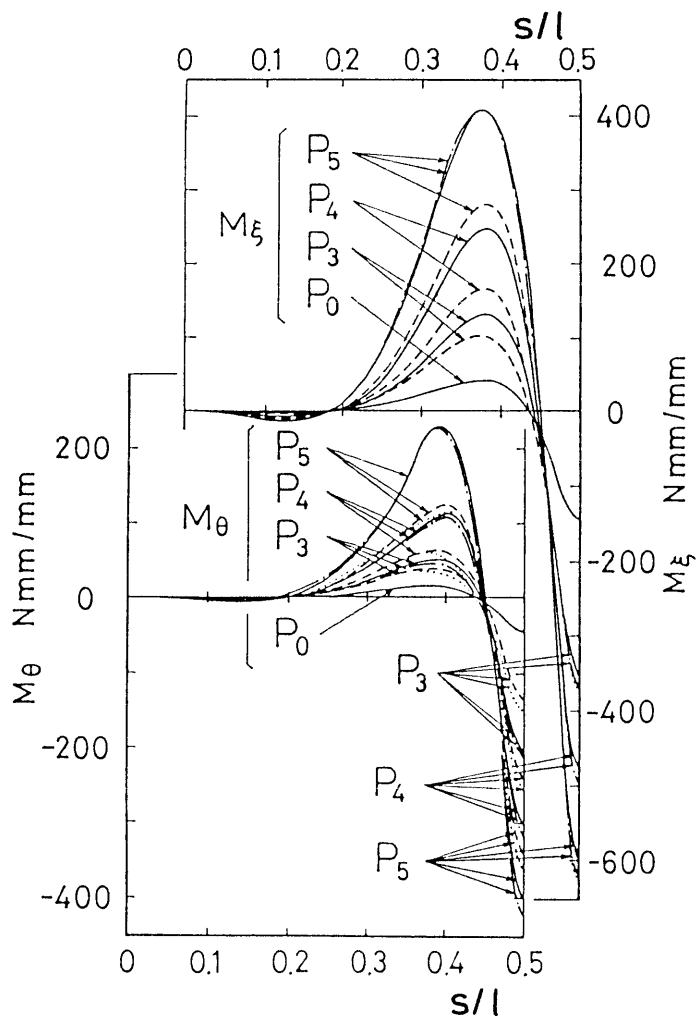


図 4.10  $M_{\xi}$ 、 $M_{\theta}$  の軸方向分布



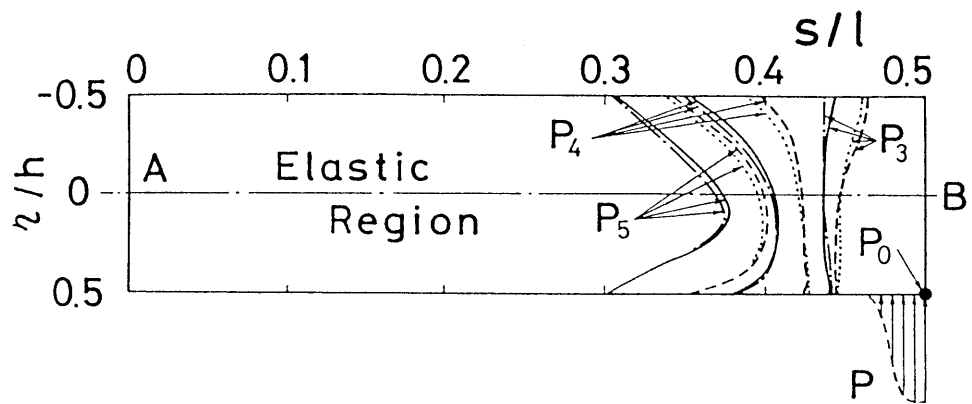


図 4.11 降伏領域の進展

以上図4.8～図4.11に見るように、荷重が大きくなると、解の時間的変動が顕著になり、また両理論による結果の差も大きくなる。

なお計算には、FACOM M-382 を使用し、本計算例の計算時間は、およそ36秒である。

## 4. 2 非軸対称荷重を受ける場合 [94]

異方性材料から成る回転対称殻の弾/粘塑性変形問題について、前節では軸対称変形問題を対象としたが、本節では非軸対称荷重が作用する場合を取り上げる。第2章および第3章で、非軸対称変形問題の解析手法として、フーリエ級数展開によるBudianskyらの弾性問題の数値解法を採用し、Perzynaの構成式を用いて粘塑性問題に拡張した解法を示した。本節では第3章のやや肉厚の大きい回転対称殻を対象とした解法に、構成関係式として、Hillの直交異方性理論に従って、Perzynaの弾/粘塑性構成式を直交異方性の場合に拡張したものをを用いて、材料が直交異方性を有する場合の弾/粘塑性変形問題の解析を行う。さらに両端自由のチタン円筒殻中央部に局所的分布荷重を加え、円筒殻外表面のひずみの時間的変化を測定し、計算値と比較して本解法の妥当性を検討する。

### 4. 2. 1 直交異方性厚肉回転対称殻の基礎関係式

図2.1に示すように、軸対称殻の形状パラメータと座標を与える。殻の中央面の微小要素に働く内力と分布荷重、および変位と回転を図2.2のように定義する。

釣合方程式、ひずみおよび曲率と変位との関係式、殻厚中央面から $z$ の距離にある点のひずみ成分の式には、殻厚方向のせん断変形を考慮に入れた Reissner-Naghdi の理論 [30,38] から得られた式(3.1)~(3.7)を用いる。

次に、前節では Hill の直交異方性理論を用いて、Perzynaの弾/粘塑性構成式を直交異方性の場合に拡張したが、ここでも同様の手順で、非軸対称な荷重が作用した場合の構成式におきかえる。異方性の主軸を  $\xi$ 、 $\theta$ 、 $z$  とし、かく厚方向の垂直応力  $\sigma_z$  を省略すると、相当応力  $\bar{\sigma}$  は次の式で与えられる。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2(F+G+H)}} [(G+H)\sigma_\xi^2 - 2H\sigma_\xi\sigma_\theta + (F+H)\sigma_\theta^2 + 2L\sigma_\theta^2 + 2M\sigma_\xi^2 + 2N\sigma_\xi\sigma_\theta]^{1/2} \quad (4.35)$$

ここで、 $F, G, H, L, M, N$  は材料の異方性パラメータである。式(4.35)の  $\bar{\sigma}$  を塑性ポテンシャルとするときの勾配は、

$$\left[ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \right] = \frac{3}{2\bar{\sigma}} [S_\xi, S_\theta, 2S_{\theta\xi}, 2S_{\xi\xi}, 2S_{\xi\theta}] = \frac{3}{2\bar{\sigma}} S_{ij} \quad (4.36)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} S_\xi &= \frac{(G+H)\sigma_\xi - H\sigma_\theta}{F+G+H}, & S_\theta &= \frac{(F+H)\sigma_\theta - H\sigma_\xi}{F+G+H}, & S_{\xi\theta} &= \frac{N\sigma_\xi\sigma_\theta}{F+G+H} \end{aligned} \right\}$$

$$S_{\epsilon\zeta} = \frac{M\sigma_{\epsilon\zeta}}{F+G+H}, \quad S_{\theta\zeta} = \frac{L\sigma_{\theta\zeta}}{F+G+H} \quad \left. \vphantom{S_{\epsilon\zeta}} \right\} \quad (4.37)$$

全ひずみを弾性ひずみと粘塑性ひずみの和で表すと、直交異方性の場合の応力-ひずみ関係式は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_{\xi} &= \frac{E_{\xi}}{1-\nu_{\xi\theta}\nu_{\theta\xi}} \left\{ (\dot{\epsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\kappa}_{\xi}) / L_{\xi} + \nu_{\theta\xi} (\dot{\epsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\kappa}_{\theta}) / L_{\theta} \right\} - \dot{\sigma}_{\xi}^{vp} \\ \dot{\sigma}_{\theta} &= \frac{E_{\theta}}{1-\nu_{\xi\theta}\nu_{\theta\xi}} \left\{ (\dot{\epsilon}_{\theta m} + \zeta \dot{\kappa}_{\theta}) / L_{\theta} + \nu_{\xi\theta} (\dot{\epsilon}_{\xi m} + \zeta \dot{\kappa}_{\xi}) / L_{\xi} \right\} - \dot{\sigma}_{\theta}^{vp} \\ \dot{\sigma}_{\xi\theta} &= 2G_{\xi\theta} \left[ \left\{ (\dot{\epsilon}_{\xi\theta m} + \dot{\Phi}_n) / 2 + \zeta (\dot{\kappa}_{\xi\theta} + \dot{\Phi}_n / R_s) \right\} / L_{\xi} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (\dot{\epsilon}_{\xi\theta m} - \dot{\Phi}_n) / 2 + \zeta (\dot{\kappa}_{\theta\xi} - \dot{\Phi}_n / R_{\theta}) \right\} / L_{\theta} \right] - \dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp} \\ \dot{\sigma}_{\xi\zeta} &= 2G_{\xi\zeta} \dot{\epsilon}_{\xi\zeta m} / L_{\xi} - \dot{\sigma}_{\xi\zeta}^{vp}, \quad \dot{\sigma}_{\theta\zeta} = 2G_{\theta\zeta} \dot{\epsilon}_{\theta\zeta m} / L_{\theta} - \dot{\sigma}_{\theta\zeta}^{vp} \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_{\epsilon}^{vp} &= \frac{E_{\epsilon}}{1-\nu_{\epsilon\theta}\nu_{\theta\epsilon}} (\dot{\epsilon}_{\epsilon}^{vp} + \nu_{\theta\epsilon} \dot{\epsilon}_{\theta}^{vp}), & \dot{\sigma}_{\theta}^{vp} &= \frac{E_{\theta}}{1-\nu_{\epsilon\theta}\nu_{\theta\epsilon}} (\nu_{\epsilon\theta} \dot{\epsilon}_{\epsilon}^{vp} + \dot{\epsilon}_{\theta}^{vp}) \\ \dot{\sigma}_{\epsilon\theta}^{vp} &= 2G_{\epsilon\theta} \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta}^{vp}, & \dot{\sigma}_{\epsilon\zeta}^{vp} &= 2G_{\epsilon\zeta} \dot{\epsilon}_{\epsilon\zeta}^{vp}, & \dot{\sigma}_{\theta\zeta}^{vp} &= 2G_{\theta\zeta} \dot{\epsilon}_{\theta\zeta}^{vp} \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

ここで、(\*) は時間に関する微分を示し、粘塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$  は、Perzyna の式より、式(2.10)~(2.12)で与えられる。 $E_{\xi}$ 、 $E_{\theta}$ 、 $G_{\xi\theta}$ 、 $G_{\xi\zeta}$ 、 $G_{\theta\zeta}$  は弾性係数、 $\nu_{\xi\theta}$ 、 $\nu_{\theta\xi}$  はポアソン比であり、式(2.13)の相当粘塑性ひずみ  $\bar{\epsilon}^{vp}$  は、ここでは次のようになる。

$$d\bar{\epsilon}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}(F+G+H)} \left\{ \frac{(F+H)d\epsilon_{\epsilon}^{vp2} + 2Hd\epsilon_{\epsilon}^{vp} \cdot d\epsilon_{\theta}^{vp} + (G+H)d\epsilon_{\theta}^{vp2}}{FG+GH+HF} + \frac{2d\epsilon_{\theta\zeta}^{vp2}}{L} + \frac{2d\epsilon_{\epsilon\zeta}^{vp2}}{M} + \frac{2d\epsilon_{\epsilon\theta}^{vp2}}{N} \right\}^{1/2} \quad (4.40)$$

殻の単位長さ当りの合応力および合モーメントは、式(4.38)を用い、式(3.13)の積分に関する近似を使うと、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_{\epsilon} &= \left\{ \int E_{\epsilon} d\zeta / (1-\nu_{\epsilon\theta}\nu_{\theta\epsilon}) \right\} \left[ \dot{\epsilon}_{\epsilon m} + \nu_{\theta\epsilon} \dot{\epsilon}_{\theta m} - \frac{h^2}{12a} (\omega_{\epsilon} - \omega_{\theta}) \dot{\kappa}_{\epsilon} \right] - \dot{N}_{\epsilon}^{vp} \\ \dot{N}_{\theta} &= \left\{ \int E_{\theta} d\zeta / (1-\nu_{\epsilon\theta}\nu_{\theta\epsilon}) \right\} \left[ \dot{\epsilon}_{\theta m} + \nu_{\epsilon\theta} \dot{\epsilon}_{\epsilon m} - \frac{h^2}{12a} (\omega_{\theta} - \omega_{\epsilon}) \dot{\kappa}_{\theta} \right] - \dot{N}_{\theta}^{vp} \\ \dot{N}_{\epsilon\theta} &= \left\{ \int 2G_{\epsilon\theta} d\zeta \right\} \left[ \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta m} + \frac{h^2}{12a} (\omega_{\epsilon} - \omega_{\theta}) \left\{ \frac{1}{2R_s} (\dot{\epsilon}_{\epsilon\theta m} - \dot{\Phi}_n) - \dot{\kappa}_{\epsilon\theta} \right\} \right] - \dot{N}_{\epsilon\theta}^{vp} \\ \dot{N}_{\theta\epsilon} &= \left\{ \int 2G_{\theta\epsilon} d\zeta \right\} \left[ \dot{\epsilon}_{\theta\epsilon m} + \frac{h^2}{12a} (\omega_{\theta} - \omega_{\epsilon}) \left\{ \frac{1}{2R_{\theta}} (\dot{\epsilon}_{\theta\epsilon m} + \dot{\Phi}_n) - \dot{\kappa}_{\theta\epsilon} \right\} \right] - \dot{N}_{\theta\epsilon}^{vp} \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

$$\left. \begin{aligned}
\dot{M}_\varepsilon &= \left\{ \int E_\varepsilon \zeta^2 d\zeta / (1 - \nu_{\varepsilon\theta} \nu_{\theta\varepsilon}) \right\} \left[ \dot{\chi}_\varepsilon + \nu_{\theta\varepsilon} \dot{\chi}_\theta - \frac{1}{a} (\omega_\varepsilon - \omega_\theta) \dot{\varepsilon}_{\varepsilon m} \right] - \dot{M}_\varepsilon^{vp} \\
\dot{M}_\theta &= \left\{ \int E_\theta \zeta^2 d\zeta / (1 - \nu_{\varepsilon\theta} \nu_{\theta\varepsilon}) \right\} \left[ \dot{\chi}_\theta + \nu_{\varepsilon\theta} \dot{\chi}_\varepsilon - \frac{1}{a} (\omega_\theta - \omega_\varepsilon) \dot{\varepsilon}_{\theta m} \right] - \dot{M}_\theta^{vp} \\
\dot{M}_{\varepsilon\theta} &= \left\{ \int 2G_{\varepsilon\theta} \zeta^2 d\zeta \right\} \left[ \dot{\chi}_{\varepsilon\theta} + \dot{\chi}_{\theta\varepsilon} - \frac{1}{2a} (\omega_\theta - \omega_\varepsilon) (\dot{\Phi}_n - \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m}) \right] - \dot{M}_{\varepsilon\theta}^{vp} \\
\dot{M}_{\theta\varepsilon} &= \left\{ \int 2G_{\varepsilon\theta} \zeta^2 d\zeta \right\} \left[ \dot{\chi}_{\theta\varepsilon} + \dot{\chi}_{\varepsilon\theta} - \frac{1}{2a} (\omega_\theta - \omega_\varepsilon) (\dot{\Phi}_n + \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\theta m}) \right] - \dot{M}_{\theta\varepsilon}^{vp} \\
\dot{Q}_\varepsilon &= \frac{5}{6} \left\{ \int 2G_{\varepsilon\zeta} d\zeta \right\} \dot{\varepsilon}_{\varepsilon\zeta m} - \dot{Q}_\varepsilon^{vp}, \quad \dot{Q}_\theta = \frac{5}{6} \left\{ \int 2G_{\theta\zeta} d\zeta \right\} \dot{\varepsilon}_{\theta\zeta m} - \dot{Q}_\theta^{vp}
\end{aligned} \right\}$$

ここで、粘塑性によるみかけの内力成分  $N_\xi^{vp}$ 、 $M_\xi^{vp}$  などは、式(3.15)によってみかけの応力の変化率から計算できる。

本節では、直交異方性材料を対象とする場合について、第3章の等方性材料の場合に適用する式と異なる式のみを列挙した。以上で  $\dot{N}_\xi$ 、 $\dot{N}_\theta$ 、 $\dot{N}_{\xi\theta}$ 、 $\dot{N}_{\theta\xi}$ 、 $\dot{M}_\xi$ 、 $\dot{M}_\theta$ 、 $\dot{M}_{\xi\theta}$ 、 $\dot{M}_{\theta\xi}$ 、 $\dot{Q}_\xi$ 、 $\dot{Q}_\theta$ 、 $\dot{U}_\xi$ 、 $\dot{U}_\theta$ 、 $\dot{W}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\xi m}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\theta m}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\xi\theta m}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\theta\xi m}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\theta\xi m}$ 、 $\dot{\kappa}_\xi$ 、 $\dot{\kappa}_\theta$ 、 $\dot{\kappa}_{\xi\theta}$ 、 $\dot{\kappa}_{\theta\xi}$ 、 $\dot{\phi}_\xi$ 、 $\dot{\phi}_\theta$ 、 $\dot{\phi}_n$ 、 $\dot{\sigma}_\xi$ 、 $\dot{\sigma}_\theta$ 、 $\dot{\sigma}_{\xi\theta}$ 、 $\dot{\sigma}_{\theta\xi}$ 、 $\dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{\sigma}_{\theta\xi}^{vp}$ 、 $\dot{\sigma}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{\sigma}_{\theta\xi}^{vp}$ 、 $\dot{\sigma}_{\theta\xi}^{vp}$ 、 $\dot{\varepsilon}_\xi^{vp}$ 、 $\dot{\varepsilon}_\theta^{vp}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\theta\xi}^{vp}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\theta\xi}^{vp}$ 、 $\dot{N}_\xi^{vp}$ 、 $\dot{N}_\theta^{vp}$ 、 $\dot{N}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{N}_{\theta\xi}^{vp}$ 、 $\dot{M}_\xi^{vp}$ 、 $\dot{M}_\theta^{vp}$ 、 $\dot{M}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{M}_{\theta\xi}^{vp}$ 、 $\dot{Q}_\xi^{vp}$ 、 $\dot{Q}_\theta^{vp}$  に対して、式(2.10)、(3.1)、(3.4)~(3.6)、(3.15) (4.38)、(4.39)、(4.41) の50個の式が用意されたことになる。

#### 4. 2. 2 フーリエ級数展開と支配方程式

本理論では非軸対称問題を解析するので、前項で示した50個の変数のうち、粘塑性ひずみ速度  $\dot{\varepsilon}_\xi^{vp}$ 、 $\dot{\varepsilon}_\theta^{vp}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^{vp}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\theta\xi}^{vp}$ 、 $\dot{\varepsilon}_{\theta\xi}^{vp}$  を除く45個の変数と分布荷重をフーリエ級数に展開する。

$$\left. \begin{aligned}
&\{ \dot{N}_\xi, \dot{N}_\xi^{vp}, \dot{N}_\theta, \dot{N}_\theta^{vp}, \dot{Q}_\xi, \dot{Q}_\xi^{vp} \} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{n}_\xi^{(n)}, \dot{n}_\xi^{vp(n)}, \dot{n}_\theta^{(n)}, \dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{q}_\xi^{(n)}, \dot{q}_\xi^{vp(n)} \} \cos n \theta \\
&\{ \dot{N}_{\xi\theta}, \dot{N}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{N}_{\theta\xi}, \dot{N}_{\theta\xi}^{vp}, \dot{Q}_\theta, \dot{Q}_\theta^{vp} \} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{n}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{n}_{\xi\theta}^{vp(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{n}_{\theta\xi}^{vp(n)}, \dot{q}_\theta^{(n)}, \dot{q}_\theta^{vp(n)} \} \sin n \theta \\
&\{ \dot{M}_\xi, \dot{M}_\xi^{vp}, \dot{M}_\theta, \dot{M}_\theta^{vp} \} = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{m}_\xi^{(n)}, \dot{m}_\xi^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)} \} \cos n \theta \\
&\{ \dot{M}_{\xi\theta}, \dot{M}_{\xi\theta}^{vp}, \dot{M}_{\theta\xi}, \dot{M}_{\theta\xi}^{vp} \} = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{m}_{\xi\theta}^{(n)}, \dot{m}_{\xi\theta}^{vp(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{(n)}, \dot{m}_{\theta\xi}^{vp(n)} \} \sin n \theta
\end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \{ \dot{U}_\xi, \dot{W}, \dot{\epsilon}_{\xi m}, \dot{\epsilon}_{\theta m}, \dot{\epsilon}_{\xi \zeta m}, \dot{\kappa}_\xi, \dot{\kappa}_\theta, \dot{\phi}_\xi \} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{u}_\xi^{(n)}, \dot{w}^{(n)}, \dot{\epsilon}_{\xi m}^{(n)}, \dot{\epsilon}_{\theta m}^{(n)}, \dot{\epsilon}_{\xi \zeta m}^{(n)}, \dot{k}_\xi^{(n)}, \dot{k}_\theta^{(n)}, \dot{\phi}_\xi^{(n)} \} \cos n \theta \\
& \{ \dot{U}_\theta, \dot{\epsilon}_{\xi \theta m}, \dot{\epsilon}_{\theta \zeta m}, \dot{\kappa}_{\xi \theta}, \dot{\kappa}_{\theta \xi}, \dot{\phi}_\theta, \dot{\phi}_n \} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{u}_\theta^{(n)}, \dot{\epsilon}_{\xi \theta m}^{(n)}, \dot{\epsilon}_{\theta \zeta m}^{(n)}, \dot{k}_{\xi \theta}^{(n)}, \dot{k}_{\theta \xi}^{(n)}, \dot{\phi}_\theta^{(n)}, \dot{\phi}_n^{(n)} \} \sin n \theta \\
& \{ \dot{\sigma}_\xi, \dot{\sigma}_{\xi}^{vp}, \dot{\sigma}_\theta, \dot{\sigma}_\theta^{vp}, \dot{\sigma}_{\xi \zeta}, \dot{\sigma}_{\xi \zeta}^{vp}, \dot{P}_\xi, \dot{P}_\zeta \} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{s}_\xi^{(n)}, \dot{s}_{\xi}^{vp(n)}, \dot{s}_\theta^{(n)}, \dot{s}_\theta^{vp(n)}, \dot{s}_{\xi \zeta}^{(n)}, \dot{s}_{\xi \zeta}^{vp(n)}, \dot{p}_\xi^{(n)}, \dot{p}_\zeta^{(n)} \} \cos n \theta \\
& \{ \dot{\sigma}_{\xi \theta}, \dot{\sigma}_{\xi \theta}^{vp}, \dot{\sigma}_{\theta \zeta}, \dot{\sigma}_{\theta \zeta}^{vp}, \dot{P}_\theta \} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{s}_{\xi \theta}^{(n)}, \dot{s}_{\xi \theta}^{vp(n)}, \dot{s}_{\theta \zeta}^{(n)}, \dot{s}_{\theta \zeta}^{vp(n)}, \dot{p}_\theta^{(n)} \} \sin n \theta
\end{aligned} \tag{4.42}$$

これらのフーリエ展開式を前述の基礎式に代入し、フーリエ係数に関する対応する式をつくり、これらの式から順次未知数を消去すると、最後に平衡方程式は変位  $\dot{u}_\xi$ 、 $\dot{u}_\theta$ 、 $\dot{w}$  および回転  $\dot{\phi}_\xi$ 、 $\dot{\phi}_\theta$  に関する五元連立二階微分方程式、式(3.18)を得る。式(3.19)において、 $a_1 \sim a_5$  は殻の形状と弾性定数  $E_\xi \sim G_{\theta \zeta}$ 、 $\nu_{\xi \theta}$ 、 $\nu_{\theta \xi}$  とから定まる係数である〔付録4.2参照〕。また、式(3.18)の右辺の値をそれぞれ  $C_1 \sim C_5$  とおくと、これらは殻の形状、分布荷重および粘塑性によるみかけの内力成分から定まる定数で、次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
C_1 &= \dot{n}_\xi^{vp'} + \gamma(\dot{n}_\xi^{vp} - \dot{n}_\theta^{vp}) + \frac{n}{\rho} \dot{n}_{\theta \xi}^{vp} + \omega_\xi \dot{q}_\xi^{vp} - a \dot{p}_\xi \\
C_2 &= \dot{n}_{\theta \theta}^{vp'} + \gamma(\dot{n}_{\theta \theta}^{vp} + \dot{n}_{\theta \xi}^{vp}) - \frac{n}{\rho} \dot{n}_\theta^{vp} + \omega_\theta \dot{q}_\theta^{vp} - a \dot{p}_\theta \\
C_3 &= \dot{q}_\xi^{vp'} + \gamma \dot{q}_\xi^{vp} + \frac{n}{\rho} \dot{q}_\theta^{vp} - \omega_\xi \dot{n}_\xi^{vp} - \omega_\theta \dot{n}_\theta^{vp} - a \dot{p}_\zeta \\
C_4 &= a \dot{q}_\xi^{vp} - \dot{m}_\xi^{vp'} - \gamma(\dot{m}_\xi^{vp} - \dot{m}_\theta^{vp}) - \frac{n}{\rho} \dot{m}_{\theta \xi}^{vp} \\
C_5 &= a \dot{q}_\theta^{vp} - \dot{m}_{\theta \theta}^{vp'} - \gamma(\dot{m}_{\theta \theta}^{vp} + \dot{m}_{\theta \xi}^{vp}) + \frac{n}{\rho} \dot{m}_\theta^{vp}
\end{aligned} \right\} \tag{4.43}$$

また、式(4.38)、(4.41) からひずみと曲率の変化量を消去し、応力をフーリエ級数表示することにより、応力は合応力および合モーメントから次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned}
\dot{s}_\xi &= \{ (\dot{n}_\xi + \dot{n}_\xi^{vp})/h + (\dot{m}_\xi + \dot{m}_\xi^{vp})(12\xi/h^3) \} / L_\theta - \dot{s}_\xi^{vp} \\
\dot{s}_\theta &= \{ (\dot{n}_\theta + \dot{n}_\theta^{vp})/h + (\dot{m}_\theta + \dot{m}_\theta^{vp})(12\xi/h^3) \} / L_\xi - \dot{s}_\theta^{vp}
\end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_{\epsilon\theta} &= \{ (\dot{n}_{\epsilon\theta} + \dot{n}_{\epsilon\theta}^{vp})/h + (\dot{m}_{\epsilon\theta} + \dot{m}_{\epsilon\theta}^{vp})(12\zeta/h^3)/L_\theta - \dot{s}_{\epsilon\theta}^{vp} \} \\ \dot{s}_{\epsilon\zeta} &= 3(\dot{q}_\epsilon + \dot{q}_\epsilon^{vp})(1-4\zeta^2/h^2)/(2hL_\theta) - \dot{s}_{\epsilon\zeta}^{vp} \\ \dot{s}_{\theta\zeta} &= 3(\dot{q}_\theta + \dot{q}_\theta^{vp})(1-4\zeta^2/h^2)/(2hL_\epsilon) - \dot{s}_{\theta\zeta}^{vp} \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

式(4.43), (4.44)の粘塑性に関する内力成分の変化率のフーリエ係数は、式(3.15), (4.39), (4.42)から、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{n}_\epsilon^{vp(n)}, \dot{m}_\epsilon^{vp(n)} \} \cos n\theta &= \frac{E_\epsilon}{1-\nu_{\epsilon\theta}\nu_{\theta\epsilon}} \int_{-h/2}^{h/2} \{1, \zeta\} (\dot{\epsilon}_\epsilon^{vp} + \nu_{\theta\epsilon} \dot{\epsilon}_\theta^{vp}) L_\theta d\zeta \\ \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{n}_\theta^{vp(n)}, \dot{m}_\theta^{vp(n)} \} \cos n\theta &= \frac{E_\theta}{1-\nu_{\epsilon\theta}\nu_{\theta\epsilon}} \int_{-h/2}^{h/2} \{1, \zeta\} (\dot{\epsilon}_\theta^{vp} + \nu_{\epsilon\theta} \dot{\epsilon}_\epsilon^{vp}) L_\epsilon d\zeta \\ \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{n}_{\epsilon\theta}^{vp(n)}, \dot{m}_{\epsilon\theta}^{vp(n)} \} \sin n\theta &= 2G_{\epsilon\theta} \int_{-h/2}^{h/2} \{1, \zeta\} \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta}^{vp} L_\theta d\zeta \\ \sum_{n=1}^{\infty} \{ \dot{n}_{\theta\epsilon}^{vp(n)}, \dot{m}_{\theta\epsilon}^{vp(n)} \} \sin n\theta &= 2G_{\theta\epsilon} \int_{-h/2}^{h/2} \{1, \zeta\} \dot{\epsilon}_{\theta\epsilon}^{vp} L_\epsilon d\zeta \\ \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \dot{q}_\epsilon^{vp(n)} \cos n\theta, \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_\theta^{vp(n)} \sin n\theta \right\} &= 2 \int_{-h/2}^{h/2} \{ G_{\epsilon\zeta} \dot{\epsilon}_{\epsilon\zeta}^{vp} L_\theta, G_{\theta\zeta} \dot{\epsilon}_{\theta\zeta}^{vp} L_\epsilon \} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \{ \dot{s}_\epsilon^{vp(n)}, \dot{s}_\theta^{vp(n)} \} \cos n\theta &= \frac{1}{1-\nu_{\epsilon\theta}\nu_{\theta\epsilon}} \{ E_\epsilon (\dot{\epsilon}_\epsilon^{vp} + \nu_{\theta\epsilon} \dot{\epsilon}_\theta^{vp}), E_\theta (\dot{\epsilon}_\theta^{vp} + \nu_{\epsilon\theta} \dot{\epsilon}_\epsilon^{vp}) \} \\ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_{\epsilon\theta}^{vp(n)} \sin n\theta, \sum_{n=0}^{\infty} \dot{s}_{\epsilon\zeta}^{vp(n)} \cos n\theta, \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_{\theta\zeta}^{vp(n)} \sin n\theta \right\} &= 2 \{ G_{\epsilon\theta} \dot{\epsilon}_{\epsilon\theta}^{vp}, G_{\epsilon\zeta} \dot{\epsilon}_{\epsilon\zeta}^{vp}, G_{\theta\zeta} \dot{\epsilon}_{\theta\zeta}^{vp} \} \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

式(4.45), (4.46)の右辺の粘塑性ひずみ速度は、応力値から式(2.10), (4.37)によって計算できる。また積分にはシンプソンの1/3則を用いる。

#### 4. 2. 3 数 値 計 算 法

ある任意の計算段階における変位と回転の変化率は、式(3.18)と同様の五元連立二階微分方程式を、適当な境界条件のもとで解けば得られ、またこれらを用いて、内力成分の変化率は、式(3.4)~(3.6), (4.41), (4.44) から求められる。しかしながら、五元連立二階微分方程式を厳密に理論解析することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。この数値解法は、第3章で述べた場合と同様であるので、ここでは省略する。一般に弾/粘塑性問題の解は、これらの変化率から求められる各計算段階の増分を積分することによって得られる。

#### 4. 2. 4 実 験

本解法の妥当性を検討するため、ここでは形状が単純で実験の容易な両端自由の円筒殻

に、局所的分布荷重を加えた実験を行い、計算結果と実験結果を比較する。円筒殻材料には前節の実験で用いたチタン引抜管と同一のものを使用する。

### 〔1〕 試験片および実験方法

実験に用いた円筒殻試験片は、外径 60 mm、内径 46mm のチタン引抜管から内外面を切削して仕上げた。形状寸法は、平均半径  $R=25.4$  mm、厚さ  $h=2.7$  mm、長さ  $l=86$  mm とし、寸法比  $R/h$  は 9.4 である。この材料の材料特性の求め方ならびに材料定数の値は、第4. 1. 3.〔1〕節と全く同様なので、ここでは省略する。

円筒殻試験片ならびに実験装置の概略を図4.12に示す。荷重は、定荷重負荷装置を有する試験機によって、上下ポンチを介してチタン円筒殻試験片に、半径方向の圧縮力を時間に対してステップ状に加えた(図4.13)。図4.13の  $P_0$  は初期降伏荷重(計算値)を示し、 $P_{0c}$  は殻厚方向のせん断変形を考慮しない薄肉殻理論による値である。ひずみの測定は試験片外表面の子午線上( $\theta=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ )および円周上( $\xi=0$ )に、それぞれ子午線方向と円周方向に計62枚のひずみゲージを貼付して行った。この中、特に荷重点近傍の

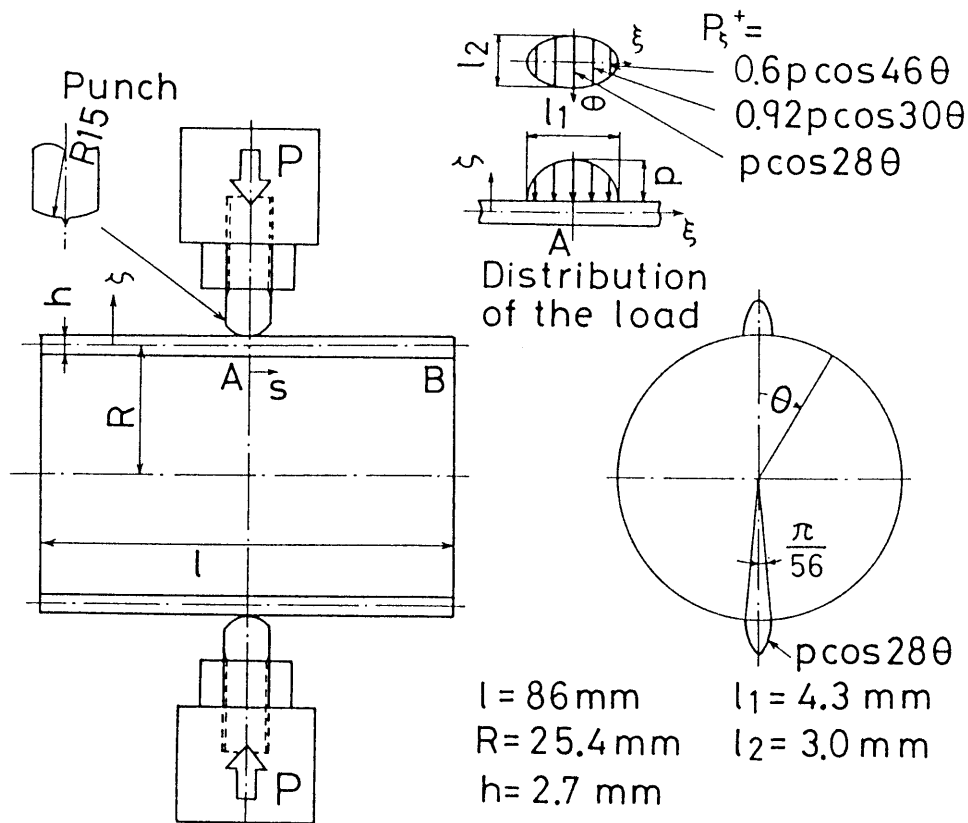


図 4.12 実験装置および円筒殻試験片

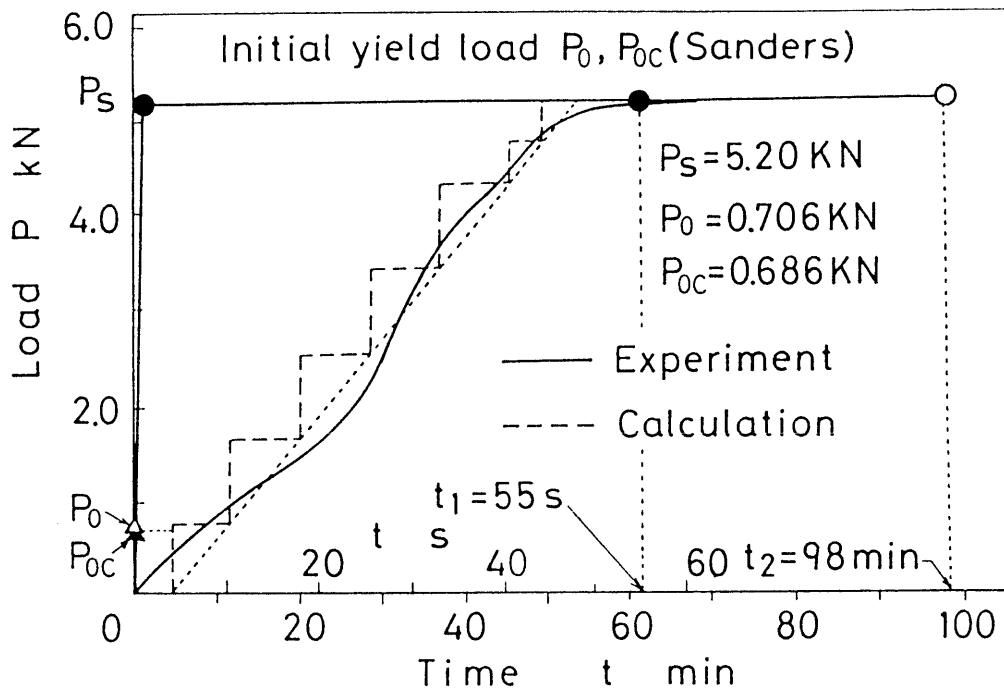


図 4.13 荷 重

数カ所のひずみゲージには、X-Yレコーダを接続して時間に対して連続的にひずみを測定した。他の点のひずみは、1~10分毎に測定した。測定は負荷後ほぼひずみが一定になる98分まで行った。

〔2〕 計算条件の設定

問題の対称性から、計算は円筒殻の 1/8 形状についてのみ行えば十分である。円筒殻の形状パラメータは次のようになる。

$$a = l, \quad \xi = s/l, \quad \rho = R/l, \quad \rho' = 0, \quad r = 0, \quad \omega_\theta = l/R, \quad \omega_\xi = \omega_{\xi'} = 0 \quad (4.47)$$

また  $\xi$  の差分間隔  $\Delta\xi$  は、差分点の数を  $N$  として、

$$\Delta\xi = l / \{2a(N-1)\} = l / \{2(N-1)\} \quad (4.48)$$

となる。

境界条件は、点Aでは対称性により、

$$\dot{U}_\xi = \dot{\Phi}_\xi = \dot{N}_{\xi\theta} = \dot{M}_{\xi\theta} = \dot{Q}_\xi = 0 \quad (4.49)$$

点Bでは自由端の条件を用いて、

$$\dot{N}_\xi = \dot{N}_{\xi\theta} = \dot{M}_\xi = \dot{M}_{\xi\theta} = \dot{Q}_\xi = 0 \quad (4.50)$$



差分点数は子午線方向に  $N=51$  とし、殻厚方向には19個の格子点を採用した。また、フーリエ級数の項数  $[=(n+1)/2]$  は  $n=79$  とした。これらの数値は、これを種々変化させたときの解の収束性と、利用した計算機的能力 (FACOM M-382) を考慮して決定した。

異方性パラメータ  $L$ 、 $M$  については、殻厚方向の試験片採取が困難なこと、またその影響が小さいことのために、 $S_{\xi\xi} = \sigma_{\xi\xi}$ 、 $S_{\theta\xi} = \sigma_{\theta\xi}$  [式(4.37)] とみなし、 $L/F = M/F = 4.79$  とした。

円筒殻の中央部に局所的に作用する圧力の分布は、ボンチと試験片との間にはさんだ圧力判別シートの色の变化から、子午線方向に 4.3 mm、円周方向に 3.0 mmのほぼ楕円形である事がわかった。本解析では、子午線方向 ( $0 \leq s \leq 2.15$  mm) に楕円状で、円周方向には余弦波状の次式に示す分布荷重を仮定した (図4.12)。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq s \leq 0.43 \text{ mm}, 0 \leq \theta \leq \pi/56 : P_{\xi}^+ &= p \cos 28\theta \\ 0.43 \leq s \leq 1.29 \text{ mm}, 0 \leq \theta \leq \pi/60 : P_{\xi}^+ &= 0.92p \cos 30\theta \\ 1.29 \leq s \leq 2.15 \text{ mm}, 0 \leq \theta \leq \pi/92 : P_{\xi}^+ &= 0.6p \cos 46\theta \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

ここで、 $p$  は点A ( $s=0$ ,  $\theta=0^\circ$ ) での分布荷重の大きさを示し、荷重  $P$  と次の関係にある。

$$\left. \begin{aligned} P &= 4p(R+h/2) \left[ 0.43 \int_0^{\pi/56} \cos 28\theta d\theta + 0.86 \int_0^{\pi/60} 0.92 \cos 30\theta d\theta + 0.86 \int_0^{\pi/92} 0.6 \cos 46\theta d\theta \right] \\ &= 5.67p \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

荷重の時間的变化に対しては、図4.13に示すように立ち上がり部分を階段状に近似して計算を行った。

ひずみ速度は時間と共に変化するので、時間間隔 ( $\Delta t$ ) <sub>$j$</sub>  の選び方によっては、計算の無駄や誤差が大きくなる。本計算においても、第2.4節と同様に、Zienkiewicz および Corneau [69] による時間間隔の安定限界を表す式 (2.48) を参照にし、( $\Delta t$ ) <sub>$j$</sub>  = 0.9  $\Delta t_0$  を用いた。

### 〔3〕 実験値と計算値の比較

図4.14(a),(b)は、それぞれ  $\theta=0^\circ$  と  $90^\circ$  の外表面の軸方向ひずみ  $\varepsilon_\xi$  と円周方向ひずみ  $\varepsilon_\theta$  の分布、ならびに  $\xi=0$  の外表面の  $\varepsilon_\xi$ 、 $\varepsilon_\theta$  の分布を示す。黒印 (●, ▲) と破線は、負荷開始55秒後 ( $t=t_1$ ) における実験値と計算値であり、白印 (○, △) と実線は、負荷後98分 ( $t=t_2$ ) のものである。点線および一点鎖線は、殻厚方向のせん断変形を考慮しない薄肉殻理論による計算値である。

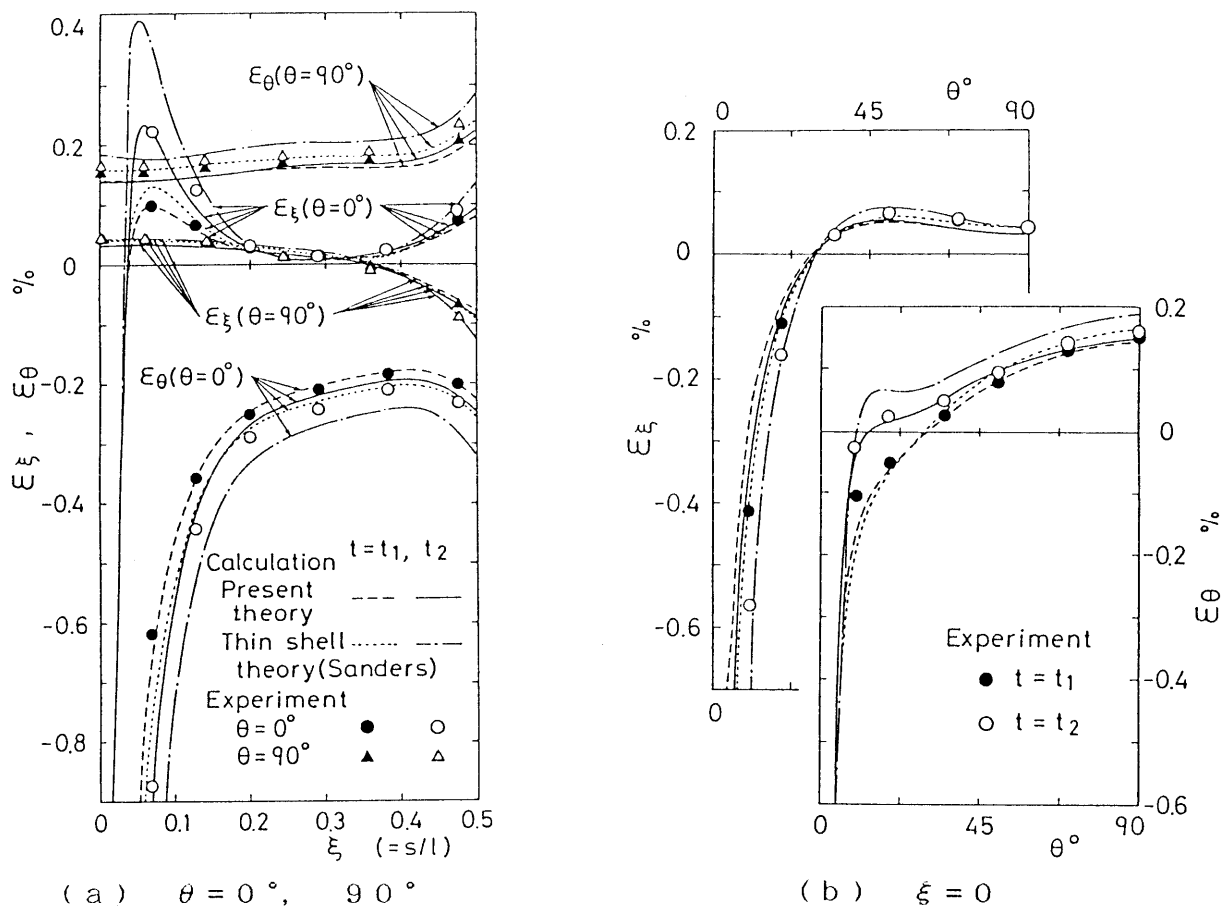


図 4.14  $\epsilon_\xi, \epsilon_\theta$  分布

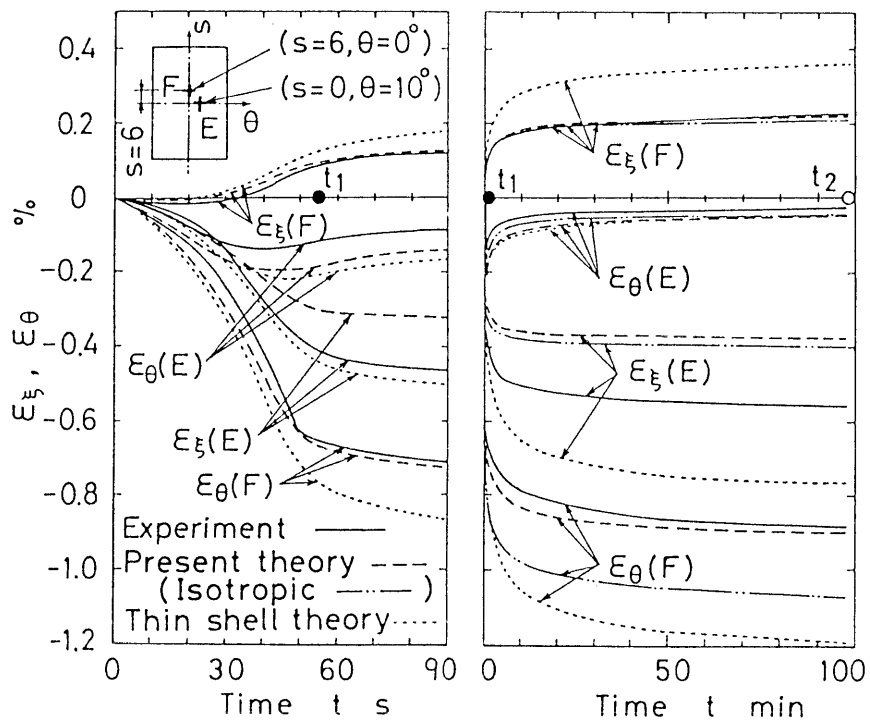


図 4.15  $\epsilon_\xi, \epsilon_\theta$  の時間的变化

$\varepsilon_{\theta}$  は  $\theta = 0^{\circ}$  の子午線上で圧縮ひずみを、 $\theta = 90^{\circ}$  上ではほぼ一様な引張ひずみを示し、 $\varepsilon_{\xi}$  は円筒殻中央部の荷重負荷部近傍を除いて、これらの子午線上では小さな値を示している。また荷重負荷部近傍で、 $\varepsilon_{\xi}$ 、 $\varepsilon_{\theta}$ とも局所的に大きな圧縮ひずみを示し、時刻  $t_1$  から  $t_2$  までの間のひずみの増加が、他に比べて顕著になっている。さらに  $\theta = 0^{\circ}$  の子午線上の  $\xi = 0.06$  付近の  $\varepsilon_{\xi}$ 、および  $\xi = 0$  の断面上の  $\theta = 20^{\circ}$  付近の  $\varepsilon_{\theta}$  は、時間の経過と共に部分的にひずみの変化量が大きくなっている。これは、ボンチによる試験片のくぼみが深くなることによるものと思われる。

次に実験値と本解法による計算値を比較すると、荷重負荷部近傍ではひずみ分布の変化が大きくて比較が困難なので、両者の比較は図4.15に譲るが、その他の部分では時刻  $t_1$ 、 $t_2$ とも両者はよく一致している。

また薄肉殻理論による解と、せん断変形の影響を考慮した本理論による解との間には差が見られ、薄肉殻理論による方がひずみの増加量が大きくなっている。

次に図4.15は、荷重負荷部近傍の点E ( $s = 0$ ,  $\theta = 10^{\circ}$ ,  $\xi = h/2$ )、F ( $s = 6$ ,  $\theta = 0^{\circ}$ ,  $\xi = h/2$ )での、ひずみ  $\varepsilon_{\xi}$ 、 $\varepsilon_{\theta}$  の時間的変化である。実線は実験値を示し、破線および点線は両理論による計算値である。左図は負荷直後の90秒間の時間的変化を、時間軸を拡大して示したものである。点Eの  $\varepsilon_{\theta}$ 、点Fの  $\varepsilon_{\xi}$  は最初圧縮ひずみを示すが、ある時点から引張ひずみ増分に転じている。両点のこれらのひずみの時間的変化から、荷重負荷部付近の変形形状の時間的推移が把握できる。実験値と本解法による計算値を比較すると、点Fのひずみはよく一致しているが、点Eでは  $\varepsilon_{\xi}$ 、 $\varepsilon_{\theta}$ とも多少の差が見られる。両者が一致しない理由として、荷重の分布形状が変形と共に変わり、荷重の円周方向分布が式(4.51)と異なってくること、ならびに図4.14(b)に示すように、点Eでは両ひずみの分布の変化が著しく、ゲージの貼付位置のわずかなずれによることも考えられる。

次にせん断変形の影響を無視した薄肉殻理論では、立ち上がりからひずみが大きく現れ、時刻  $t_2$  の定常時では実験値との差は非常に大きくなっている。なお本解法で異方性を無視した解を、図4.15の右図に二点鎖線で示す。点Fの  $\varepsilon_{\theta}$  では等方性理論と異方性理論の差が顕著になり、ひずみが大きくなると異方性を無視できないことがわかる。

以上、実験結果と計算結果の比較より、次の事柄が明らかになった。

- (1) 荷重負荷部近傍を除いて、実験値と解析値はよく一致しており、本解法の妥当性が確かめられた。
- (2) 薄肉殻理論による解と本理論による解との間には差が見られ、薄肉殻理論による方

がひずみが大きく表される。本実験例の程度の厚さの殻 ( $R/h=9.4$ ) では、殻厚方向のせん断変形を考慮に入れた解析が必要である。

(3) ひずみが大きくなると、(2)の場合の差ほどではないが、等方性理論による解と異方性理論による解の間に差を生じ、異方性が無視できなくなる。

図4.16～図4.18に、計算による変位成分、内力成分の分布、ならびに降伏領域の進展の様子を示す。図には、初期降伏荷重  $P_0$ 、および時刻  $t_1$  と  $t_2$  における分布を、それぞれ破線と実線で示す。本解法と比較するため、せん断変形の影響を考慮しない薄肉殻理論による解も合わせ示す。なお、図中の二点鎖線は、本解法で異方性を無視した解である。

図4.16は半径方向変位  $W$  の子午線  $\theta=0, 90^\circ$  上と、円周  $\xi=0, 0.5$  上の分布、および円周方向変位  $U_\theta$  の子午線  $\theta=45^\circ$  上と円周  $\xi=0, 0.5$  上の分布である。 $W$  は荷重負荷部で大きい、他の部分では自由端までほぼ一様である。 $U_\theta$  は  $\theta=45^\circ$  付近で大きな値を示すが、子午線方向にはあまり変化しない。ここには示さなかったが、子午線方向変位  $U_\xi$  は  $W$  に比べて非常に小さい。したがって変形後の形状は全体としては、ほぼ楕円筒となり、荷重負荷部のみが大きく内側に変位することになる。 $t_1$  から  $t_2$  までの時間的変化は負荷部で大きく、また薄肉殻理論による解の方が、本理論に比べて一般に大きな値を示している。また等方性理論による解は、殻全体にわたって本解法による結果よりも5

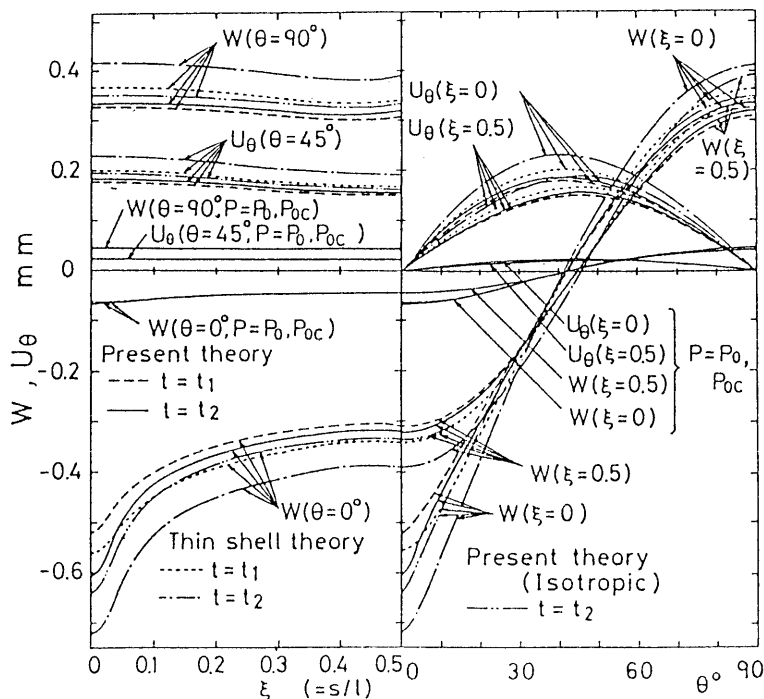


図 4.16  $W, U_\theta$  分布 ( $\theta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, \xi=0, 0.5$ )

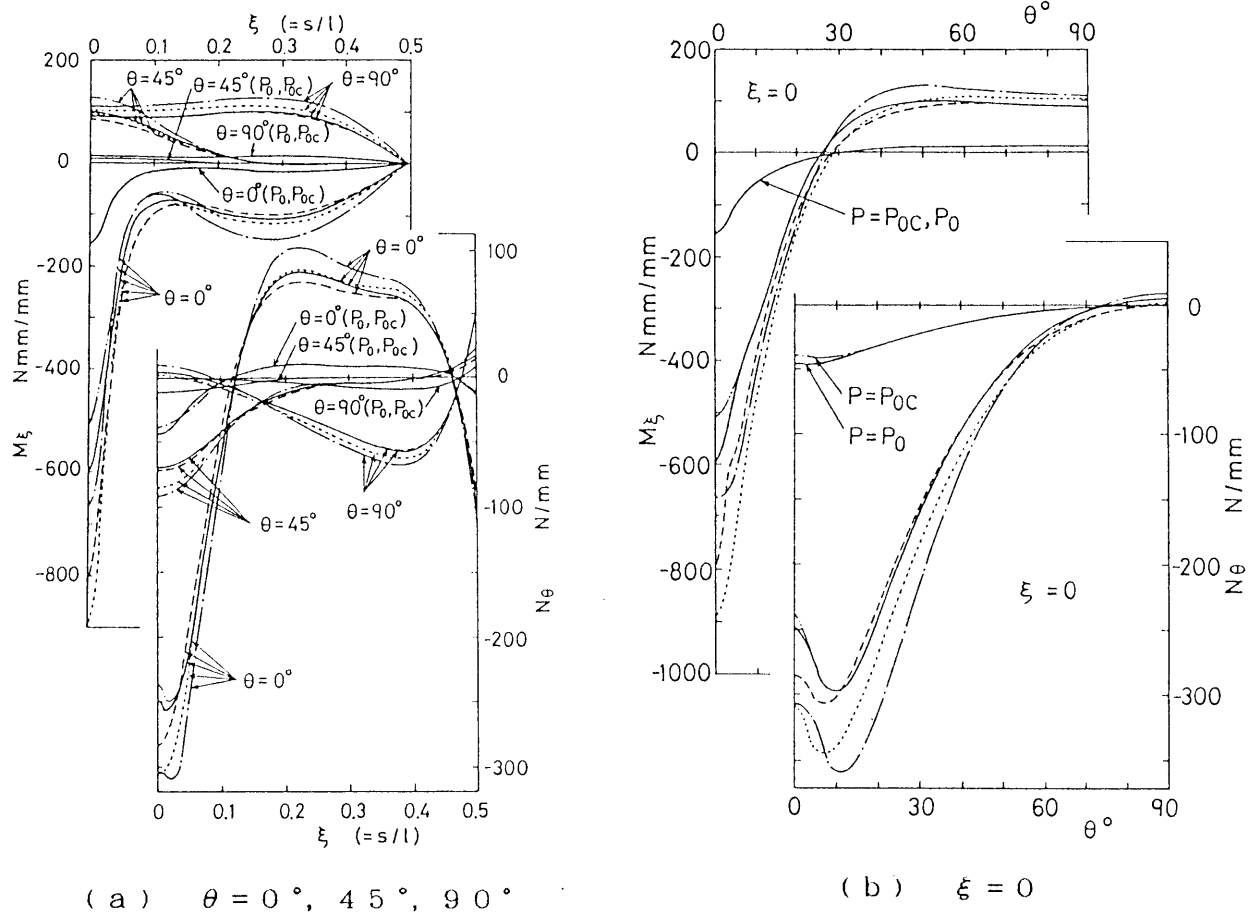


図 4.17  $N_\theta, M_\xi$  分布

%程度大きな変位を示すが、薄肉殻理論による結果との差ほどではない。

図4.17(a),(b)は、それぞれ  $N_\theta$  と  $M_\xi$  の子午線  $\theta = 0, 45, 90^\circ$  上および円周  $\xi = 0$  上の分布である。荷重負荷部分のみが大きく内側に変形するため、この部分の各内力成分の分布の変化が著しく大きくなっている。 $N_\theta, M_\xi$  とも時刻  $t_1$  から  $t_2$  までの間に荷重負荷部では緩和し、その他の領域では増加している。また殻全体にわたって、薄肉殻理論による値の方が本理論値よりも大きな値を示している。等方性理論との差は荷重負荷部で見られ、両成分とも本解法よりも小さな値を示している。

図4.18は降伏領域の進展の様子である。本理論では  $P_0 = 706$  N、薄肉殻理論では  $P_{0c} = 686$  N のとき、円筒殻の点A ( $\xi = 0, \theta = 0^\circ$ ) の外表面において初めて降伏する。降伏領域は  $\theta = 0, 90^\circ$  の子午線に沿って、軸方向に急速に進展し、時刻  $t_1$  から  $t_2$  にかけての広がり方は小さい。また薄肉殻理論による方が、降伏領域の広がり方は大きい。

以上図4.14～図4.18に見るように、荷重負荷部近傍では解の時間的変動が大きく、また

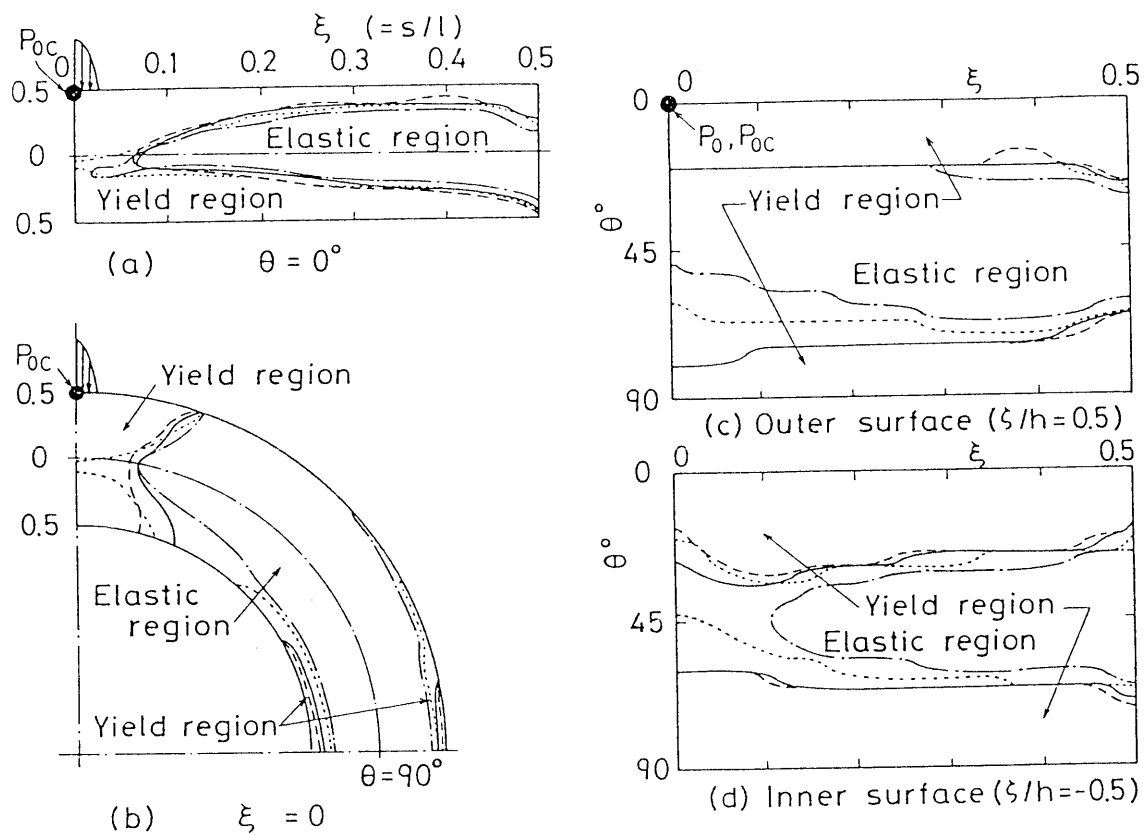


図 4.18 降伏領域の進展

一般に両理論による結果の差はかなり大きくなり、異方性の影響も無視できなくなることがわかる。

なお計算には、FACOM M-382 を使用し、本計算例の計算時間はおよそ70分である。

## 第5章 薄肉回転対称殻の動的応答 [95,96]

殻構造物が事故や地震等の災害により、材料の降伏点を越えるような高応力の衝撃荷重を受ける場合、ひずみ速度が大きくなり、構造解析において材料の粘性的挙動を考慮に入れることが特に重要になってくる。金属が粘性的に挙動する事は古くから知られており、殻の動的応答問題に関して、粘弾性理論に基づく研究 [22,28] とともに、高速変形に対する材料の構成式の確立 [51-54] ならびに計算機の発達により、1970年代から粘塑性構成式を構造物の動的な変形問題に適用した研究 [77-86] が多くなされるようになった。この章で述べる解法は、殻構造物の粘塑性動的応答問題を取り扱った先駆的な方法の一つである。

本章では、薄肉の回転対称殻に一般の非軸対称な動的荷重が作用する場合を取り上げ、その弾/粘塑性応答問題の解法を示すことを目的とする。殻の運動方程式には、Sanders, Jr. [87] の殻の非線形理論式に慣性項を加えたものを、またひずみ-変位式には膜ひずみに殻の回転の項を考慮する。構成関係には、塑性領域において粘性を考慮した Perzyna [53] の理論に基づく Fyfe の構成式 [54] を用いる。数値解法には差分法を適用する。

非軸対称な荷重が作用する場合の解法として、これまでの各章では、基礎式中の粘塑性ひずみ成分を除くすべての従属変数を、殻の円周方向にフーリエ級数展開することにより、殻の子午線方向の独立変数に関する支配方程式を導き、差分法により数値的に解を求めた。しかしながらこの解法では、形状非線形性を取り扱うことが困難である。そこで本章では、このフーリエ級数展開の解法とは異なり、円周方向にも差分点を取り、子午線方向と円周方向の2変数に関する差分式を用いる。円周方向にも差分式を用いたこの数値計算法は、円筒殻の弾塑性動的応答問題を取り扱ったBotheIIらの論文 [21] に示され、弾性範囲内で解法の精度を確認している。本章ではこの解析手順を粘塑性問題に適用し、一般軸対称殻の弾/粘塑性動的応答問題の解法を示すとともに、数値例として、両端固定のアルミ円筒殻の半周に、衝撃外圧が作用する問題を解析し、内力および変位の時間的変化の様子を明らかにする。

### 5.1 薄肉回転対称殻の基礎関係式

基礎式を導くにあたり、図2.1に示すように回転対称殻の形状パラメータと座標を与える。殻の中央面の微小要素に働く内力と分布荷重、および変位と回転を図2.2のように定義する。

Sanders, Jr. の薄肉殻非線形理論 [87] による平衡方程式に慣性項を加え、それらの式

から横せん断力  $Q_{\xi}$ 、 $Q_{\theta}$  を消去すると、運動方程式は次のようになる。ただし回転慣性の項は省略する。

$$\left. \begin{aligned}
 & a \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho N_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\xi\theta}) - \rho' N_{\theta} \right] + \omega_{\xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho M_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{\xi\theta}) - \rho' M_{\theta} \right] \\
 & \quad + \frac{1}{2} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{\xi\theta}) - \omega_{\xi} \rho a (\Phi_{\xi} N_{\xi} + \Phi_{\theta} N_{\xi\theta}) + \rho a^2 \left( P_{\xi} - \rho_0 h \frac{\partial^2 U_{\xi}}{\partial t^2} \right) = 0 \\
 & a \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho N_{\xi\theta}) + \rho' N_{\xi\theta} \right] + \omega_{\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho M_{\xi\theta}) + \rho' M_{\xi\theta} \right] \\
 & \quad + \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} [(\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) M_{\xi\theta}] - \omega_{\theta} \rho a (\Phi_{\theta} N_{\theta} + \Phi_{\xi} N_{\xi\theta}) + \rho a^2 \left( P_{\theta} - \rho_0 h \frac{\partial^2 U_{\theta}}{\partial t^2} \right) = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho M_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{\xi\theta}) - \rho' M_{\theta} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho M_{\xi\theta}) + \rho' M_{\xi\theta} \right] \\
 & \quad - a \rho (\omega_{\xi} N_{\xi} + \omega_{\theta} N_{\theta}) - a \frac{\partial}{\partial \xi} [\rho \Phi_{\xi} N_{\xi} + \rho \Phi_{\theta} N_{\xi\theta}] - a \frac{\partial}{\partial \theta} (\Phi_{\xi} N_{\xi\theta} + \Phi_{\theta} N_{\theta}) \\
 & \quad + a^2 \rho \left( P_{\xi} - \rho_0 h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

慣性項の中の  $h$ 、 $t$  および  $\rho_0$  はそれぞれ殻厚、時間および密度である。また非線形項に含まれる殻の中央面の回転は、中央面の変位と次式で関係づけられている [87]。

$$\Phi_{\xi} = \frac{1}{a} \left( -\frac{\partial W}{\partial \xi} + \omega_{\xi} U_{\xi} \right), \quad \Phi_{\theta} = \frac{1}{a} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \omega_{\theta} U_{\theta} \right) \quad (5.2)$$

次にやや変形が大きい場合の中央面のひずみ  $\varepsilon_{\xi m}$ 、 $\varepsilon_{\theta m}$ 、 $\varepsilon_{\xi\theta m}$  を中央面の変位と回転で表すと [87]、

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{\xi m} &= \frac{1}{a} \left( \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \xi} + \omega_{\xi} W \right) + \frac{1}{2} \Phi_{\xi}^2, & \varepsilon_{\theta m} &= \frac{1}{a} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_{\theta}}{\partial \theta} + \gamma U_{\xi} + \omega_{\theta} W \right) + \frac{1}{2} \Phi_{\theta}^2 \\
 \varepsilon_{\xi\theta m} &= \frac{1}{2a} \left( \frac{\partial U_{\theta}}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \theta} - \gamma U_{\theta} \right) + \frac{1}{2} \Phi_{\xi} \Phi_{\theta}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

ここに  $\varepsilon_{\xi\theta m}$  は工学上のせん断ひずみの 1/2 である。また曲率の変化量と変位および回転との関係は、次式で与えられる [87]。

$$\left. \begin{aligned}
 \kappa_{\xi} &= \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{\xi}}{\partial \xi}, & \kappa_{\theta} &= \frac{1}{a} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_{\theta}}{\partial \theta} + \gamma \Phi_{\xi} \right) \\
 \kappa_{\xi\theta} &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi_{\xi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi_{\theta}}{\partial \xi} - \gamma \Phi_{\theta} + \frac{1}{2a} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \theta} - \frac{\partial U_{\theta}}{\partial \xi} - \gamma U_{\theta} \right) \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

中央面から  $z$  の距離にある点 Q のひずみ  $\varepsilon_{\xi}$ 、 $\varepsilon_{\theta}$ 、 $\varepsilon_{\xi\theta}$  は、Kirchhoff の仮説を用いて次のように表される。



$$\{\varepsilon_{\xi}, \varepsilon_{\theta}, \varepsilon_{\xi\theta}\}^T = \{\varepsilon_{\xi m}, \varepsilon_{\theta m}, \varepsilon_{\xi\theta m}\}^T + \zeta \{\kappa_{\xi}, \kappa_{\theta}, \kappa_{\xi\theta}\}^T \quad (5.5)$$

本章では構成関係に Fyfe の構成式 [54] を用いる。Fyfe は Perzyna [53] の式

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{S} \delta_{ij} + \gamma_0 \langle \Psi(f) \rangle S_{ij} J_2^{-1/2} \quad (5.6)$$

における関数  $\Psi(f)$  の形を、種々の動的塑性実験から次の形に定めている。

$$\Psi(f) = \exp(\alpha f) - 1 \quad (5.7)$$

$S_{ij}$ 、 $S$  は偏差応力、平均垂直応力であり、 $\alpha$ 、 $\gamma_0$  は材料定数である。また  $\langle \Psi(f) \rangle$  は次の定義によるものである。

$$\left. \begin{aligned} \langle \Psi(f) \rangle &= 0, & f &\leq 0 \\ &= \Psi(f), & f &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

ここに  $f$  は

$$f = (\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma_y \quad (5.9)$$

で、 $\sigma_y$  は初期降伏応力、 $f=0$  はミーゼスの降伏曲面を表す。

殻理論で通常仮定される平面応力状態において、Fyfe の式は、式(5.6)、(5.7)および(5.9)より次のようになる。

$$\{\dot{\sigma}_{\xi}, \dot{\sigma}_{\theta}, \dot{\sigma}_{\xi\theta}\}^T = [D] \left[ \{\dot{\varepsilon}_{\xi}, \dot{\varepsilon}_{\theta}, \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}\}^T - \{\dot{\varepsilon}_{\xi}^{up}, \dot{\varepsilon}_{\theta}^{up}, \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^{up}\}^T \right] \quad (5.10)$$

ただし

$$\{\dot{\varepsilon}_{\xi}^{up}, \dot{\varepsilon}_{\theta}^{up}, \dot{\varepsilon}_{\xi\theta}^{up}\}^T = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_0 \langle \Psi \left( \frac{\bar{\sigma} - \sigma^*}{\sigma_y} \right) \rangle \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \{\sigma_{\xi}, \sigma_{\theta}, \sigma_{\xi\theta}\}^T \quad (5.11)$$

殻の単位長さ当りの合応力、合モーメントは次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \{N_{\xi}, N_{\theta}, N_{\xi\theta}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{\xi}, \sigma_{\theta}, \sigma_{\xi\theta}\} d\zeta \\ \{M_{\xi}, M_{\theta}, M_{\xi\theta}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{\xi}\zeta, \sigma_{\theta}\zeta, \sigma_{\xi\theta}\zeta\} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

以上で26個の未知数  $N_{\xi}$ 、 $N_{\theta}$ 、 $N_{\xi\theta}$ 、 $M_{\xi}$ 、 $M_{\theta}$ 、 $M_{\xi\theta}$ 、 $U_{\xi}$ 、 $U_{\theta}$ 、 $W$ 、 $\varepsilon_{\xi}$ 、 $\varepsilon_{\theta}$ 、 $\varepsilon_{\xi\theta}$ 、 $\varepsilon_{\xi m}$ 、 $\varepsilon_{\theta m}$ 、 $\varepsilon_{\xi\theta m}$ 、 $\kappa_{\xi}$ 、 $\kappa_{\theta}$ 、 $\kappa_{\xi\theta}$ 、 $\phi_{\xi}$ 、 $\phi_{\theta}$ 、 $\sigma_{\xi}$ 、 $\sigma_{\theta}$ 、 $\sigma_{\xi\theta}$ 、 $\varepsilon_{\xi}^{up}$ 、 $\varepsilon_{\theta}^{up}$ 、 $\varepsilon_{\xi\theta}^{up}$  に対して式(5.1)~(5.5)、(5.10)~(5.12)の26個の式が用意されたことになる。

## 5.2 数値解法

前節で得られた26個の式を適当な境界条件のもとで解けば、解が得られることになるが、これを厳密に理論計算することは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。Bothellら [21] は円筒殻を対象とした弾塑性動的応答問題について、Flüggeの平衡方程式 [35]、Sanders, Jr.の大たわみを考慮したひずみ-変位式 [87] を用いて、時間と空間に関する導関数に差分法を適用して数値計算を行っており、本解法もこの数値解法を導入する。

図5.1のように、子午線方向および円周方向に各々等間隔に、 $M$  および  $N$  個の差分点を取ると、 $\xi (= s/a)$  および  $\theta$  の増分  $\Delta\xi$  および  $\Delta\theta$  はそれぞれ次のようになる。なおここでは  $\theta = 0^\circ$  の子午線面に対して面对称な荷重が作用する場合を取り扱うが、他の荷重の場合も全く同様である。

$$\Delta\xi = \bar{s}/a(M-1), \quad \Delta\theta = \bar{\theta}/(N-1) \quad (5.13)$$

ここに  $\bar{s}$  は子午線の長さである。

また式(5.12)を用いて応力から合応力および合モーメントを求める際、殻厚方向に等間隔に  $K$  個の点を取ってシンプソンの1/3法則を使用する。

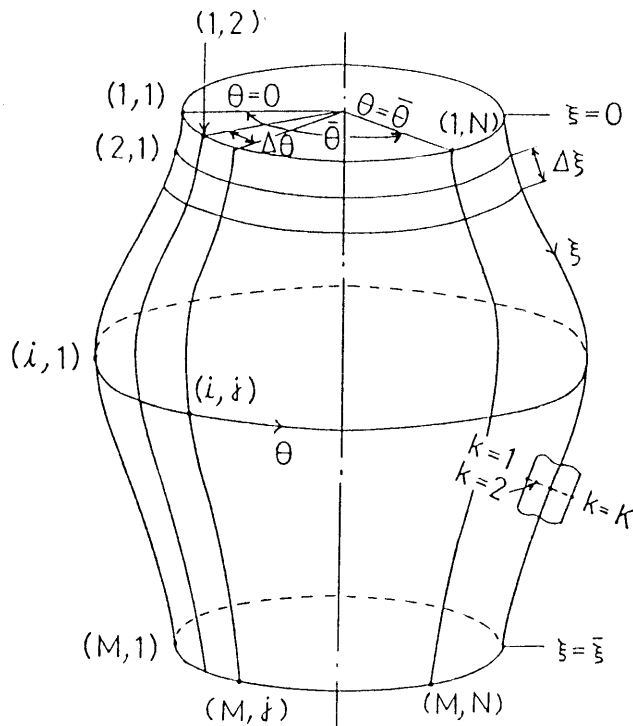


図 5.1 格子点  $(i, j, k)$

次に差分点  $(i, j)$  における諸量を  $f_{ij}$  とし、差分表示の際に境界では3点差分を、その他の点では中間差分式を適用すると、 $\partial f_{ij}/\partial \xi$ 、 $\partial f_{ij}/\partial \theta$ 、 $\partial^2 f_{ij}/\partial \xi^2$ 、 $\partial^2 f_{ij}/\partial \theta^2$ 、 $\partial^2 f_{ij}/\partial \xi \partial \theta$  について、4境界線  $[\xi=0, \bar{\xi}, \theta=0, \bar{\theta}]$ 、4すみの境界点  $[(\xi, \theta)=(0,0), (\bar{\xi}, 0), (0, \bar{\theta}), (\bar{\xi}, \bar{\theta})]$  および境界を除いた各点に対し、それぞれ9種類の差分式が求められる。また運動方程式の慣性項に現われる時間に関する二階導関数に対しては、次の中間差分式を用いる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (f_{i-j_1} - 2f_i + f_{i+j_1}) \quad (5.14)$$

以上の差分式を用いて式(5.1)を差分近似すると、点  $(i, j)$  に対して次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} U_{\xi}(t + \Delta t) &= -U_{\xi}(t - \Delta t) + 2U_{\xi}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{a^2 \rho \rho_0 h} \left[ a_1 N_{\xi}(t) \right. \\ &\quad + a_2 \frac{\partial N_{\xi}(t)}{\partial \xi} + a_3 N_{\theta}(t) + a_4 N_{\xi\theta}(t) + a_5 \frac{\partial N_{\xi\theta}(t)}{\partial \theta} + a_6 M_{\xi}(t) \\ &\quad \left. + a_7 \frac{\partial M_{\xi}(t)}{\partial \xi} + a_8 M_{\theta}(t) + a_9 \frac{\partial M_{\xi\theta}(t)}{\partial \theta} + a_{10} P_{\xi}(t) \right] \\ \\ U_{\theta}(t + \Delta t) &= -U_{\theta}(t - \Delta t) + 2U_{\theta}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{a^2 \rho \rho_0 h} \left[ a_{11} N_{\theta}(t) \right. \\ &\quad + a_{12} \frac{\partial N_{\theta}(t)}{\partial \theta} + a_{13} N_{\xi\theta}(t) + a_{14} \frac{\partial N_{\xi\theta}(t)}{\partial \xi} + a_{15} \frac{\partial M_{\theta}(t)}{\partial \theta} \\ &\quad \left. + a_{16} M_{\xi\theta}(t) + a_{17} \frac{\partial M_{\xi\theta}(t)}{\partial \xi} + a_{18} P_{\theta}(t) \right] \\ \\ W(t + \Delta t) &= -W(t - \Delta t) + 2W(t) + \frac{(\Delta t)^2}{a^2 \rho \rho_0 h} \left[ a_{19} N_{\xi}(t) \right. \\ &\quad + a_{20} \frac{\partial N_{\xi}(t)}{\partial \xi} + a_{21} N_{\theta}(t) + a_{22} \frac{\partial N_{\theta}(t)}{\partial \theta} + a_{23} N_{\xi\theta}(t) + a_{24} \frac{\partial N_{\xi\theta}(t)}{\partial \xi} \\ &\quad + a_{25} \frac{\partial N_{\xi\theta}(t)}{\partial \theta} + a_{26} M_{\xi}(t) + a_{27} \frac{\partial M_{\xi}(t)}{\partial \xi} + a_{28} \frac{\partial^2 M_{\xi}(t)}{\partial \xi^2} \\ &\quad + a_{29} M_{\theta}(t) + a_{30} \frac{\partial M_{\theta}(t)}{\partial \xi} + a_{31} \frac{\partial^2 M_{\theta}(t)}{\partial \theta^2} + a_{32} \frac{\partial M_{\xi\theta}(t)}{\partial \theta} \\ &\quad \left. + a_{33} \frac{\partial^2 M_{\xi\theta}(t)}{\partial \xi \partial \theta} + a_{34} P_{\xi}(t) \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

ここに係数  $a_i(i, j)$  は形状パラメータと時刻  $T = t$  における回転とからなる〔付録5.1 参照〕。

式(5.15)から時刻  $T = t - \Delta t$  および  $T = t$  における各変位と時刻  $T = t$  での各内力成分がすべての空間差分点  $(i, j)$  で既知ならば、時刻  $T = t + \Delta t$  での各差分点における変位が計算できる。

$T = t + \Delta t$  における各変位が求められると、 $\Delta t$  間の変位増分は次式から計算できる。

$$\delta U_\xi(i, j, t) = U_\xi(i, j, t + \Delta t) - U_\xi(i, j, t) \quad (5.16)$$

など。

式(5.2)～(5.5) から殻の任意の点  $(i, j, k)$  のひずみ増分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_\xi(i, j, k, t) &= \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\partial \delta U_\xi(i, j, t)}{\partial \xi} + \omega_\xi \delta W(i, j, t) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left\{ \Phi_\xi(i, j, t) \delta \Phi_\xi(i, j, t) + \frac{1}{2} \delta \Phi_\xi^2(i, j, t) \right\} \right. \\ &\quad \left. + h \left( \frac{k-1}{K-1} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial \delta \Phi_\xi(i, j, t)}{\partial \xi} \right] \\ \delta \varepsilon_\theta(i, j, k, t) &= \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta U_\theta(i, j, t)}{\partial \theta} + \gamma \delta U_\xi(i, j, t) \right. \\ &\quad \left. + \omega_\theta \delta W(i, j, t) + \alpha \left\{ \Phi_\theta(i, j, t) \delta \Phi_\theta(i, j, t) + \frac{1}{2} \delta \Phi_\theta^2(i, j, t) \right\} \right. \\ &\quad \left. + h \left( \frac{k-1}{K-1} - \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta \Phi_\theta(i, j, t)}{\partial \theta} + \gamma \delta \Phi_\xi(i, j, t) \right\} \right] \\ \delta \varepsilon_{\xi\theta}(i, j, k, t) &= \frac{1}{2\alpha} \left[ \frac{\partial \delta U_\theta(i, j, t)}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta U_\xi(i, j, t)}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - \gamma \delta U_\theta(i, j, t) + \alpha \left\{ \Phi_\xi(i, j, t) \delta \Phi_\theta(i, j, t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta \Phi_\xi(i, j, t) \Phi_\theta(i, j, t) + \delta \Phi_\xi(i, j, t) \delta \Phi_\theta(i, j, t) \right\} \right. \\ &\quad \left. + h \left( \frac{k-1}{K-1} - \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta \Phi_\xi(i, j, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \Phi_\theta(i, j, t)}{\partial \xi} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \gamma \delta \Phi_\theta(i, j, t) + \frac{\omega_\xi - \omega_\theta}{2\alpha} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta U_\xi(i, j, t)}{\partial \theta} - \frac{\partial \delta U_\theta(i, j, t)}{\partial \xi} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \gamma \delta U_\theta(i, j, t) \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

ここに  $k$  は、 $k = 1$  および  $K$  でそれぞれ殻の内表面および外表面を表す。

次にひずみ増分  $\{\delta \varepsilon\}$  と  $T = t$  における応力とから式(5.10)を用いて各点の応力増分が求められ、時刻  $T = t$  における応力はこの応力増分を加えることによって、時刻  $T = t + \Delta t$  における応力が計算できる。さらに式(5.12)からシンプソンの1/3則による数値積分によって、 $T = t + \Delta t$  における各内力成分が得られる。これらの内力成分を式(5.15)に代入すると、次の時刻の変位が求められる。

ここで計算の最初の段階として、時刻  $T = \Delta t$  に対する初期変位(変位増分)を設定しなければならない。この際、初期近似誤差を小さくするため、 $\Delta t_0 = \Delta t / n$  (たとえば  $n = 10$ ) を用いる。衝撃荷重としては、インパルス荷重(単位面積当りの力積で与える)を受ける場合と一定時間持続する表面荷重(単位面積当りの力で与える)を受ける場合を考える。インパルス荷重を受ける場合、単位面積当りの力積を  $I_{\xi}(\xi, \theta)$ 、 $I_{\theta}(\xi, \theta)$ 、 $I_{\zeta}(\xi, \theta)$  とすると、初期変位は、

$$\left. \begin{aligned} U_{\xi} = \delta U_{\xi} &= \frac{I_{\xi}(\xi, \theta)}{\rho_0 h} \Delta t_0 = \dot{U}_{\xi} \Delta t_0, & U_{\theta} = \delta U_{\theta} &= \frac{I_{\theta}(\xi, \theta)}{\rho_0 h} \Delta t_0 = \dot{U}_{\theta} \Delta t_0 \\ W = \delta W &= \frac{I_{\zeta}(\xi, \theta)}{\rho_0 h} \Delta t_0 = \dot{W} \Delta t_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

また表面荷重の場合には、単位面積当りの分布力を  $P_{\xi}$ 、 $P_{\theta}$ 、 $P_{\zeta}$  とすると、

$$U_{\xi} = \delta U_{\xi} = \frac{P_{\xi} \Delta t_0^2}{2\rho_0 h}, \quad U_{\theta} = \delta U_{\theta} = \frac{P_{\theta} \Delta t_0^2}{2\rho_0 h}, \quad W = \delta W = \frac{P_{\zeta} \Delta t_0^2}{2\rho_0 h} \quad (5.19)$$

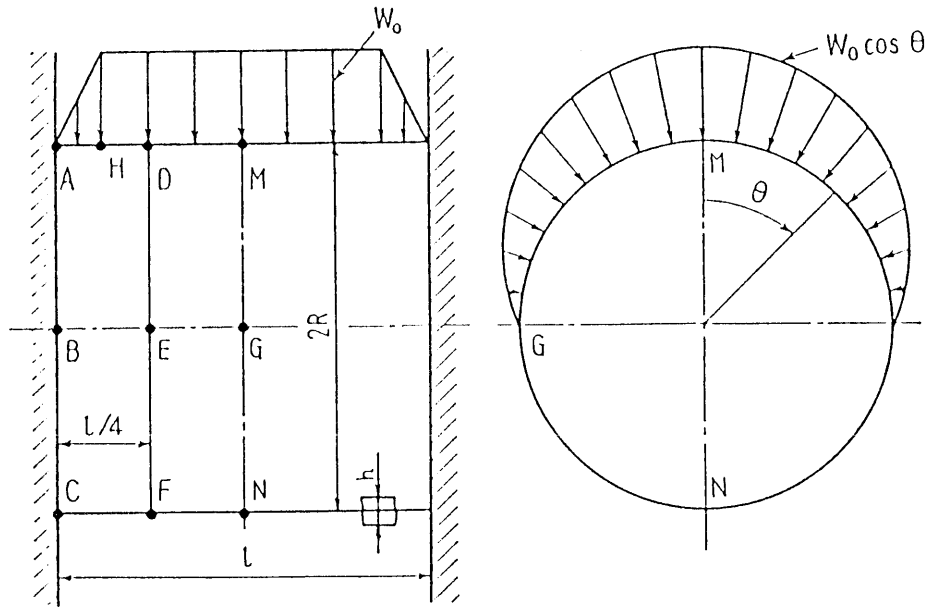
なお  $t \leq 0$  において  $U_{\xi} = U_{\theta} = W = 0$  である。

### 5.3 計算例

数値例として、両端固定の 6061-T6 アルミ円筒殻に、爆風が作用する場合を想定して、余弦波状の衝撃外圧が半周部分に負荷する問題(図5.2)を取り上げる。6061-T6 アルミは粘性の影響が比較的小さい材料であるが、Fyfeにより構成関係が既知であること、また静的応力-ひずみ関係式を弾完全塑性体で近似できるので、バウシinger効果を考慮しなくてよいこと等により、このアルミ合金を採用する。

問題の対称性から、計算は 1/4形状(ACNM)についてのみ行えば十分である。ACNM部分の形状諸量は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a = R, \quad \Delta \xi &= l/2R(M-1), \quad \Delta \theta = \pi/(N-1) \\ \rho = 1, \quad \rho' &= 0, \quad \gamma = 0, \quad \omega_{\theta} = 1, \quad \omega_{\xi} = \omega_{\xi'} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$



$l=800 \text{ mm}, R=400 \text{ mm}, h=3 \text{ mm}$

図 5.2 円筒殻

境界条件は

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{固定端 } AC \text{ で、 } U_{\xi} = U_{\theta} = W = \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0 \\
 &\text{対称面 } MN \text{ で、 } U_{\xi} = \frac{\partial U_{\theta}}{\partial \xi} = \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0 \\
 &\text{子午線 } AM, CN \text{ で、 } U_{\theta} = \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

初期条件は、

$$\left. \begin{aligned}
 &t=0: U_{\xi} = U_{\theta} = W = 0 \\
 &\dot{U}_{\xi} = \dot{U}_{\theta} = 0, \quad \dot{W} = \frac{I_{\xi}(\xi, \theta)}{\rho_0 h} = -\frac{I_0 \cos \theta}{\rho_0 h} = -W_0 \cos \theta
 \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

である。

計算に用いる 6061-T6 アルミの材料定数は次のとおりである [54]。

$$\left. \begin{aligned}
 &E = 71.3 \text{ GPa}, \nu = 0.33, \rho_0 = 2.71 \text{ g/cm}^3, \alpha = 2, \gamma_0 = 5000 \text{ /s} \\
 &\sigma^* = \sigma_Y = 294 \text{ MPa} \quad (\sigma_Y: \text{引張降伏応力})
 \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

これらの値を用いた応力-ひずみ線図を図5.3に示す。

計算は外側からインパルス荷重を受け、 $t=0$ でほぼステップ状に $W_0=50 \text{ m/s}$ の速度となる衝撃荷重について行う。差分点数と殻厚方向の分割数は  $M=21$ 、 $N=31$ 、 $K=11$  で、

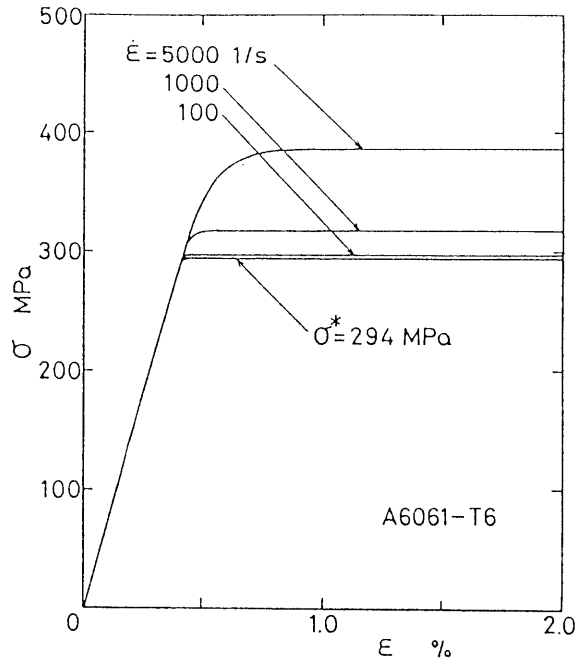


図 5.3 応力-ひずみ線図 ( $\dot{\epsilon}$  : 一定)

時間増分  $\Delta t$  は  $1.0 \times 10^{-3}$  ms である。これらの値は、解の収束性と計算機 (FACOM 230-75) の容量および計算時間を考慮して決定した。

#### 5.4 計算結果と考察

計算は殻がインパルス荷重を受けてから 0.6 ms 後まで行い、変位、内力成分の時間的変化を求めた。

図5.4は点M, G, Nにおける半径方向変位 $W$ 、円周方向変位 $U_{\theta}$ の時間的変化である。実線は本解法による弾/粘塑性解であり、破線は降伏を考慮しない弾性解である。変形はまず点Mが大きく内側に変位し、続いて点Gが外側に膨らんでくる。さらに遅れて点Nが変位し始めるが、正から負へと変動する。点Gは点Mと同じく殻厚の2倍程度の半径方向変位を示し、円周方向の変位量も大きくなっている。降伏域の広がりと共に本解法と弾性解の差は顕著になり、弾/粘塑性解では粘塑性ひずみの増加により、変動が緩慢になる。本解法では弾性域での材料の粘性を考慮に入れていないので、最終的に殻は弾性振動を行う。

次に点M, G, Nの各点における変位 $W$ が、ほぼ最大になる  $t = 0.2, 0.4, 0.56$  ms 時の変位の子午線方向分布を図5.5に、横断面の形状を図5.6に示す。図5.5は  $\theta = 0^{\circ}, 90^{\circ}, 180^{\circ}$

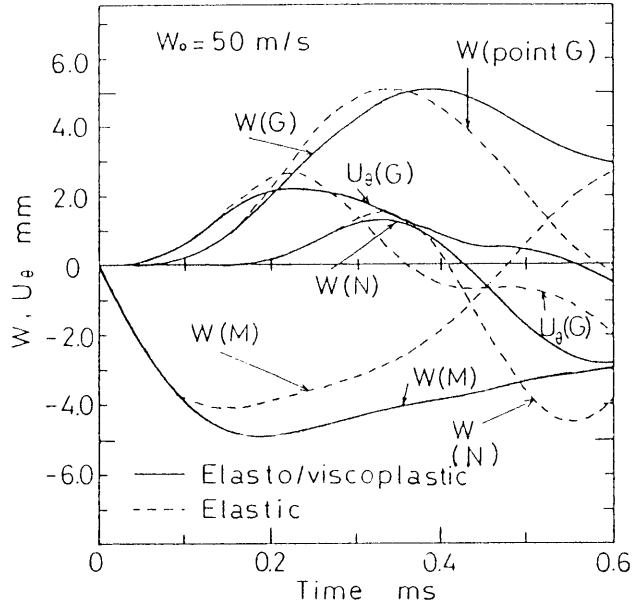


図 5.4 変位  $W$ ,  $U_\theta$  の時間的变化

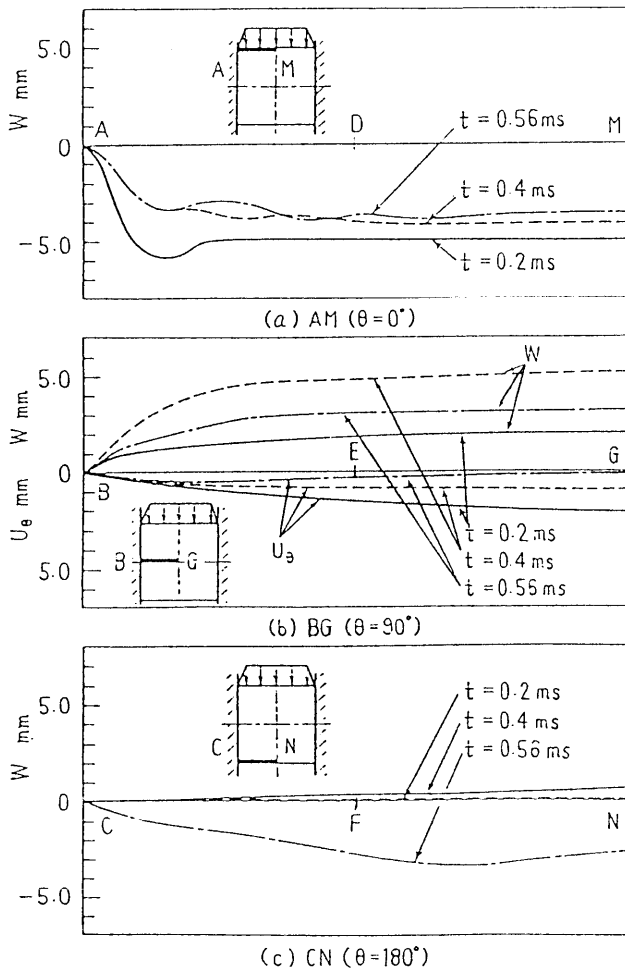


図 5.5  $W$  および  $U_\theta$  の子午線方向分布の時間的变化



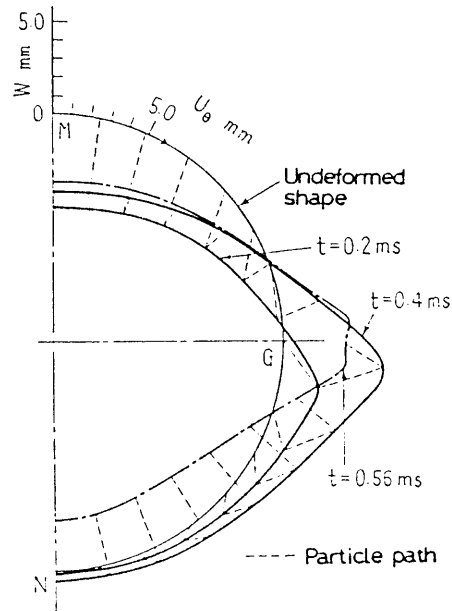


図 5.6 中央断面M G Nの時間的变化

の子午線上の $W$ と、 $\theta = 90^\circ$ の子午線上の $U_\theta$ の分布である。変形は固定端付近を除けば子午線方向にほぼ一様であり、AMに比べBG、CNでは変形が時間的に遅れることがわかる。なお子午線方向変位 $U_\xi$ は、 $W$ 、 $U_\theta$ に比べ非常に小さいので、図5.5はほぼ子午線断面形状の時間的变化を示している。

図5.6は中央断面MGNの形状の時間的变化を示したものである。 $\theta = 90^\circ$ 付近で最も大きな変化を示し、外側に突出して折れ曲がる。 $\theta = 0^\circ$ および $180^\circ$ 付近では半径方向変位は大きくなるが、曲率の変化は比較的小さい。 $\theta = 180^\circ$ 付近では時間的に遅れて変形が現われる。図5.5の $W$ 、 $U_\theta$ の子午線方向分布が固定端付近を除いてほぼ一様であることから、円筒殻の横断面は固定端付近を除いてほぼ同一の形状になっていると思われる。図5.5と併せ考えると、円筒殻全体の形状変化がだいたい把握できる。

図5.7は点B、M、G、Nの合応力の時間的变化を、図5.8は点A、B、Gの合モーメントの時間的变化を示す。一般に内力成分は変位成分に比べて立ち上がり早く、また点M、Nの $N_\theta$ 、点Bの $N_{\xi\theta}$ および点Aの曲げモーメントは、ピーク時にしばらくの間増加量がほとんどなくなり、ほぼ一定値で推移する現象が見られる。これらの点では、この間相当応力が一定となり、また降伏した領域では、ほとんど材料が加工硬化しないためと考えられる。図5.7において、 $N_\xi$ 、 $N_\theta$ の立ち上がりは最初点Mに、続いて点Gに、さらに遅れて点Nに生ずるが、 $N_\theta$ 成分の最大値は点M、Nともあまり変わらない。これらの点では曲率の変化

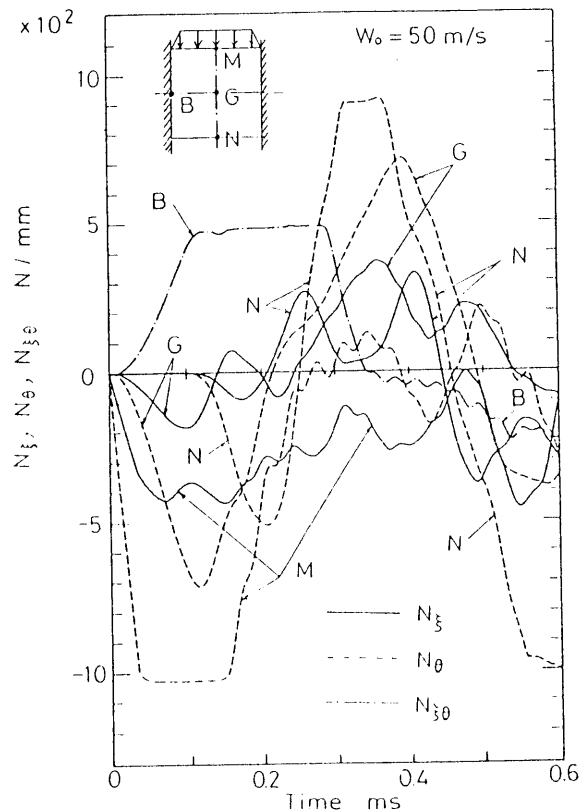


図 5.7 合応力成分の時間的变化

量が小さく、曲げモーメントは小さいので、これらの部分ではほぼ膜応力状態になっていることがわかる。また点Nの $N_{\theta}$ は殻の振動と共にほぼ同じ大きさの最大値、最小値を繰り返しており、図5.4の点Nの $W$ の時間的变化と符合する。 $N_{\xi}$ は $N_{\theta}$ に比べてかなり小さく、1/2程度である。

図5.8において、固定端では $M_{\theta}$ よりも $M_{\xi}$ が大きく、特に点Aで顕著である。また点Gにおける $M_{\theta}$ も、固定端の $M_{\theta}$ と同程度に大きな値を示し、時間とともに緩やかに変化し、図5.4の点Gの $W$ 、 $U_{\theta}$ の時間的变化と符合する。

図5.9は殻の内外面における降伏域の進展の様子を示したものである。図で除荷域とは一度以上降伏を経験した後、応力が降伏点以下になっている領域のことである。図からまず点Hの外表面で降伏を起こし、続いて点Mに向かって急速に降伏域が伸び、次に円周方向に広がることわかる。その後、0.31 ms あたりで点Nに降伏域が発生し、次第に広がっていく。降伏した部分は短時間のうちに除荷域となり、降伏域のすぐ後を除荷域が追いかけることになる。点G付近は弾性域のままであり、点Nでは殻の振動に伴って除荷と再降

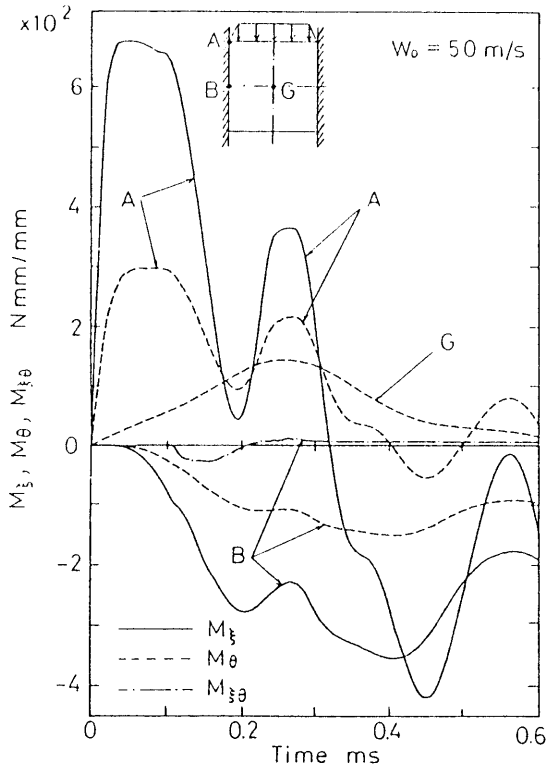


図 5.8 合モーメント成分の時間的变化

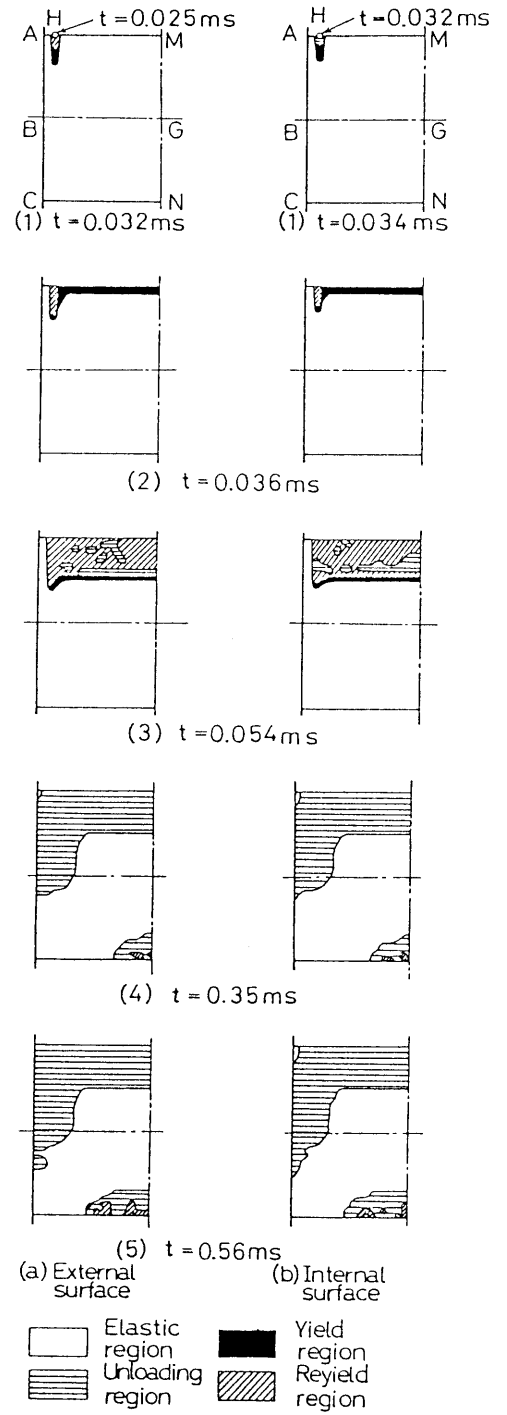


図 5.9 降伏領域の進展 ( $W_0 = 50 \text{ m/s}$ )

伏を繰り返す。内外面の降伏領域の違いはほとんど見られず、固定端ならびに  $\theta = 90^\circ$  の子午線上を除いて膜応力状態になっているところは、殻厚方向にほぼ同一の降伏域を示しているものと考えられる。

なお  $t = 0.6$  ms までの計算において、最大ひずみならびに最大ひずみ速度は点 A の内表面に生じ、共に  $\varepsilon_{\xi}$  成分で負の値を示し、各々 1.96% ( $t = 0.1$  ms)、290 1/s ( $t = 0.02$  ms) であった。

以上本計算例では、両端固定の 6061-T6 アルミ円筒殻の半周部分に、余弦波状の衝撃外圧が作用する問題を取り扱った。これらの解析結果から次の事柄が明らかになった。

- (1) 変形はまず荷重側が半径方向に変位し、続いて横側が突出し、最後に荷重の反対側が半径方向に変位する。
- (2) 内力は円筒殻の荷重側の固定端および横側を除いた部分で、ほぼ膜応力状態になっている。
- (3) 弾性解と弾/粘塑性解を比較すると、降伏域がある程度広がると両者の差は顕著になり、弾/粘塑性解では変動が緩慢になる。
- (4) 本解法では計算精度を上げるために、円周方向の差分点数を多くとる必要があり、計算機の必要容量が大きくなる。その反面計算時間は、準静的応答問題の解法で示したフーリエ級数展開の方法の約1/3程度に短縮できる。また非線形項を含む基礎式も計算可能で、利点大きい。

使用した計算機は FACOM 230-75 で、本計算例の計算時間はおよそ20分である。

なお本例題では殻の境界が固定であるため、境界条件には変位成分を用いるだけでよいが、他の境界条件では内力成分も考慮に入れる必要がある。この際、境界で粘塑性ひずみが大きくなると解の発散が見られ、この点に関しては検討が必要である。

## 第6章 一般形状の薄肉殻の動的応答 [97,98]

殻構造物に衝撃荷重が作用する場合の動的応答問題に関しては、これまで円筒殻や球殻など単純な形状のものに限らず、複雑な一般の軸対称殻の問題についても解析がなされてきた [18-28,77,78,82-86]。しかしながらより一般的な非軸対称殻については、これまであまり解析されていないようである。

本章では、第5章の回転対称殻に対する解法を発展させて、一般の任意形状を有する薄肉殻に動的荷重が作用する場合を取り上げ、その弾/粘塑性応答問題の数値解法を示す。

前章と同じく殻の運動方程式には、Sanders, Jr. [87] の殻の非線形理論式に慣性項を加えたものを用い、またひずみ-変位式には膜ひずみに殻の回転の項を考慮する。構成関係には塑性領域において粘性を考慮した Perzyna [53] の理論に基づく Fyfe の構成式 [54] を用いる。数値解法には差分法を適用する。

数値例として、両端固定のアルミ楕円筒殻の半周部に衝撃外圧が作用する問題を解析し、内力および変位の時間的変化の様子を明らかにする。

### 6.1 一般形状の薄肉殻の基礎関係式

図6.1に示すように、殻の中央面の形を次の式で与える。

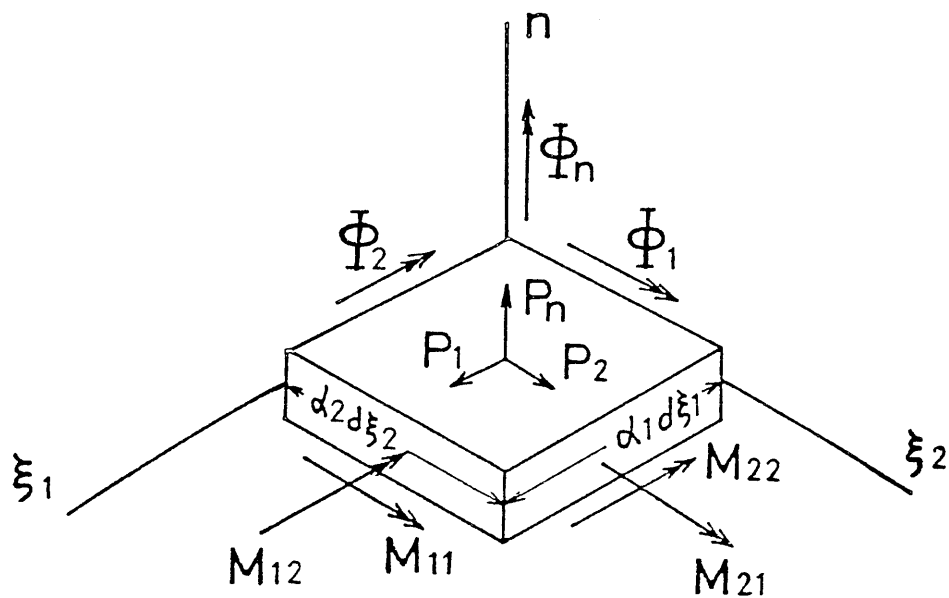
$$x^i = x^i(\xi_\alpha) \quad (i=1,2,3; \quad \alpha=1,2) \quad (6.1)$$

ここに、 $x^i$ は平行座標、 $\xi_\alpha$ は中央面の曲線座標である。 $\xi_\alpha$ が直交曲線座標を形成するとき、線素  $ds$  はラーメのパラメータ  $\alpha_1, \alpha_2$  を用いて次式のように表される。

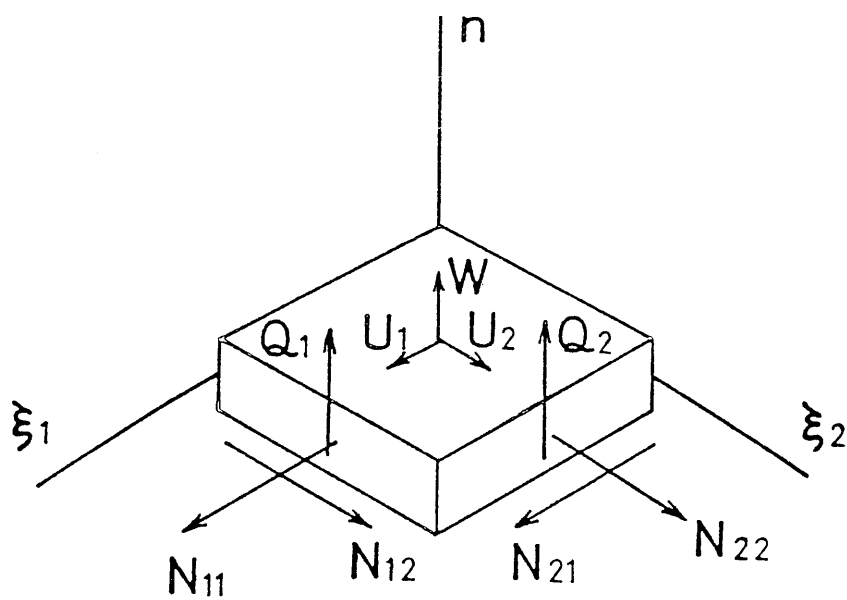
$$ds^2 = \alpha_1^2 d\xi_1^2 + \alpha_2^2 d\xi_2^2 \quad (6.2)$$

Sanders, Jr. の薄肉殻の非線形理論 [87] による平衡方程式に慣性項を加え、それらの式から横せん断力  $Q_1, Q_2$  を消去すると、運動方程式は次のようになる。ただし回転慣性の項は省略する。

$$\left. \begin{aligned} & (\alpha_2 N_{11})_{,1} + (\alpha_1 N_{12})_{,2} + \alpha_{1,2} N_{12} - \alpha_{2,1} N_{22} + R_1^{-1} [(\alpha_2 M_{11})_{,1} + (\alpha_1 M_{12})_{,2} \\ & + \alpha_{1,2} M_{12} - \alpha_{2,1} M_{22}] + (\alpha_1/2) [(R_1^{-1} - R_2^{-1}) M_{12}]_{,2} - \alpha_1 \alpha_2 R_1^{-1} (\bar{\phi}_1 N_{11} + \bar{\phi}_2 N_{12}) \\ & - (\alpha_1/2) [\bar{\phi}_2 (N_{11} + N_{22})]_{,2} + \alpha_1 \alpha_2 (P_1 - \rho_0 h \partial^2 U_1 / \partial t^2) = 0 \\ & [(1/\alpha_1) \{(\alpha_2 M_{11})_{,1} + (\alpha_1 M_{12})_{,2} + \alpha_{1,2} M_{12} - \alpha_{2,1} M_{22}\}]_{,1} + [(1/\alpha_2) \{(\alpha_1 M_{22})_{,2} \\ & + (\alpha_2 M_{12})_{,1} + \alpha_{2,1} M_{12} - \alpha_{1,2} M_{11}\}]_{,2} - \alpha_1 \alpha_2 (R_1^{-1} N_{11} + R_2^{-1} N_{22}) - (\alpha_2 \bar{\phi}_1 N_{11} + \alpha_2 \bar{\phi}_2 N_{12})_{,1} \\ & - (\alpha_1 \bar{\phi}_1 N_{12} + \alpha_1 \bar{\phi}_2 N_{22})_{,2} + \alpha_1 \alpha_2 (P_2 - \rho_0 h \partial^2 W / \partial t^2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$



(a) 合モーメント，回転と荷重



(b) 変位と合応力

図 6.1 座標と諸記号

他の一つの式は第1式の添字1、2を入れ換えることによって得られる。ここに、 $(\ )_{,1} = \partial(\ )/\partial \xi_1$ 、 $(\ )_{,2} = \partial(\ )/\partial \xi_2$  である。 $N_{11}$ 、 $N_{22}$ 、 $N_{12}$  および  $M_{11}$ 、 $M_{22}$ 、 $M_{12}$  は図6.1に示すように、殻の単位長さ当りの合応力および合モーメントであり、 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_n$  は殻の単位面積当りの分布荷重である。 $R_1$ 、 $R_2$  は殻の中央面の  $\xi_1$ 、 $\xi_2$  方向の曲率半径である。非線形項に含まれる  $\Phi_1$ 、 $\Phi_2$ 、 $\Phi_n$  は殻の中央面の回転を示し、中央面の変位  $U_1$ 、 $U_2$ 、 $W$  と次の関係で結ばれている [87]。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= -\alpha_1^{-1} W_{,1} + R_1^{-1} U_1, & \Phi_2 &= -\alpha_2^{-1} W_{,2} + R_2^{-1} U_2 \\ \Phi_n &= 1/2(\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [(\alpha_2 U_2)_{,1} - (\alpha_1 U_1)_{,2}] \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

次にやや変形が大きい場合の中央面のひずみ  $\varepsilon_{11m}$ 、 $\varepsilon_{22m}$ 、 $\varepsilon_{12m}$  を中央面の変位と回転で表すと [87]、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11m} &= (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 U_{1,1} + \alpha_{1,2} U_2 + \alpha_1 \alpha_2 R_1^{-1} W + 1/2 \alpha_1 \alpha_2 \bar{\Phi}_1^2 + 1/2 \alpha_1 \alpha_2 \Phi_n^2] \\ \varepsilon_{22m} &= (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_1 U_{2,2} + \alpha_{2,1} U_1 + \alpha_1 \alpha_2 R_2^{-1} W + 1/2 \alpha_1 \alpha_2 \bar{\Phi}_2^2 + 1/2 \alpha_1 \alpha_2 \Phi_n^2] \\ \varepsilon_{12m} &= 1/2(\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 U_{2,1} + \alpha_1 U_{1,2} - \alpha_{1,2} U_1 - \alpha_{2,1} U_2 + \alpha_1 \alpha_2 \bar{\Phi}_1 \bar{\Phi}_2] \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

ここに  $\varepsilon_{12m}$  は工学上のせん断ひずみの 1/2 である。また曲率の変化量  $\kappa_{11}$ 、 $\kappa_{22}$ 、 $\kappa_{12}$  と回転との関係は次のようになる [87]。

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{11} &= (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 \bar{\Phi}_{1,1} + \alpha_{1,2} \bar{\Phi}_2], & \kappa_{22} &= (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_1 \bar{\Phi}_{2,2} + \alpha_{2,1} \bar{\Phi}_1] \\ \kappa_{12} &= 1/2(\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [\alpha_2 \bar{\Phi}_{2,1} + \alpha_1 \bar{\Phi}_{1,2} - \alpha_{1,2} \bar{\Phi}_1 - \alpha_{2,1} \bar{\Phi}_2 + \alpha_1 \alpha_2 (R_2^{-1} - R_1^{-1}) \Phi_n] \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Kirchhoff の仮説を用い、 $\xi/R_1$ 、 $\xi/R_2$  は 1 に比較して十分小さいものとする、中央面から  $z$  の距離にある点のひずみ  $\varepsilon_{11}$ 、 $\varepsilon_{22}$ 、 $\varepsilon_{12}$  は次のように表される。

$$\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}^T = \{\varepsilon_{11m}, \varepsilon_{22m}, \varepsilon_{12m}\}^T + z \{\kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}\}^T \quad (6.7)$$

構成関係には Perzyna [53] の理論に基づく Fyfe の構成式 [54] [式(5.6)~(5.9)] を用いる。殻理論で通常仮定される平面応力状態において、Fyfe の式は式(5.6)、(5.7) および(5.9)より次のようになる。

$$\{\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{12}\}^T = [D] \left\{ \{\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{12}\}^T - \{\dot{\varepsilon}_{11}^{vp}, \dot{\varepsilon}_{22}^{vp}, \dot{\varepsilon}_{12}^{vp}\}^T \right\} \quad (6.8)$$

ただし、

$$\{\dot{\varepsilon}_{11}^{vp}, \dot{\varepsilon}_{22}^{vp}, \dot{\varepsilon}_{12}^{vp}\}^T = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_0 < \Psi \left( \frac{\bar{\sigma} - \sigma^*}{\sigma_v} \right) > \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T \quad (6.9)$$

殻の単位長さ当りの合応力、合モーメントは次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \{N_{11}, N_{22}, N_{12}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\} d\xi \\ \{M_{11}, M_{22}, M_{12}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{11}\xi, \sigma_{22}\xi, \sigma_{12}\xi\} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

以上で 27個 の未知数  $N_{11}$ 、 $N_{22}$ 、 $N_{12}$ 、 $M_{11}$ 、 $M_{22}$ 、 $M_{12}$ 、 $U_1$ 、 $U_2$ 、 $W$ 、 $\varepsilon_{11}$ 、 $\varepsilon_{22}$ 、 $\varepsilon_{12}$ 、 $\varepsilon_{11m}$ 、 $\varepsilon_{22m}$ 、 $\varepsilon_{12m}$ 、 $\kappa_{11}$ 、 $\kappa_{22}$ 、 $\kappa_{12}$ 、 $\Phi_1$ 、 $\Phi_2$ 、 $\Phi_n$ 、 $\sigma_{11}$ 、 $\sigma_{22}$ 、 $\sigma_{12}$ 、 $\varepsilon_{11}^{up}$ 、 $\varepsilon_{22}^{up}$ 、 $\varepsilon_{12}^{up}$  に対して式(6.3)~(6.10) の27個の式が用意されたことになる。

以上の基礎式において、 $\alpha_1 = a$ 、 $\alpha_2 = r$  および  $\xi_1 = \xi$ 、 $\xi_2 = \theta$  とおくと、前章で導いた薄肉回転対称殻に対する基礎式となる。

## 6.2 数値解法

上に得られた27個の式を適当な境界条件のもとで解けば解が得られることになるが、これを解析的に解くことは困難であるから、差分法によって数値的に解を求める。

図6.2に示すように、殻の  $\xi_1$  および  $\xi_2$  の方向に各々等間隔に  $M_1$  および  $M_2$  個の差分点をとると、 $\xi_1$ 、 $\xi_2$  の増分  $\Delta\xi_1$ 、 $\Delta\xi_2$  はそれぞれ次のようになる。

$$\Delta\xi_1 = \frac{\bar{s}_1}{\alpha_1(M_1-1)}, \quad \Delta\xi_2 = \frac{\bar{s}_2}{\alpha_2(M_2-1)} \quad (6.11)$$

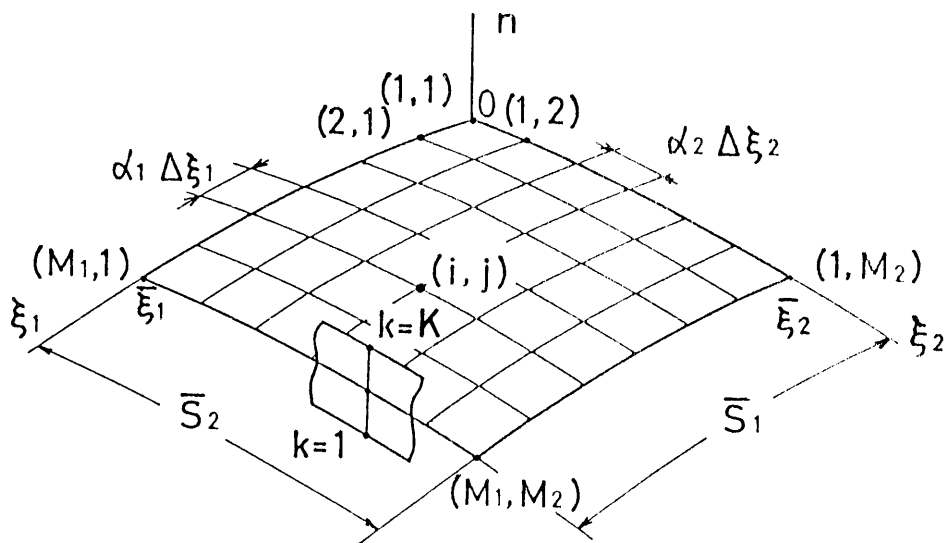


図 6.2 格子点  $(i, j, k)$



ここに  $\bar{s}_1$ 、 $\bar{s}_2$  は殻の  $\xi_1$ 、 $\xi_2$  方向の長さである。

また式(6.10)を用いて応力から合応力および合モーメントを求める際、殻厚方向に等間隔に  $K$  個の点を取ってシンプソンの 1/3法則を使用する。

時間および空間に対する差分公式、ならびにそれを用いた計算手順は第5. 2節と全く同様である。ここで、点  $(i, j)$  における変位は本章では次のようになる。

$$\begin{aligned}
 U_1(t + \Delta t) &= -U_1(t - \Delta t) + 2U_1(t) + \{ \Delta t^2 / (\alpha_1 \alpha_2 \rho_0 h) \} [ a_1 N_{11}(t) \\
 &\quad + a_2 N_{11}(t)_{.1} + a_3 N_{11}(t)_{.2} + a_4 N_{22}(t) + a_5 N_{22}(t)_{.2} \\
 &\quad + a_6 N_{12}(t) + a_7 N_{12}(t)_{.2} + a_8 M_{11}(t) + a_9 M_{11}(t)_{.1} + a_{10} M_{22}(t) \\
 &\quad + a_{11} M_{12}(t) + a_{12} M_{12}(t)_{.2} + a_{13} P_1(t) ] \\
 U_2(t + \Delta t) &= -U_2(t - \Delta t) + 2U_2(t) + \{ \Delta t^2 / (\alpha_1 \alpha_2 \rho_0 h) \} [ b_1 N_{11}(t) \\
 &\quad + b_2 N_{11}(t)_{.1} + b_3 N_{22}(t) + b_4 N_{22}(t)_{.1} + b_5 N_{22}(t)_{.2} \\
 &\quad + b_6 N_{21}(t) + b_7 N_{21}(t)_{.1} + b_8 M_{11}(t) + b_9 M_{22}(t) + b_{10} M_{22}(t)_{.2} \\
 &\quad + b_{11} M_{21}(t) + b_{12} M_{21}(t)_{.1} + b_{13} P_2(t) ] \\
 W(t + \Delta t) &= -W(t - \Delta t) + 2W(t) + \{ \Delta t^2 / (\alpha_1 \alpha_2 \rho_0 h) \} [ c_1 N_{11}(t) \\
 &\quad + c_2 N_{11}(t)_{.1} + c_3 N_{22}(t) + c_4 N_{22}(t)_{.2} + c_5 N_{12}(t) + c_6 N_{12}(t)_{.1} \\
 &\quad + c_7 N_{12}(t)_{.2} + c_8 M_{11}(t)_{.11} + c_9 M_{22}(t)_{.22} + c_{10} M_{12}(t)_{.12} \\
 &\quad + c_{11} P_n(t) ]
 \end{aligned}
 \tag{6.12}$$

ここに係数  $a_i(i, j) \sim c_i(i, j)$  は形状パラメータと時刻  $T = t$  における回転とからなる〔付録6.1参照〕。

また式(6.4)~(6.7)から、殻の任意の点  $(i, j, k)$  のひずみ増分  $\delta \varepsilon_{ij}$  は、つぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 \delta \varepsilon_{11}(i, j, k, t) &= (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [ \alpha_2 \delta U_1(i, j, t)_{.1} \\
 &\quad + \alpha_{1.2} \delta U_2(i, j, t) + \alpha_1 \alpha_2 R_1^{-1} \delta W(i, j, t) ] \\
 &\quad + \Phi_1(i, j, t) \delta \Phi_1(i, j, t) + \delta \Phi_1^2(i, j, t) / 2 \\
 &\quad + \Phi_n(i, j, t) \delta \Phi_n(i, j, t) + \delta \Phi_n^2(i, j, t) / 2 \\
 &\quad + h \left( \frac{k-1}{L-1} - \frac{1}{2} \right) (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} [ \alpha_2 \delta \Phi_1(i, j, t)_{.1} + \alpha_{1.2} \delta \Phi_2(i, j, t) ]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \varepsilon_{22}(i, j, k, t) = & (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} \{ \alpha_{2.1} \delta U_1(i, j, t) \\
& + \alpha_1 \delta U_2(i, j, t)_{.2} + \alpha_1 \alpha_2 R_2^{-1} \delta W(i, j, t) \} \\
& + \Phi_2(i, j, t) \delta \Phi_2(i, j, t) + \delta \Phi_2^2(i, j, t) / 2 \\
& + \Phi_n(i, j, t) \delta \Phi_n(i, j, t) + \delta \Phi_n^2(i, j, t) / 2 \\
& + h \left( \frac{k-1}{L-1} - \frac{1}{2} \right) (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} \{ \alpha_1 \delta \Phi_2(i, j, t)_{.2} + \alpha_{2.1} \delta \Phi_1(i, j, t) \} \\
\delta \varepsilon_{12}(i, j, k, t) = & \frac{1}{2} (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} \{ -\alpha_{1.2} \delta U_1(i, j, t) \\
& + \alpha_1 \delta U_1(i, j, t)_{.2} - \alpha_{2.1} \delta U_2(i, j, t) + \alpha_2 \delta U_2(i, j, t)_{.1} \} \\
& + \frac{1}{2} \Phi_1(i, j, t) \delta \Phi_2(i, j, t) + \frac{1}{2} \delta \Phi_1(i, j, t) \Phi_2(i, j, t) \\
& + \frac{1}{2} \delta \Phi_1(i, j, t) \delta \Phi_2(i, j, t) \\
& + h \left( \frac{k-1}{L-1} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} (\alpha_1 \alpha_2)^{-1} \{ \alpha_2 \delta \Phi_2(i, j, t)_{.1} \\
& + \alpha_1 \delta \Phi_1(i, j, t)_{.2} - \alpha_{1.2} \delta \Phi_1(i, j, t) - \alpha_{2.1} \delta \Phi_2(i, j, t) \\
& + \alpha_1 \alpha_2 (R_2^{-1} - R_1^{-1}) \delta \Phi_n(i, j, t) \}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

式(5.18)、(5.19)の初期変位は本章では次式のようになる。

衝撃荷重としてインパルス荷重を受ける場合：

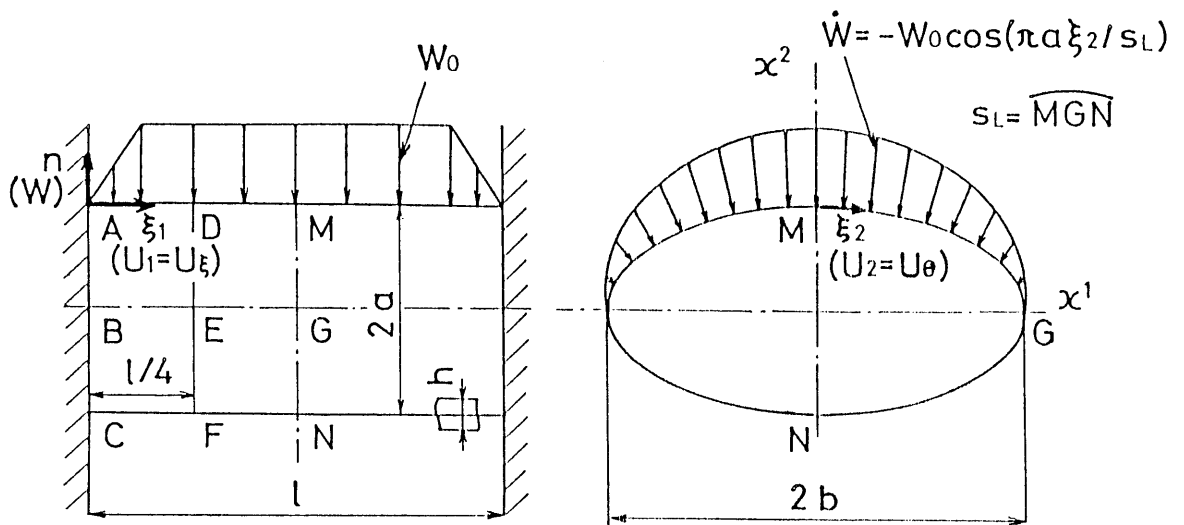
$$\left. \begin{aligned}
U_1 = \delta U_1 = \frac{I_1(\xi_1, \xi_2)}{\rho_0 h} \Delta t_0 = \dot{U}_1 \Delta t_0, \quad U_2 = \delta U_2 = \frac{I_2(\xi_1, \xi_2)}{\rho_0 h} \Delta t_0 = \dot{U}_2 \Delta t_0 \\
W = \delta W = \frac{I(\xi_1, \xi_2)}{\rho_0 h} \Delta t_0 = \dot{W} \Delta t_0
\end{aligned} \right\} \tag{6.14}$$

ここで  $I_1(\xi_1, \xi_2)$ 、 $I_2(\xi_1, \xi_2)$ 、 $I(\xi_1, \xi_2)$  は単位面積当りの力積である。また衝撃荷重として一定時間持続する表面荷重を受ける場合：

$$U_1 = \delta U_1 = \frac{P_1 \Delta t_0^2}{2 \rho_0 h}, \quad U_2 = \delta U_2 = \frac{P_2 \Delta t_0^2}{2 \rho_0 h}, \quad W = \delta W = \frac{P_n \Delta t_0^2}{2 \rho_0 h} \tag{6.15}$$

### 6.3 計算例

一般の薄肉殻の一つとして、弾／粘塑性動的応答問題の解析例でまだあまり取り扱われていない楕円筒殻を取り上げる。第5章の計算例と同じく、両端固定の 6061-T6 アルミ殻



$$a=200 \text{ mm} \quad b=400 \text{ mm} \quad l=800 \text{ mm} \quad h=3 \text{ mm}$$

図 6.3 楕円筒殻

の半周部分に、余弦波状の衝撃外圧が作用する場合（図6.3）について、内力および変形の時間的変化の様子を明らかにする。座標は、 $\xi_1$ を楕円筒の軸方向（ $\xi$ ）に、 $\xi_2$ を楕円筒の周方向（ $\theta$ ）にとる。

問題の対称性から、計算は 1/4形状（ACNM）についてのみ行えば十分である。ACNM部分の形状諸量は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = a, \quad \Delta \xi_1 = l/2a(M_1 - 1), \quad \Delta \xi_2 = S_L/a(M_2 - 1) \\ R_1 = \infty, \quad R_2 = a^2 b^2 \left[ \frac{(x^1)^2}{b^4} + \frac{(x^2)^2}{a^4} \right]^{3/2} \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

ここで  $S_L$  は楕円の全周の 1/2 である。

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \text{固定端 AC で} \quad U_\xi = U_\theta = W = \frac{\partial W}{\partial \xi_1} = 0 \\ \text{対称面 MN で} \quad U_\xi = \frac{\partial U_\theta}{\partial \xi_1} = \frac{\partial W}{\partial \xi_1} = 0 \\ \text{対称面 AMNC で} \quad U_\theta = \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi_2} = \frac{\partial W}{\partial \xi_2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

初期条件は

$$\left. \begin{aligned} t=0 \quad \text{で} \quad U_\xi = U_\theta = W = 0, \quad \dot{U}_\xi = \dot{U}_\theta = 0 \\ \dot{W} = \frac{I(\xi_1, \xi_2)}{\rho_0 h} = -\frac{I_0 \cos(\pi a \xi_2 / S_L)}{\rho_0 h} = -W_0 \cos(\pi a \xi_2 / S_L) \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

である。

計算には前章の式(5.23)と同じく、6061-T6 アルミの材料定数を用いる。計算は  $W_0 = 50 \text{ m/s}$  の衝撃荷重について行い、差分点数と殻厚方向の分割数は  $M_1 = 25$ 、 $M_2 = 37$ 、 $K = 17$  で時間増分  $\Delta t$  は  $1.0 \times 10^{-3} \text{ ms}$  である。これらの値は、計算機の容量および計算時間を考慮して、可能な範囲内で解の収束性因子 ( $M_1$ 、 $M_2$ 、 $\Delta t$ ) をいろいろ変えて計算を行い、最も変化の激しい成分の挙動が3%以下になったときの値である。

#### 6.4 計算結果と考察

本例題で取り上げた楕円筒殻は、第5章の円筒殻と比べて長径は直径に等しく、短径は円筒殻直径の1/2となっている他は、殻の長さ、殻厚、境界条件、材質、インパルス荷重の大きさならびに分布等すべて同一である。それ故楕円筒殻に生ずる変位および内力の時間的変化の様子を明かにすると同時に、円筒殻の結果との比較も試みた。

本計算はインパルス荷重を負荷してから1.2ms後まで行った。

図6.4は点M, G, Nの半径方向変位 $W$ 、ならびに点Gの円周方向変位 $U_\theta$ の時間的变化である。実線は弾/粘塑性解であり、破線は降伏を考えない弾性解である。点Mの $W$ が短径400 mm に対して最大で約20 mm と大きく、実際には座屈などの不安定な変形が生じる可能

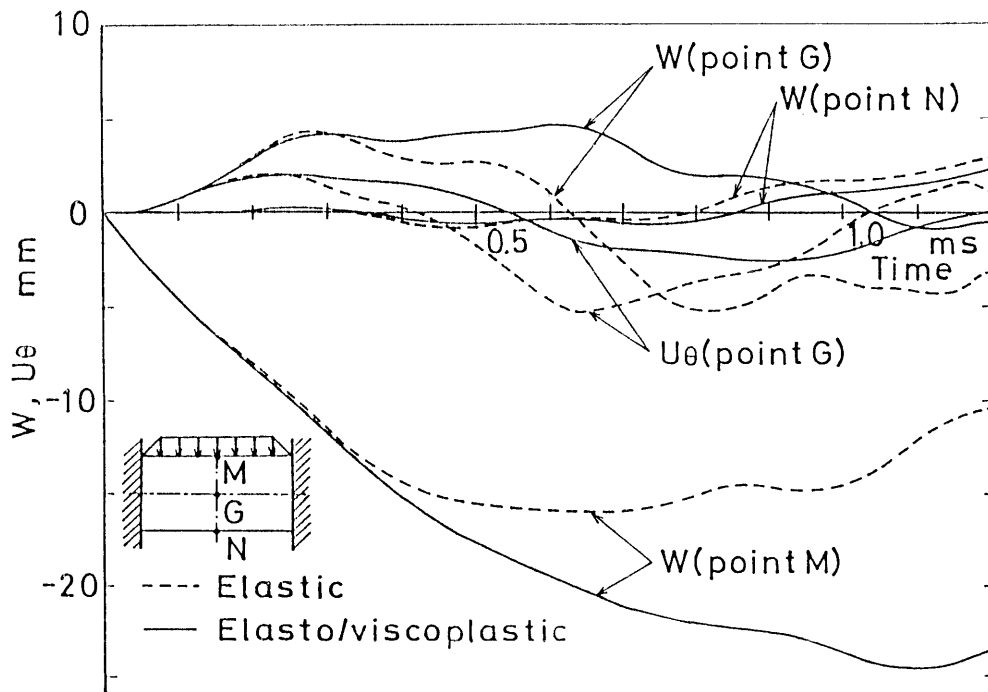


図 6.4 変位  $W$ 、 $U_\theta$  の時間的变化

性があるが、本解法では考慮に入れていない。点Gの $W$ 、 $U_\theta$ は円筒殻の点Gの場合とほぼ同じ振幅で変動しているが、点Nの $W$ は時刻 $t = 0.8$  ms まではわずかである。降伏域がある程度広がると弾性解との差は顕著になり、弾/粘塑性解では変動が緩慢になる。

時刻 $t = 0.1$ 、 $0.25$ 、 $0.5$ 、 $1.0$  ms の $W$ 、 $U_\theta$ の子午線方向分布、ならびに $U_\theta$ と $W$ を合成して得られる横断面の形状の時間的変化の様子を、各々図6.5、6.6に示す。図6.5より変位はAMに比べBGでは小さく、AMにおける $W$ は時刻 $t = 0.5$  ms までは固定端付近を除けば軸方向にほぼ一様である。図には示さなかったが、軸方向変位 $U_x$ は $W$ 、 $U_\theta$ に比べ非常に小さいので、図6.5はほぼ軸断面形状の時間的変化を示している。

図6.6は $U_\theta$ と $W$ を合成して得られる中央断面MGNの形状の時間的変化の様子を示す。図6.5より $W$ は境界部を除いて軸方向にほぼ一様であるから、断面形状も軸方向に比較的類

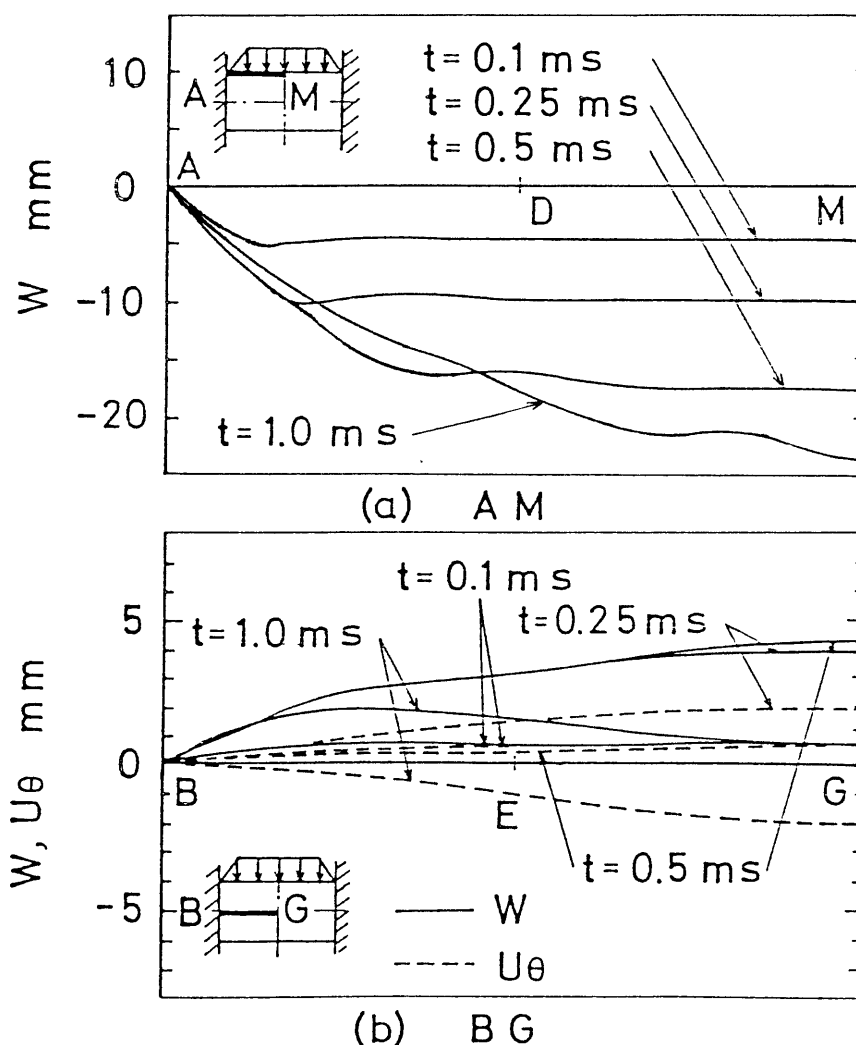


図 6.5 変位  $W$ 、 $U_\theta$  の軸方向分布の時間的変化

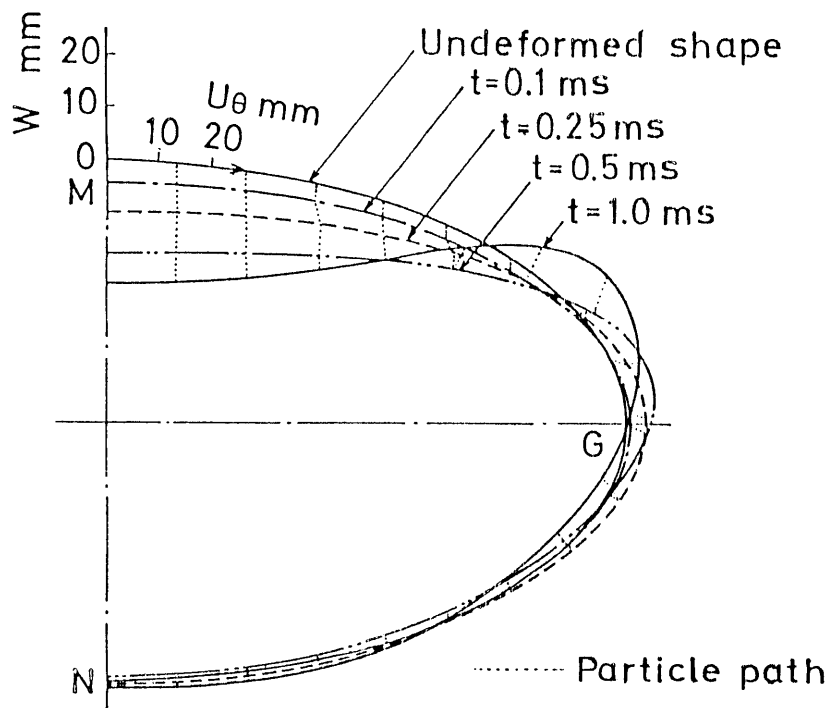
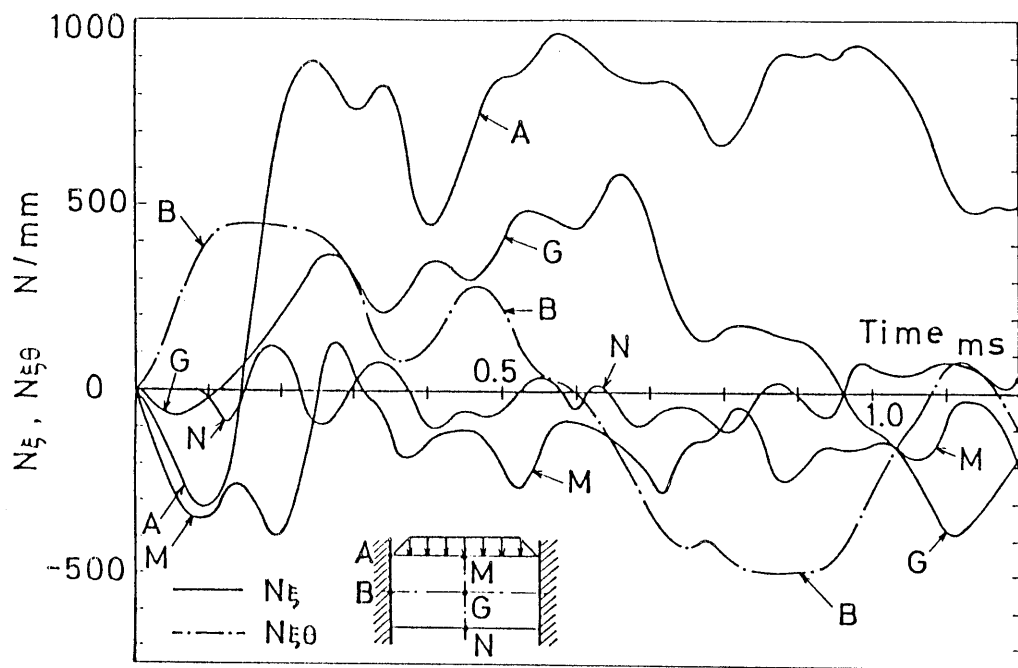


図 6.6 中央断面の時間的变化

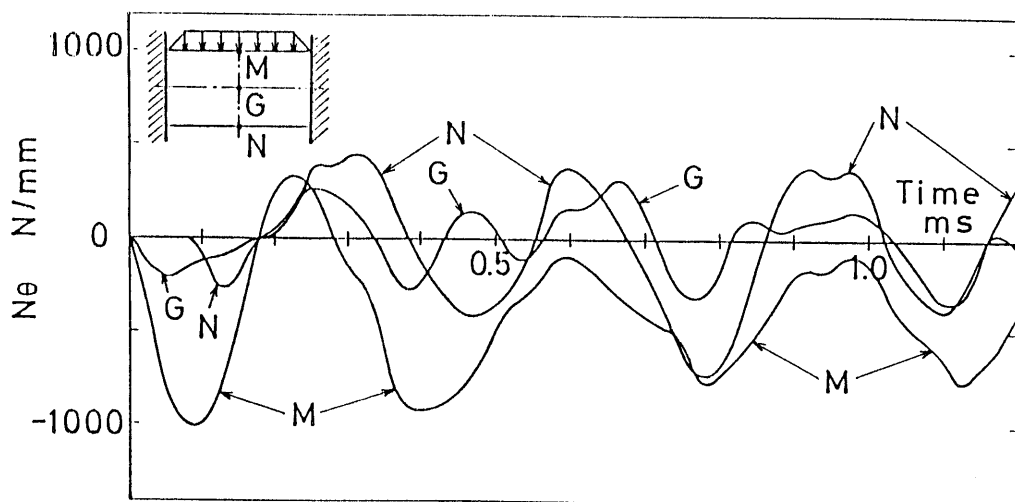
似していると思われる。時間の経過とともに、G点近傍のM点寄りの位置で大きく外側に突出してくる。点M付近は半径方向変位は大きくなるが、曲率の変化は比較的小さい。円筒殻の場合と異なって、衝撃荷重を直接受けないGN部分では変形量は小さく、衝撃荷重の影響はMG部分に限られることがわかる。図6.5と合わせ考えると楕円筒殻全体の形状変化の様子が大体把握できる。

図6.7(a)は点A、M、G、Nの $N_{\xi}$ ならびに点Bの $N_{\xi\theta}$ の時間的变化を、図6.7(b)は点M、G、Nの $N_{\theta}$ の変化を示す。中央断面MGNにおいて $N_{\xi}$ 、 $N_{\theta}$ とも立ち上がりは最初点Mに、続いて点Gに、さらに遅れて点Nに生ずる。 $N_{\xi}$ は点Aで大きな引張ひずみを、 $N_{\theta}$ は点M、Nで大きな圧縮ひずみを示し、 $t=0.6$  msまでは点Aの $N_{\xi}$ と点Mの $N_{\theta}$ が、 $t=0.6$  ms以降は3者そろってほぼ同位相、同周期で変動している。点Bの $N_{\xi\theta}$ はかなり大きな値で、かつ比較的長い周期を示している。

図6.8は点Aの $M_{\xi}$ 、 $M_{\theta}$ 、点Bの $M_{\xi\theta}$ ならびに点Gの $M_{\theta}$ の時間的变化を示したものである。点Aにおける $M_{\xi}$ 、 $M_{\theta}$ は $t=0.5$  msを過ぎると小さくなっている。また点Gにおける $M_{\theta}$ は時間に対して緩やかな変化をする。図6.7の面内力の時間的变化と共に、点Mの各内力成分、点Bの $M_{\xi\theta}$ 、点Gの $M_{\theta}$ の応答の最大値（絶対値）は円筒殻の場合とほぼ同じ



(a)  $N_{\xi}, N_{\xi\theta}$



(b)  $N_{\theta}$

図 6.7 合応力  $N_{\xi}, N_{\theta}, N_{\xi\theta}$  の時間的变化

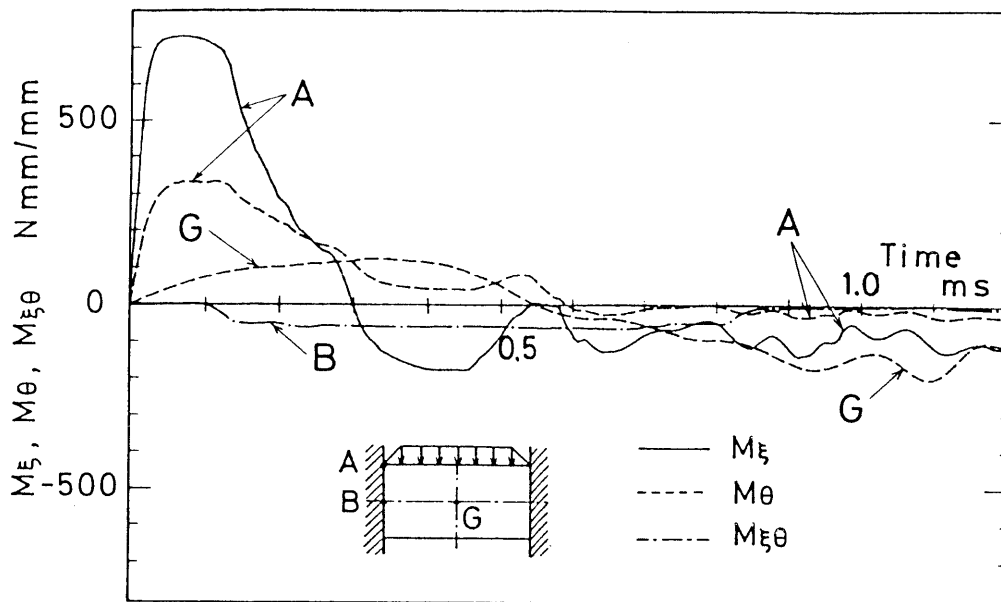


図 6.8 合モーメント  $M_\xi$ ,  $M_\theta$ ,  $M_{\xi\theta}$  の時間的变化

値を示す。

各内力成分の子午線方向分布、円周方向分布は図には示さなかったが、一般に各内力は CN 上よりも BG 上で、さらに BG 上よりも AM 上で大きく、また AM 上でも固定端付近で大きくなること、周方向には衝撃荷重を直接受ける上半分で大きく、反対側の下半分で小さくなっていること、さらに荷重の反対側の底部においては、合応力に比べ合モーメントは小さく、ほぼ膜応力状態になっていることがわかった。

図6.9に殻の内外面における降伏域の進展の様子を示す。図よりまず A 点近傍（点 A から 33mm）の外表面で降伏を起こし、続いて点 M に向かって急速に降伏域が伸び、次に固定端付近から周方向に広がることわかる。その後 0.55ms あたりで点 G のやや M 点寄りの位置に降伏域が発生し、次第に広がっていく。降伏した部分は短時間のうちに除荷域となり、降伏域のすぐ後を除荷域が追いかけることになる。荷重が作用していない部分では  $t = 1.0 \text{ ms}$  を過ぎても弾性域のままであり、図6.6の形状の変化と合わせて、衝撃エネルギーは楕円筒殻の荷重作用部分でかなり吸収されることがわかる。

なおひずみ速度の最大値は、応答初期の時刻  $t = 0.02 \text{ ms}$  に点 A の内表面で  $\dot{\epsilon}_\xi = 280 \text{ 1/s}$  を示し、また最大ひずみは点 A の外表面で  $t = 0.58 \text{ ms}$  時に生じ、 $\epsilon_\xi = 4.3\%$  の引張りであった。最大ひずみは円筒殻の場合の約 2.3 倍となり、変形量は大きくなっている。



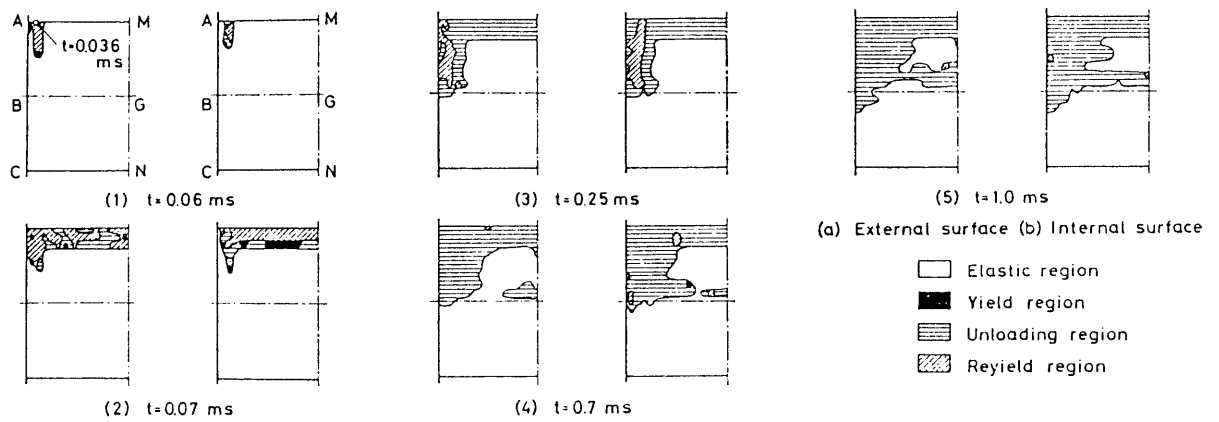


図 6.9 降伏領域の進展

以上数値例として、両端固定のアルミ楕円筒殻の半周部に衝撃外圧が作用する問題を取り扱い、内力および変位の時間的変化の様子を解析した。その結果、

- (1) 変形は荷重側において大きく、衝撃荷重の影響はほぼ荷重側（上半分）の部分に限られ、第5章の例題で取り扱った円筒殻の結果と大きく異なること、
- (2) 内力成分も一般に荷重側が大きく、固定端付近で特に大きくなること、
- (3) 荷重の反対側の底部においては、ほぼ膜応力状態になっていることがわかった。

使用した計算機は FACOM M-200 で本計算例の計算時間はおよそ20分である。

## 第7章 薄肉回転対称殻の動的応答に対する弾／粘塑性

### Overlay モデルの適用 [99]

殻に高応力の衝撃荷重が作用し、生じた降伏領域が応力反転後に再降伏する場合には、塑性領域で粘性を考慮に入れるだけでなく、バウシinger効果を無視してはならない。第5, 6章で示した解法はすべて等方硬化を仮定しているため、降伏後変形とともにひずみ硬化する材料に対しては、応力が反転する場合には十分正確な解とは言えない。本章では、バウシinger効果と塑性域でのひずみ速度依存性が表現可能なモデルを考案し、薄肉回転対称殻の弾／粘塑性動的応答問題への適用を試みる。

バウシinger効果を考慮した応力-ひずみ関係式については、Prager [111] による移動硬化モデルおよびこれを修正したZiegler [112] の硬化モデルをはじめ、弾塑性挙動を取り扱った多くのモデルが考案され、構造物の塑性解析に適用されている。これらのモデルの中で、物体をいくつかの並列の部分要素からなると考え、物体の任意の点の応力を各要素の内力の和として表す多層モデルが Zienkiewiczら [113] によって提案された。このモデルは構造が理解し易いこと、モデルに含まれる材料パラメータ値が比較的定めやすいこと、および数値解法への導入が容易であること等の利点を持っている。またこれと同様なモデルが Besseling [59] により、塑性変形に加えてクリープ変形およびクリープ変形と塑性変形の連成を表現できるように一般化された。

本章では、Zienkiewicz および Besseling のモデルを粘塑性問題に発展させて、弾／粘塑性Overlayモデル(多層モデル)を用いて、ひずみ速度依存性とバウシinger効果を表現することを試みる。すなわち Overlayモデル [59,113] の各層の塑性領域において、構成関係に Perzyna の式 [53] を用い、全体としてバウシinger効果と塑性領域における粘性の影響を導入する。後になって、鈴木ら [60] によっても、Besseling のモデルを修正した、塑性とクリープの相互作用が表現可能なモデルが提案されている。殻の運動方程式には、第2章で述べた薄肉回転対称殻の静的応答問題の解法に慣性項を加え、構成関係に弾／粘塑性Overlayモデルを適用する。数値解法には差分法を適用する。

数値例として、頂点に開口部を有する球殻、円環殻および円筒殻からなるアルミ容器に、時間に対して半正弦波状の内圧が作用する問題を取り上げ、内力および変位の時間的変化の様子を解析し、等方硬化による結果と比較する。

## 7. 1 薄肉回転対称殻の基礎関係式

Sanders, Jr. の薄肉殻理論 [32] による平衡方程式に慣性項を加え、せん断力  $Q_{\xi}$ 、 $Q_{\theta}$  を消去すると、増分形式で表した運動方程式は次のようになる。ただし回転慣性の項は省略する。

$$\left. \begin{aligned}
 & a \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta N_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{N}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta N_{\theta} \right] + \omega_{\xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta M_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta M_{\theta} \right] \\
 & \quad + \frac{1}{2} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) + \rho a^2 \left[ \Delta P_{\xi} - \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta U_{\xi}) \right] = 0 \\
 & a \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta N_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta \bar{N}_{\xi\theta}) + \rho' \Delta \bar{N}_{\xi\theta} \right] + \omega_{\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta M_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta \bar{M}_{\xi\theta}) + \rho' \Delta \bar{M}_{\xi\theta} \right] \\
 & \quad + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial \xi} [(\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) \Delta \bar{M}_{\xi\theta}] + \rho a^2 \left[ \Delta P_{\theta} - \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta U_{\theta}) \right] = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta M_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta \bar{M}_{\xi\theta}) - \rho' \Delta M_{\theta} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta M_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \Delta \bar{M}_{\xi\theta}) + \rho' \Delta \bar{M}_{\xi\theta} \right] \\
 & \quad - a \rho (\omega_{\xi} \Delta N_{\xi} + \omega_{\theta} \Delta N_{\theta}) + \rho a^2 \left[ \Delta P_{\xi} - \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta W) \right] = 0
 \end{aligned} \right\} (7.1)$$

ここに  $\Delta$  は増分を表す。図2.1に殻の形状および座標を、図2.2に内力と変位の記号を示す。その他の基礎式として、中央面のひずみと変位の関係式 (式(2.5))、曲率の変化量と変位の関係式 (式(2.6))、中央面の回転と変位の関係式 (式(2.7))、Kirchhoff の仮説に基づくひずみの式 (式(2.8)) を用いる。

次に、塑性領域においてひずみ速度依存性とパウシンガー効果を表すために、図7.1に示すように Besseling [59]、Zienkiewiczら [113] によって提案された、Overlay モデル (多層モデル) の各層の塑性領域に、Perzyna の式 [53] を適用する。このモデルをここでは『弾/粘塑性Overlayモデル』と呼ぶ。本モデルは降伏曲面の移動のみで、膨張 (又は収縮) を考慮していない。平面応力状態の場合には、各層の構成関係式は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{\xi} \\ \Delta \varepsilon_{\theta} \\ \Delta \varepsilon_{\xi\theta} \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_{\xi k} \\ \Delta \sigma_{\theta k} \\ \Delta \sigma_{\xi\theta k} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{\xi k}^{VP} \\ \Delta \varepsilon_{\theta k}^{VP} \\ \Delta \varepsilon_{\xi\theta k}^{VP} \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{\xi k}^{VP}(t) \\ \Delta \varepsilon_{\theta k}^{VP}(t) \\ \Delta \varepsilon_{\xi\theta k}^{VP}(t) \end{Bmatrix} = \gamma_k \langle \Psi(f_k) \rangle \frac{1}{\bar{\sigma}_k(t)} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{\xi k}(t) \\ \sigma_{\theta k}(t) \\ \sigma_{\xi\theta k}(t) \end{Bmatrix} \Delta t \quad (7.3)$$

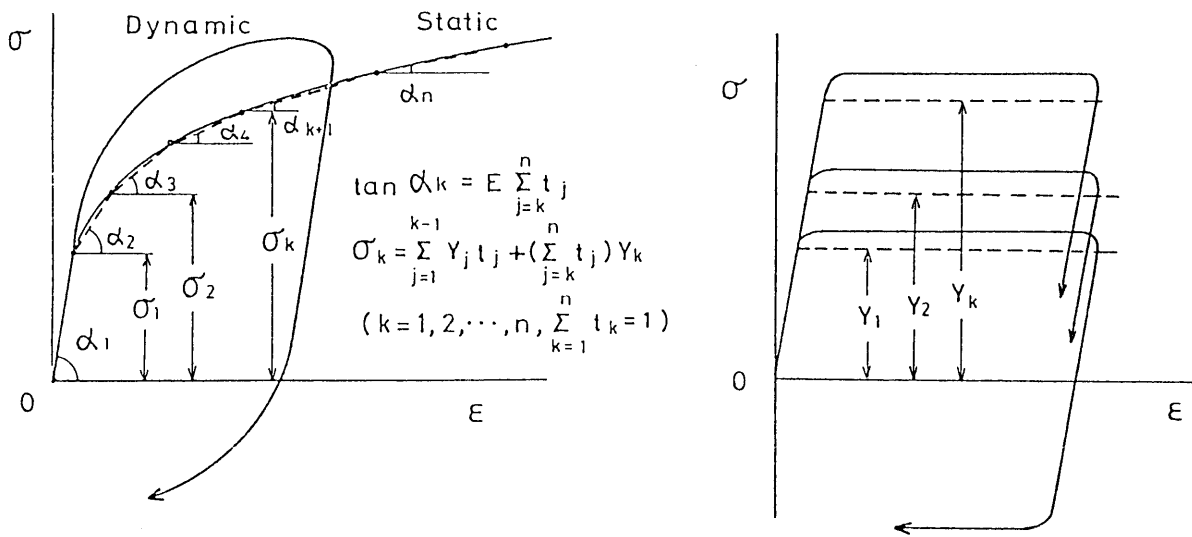


図 7.1 弾/粘塑性 Overlayモデル

$$f_k = \frac{\bar{\sigma}_k - \sigma_{Yk}}{\sigma_{Yk}} \quad (7.4)$$

$$\bar{\sigma}_k = (\sigma_{\xi k}^2 + \sigma_{\theta k}^2 - \sigma_{\xi k} \sigma_{\theta k} + 3\sigma_{\xi\theta k}^2)^{1/2} \quad (7.5)$$

ここで粘性係数  $\gamma_k$ 、各応力成分  $\sigma_k$  および粘塑性ひずみ成分  $\varepsilon_k^{VP}$  の添字  $k$  は  $k$  番目の層を意味する。また  $\langle \Psi(f_k) \rangle$  は次の定義によるものである。

$$\left. \begin{aligned} \langle \Psi(f_k) \rangle &= 0, & f_k &\leq 0 \\ &= \Psi(f_k), & f_k &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

ここに  $f_k = 0$  はミーゼスの降伏曲面を表す。また  $\bar{\sigma}_k$  は相当応力、 $\sigma_{Yk}$  はひずみ速度が十分小さい場合の各層の降伏応力である。

式(2.8)を(7.2)に代入し、各層の応力について解くと、次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_{\xi k} \\ \Delta \sigma_{\theta k} \\ \Delta \sigma_{\xi\theta k} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{\xi m} \\ \Delta \varepsilon_{\theta m} \\ \Delta \varepsilon_{\xi\theta m} \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \Delta \kappa_{\xi} \\ \Delta \kappa_{\theta} \\ \Delta \kappa_{\xi\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_{\xi k}^{VP} \\ \Delta \sigma_{\theta k}^{VP} \\ \Delta \sigma_{\xi\theta k}^{VP} \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

$$\{ \Delta \sigma_{\xi k}^{VP}, \Delta \sigma_{\theta k}^{VP}, \Delta \sigma_{\xi\theta k}^{VP} \}^T = [D] \{ \Delta \varepsilon_{\xi k}^{VP}, \Delta \varepsilon_{\theta k}^{VP}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta k}^{VP} \}^T \quad (7.8)$$

任意の点の応力および粘塑性によるみかけの応力は、モデルの各層の内力の和となる。

$$\left\{ \Delta \sigma_{\xi}, \Delta \sigma_{\theta}, \Delta \sigma_{\xi\theta} \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \Delta \sigma_{\xi k}, \Delta \sigma_{\theta k}, \Delta \sigma_{\xi\theta k} \right\} t_k$$

$$\left. \begin{aligned} \{ \Delta \sigma_{\xi}^{VP}, \Delta \sigma_{\theta}^{VP}, \Delta \sigma_{\xi\theta}^{VP} \} &= \sum_{k=1}^n \{ \Delta \sigma_{\xi k}^{VP}, \Delta \sigma_{\theta k}^{VP}, \Delta \sigma_{\xi\theta k}^{VP} \} t_k \\ \sum_{k=1}^n t_k &= 1 \end{aligned} \right\} (7.9)$$

殻の単位長さ当りの合応力および合モーメント、ならびに粘塑性によるみかけの合応力および合モーメントは、式(2.20)、(2.21)で与えられる。

以上で、38個の未知数  $\Delta N_{\xi}$ 、 $\Delta N_{\theta}$ 、 $\Delta \bar{N}_{\xi\theta}$ 、 $\Delta M_{\xi}$ 、 $\Delta M_{\theta}$ 、 $\Delta \bar{M}_{\xi\theta}$ 、 $\Delta U_{\xi}$ 、 $\Delta U_{\theta}$ 、 $\Delta W$ 、 $\Delta \varepsilon_{\xi m}$ 、 $\Delta \varepsilon_{\theta m}$ 、 $\Delta \varepsilon_{\xi\theta m}$ 、 $\Delta \kappa_{\xi}$ 、 $\Delta \kappa_{\theta}$ 、 $\Delta \kappa_{\xi\theta}$ 、 $\Delta \Phi_{\xi}$ 、 $\Delta \Phi_{\theta}$ 、 $\Delta \sigma_{\xi}$ 、 $\Delta \sigma_{\theta}$ 、 $\Delta \sigma_{\xi\theta}$ 、 $\Delta \sigma_{\xi k}$ 、 $\Delta \sigma_{\theta k}$ 、 $\Delta \sigma_{\xi\theta k}$ 、 $\Delta \sigma_{\xi}^{VP}$ 、 $\Delta \sigma_{\theta}^{VP}$ 、 $\Delta \sigma_{\xi\theta}^{VP}$ 、 $\Delta \sigma_{\xi k}^{VP}$ 、 $\Delta \sigma_{\theta k}^{VP}$ 、 $\Delta \sigma_{\xi\theta k}^{VP}$ 、 $\Delta \varepsilon_{\xi k}^{VP}$ 、 $\Delta \varepsilon_{\theta k}^{VP}$ 、 $\Delta \varepsilon_{\xi\theta k}^{VP}$ 、 $\Delta N_{\xi}^{VP}$ 、 $\Delta N_{\theta}^{VP}$ 、 $\Delta \bar{N}_{\xi\theta}^{VP}$ 、 $\Delta M_{\xi}^{VP}$ 、 $\Delta M_{\theta}^{VP}$ 、 $\Delta \bar{M}_{\xi\theta}^{VP}$  に対して式(2.5)~(2.7)、(2.20)、(2.21)、(7.1)、(7.3)、(7.7)~(7.9)の38個の式が得られたことになる。

## 7. 2 無次元方程式

一般に非軸対称問題を解析するために、第2章の手法と同じく、各変数を $\theta$ 方向にフーリエ級数で表し、その係数を定める。前節で述べた38個の変数のうち、モデルの各層に生ずる応力  $\sigma_{\xi k}$ 、 $\sigma_{\theta k}$ 、 $\sigma_{\xi\theta k}$ 、粘塑性によるみかけの応力  $\sigma_{\xi k}^{VP}$ 、 $\sigma_{\theta k}^{VP}$ 、 $\sigma_{\xi\theta k}^{VP}$ 、粘塑性ひずみ  $\varepsilon_{\xi k}^{VP}$ 、 $\varepsilon_{\theta k}^{VP}$ 、 $\varepsilon_{\xi\theta k}^{VP}$  を除く29個の変数を式(2.22)のようにフーリエ級数で表す。

次に、得られたフーリエ展開式を前節の基礎式に代入し、フーリエ係数に関する式をつくり、これらから順次未知数を消去すると、最後にフーリエ係数  $u_{\xi}^{(n)}$ 、 $u_{\theta}^{(n)}$ 、 $w^{(n)}$ 、 $m_{\xi}^{(n)}$  に関する次の四元連立二階微分方程式が得られる。

$$A_1 \mathbf{z}'' + A_2 \mathbf{z}' + A_3 \mathbf{z} = A_4 \mathbf{N}' + A_5 \mathbf{N} + A_6 \mathbf{M}' + A_7 \mathbf{M} + A_8 \mathbf{P} + A_9 \ddot{\mathbf{z}} \quad (7.10)$$

ここで、 $(\cdot)' = \partial(\cdot) / \partial \tau$  で、 $\tau$ は無次元時間〔 $\tau = (E / \rho_0)^{1/2} t / a$ 〕である。また、 $A_1 \sim A_8$ は殻の形状と材質によって定まる $4 \times 4$ の行列〔式(2.28)〕であり、 $A_9$ 、 $\mathbf{z}$ 、 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{P}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \{ \Delta u_{\xi}^{(n)}, \Delta u_{\theta}^{(n)}, \Delta w^{(n)}, \Delta m_{\xi}^{(n)} \}^T \\ \mathbf{N} &= \{ \Delta n_{\xi}^{VP(n)}, \Delta n_{\theta}^{VP(n)}, \Delta \bar{n}_{\xi\theta}^{VP(n)}, 0 \}^T \\ \mathbf{M} &= \{ \Delta m_{\xi}^{VP(n)}, \Delta m_{\theta}^{VP(n)}, \Delta \bar{m}_{\xi\theta}^{VP(n)}, 0 \}^T \\ \mathbf{P} &= \{ \Delta p_{\xi}^{(n)}, \Delta p_{\theta}^{(n)}, \Delta p_{\zeta}^{(n)}, 0 \}^T \end{aligned} \quad A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

である。

フーリエ係数で表した内力成分と解  $\mathbf{z}$  との関係、内力成分と応力との関係は、式(2.29), (2.30)と同様である。式(7.10), (2.29), (2.30)の粘塑性に関する内力成分の増分の各フーリエ係数は、式(2.21), (2.22)からそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ h \Delta n_{\xi}^{VP(n)}, h \Delta n_{\theta}^{VP(n)}, (h^3/a) \Delta m_{\xi}^{VP(n)}, (h^3/a) \Delta m_{\theta}^{VP(n)} \right\} \cos n \theta \\ & \quad = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \Delta \sigma_{\xi}^{VP}, \Delta \sigma_{\theta}^{VP}, \zeta \Delta \sigma_{\xi}^{VP}, \zeta \Delta \sigma_{\theta}^{VP} \right\} d \zeta \\ & \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ h \Delta \bar{n}_{\xi\theta}^{VP(n)}, (h^3/a) \Delta \bar{m}_{\xi\theta}^{VP(n)} \right\} \sin n \theta \\ & \quad = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \Delta \sigma_{\xi\theta}^{VP}, \zeta \Delta \sigma_{\xi\theta}^{VP} \right\} d \zeta \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

右辺の積分にはシンプソンの1/3則を用いる。

### 7.3 数値解法

ある任意の計算段階における内力と変位の増分は、式(7.10)を適当な境界条件式ならびに殻の不連続部(曲率、殻厚、材質等)では接続条件を用いて解けば得られるが、厳密に理論解析することは困難なので、差分法によって数値的に解を求める。空間差分に関しては、第2.4節と同じ取扱いなので、ここでは省略する。慣性項に含まれる時間差分に対しては、次の Houbolt の後退時間差分式 [114] を用いる。

$$\ddot{\mathbf{z}}_{i,j} = a_j \mathbf{z}_{i,j} + b_j \mathbf{z}_{i,j-1} + c_j \mathbf{z}_{i,j-2} + d_j \mathbf{z}_{i,j-3} \quad (j=0,1,2,\dots) \quad (7.13)$$

ここで係数  $a_j, b_j, c_j, d_j$  は初期条件によって決まり、初期変位、初速度、初期加速度が零のときには次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= b_0 = c_0 = d_0 = 0 \\ a_1 &= 6/(\Delta \tau)^2, \quad b_1 = c_1 = d_1 = 0 \\ a_2 &= 2/(\Delta \tau)^2, \quad b_2 = -4/(\Delta \tau)^2, \quad c_2 = d_2 = 0 \\ a_j &= 2/(\Delta \tau)^2, \quad b_j = -5/(\Delta \tau)^2, \quad c_j = 4/(\Delta \tau)^2, \quad d_j = -1/(\Delta \tau)^2 \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

ただし、 $\Delta \tau = (E/\rho_0)^{1/2} \Delta t / a$  である。

これらの空間ならびに時間差分式を式(7.10)および境界条件式、接続条件式に用いると、 $\mathbf{z}_{i,j}$ に関する多元連立方程式が得られる。接続点および  $i=1, N$  の境界を除く差分点に対しては、式(7.10)に式(2.41)および(7.13)を代入してマトリックス表示すると次式が得られる。

$$A_i \mathbf{z}_{i-1,j} + B_{i,j} \mathbf{z}_{i,j} + C_i \mathbf{z}_{i+1,j} = D_{i,j} \quad (7.15)$$

ここに

$$\begin{aligned} A_i &= 2A_1 - \Delta_i A_2, \quad B_{i,j} = -4A_1 + 2\Delta_i^2 A_3 - 2\Delta_i^2 \alpha_j A_9, \quad C_i = 2A_1 + \Delta_i A_2 \\ D_{i,j} &= -\Delta_i A_4 \mathbf{N}_{i-1,j} + 2\Delta_i^2 A_5 \mathbf{N}_{i,j} + \Delta_i A_4 \mathbf{N}_{i+1,j} - \Delta_i A_6 \mathbf{M}_{i-1,j} \\ &\quad + 2\Delta_i^2 A_7 \mathbf{M}_{i,j} + \Delta_i A_6 \mathbf{M}_{i+1,j} + 2\Delta_i^2 A_8 \mathbf{P}_{i,j} \\ &\quad + 2\Delta_i^2 A_9 (b_j \mathbf{z}_{i,j-1} + c_j \mathbf{z}_{i,j-2} + d_j \mathbf{z}_{i,j-3}) \end{aligned}$$

接続点 ( $i=m, m+1$ ) では式(2.45)を、境界 ( $i=1, N$ ) では式(2.47)を用いる。式(2.45),(2.47),(7.15)は  $\mathbf{z}_{i,j}$  ( $i=1 \sim N$ ) に関する  $N$ 元連立方程式を構成している。

以上まとめると、一般の軸対称殻に、時間と空間に対して任意な形の荷重が作用する場合の、弾/粘塑性Overlayモデルを用いた動的応答問題の解法は次のようになる。

- (1) 静的ならびに動的実験より求めた殻の材料の単軸応力-ひずみ線図から、弾/粘塑性Overlayモデルの各層の材料定数（厚さ、初期降伏応力、縦弾性係数、粘性定数）を決定する。
- (2) 解析すべき軸対称殻の形状諸量を定める。殻の各領域の差分点数、時間間隔は解の収束性を見て決める。
- (3) 各空間差分点および各時間差分点における荷重を与える。
- (4) 境界条件と接続条件を決める。
- (5)  $\mathbf{z}_{i,j}$ に関する  $N$ 元連立一次方程式〔式(2.45),(2.47),(7.15)〕を解いて、解の増分量を計算する。これを前の計算段階での解に加えることにより、各空間点および時間点における解を得る。なお、計算の最初の段階では粘塑性に関する項を省き、弾性解を得る。
- (6)  $\mathbf{z}_{i,j}$ から式(2.24),(2.29)を用いて、ひずみ増分と内力増分を計算し、前の段階のひずみと内力にこれらの値を加えることにより、その時刻におけるひずみと内力が得られる。
- (7) ひずみ増分  $\Delta \varepsilon_{ij}$ とOverlayモデル各層の応力  $\sigma_{ijk}$ （前段階で求められ、既知で

ある。) とから、式(7.7),(7.8)を用いて各層の応力増分  $\Delta\sigma_{ijk}$ 、ならびに粘塑性によるみかけの応力増分  $\Delta\sigma_{ijk}^{vp}$  が求められる。その際、降伏した層に対しては、式(7.3)を用いて粘塑性ひずみ増分  $\Delta\varepsilon_{ijk}^{vp}$  を計算する。殻の任意の点の応力増分ならびにみかけの応力増分は、式(7.9)によりモデルの各層の内力の和として表される。さらに式(7.12)からシンプソンの1/3則による数値積分ならびにフーリエ展開によって、 $n_{\xi}^{vp(\sigma)} \sim \bar{m}_{\xi\theta}^{vp(\sigma)}$  の値を求め、式(2.45),(2.47),(7.15)の定数を決定する。降伏していない部分では、粘塑性に関する量は零となる。また、フーリエ展開の際の項数は解の収束状態を見て決定する。

(8) (5)~(7)を繰返しながら、所要の時間まで計算を続ける。

#### 7.4 計算例

計算例として、頂点に開口部を持つ球殻、円環殻および円筒殻からなる 1100-0 アルミ容器に、時間に対して半正弦波状の内圧が作用する問題 (図7.2) を取り扱った。本例題では、衝撃荷重を軸対称の場合に限定した。このとき、式(7.10)は簡略化されて三元連立方程式となり、 $A_1 \sim A_9$  は  $3 \times 3$  の行列、 $\mathbf{z} = \{ \Delta U_{\xi}, \Delta W, \Delta M_{\xi} \}^T$ 、 $\mathbf{N} = \{ \Delta N_{\xi}^{vp}, \Delta N_{\theta}^{vp}, 0 \}^T$ 、 $\mathbf{M} = \{ \Delta M_{\xi}^{vp}, \Delta M_{\theta}^{vp}, 0 \}^T$ 、 $\mathbf{P} = \{ \Delta P_{\xi}, 0, \Delta P_{\xi} \}^T$  となる。

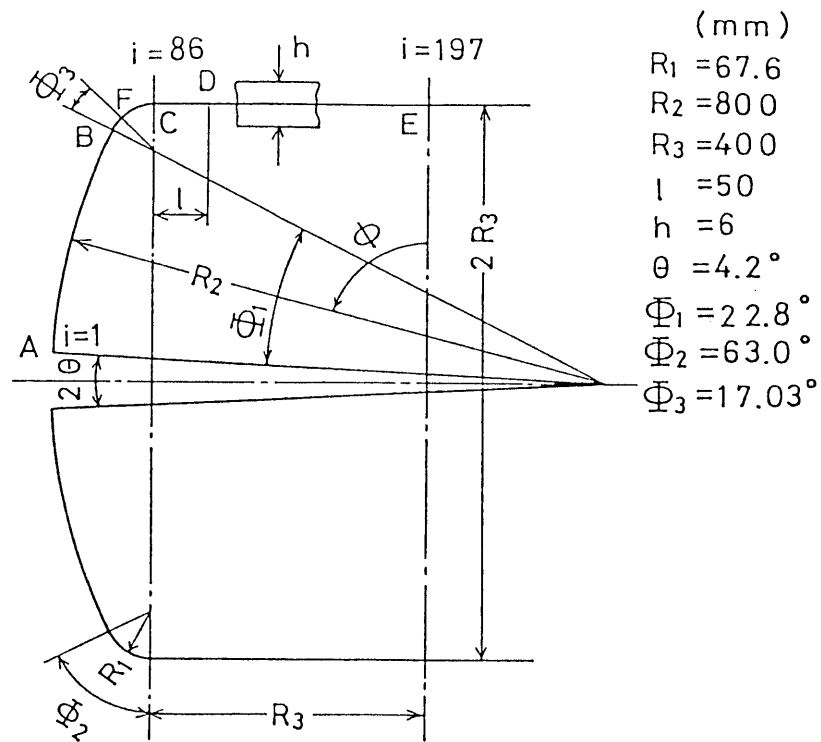
球殻部 AB、円環殻部 BC、円筒殻部 CD と DE (円環殻部と円筒殻部の接続点で、差分点間隔の急変を避けるために、円筒部 CE を 2 分割している。) の形状諸量は次のようになる。なお CD 間は長さ 50 mm とし、代表長さ  $a = R_3$  とした。

$$\begin{aligned} \text{AB : } \phi &= (\Phi_1 + \Phi_2) - \frac{i-1}{N_1-1} \Phi_1 (i = 1, 2, \dots, N_1), \quad \rho = (R_2/a) \cos \phi \\ \rho' &= \sin \phi, \quad \gamma = (a/R_2) \tan \phi, \quad \omega_{\xi} = \omega_{\theta} = a/R_2, \quad \omega_{\xi}' = 0 \\ \Delta &= \Phi_1 / (N_1 - 1) \end{aligned} \quad (7.16)$$

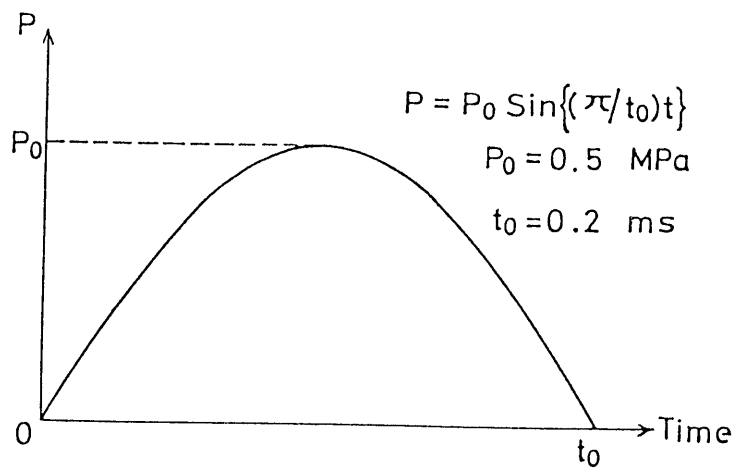
$$\begin{aligned} \text{BC : } \phi &= \frac{N_2-i}{N_2-1} \Phi_2 (i = 1, 2, \dots, N_2), \quad \rho = (R_3 - R_1 + R_1 \cos \phi) / a \\ \rho' &= \sin \phi, \quad \gamma = a \sin \phi / (R_3 - R_1 + R_1 \cos \phi), \quad \omega_{\xi} = a/R_1 \\ \omega_{\theta} &= a \cos \phi / (R_3 - R_1 + R_1 \cos \phi), \quad \omega_{\xi}' = 0, \quad \Delta = \Phi_2 / (N_2 - 1) \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \text{CD : } \rho &= R_3/a, \quad \rho' = 0, \quad \gamma = 0, \quad \omega_{\theta} = a/R_3, \quad \Delta = 50/a(N_3 - 1) \\ \omega_{\xi} &= \omega_{\xi}' = 0 \end{aligned} \quad (7.18)$$





(a) 圧力容器



(b) 衝撃荷重

図 7.2 圧力容器および荷重

$$DE: \Delta = (R_3 - 50)/a(N_4 - 1)$$

他のパラメータはCD部と同じである。

境界条件は、点A ( $i=1$ ) で自由端の条件を、点E ( $i=N$ ) で対称性の条件を用いる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{点A: } N_{\xi} = \widehat{Q}_{\xi} = M_{\xi} = 0 \\ \text{点E: } U_{\xi} = W' = M_{\xi}' = 0 \end{array} \right\} \quad (7.19)$$

なお点B、C、Dでは、次の接続条件を用いる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{幾何学的適合条件から } U_{\xi}^+ = U_{\xi}^-, \quad W^+ = W^-, \quad \Phi_{\xi}^+ = \Phi_{\xi}^- \\ \text{平衡条件から } N_{\xi}^+ = N_{\xi}^-, \quad Q_{\xi}^+ = Q_{\xi}^-, \quad M_{\xi}^+ = M_{\xi}^- \end{array} \right\} \quad (7.20)$$

ここで添字+-は接続点の両側の各量を区別するために用いている。

つぎに1100-0 アルミ材について、種々のひずみ速度で引張試験 (図7.3)、ならびに引張、圧縮の繰返し試験 (図7.4) を行い、得られた単軸応力-ひずみ線図を、6層からなる弾/完全粘塑性体で近似した。各層の材料定数は次の通りである。

$$\left. \begin{array}{l} E = 7.00 \times 10^4 \text{ MPa}, \quad \nu = 0.33, \quad \rho_0 = 2.71 \text{ g/cm}^3 \\ \sigma_{yk} = [\sigma_{y1} \sim \sigma_{y6}] = [15.7, 25.5, 38.8, 59.5, 99.3, 213] \text{ (MPa)} \\ t_k = [t_1 \sim t_6] = [0.778, 0.070, 0.046, 0.035, 0.030, 0.041] \\ \gamma_k = [\gamma_1 \sim \gamma_6] = [45.0, 39.7, 35.4, 30.3, 24.6, 19.1] \text{ (1/s)} \\ \Psi(f_k) = \left[ \frac{\bar{\sigma}_k - \sigma_{yk}}{\sigma_{yk}} \right]^{2.0} \end{array} \right\} \quad (7.21)$$

これらの値は、約 0.3 % 以下のひずみ範囲で成り立つ。

なお、図7.3の応力-ひずみ線図から、単層のモデルによる構成関係式を求めると、次のようになる (等方硬化)。

$$\left. \begin{array}{l} \{\dot{\varepsilon}_{\xi}^{vp}, \dot{\varepsilon}_{\theta}^{vp}\}^T = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_0 (\Psi(f)) \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \{\sigma_{\xi}, \sigma_{\theta}\}^T \\ \Psi(f) = [(\bar{\sigma} - \sigma^*) / \sigma^*]^{2.0}, \quad \gamma_0 = 48 \text{ / s} \\ \sigma^* = 97.8 (0.122 \times 10^{-3} + \bar{\varepsilon}^{vp})^{0.203} \text{ MPa} \end{array} \right\} \quad (7.22)$$

ここで、 $\bar{\varepsilon}^{vp}$  は相当粘塑性ひずみである。

式(7.21)、(7.22)の材料定数を用いた、単軸のひずみ振幅一定の両振りにおける応力-ひずみ線図と、実験結果との比較を図7.4に示す。弾/粘塑性 Overlay モデルを用いるこ

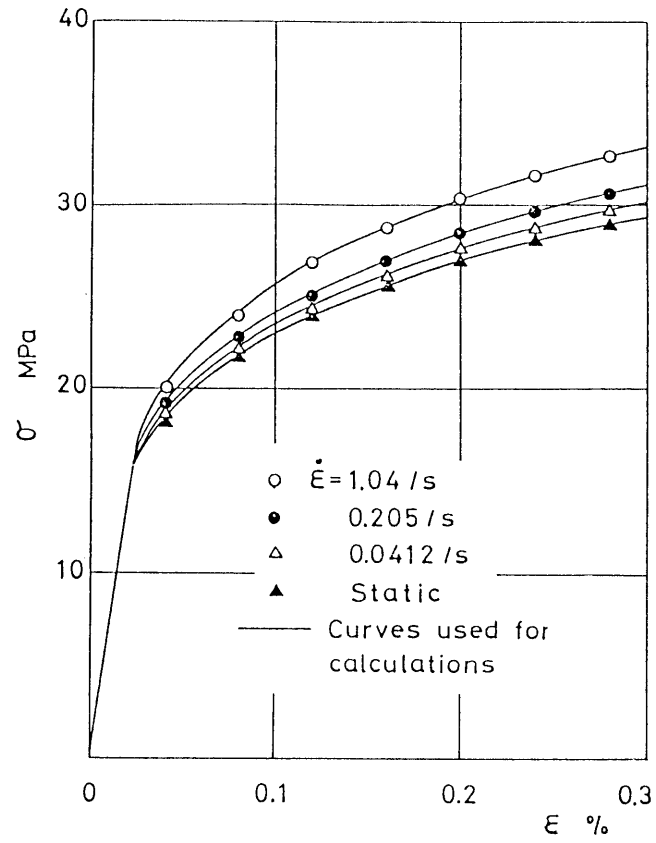


図 7.3 応力-ひずみ線図 ( $\dot{\epsilon}$ :一定)

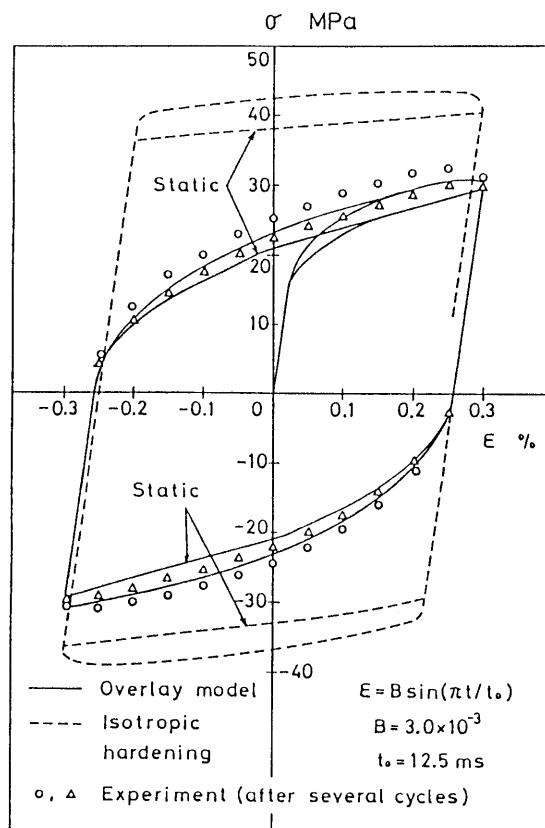


図 7.4 応力-ひずみ線図 (ひずみ振幅一定)

とによって、バウシinger効果と塑性領域におけるひずみ速度依存性が、よく表現されていることがわかる。

差分点数は、球殻部A Bで 65、円環殻部B Cで 75、円筒殻部C DとD Eで各々21、36とし、全差分点数は計197である。殻厚方向の格子点数は 21、時間間隔  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$  ms とした。これらの値は解の収束性と計算機の容量、および計算時間を考慮して決定した。

## 7.5 計算結果と考察

計算は圧力容器が衝撃荷重を受け始めてから0.6 msまで行い、変位および内力の時間的変化について、等方硬化の場合とOverlayモデルを採用した場合とを比較した。図7.2において円環殻部の点Fは、静的に荷重が作用したときに、相当応力が最大になる点である。

図7.5～図7.7 に、圧力容器の点A、E、Fの変位および内力成分の時間的変化を、また図7.8～図7.10 に、時刻  $t = 0.30$  msと  $0.55$  msにおける変位と内力の子午線方向分布を示す。 $t = 0.30$  msは初めて圧力容器の点A付近に再降伏が生じ始めた時刻であり、 $t = 0.55$  msは、点A付近を含めた球殻部の一部が除荷と再降伏を繰り返し、さらに円筒殻部が再降伏し始める時刻である。図中実線および一点鎖線はOverlayモデルによる計算結果であり、破線および二点鎖線は等方硬化モデルによるものである。

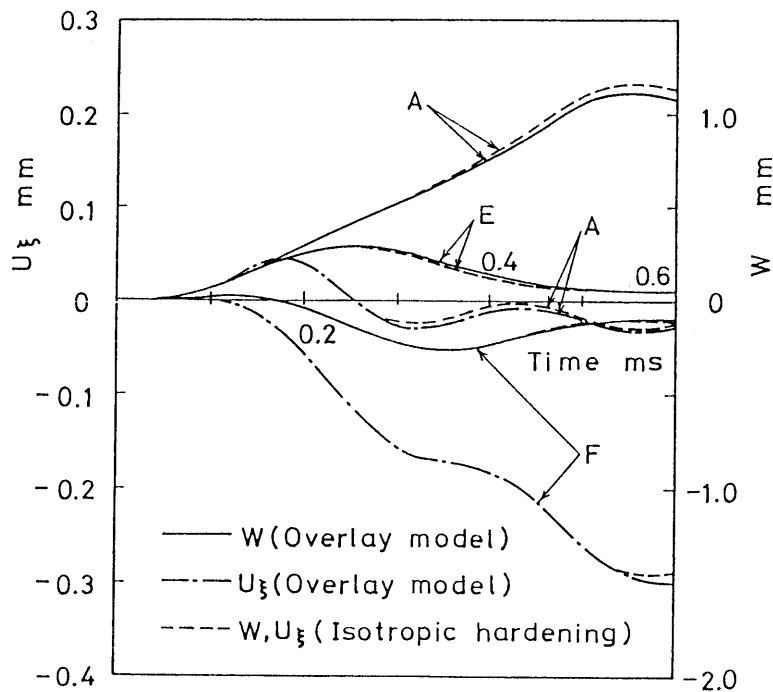


図 7.5 変位  $W$ 、 $U_{\xi}$  の時間的変化

図7.5は変位 $W$ ,  $U_{\xi}$ の時間的变化を示したものである。半径方向変位 $W$ に比べて、子午線方向変位 $U_{\xi}$ は小さい。点Aで大きく外側に変位し、点Aの $W$ が最大値を示す時刻は、内圧の最大時( $t=0.1$  ms)よりもかなり遅れる。また点Fの $U_{\xi}$ も点Aの $W$ と時間的に似た応答を示す。Overlayモデルと等方硬化モデルの結果の差は、点Aでは $t=0.3$  ms頃に $U_{\xi}$ に現れ、 $t=0.4$  ms頃から $W$ に生じ始める。点Fでは $t=0.55$  ms頃から $U_{\xi}$ に差が出るが、これらの差はすべて小さい。

図7.6に面内力 $N_{\xi}$ ,  $N_{\theta}$ の時間的变化を示す。3点とも $N_{\theta}$ の変動の振幅は大きく、点Eの $N_{\xi}$ が遅れて大きくなっている。また点E, Fに比べて点Aの変動周期は短い。点Aでは $t=0.25$  ms頃から、点Eでは $t=0.42$  ms頃から両モデルの間に顕著な差を生じ、両点とも再降伏後の変動が等方硬化モデルでは大きくなっている。

図7.7は曲げモーメント $M_{\xi}$ ,  $M_{\theta}$ の時間的变化を表す。点Fで負の大きな曲げモーメントを示し、特に $M_{\xi}$ が顕著である。点Aでは $t=0.25$  ms頃から、また点Eでは $0.5$  ms頃から両モデルの結果に差を生じている。

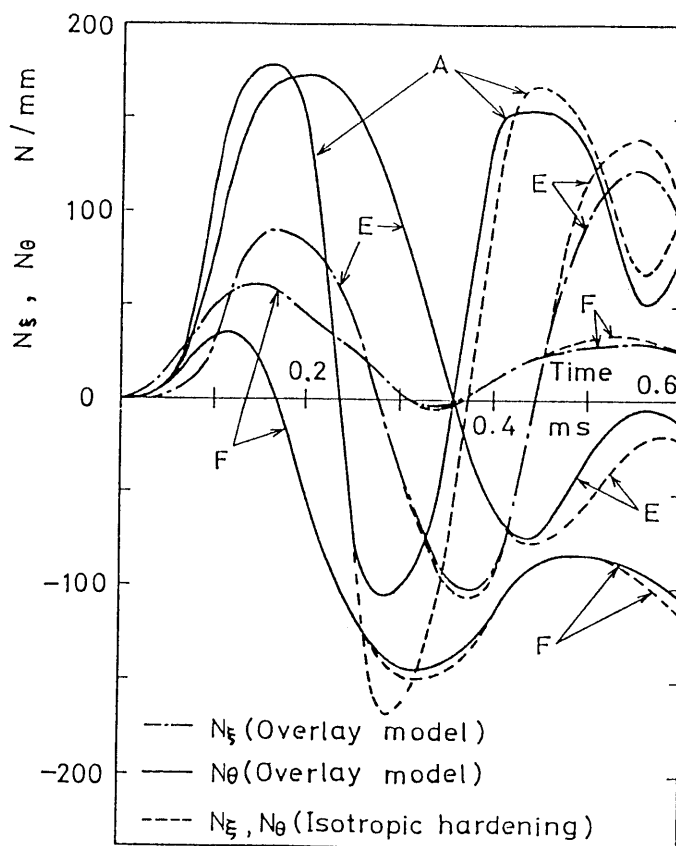


図 7.6 面内力  $N_{\xi}$ ,  $N_{\theta}$  の時間的变化

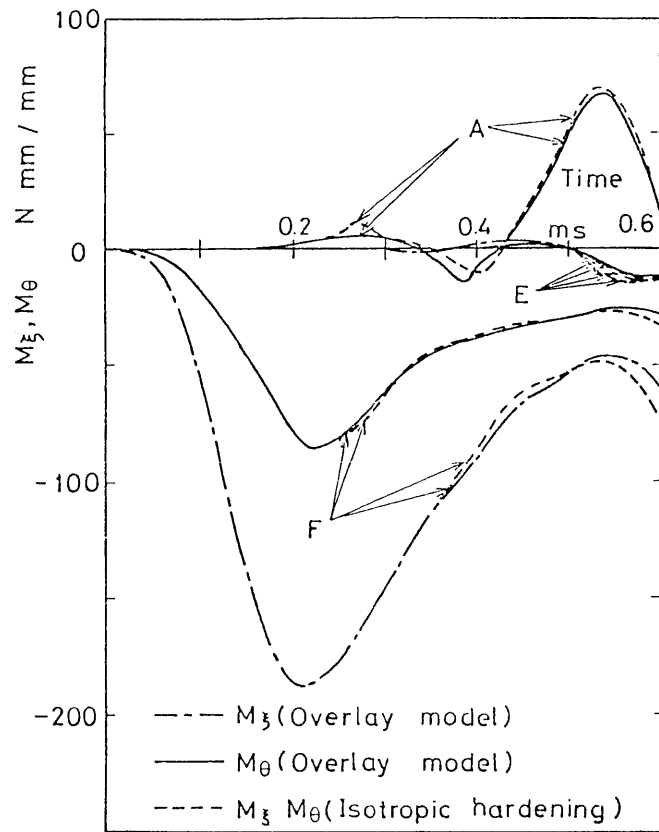


図 7.7 曲げモーメント  $M_\xi$ ,  $M_\theta$  の時間的变化

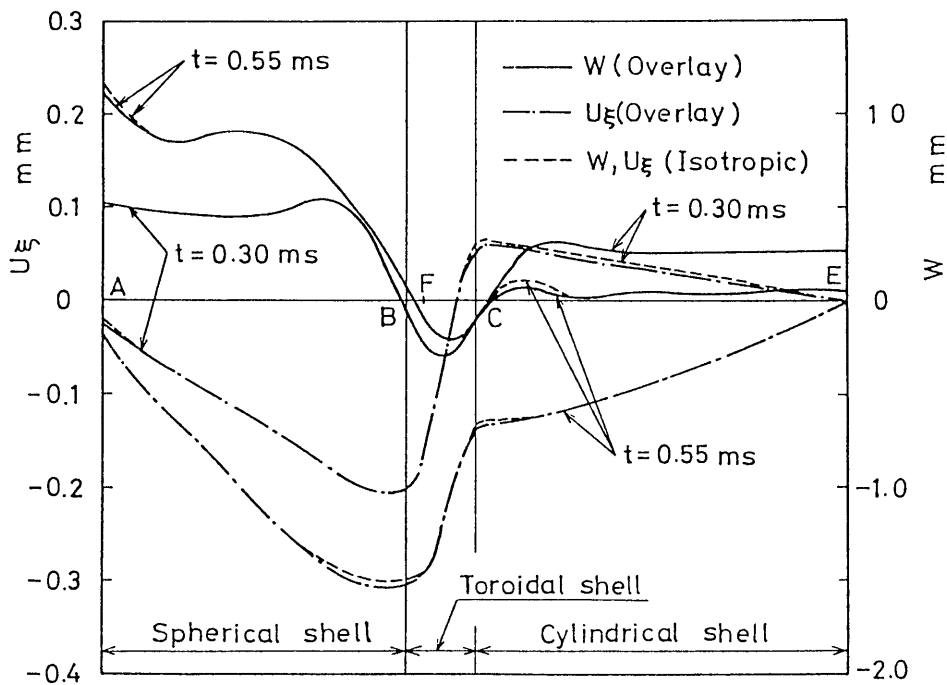


図 7.8 変位  $W$ ,  $U_\xi$  の子午線方向分布

図7.8は変位 $W$ ,  $U_{\xi}$ の子午線方向分布である。 $W$ は球殻部の開口端Aで大きくなる。  
 $t = 0.30, 0.55$  msの両時刻とも、両モデルの結果の間にほとんど差を生じていない。

図7.9は面内力 $N_{\xi}$ ,  $N_{\theta}$ の子午線方向分布である。両時刻とも $N_{\theta}$ は $N_{\xi}$ に比べて子午線方向分布の変動が大きい。 $t = 0.3$  msでは $N_{\xi}$ ,  $N_{\theta}$ とも点A近傍に両モデルの結果の差が限られるが、 $t = 0.55$  msになると、円筒殻部で子午線に沿ってほぼ一様な差が生じている。これは $t = 0.30$  msでは再降伏域は点A近傍に限られるが、 $t = 0.55$  msになると円筒殻部全体にわたって一様に再降伏しているためと思われる。さらに等方硬化モデルでは面内力を一般に大きく見積ることがわかる。

図7.10は $t = 0.55$  msにおける曲げモーメント $M_{\xi}$ ,  $M_{\theta}$ の子午線方向分布である。両モーメントとも子午線方向に著しく変動し、 $M_{\xi}$ が $M_{\theta}$ に比べて変動量は大きくなっている。両モデルによる結果の差は、両モーメントとも殻全体にわたって極値を示す付近で大きく現れ、面内力と同様に等方硬化モデルの結果が大きな値を示している。

図7.11は、点Aの殻の内面の $\sigma_{\theta}-\varepsilon_{\theta}$ 線図である。除荷後応力が反転する $t = 0.25$  msから、等方硬化モデルと Overlay モデルによる結果に、大きな相違が生じている。また図

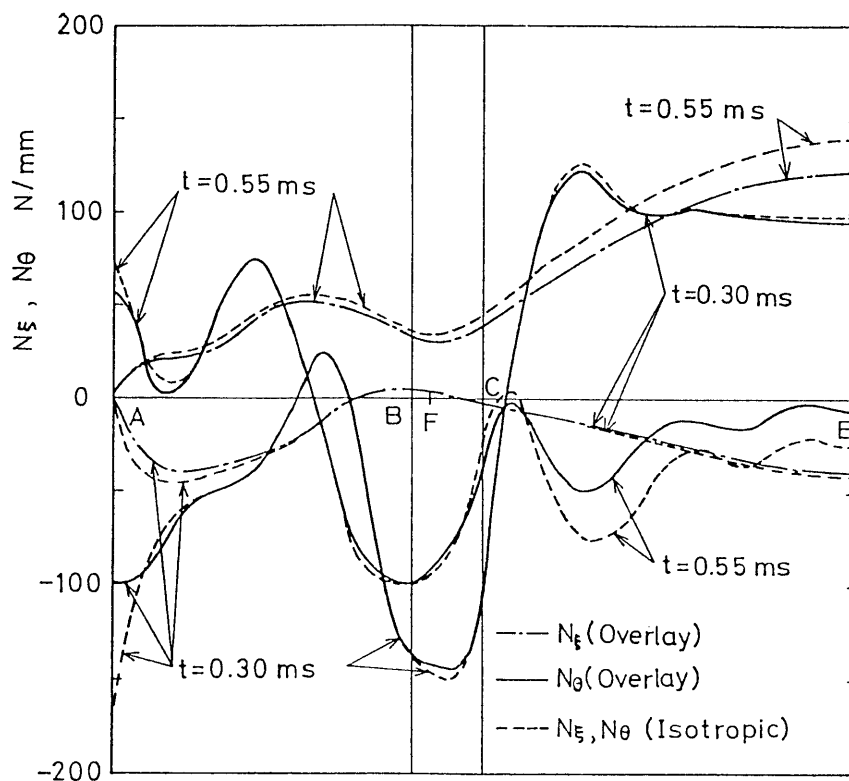


図 7.9 面内力  $N_{\xi}$ ,  $N_{\theta}$  の子午線方向分布

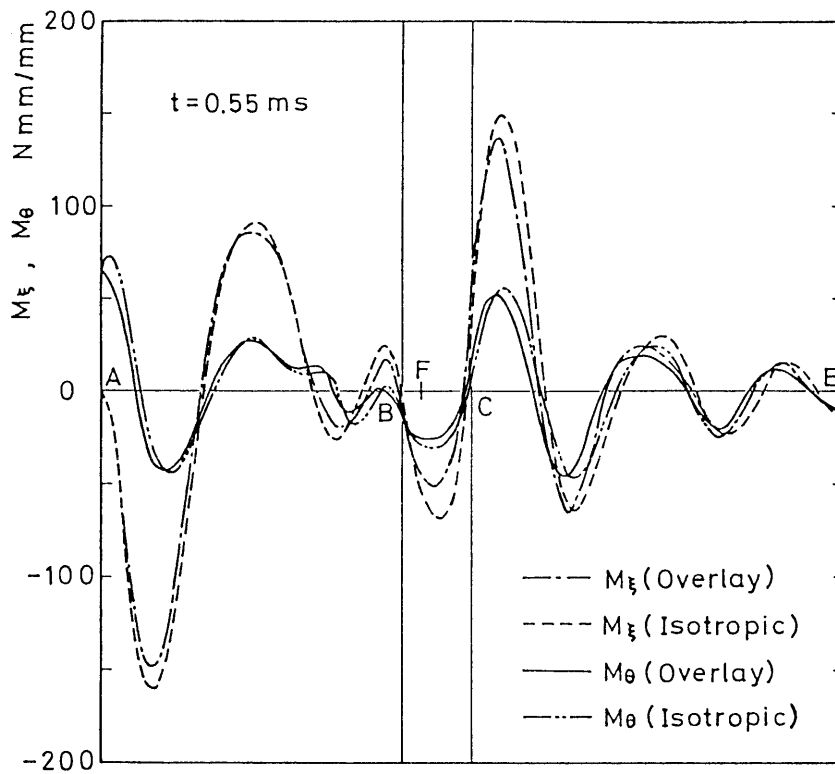


図 7.10 曲げモーメント  $M_\xi$ ,  $M_\theta$  の子午線方向分布

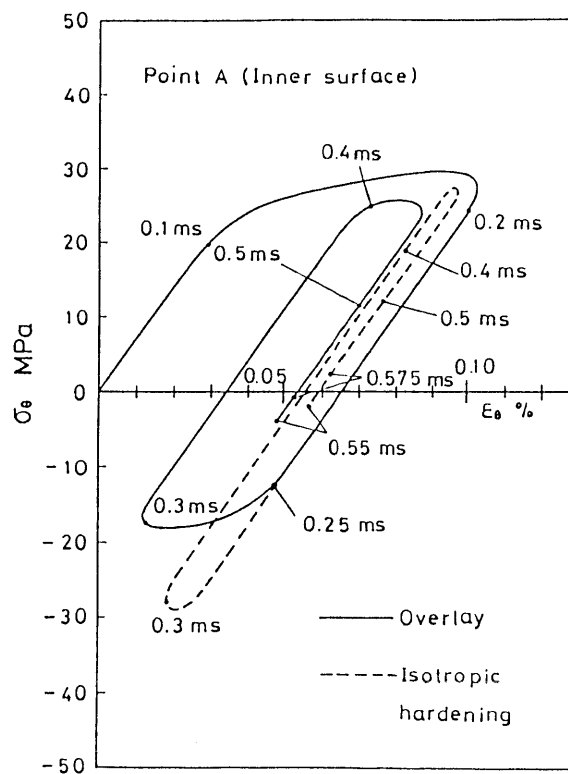


図 7.11 点Aの内表面の  $\sigma_\theta$ - $\epsilon_\theta$  線図



には示していないが、点Eの内外面の $\sigma_{\theta}-\varepsilon_{\theta}$ 線図も遅れて $t=0.4$  msで点Aと同様に両モデルの結果の間に差を生じる。これらは図7.5~7.10に示した点AおよびEの各変位および内力成分が、各々 $t=0.25$  msならびに $t=0.42$  ms以降で差が生じることに対応している。

図7.12は、Overlay モデルを用いた場合の、圧力容器の子午線断面における降伏域の進展の様子を示したものである。図より、開口部の点Aで降伏を生じ、子午線方向に広がるとともに、 $t=0.12$  msでは円環殻部の一部ならびに円筒殻部のほとんどの部分が降伏する。除荷域は、球殻部では $t=0.2$  ms頃、円筒殻部では $t=0.42$  ms頃に現れる。一度除荷した領域は殻の振動とともに、再降伏および除荷を繰り返している。 $t=0.55$  msでは、円筒殻部は広い領域にわたって再降伏を生じており、図7.9の $N_{\xi}$ 、 $N_{\theta}$ 分布で、両モデルの結果に一樣な差が生じていることに対応している。

なおひずみの最大値（絶対値）は、 $t=0.33$  ms時に点Fの近傍の内表面の子午線方向に生じ、その値は0.15%である。またひずみ速度の最大値（絶対値）は、 $t=0.24$  ms時に点Aの内表面の円周方向に生じ、 $13$  1/s を示した。最大ひずみ速度の値は式(7.21)の材料定

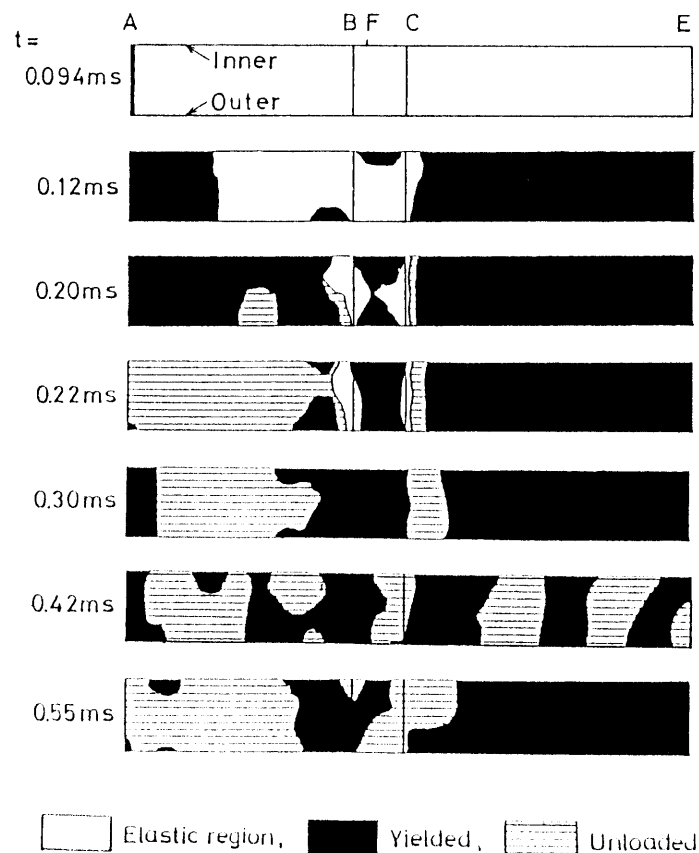


図 7.12 子午線断面上の降伏領域の進展図 (Overlayモデル)

数を定めた際のひずみ速度を超えているが、殻の各点が応力の反転により、最初に再降伏するまでは両モデルの計算値に差が見られず、材料定数の与え方は妥当であると思われる。

以上、本計算例では球殻、円環殻および円筒殻からなるアルミ容器に、時間に対して半正弦波状の内圧が作用する問題を取り上げ、内力および変位の時間的変化の様子を解析し、等方硬化による結果と比較した。その結果、

- (1) 応力が反転して再降伏が生じると、各内力成分とも両モデルによる結果に差が現れ、特に面内力成分に顕著な差が現われる。
- (2) 本計算例では最大ひずみが0.15%を示し、荷重の与え方が小さかったために、変位と曲げモーメント成分には両モデルの結果にあまり差が生じなかったが、等方硬化モデルでは再降伏直後の面内力成分の変動を、大きめに見積ることになることがわかった。

使用した計算機は、FACOM M-200 で、Overlay モデルを用いた本計算例の計算時間は約20分、等方硬化の場合は約10分である。

なお、本モデルは単軸応力-ひずみ線図より容易にモデルの材料定数を決定でき、殻の動的応答問題に導入することが可能である。このモデルは繰返し硬化や軟化を示さない材料に対して有効であり、Overlayモデルの層数を増やしていけば、計算機の必要容量および計算時間は増えるが、解の精度は向上する。

## 第8章 厚肉回転対称殻の動的応答 [100, 101]

第5章から第7章において、殻構造物に衝撃荷重が作用する場合の弾／粘塑性動的応答問題の解法を述べてきたが、これらは薄肉の殻を対象としており、今日高温、高压化に伴って実用されつつある厚肉殻を取り扱った研究は少ないようである。厚肉殻を解析するためには、中程度の殻厚（殻厚を  $h$ 、主曲率半径を  $R$  とした時、一般に  $1/20 < h/R < 1/5$  程度の厚さで与えられる。）では殻厚方向のせん断変形の影響を考慮に入れることが必要であり、さらに厚くなると、殻厚方向の垂直応力とひずみをも考慮に入れたより精密な理論によらなければならない。

本章では、中程度の厚さの回転対称殻を対象とし、動的な荷重が作用する場合の弾／粘塑性変形問題を取り扱う。殻の厚さ方向のせん断変形の影響を考慮に入れて準静的応答問題を取り扱った第3章の解法を、動的応答問題に発展させたものである。すなわち、Reissner の殻理論による平衡方程式 [30] に慣性項を加えて運動方程式とし、厚肉の場合に考慮すべき殻厚方向のせん断変形には、Naghdi の理論 [38]（ひずみ-変位関係）を採用する。弾／粘塑性の構成関係には、Perzyna の理論 [53] に基づく Fyfe の構成式 [54] を用いる。導かれた基礎式の数値解法には差分法を適用し、慣性項の時間差分には Houbolt の後退時間差分式 [114] を採用する。

数値例として、非軸対称な衝撃外圧を受ける両端固定の厚肉円筒殻の問題を解析し、本解法による結果と、せん断変形を考慮しない従来の薄肉殻理論（Sanders, Jr. [32] の殻理論に基づく解法で、第7章で示した解法に対応する。）による結果とを比較検討する。

### 8.1 厚肉回転対称殻の基礎関係式

微小変形理論に基づく Reissner の殻理論 [30] による平衡方程式に慣性項を加え、回転対称殻に適用すると、増分形式で表した運動方程式は次のようになる。ただし回転慣性の項は省略する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\Delta N_\xi)}{\partial \xi} + \gamma(\Delta N_\xi - \Delta N_\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta N_{\theta\xi})}{\partial \theta} + \omega_\xi \Delta Q_\xi + a \left[ \Delta P_\xi - \rho_0 h \frac{\partial^2(\Delta U_\xi)}{\partial t^2} \right] &= 0 \\ \frac{\partial(\Delta N_{\theta\xi})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta N_{\theta\xi} + \Delta N_{\theta\theta}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta N_\theta)}{\partial \theta} + \omega_\theta \Delta Q_\theta + a \left[ \Delta P_\theta - \rho_0 h \frac{\partial^2(\Delta U_\theta)}{\partial t^2} \right] &= 0 \\ \frac{\partial(\Delta Q_\xi)}{\partial \xi} + \gamma \Delta Q_\xi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta Q_\theta)}{\partial \theta} - (\omega_\xi \Delta N_\xi + \omega_\theta \Delta N_\theta) + a \left[ \Delta P_\xi - \rho_0 h \frac{\partial^2(\Delta W)}{\partial t^2} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_{\xi} - \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial(\Delta M_{\xi})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta M_{\xi} - \Delta M_{\theta}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta M_{\theta \xi})}{\partial \theta} \right] &= 0 \\ \Delta Q_{\theta} - \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial(\Delta M_{\theta \theta})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta M_{\theta \theta} + \Delta M_{\theta \xi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta M_{\theta})}{\partial \theta} \right] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ここに、 $\Delta$ は増分を表す。式中の合応力、合モーメント、分布荷重、変位、回転の各成分を図2.2に示す。殻の中央面の分布荷重  $P_{\xi}$ 、 $P_{\theta}$ 、 $P_{\xi}$  は殻の内外面に作用する分布荷重  $\{P_{\xi}^-, P_{\theta}^-, P_{\xi}^-\}$ 、 $\{P_{\xi}^+, P_{\theta}^+, P_{\xi}^+\}$  と式(3.2)、(3.3)の関係にある。

次に殻厚中央面のひずみと変位との関係、曲率の変化量と回転との関係、回転と変位およびせん断ひずみとの関係、中央面からどの距離にある点Qのひずみ成分の式には、第3.1節の式(3.4)~(3.7)の微分表示(・)を増分表示 $\Delta$ に置き換えて用いる。構成関係には、Perzynaの理論[53]に基づくFyfeの構成式[54]を用いるが、第5.1節〔式(5.6)~(5.9)〕で説明しているので、ここでは省略する。

仮定される殻の応力状態(殻厚方向の垂直応力  $\sigma_{\xi} = 0$ )において、Fyfeの式は式(5.6)、(5.7)、(5.9)より次のように表される。

$$\{\Delta \varepsilon\} = [D]^{-1} \{\Delta \sigma\} + \{\Delta \varepsilon^{vp}\} \quad (8.2)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta \varepsilon\} &= \{\Delta \varepsilon_{\xi}, \Delta \varepsilon_{\theta}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta}, \Delta \varepsilon_{\xi\xi}, \Delta \varepsilon_{\theta\xi}\}^T \\ \{\Delta \sigma\} &= \{\Delta \sigma_{\xi}, \Delta \sigma_{\theta}, \Delta \sigma_{\xi\theta}, \Delta \sigma_{\xi\xi}, \Delta \sigma_{\theta\xi}\}^T \\ \{\Delta \varepsilon^{vp}\} &= \{\Delta \varepsilon_{\xi}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\theta}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\xi\theta}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\xi\xi}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\theta\xi}^{vp}\}^T \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

$$\{\Delta \varepsilon^{vp}\} = \{\dot{\varepsilon}^{vp}\} \Delta t = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_0 \left[ \exp \left\{ \frac{\alpha (\bar{\sigma} - \sigma^*)}{\sigma_0} \right\} - 1 \right] \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \{\sigma\} \Delta t \quad (8.4)$$

式(8.2)を応力について解いた式、合応力、合モーメントの式、および粘塑性によるみかけの内力成分とみかけの応力増分との式には、第3.1節の式(3.11)~(3.15)を用いる。

以上で50個の独立変数  $\Delta N_{\xi}$ 、 $\Delta N_{\theta}$ 、 $\Delta N_{\xi\theta}$ 、 $\Delta N_{\theta\xi}$ 、 $\Delta M_{\xi}$ 、 $\Delta M_{\theta}$ 、 $\Delta M_{\xi\theta}$ 、 $\Delta M_{\theta\xi}$ 、

$\Delta Q_{\xi}, \Delta Q_{\theta}, \Delta U_{\xi}, \Delta U_{\theta}, \Delta W, \Delta \varepsilon_{\xi m}, \Delta \varepsilon_{\theta m}, \Delta \varepsilon_{\xi \theta m}, \Delta \varepsilon_{\xi \zeta m}, \Delta \varepsilon_{\theta \zeta m},$   
 $\Delta \kappa_{\xi}, \Delta \kappa_{\theta}, \Delta \kappa_{\xi \theta}, \Delta \kappa_{\theta \xi}, \Delta \Phi_{\xi}, \Delta \Phi_{\theta}, \Delta \Phi_n, \Delta \sigma_{\xi}, \Delta \sigma_{\theta}, \Delta \sigma_{\xi \theta}, \Delta \sigma_{\xi \zeta},$   
 $\Delta \sigma_{\theta \zeta}, \Delta \sigma_{\xi}^{vp}, \Delta \sigma_{\theta}^{vp}, \Delta \sigma_{\xi \theta}^{vp}, \Delta \sigma_{\xi \zeta}^{vp}, \Delta \sigma_{\theta \zeta}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\xi}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\theta}^{vp},$   
 $\Delta \varepsilon_{\xi \theta}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\xi \zeta}^{vp}, \Delta \varepsilon_{\theta \zeta}^{vp}, \Delta N_{\xi}^{vp}, \Delta N_{\theta}^{vp}, \Delta N_{\xi \theta}^{vp}, \Delta N_{\theta \xi}^{vp}, \Delta M_{\xi}^{vp},$   
 $\Delta M_{\theta}^{vp}, \Delta M_{\xi \theta}^{vp}, \Delta M_{\theta \xi}^{vp}, \Delta Q_{\xi}^{vp}, \Delta Q_{\theta}^{vp}$  に対して式(3.4)~(3.6), (3.11),  
 (3.12), (3.14), (3.15), (8.1), (8.4) の50個の式が得られたことになる。

## 8. 2 フーリエ級数展開と無次元方程式

非軸対称問題を解析するために、各変数を  $\theta$  方向にフーリエ級数で表し、その係数を定める〔式(2.22), (3.17)〕。

次に、これらのフーリエ展開式を前節の50個の基礎式に代入し、フーリエ係数に関する式をつくり、これらの式から順次未知係数を消去すると、最後に  $\Delta u_{\xi}^{(n)}, \Delta u_{\theta}^{(n)}, \Delta w^{(n)}, \Delta \varphi_{\xi}^{(n)}$  および  $\Delta \varphi_{\theta}^{(n)}$  に関する次の五元連立二階微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 A_1 \mathbf{z}'' + A_2 \mathbf{z}' + A_3 \mathbf{z} \\
 = A_4 \mathbf{N}' + A_5 \mathbf{N} + A_6 \mathbf{Q}' + A_7 \mathbf{Q} + A_8 \mathbf{M}' + A_9 \mathbf{M} + A_{10} \mathbf{P} + A_{11} \ddot{\mathbf{z}} \quad (8.5)
 \end{aligned}$$

ここで、 $A_1 \sim A_{11}$  は殻の形状と材質によって定まる  $5 \times 5$  の行列であり、 $A_1 \sim A_{10}$  は式(3.18)の各係数〔式(3.19)〕と同一である。 $A_{11}$ 、 $\mathbf{z}$ 、 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{P}$  は、

$$\left. \begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{bmatrix} a^2 \rho_0 / E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 \rho_0 / E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \rho_0 / E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{z} &= \{ \Delta u_{\xi}^{(n)}, \Delta u_{\theta}^{(n)}, \Delta w^{(n)}, \Delta \varphi_{\xi}^{(n)}, \Delta \varphi_{\theta}^{(n)} \}^T, \\
 \mathbf{N} &= \{ \Delta n_{\xi}^{vp(n)}, \Delta n_{\theta}^{vp(n)}, \Delta n_{\xi \theta}^{vp(n)}, \Delta n_{\theta \xi}^{vp(n)}, 0 \}^T \\
 \mathbf{Q} &= \{ \Delta q_{\xi}^{vp(n)}, \Delta q_{\theta}^{vp(n)}, 0, 0, 0 \}^T \\
 \mathbf{M} &= \{ \Delta m_{\xi}^{vp(n)}, \Delta m_{\theta}^{vp(n)}, \Delta m_{\xi \theta}^{vp(n)}, \Delta m_{\theta \xi}^{vp(n)}, 0 \}^T \\
 \mathbf{P} &= \{ \Delta p_{\xi}^{(n)}, \Delta p_{\theta}^{(n)}, \Delta p_{\zeta}^{(n)}, 0, 0 \}^T
 \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

である。

式(8.5)を適当な境界条件のもとで解けば、解  $\mathbf{z}$  が得られ、式(3.20)より内力成分の増

分が求められる。解  $\mathbf{z}$  は第 2.4 節で述べた差分法によって数値的に求める。また慣性項には、第 7.3 節で用いた Houbolt の後退時間差分式 [114] を用いる〔式(7.13)、(7.14)〕。式(7.15)の各係数  $A_i \sim D_{i,j}$  は、本章では式(8.5)の各係数  $A_1 \sim A_{11}$  および式(7.13)の  $\alpha_j \sim d_j$  を用いて、次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} A_i &= 2A_1 - A_2 \Delta i, \quad B_{i,j} = -4A_1 + 2A_3 \Delta i^2 - 2\alpha_j A_{11} \Delta i^2, \quad C_i = 2A_1 + A_2 \Delta i \\ D_{i,j} &= -A_4 \Delta i \mathbf{N}_{i-1,j} + 2A_5 \Delta i^2 \mathbf{N}_{i,j} + A_4 \Delta i \mathbf{N}_{i+1,j} \\ &\quad - A_6 \Delta i \mathbf{Q}_{i-1,j} + 2A_7 \Delta i^2 \mathbf{Q}_{i,j} + A_6 \Delta i \mathbf{Q}_{i+1,j} \\ &\quad - A_8 \Delta i \mathbf{M}_{i-1,j} + 2A_9 \Delta i^2 \mathbf{M}_{i,j} + A_8 \Delta i \mathbf{M}_{i+1,j} \\ &\quad + 2A_{10} \Delta i^2 \mathbf{P}_{i,j} + 2A_{11} \Delta i^2 (b_j \mathbf{z}_{i,j-1} + c_j \mathbf{z}_{i,j-2} + d_j \mathbf{z}_{i,j-3}) \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

以上より、中程度の厚さの軸対称殻に一般の非軸対称な衝撃荷重が作用する場合の解法は、次のようになる。

- (1) 解析すべき軸対称殻の形状諸量を求める。殻の各領域の差分点数、殻厚方向の格子点数、時間間隔は解の収束性を見て定める。
- (2) 各空間差分点および各時間差分点における荷重を与える。
- (3) 境界条件〔第 3.3 節〕と接続条件を決める。
- (4)  $\mathbf{z}_{i,j}$  に関する  $N$  元連立一次方程式〔式(2.45),(2.47),(7.15),(8.7)を用いる。  $A_i \sim C_i$ ,  $D_{i,j}$  は各々  $(5 \times 5)$ ,  $(5 \times 1)$  マトリックスである〕を解いて、解の増分量を計算する。これを前の計算段階での解に加えることにより、各空間点および時間点における解、すなわち変位と回転を得る。なお計算の最初の段階では粘塑性に関する項を省き、弾性解を得る。
- (5)  $\mathbf{z}_{i,j}$  から式(3.20),(3.21)を用いて、内力増分と応力増分を計算し、前の段階の内力と応力にこれらの値を加えることにより、その時刻での内力と応力が得られる。
- (6) 応力増分と粘塑性ひずみ増分〔前段階の値を用い、既知である〕とから式(3.8)を用いてひずみ増分を求める。降伏した点に対しては、式(8.4)を用いて粘塑性ひずみ増分を計算する。
- (7) 次にこの粘塑性ひずみ増分を式(3.22)の右辺に代入し、フーリエ展開によって  $\Delta n_{\xi}^{vp(n)} \sim \Delta m_{\theta\xi}^{vp(m)}$  の値を求め、式(2.45),(2.47),(7.15),(8.7)の定数を決定する。降伏していない部分では、粘塑性ひずみ増分に関する量は零となる。またフー

リエ展開の際の項数は解の収束状態を見て決定する。

(8) (4)~(7)を繰返しながら、所要の時間まで計算を続ける。

### 8.3 計算例

これまで述べてきた計算方法の妥当性を検討するとともに、殻厚方向のせん断変形の影響を無視した薄肉殻理論（古典理論）による結果と比較し、殻厚の影響について考察する。

計算例として、両端固定の 6061-T6 アルミ厚肉円筒殻に、子午線方向に一様で、円周方向の上半分に余弦波状の衝撃外圧が、時間に対して正弦波状に作用する場合（図8.1）を取り上げた。荷重の円周方向分布は次式のようなになる。

$$\left. \begin{array}{l} |\theta| \leq \pi/2 \text{ で } P_{\zeta} = P(t) \cos \theta \\ \pi/2 \leq |\theta| \leq \pi \text{ で } P_{\zeta} = 0 \end{array} \right\} \quad (8.8)$$

円筒殻の形状諸量ならびに境界条件は、式(2.49)および次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{固定端 (} i=1 \text{): } \Delta U_{\xi} = \Delta U_{\theta} = \Delta W = \Delta \Phi_{\xi} = \Delta \Phi_{\theta} = 0 \\ \text{中央 (} i=N \text{): } \Delta U_{\xi} = \Delta \Phi_{\xi} = \Delta Q_{\xi} = \Delta N_{\xi\theta} = \Delta M_{\xi\theta} = 0 \end{array} \right\} \quad (8.9)$$

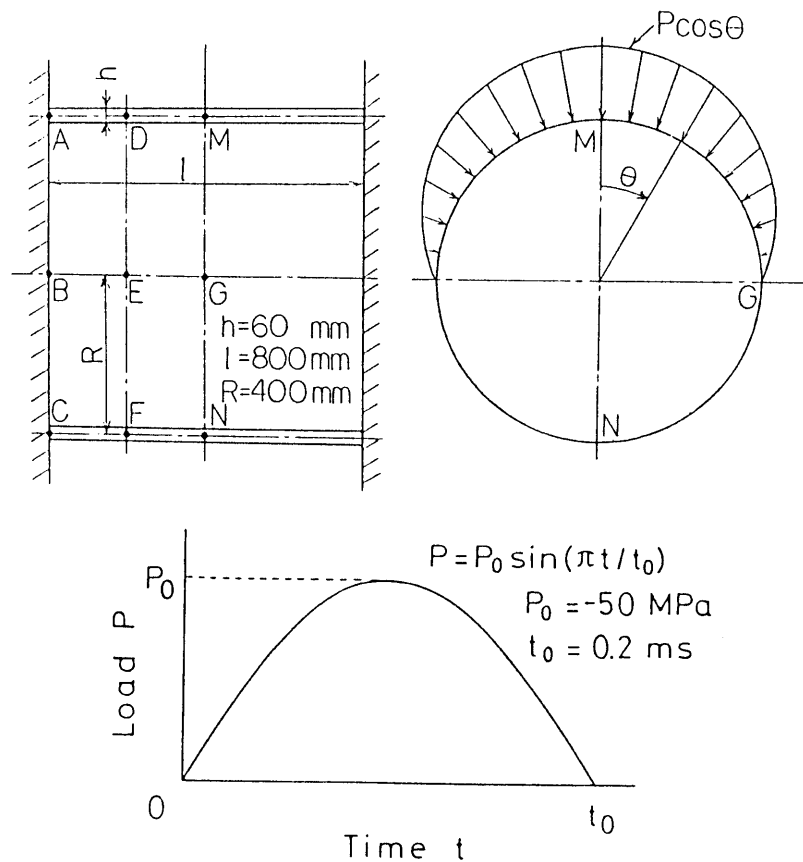


図 8.1 円筒殻と荷重

計算に用いた 6061-T6 アルミの材料定数は、式(5.23)に示すとおりである [54]。

差分点数は子午線方向に  $N=51$  とし、殻厚方向には19個の格子点を採用した。またフーリエ級数の項数は  $n=20$  とし、時間間隔  $\Delta t$  は  $\Delta t=1.0 \times 10^{-3}$  ms とした。これらの値は解の収束性と計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

#### 8.4 計算結果と考察

計算は衝撃荷重が負荷し始めてから 0.8 msまで行い、変位および内力の時間的变化を示すとともに、せん断変形を考慮しない薄肉殻理論による結果との比較を試みた。図8.2～図8.8において、実線および鎖線は本理論による結果であり、点線はせん断変形の影響を考慮しない薄肉殻理論（古典理論）による結果である。

図8.2は、円筒殻中央部の点M、G、Nにおける半径方向変位 $W$ 、円周方向変位 $U_\theta$ の時間的变化である。負荷直後まず点Mが内側に変位し始め、続いて点G、さらに遅れて点Nが外側に変位する。点Gは円周方向にもかなり大きく変位する。変形の初期においては、点Mの $W$ にわずかに両理論の差が認められる。時間の経過とともに点G、Nの $W$ にも差が生じて、これらの差は大きくなる傾向にある。点Gの $U_\theta$ にはほとんど両理論の差が見られない。

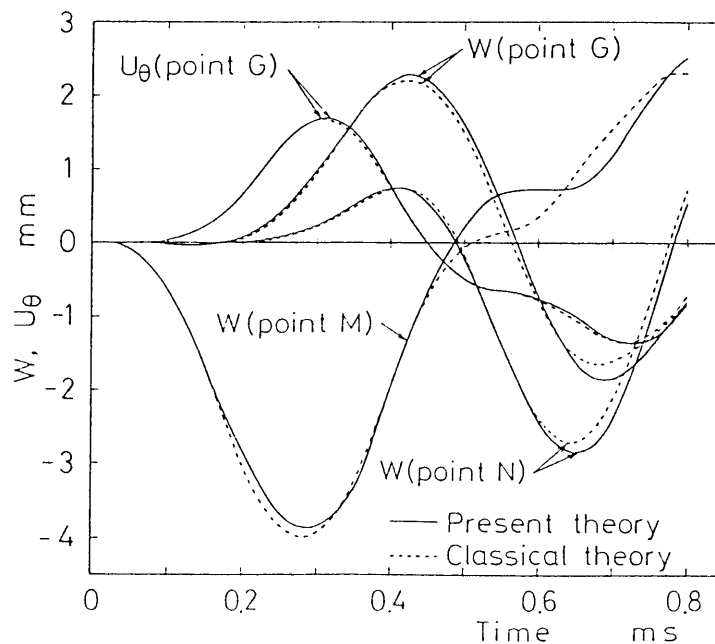


図 8.2 変位  $W$ ,  $U_\theta$  の時間的变化



次に、 $W$ 、 $U_\theta$ の中央断面MGNの分布の時間的变化を図8.3に、軸方向分布の時間的变化を図8.4に示す。図8.3より、 $t_1=0.28$  msのときMG部分で大きく内側に変形し、GN部分で少し外側に変形する。その後、時間の経過とともにまずM点近傍が外側に向かい、さらに遅れてGN部分が大きく内側に変形する。ここで、 $t_{1\sim 3}=0.28, 0.44, 0.64$  msは、それぞれ点M、G、Nにおける半径方向変位 $W$ の絶対値が、計算した時間内でほぼ最大になる時刻である。時刻 $t_1$ ではM点近傍に両理論の差が生じているが、 $t_2, t_3$ では円周方向にも広がっている。 $U_\theta$ には $W$ ほどの差は見られない。また図8.4より、 $W, U_\theta$ は $\theta=90^\circ$ と $180^\circ$ の子午線上では、固定端から中央部に向かってほぼ一定の割合で変形が増加することがわかる。なお軸方向変位 $U_z$ は $W, U_\theta$ に比べて非常に小さいので、図8.4はほぼ母線AM、BG、CNの時間的变化を示しており、図8.3と併せ考えると、円筒殻全体の形状変化の様子が大体把握できる。中央断面で生じた両理論の差は、子午線方向にもほぼ同程度の大きさで広がっている。一般に変形に関しては、本理論による結果と従来の古典理論（薄肉殻理論）による結果との間の差は小さい。

図8.5は点M、G、Nの面内力の変化を示す。変位成分の時間的变化に対応して、面内力成分にも点M、G、Nでそれぞれ立ち上がりに時間的な遅れが現われている。一般に $N_z$

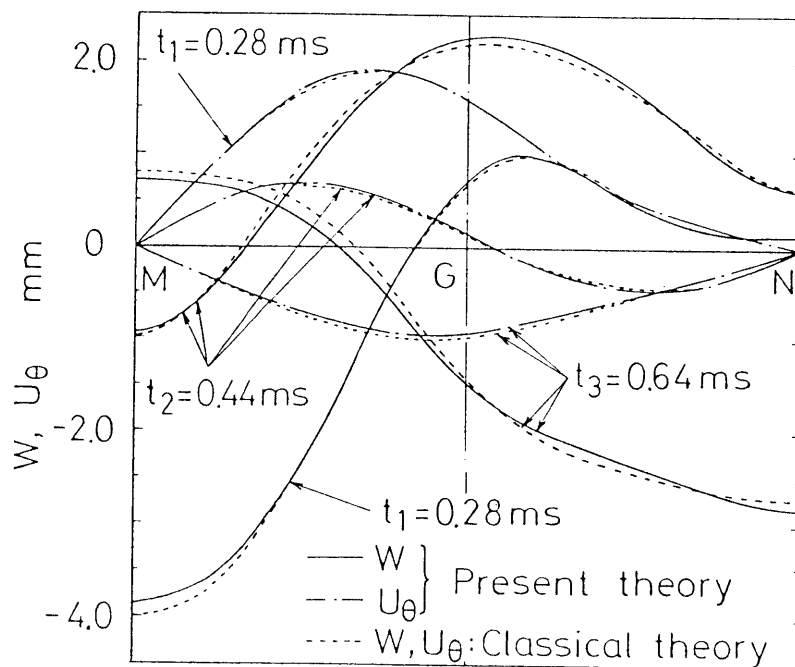


図 8.3 中央断面の  $W, U_\theta$

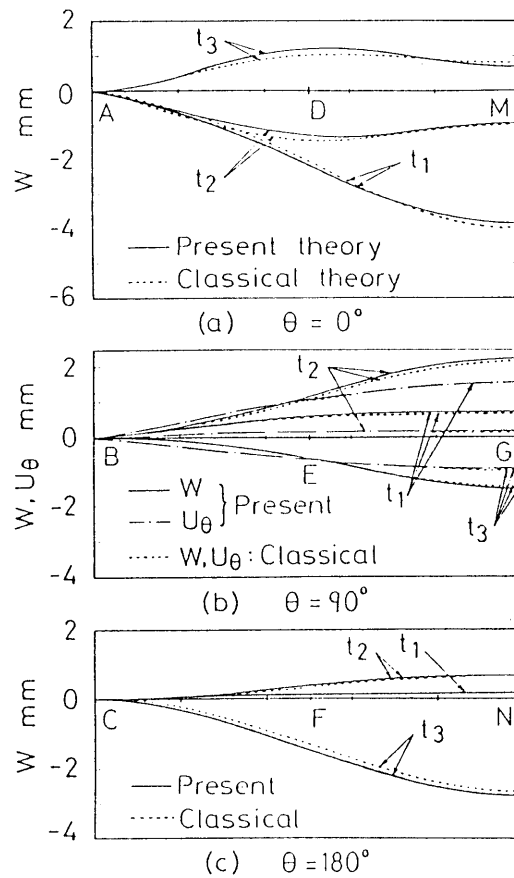


図 8.4 変位  $W$ ,  $U_\theta$  の子午線方向分布 (AM, BG, CN)

は  $N_\theta$  に比べて小さい。両理論による結果の差は、点 M の  $N_\theta$  では  $t = 0.15$  ms 以降に生じ、時間の経過とともにかなり大きくなる。点 G, N の  $N_\theta$  ならびに各点の  $N_\xi$  は差が小さい。

図 8.6 は点 A, B, G の曲げモーメントの変化である。点 G における  $M_\theta$  は時間に対して緩やかな変化をする。点 A の  $M_\xi$  は最初の立ち上がりから両理論による結果に差が生じ、時間の経過とともに大きな差が生じている。

図 8.7 は母線 AM, BG, CN 上の各合応力成分の分布の時間的変化を示したものである。図には  $N_{\theta\xi}$  の分布の形は示さなかったが、 $N_{\xi\theta}$  の分布とほぼ一致する。 $N_{\xi\theta}$  成分を除いて固定端付近よりも中央付近で大きく、特に  $N_\theta$  成分が顕著である。また  $N_\xi$  は  $N_\theta$  に比べ、分布の変動幅は小さい。本理論による結果と従来の古典理論による結果との差は、AM 上で大きく、時間の経過とともに顕著になっている。合モーメント成分の子午線方向分布は図には示さなかったが、BG, CN 上に比べ AM 上で大きな変動を示し、両理論の差は合応力成分と同じく AM 上で大きい。

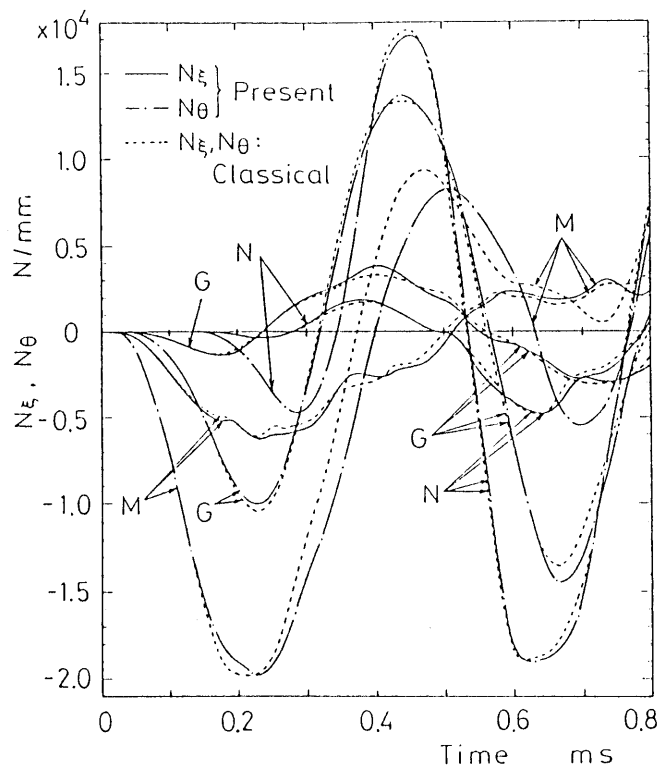


図 8.5 合応力  $N_{\xi}$ ,  $N_{\theta}$  の時間的变化

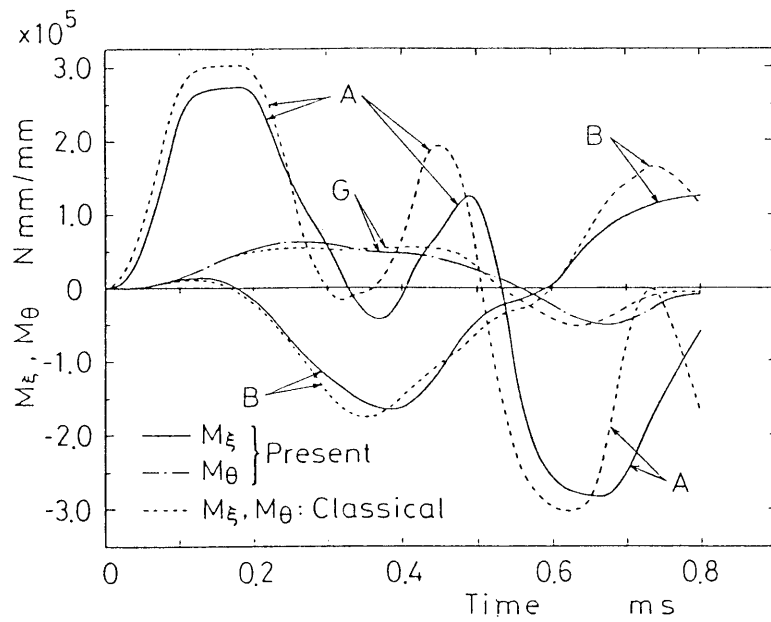


図 8.6 合モーメント  $M_{\xi}$ ,  $M_{\theta}$  の時間的变化

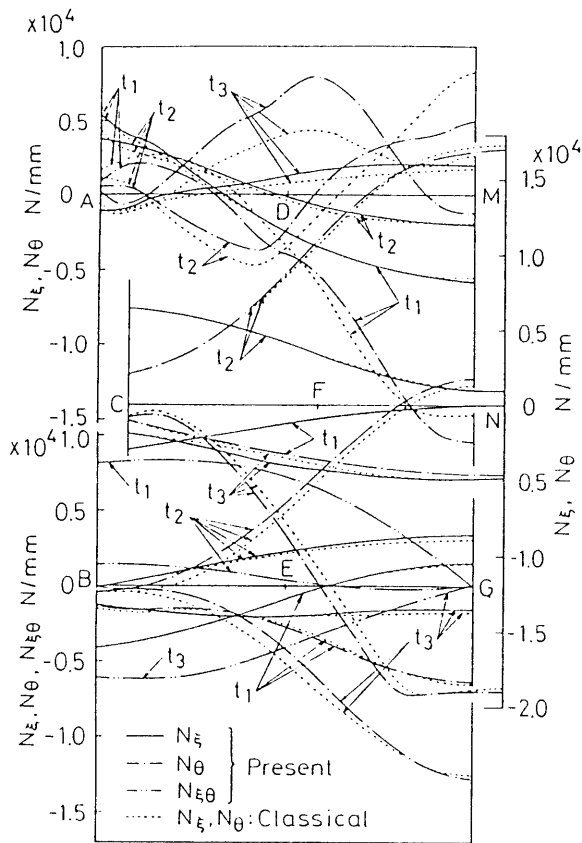


図 8.7 合応力  $N_{\xi}$ ,  $N_{\theta}$ ,  $N_{\xi\theta}$  の  
子午線方向分布 (AM, BG, CN)

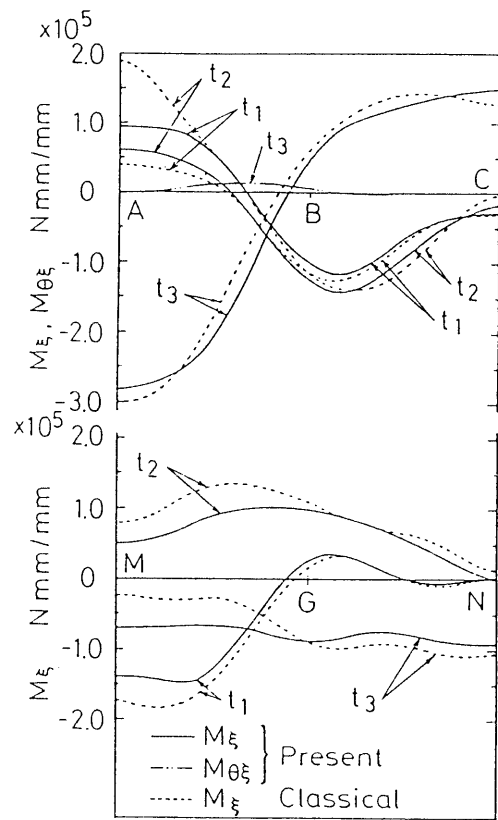
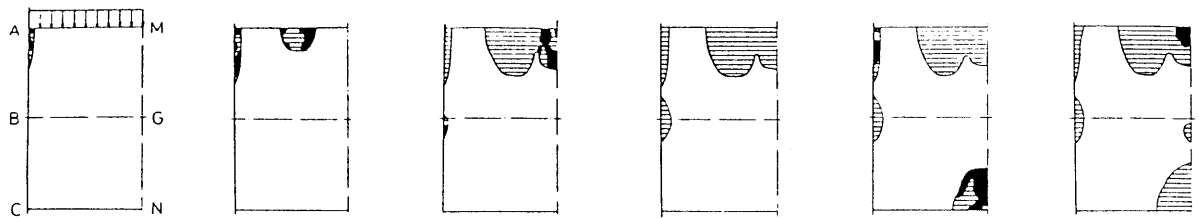


図 8.8 合モーメント  $M_{\xi}$ ,  $M_{\theta\xi}$  の  
円周方向分布 (AC, MN)

図8.8 に合モーメント  $M_{\xi}$ ,  $M_{\theta\xi}$  の周方向分布の時間的变化を示す。固定端の点A近傍で変動量が最も大きく、点M近傍でも大きな値を示している。両理論による結果の差は、図には示していないが合応力成分も含めて、衝撃荷重を直接受ける上半分で大きく、反対側の下半分で小さくなっている。また  $M_{\theta\xi}$  の分布は一般に小さく、やや大きな値となる時刻  $t_3$  の結果のみを示した。  $M_{\theta}$  の分布は図には示していないが、  $M_{\xi}$  と同様の分布を示し、大きさはほぼ1/2程度である。

最後に、本理論による殻の内外面の降伏域の進展の様子を図8.9に示す。図より、まず  $t = 0.085$  ms のとき点Aの内表面で降伏を起こし、続いてAMの中間部で降伏域が発生し、そこから点Mならびに周方向に向かって次第に広がっていく。その後、0.44 msあたりで点N近傍の内面に、さらに遅れて0.64 msには、点N近傍の外表面にも降伏域が現われる。降伏した領域は殻の振動とともに、部分的に除荷ならびに再降伏を繰り返す。降伏している領域は、両理論による結果の差が大きく現われている領域でもある。N点近傍もさらに時間が経過すれば、差が大きく現れてくるものと思われる。

(a) External surface



(b) Internal surface

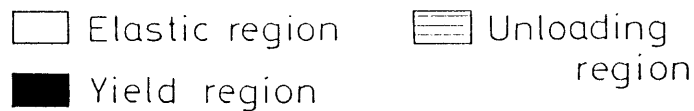
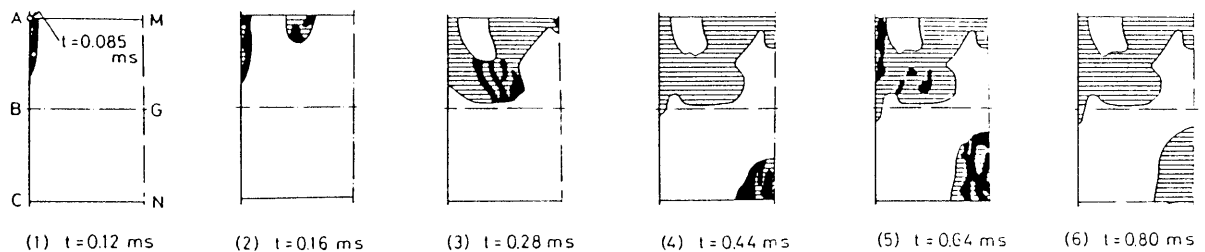


図 8.9 降伏領域の進展

なおひずみならびにひずみ速度の最大値（絶対値）は、ともに点Aの内表面の子午線方向に生じ、各々  $t = 0.19 \text{ ms}$  で2.5%、 $t = 0.59 \text{ ms}$  で200 1/s である。

以上より、両端固定の 6061-T6 アルミ円筒殻（殻厚と平均直径の比 0.075）の半周部分に、余弦波状の衝撃外圧が時間に対して正弦波状に作用する問題を取り扱い、内力及び変位の時間的変化の様子を解析した結果、次の事柄が明らかになった。

- (1) 変形はまず殻の荷重側の部分が半径方向内側に変位し、続いて横側が、さらに遅れて荷重の反対側が半径方向外側に変位する。
- (2) 面内力  $N_\theta$  は円筒殻中央部で大きくなり、曲げモーメント成分は端部の荷重側で大きくなる。
- (3) 本理論による結果と従来のせん断変形の影響を無視した古典理論による結果との差は、変位成分に関しては小さかったが、内力成分では大きく、特に降伏領域で顕著である。この程度の厚さの円筒殻でも荷重が大きくなり、降伏領域が広がると、せん断変形を考慮に入れた解析が必要であることがわかる。

計算には FACOM M-200 を使用し、本数値例の計算時間はおよそ 200 分である。

## 第9章 厚肉回転対称殻の動的応答に対する回転慣性の影響 [102,103]

第8章で厚肉回転対称殻の弾/粘塑性動的応答問題について、せん断変形の影響を考慮に入れて解析を行ったが、本章ではさらに回転慣性を考慮に入れた解法を示す。すなわち、弾/粘塑性の構成関係には、Perzyna の理論 [53] に基づく Fyfe の構成式 [54] を用い、厚肉の場合に考慮すべき殻厚方向のせん断変形と回転慣性には、Naghdi の理論 [38] を採用する。導かれる基礎式の数値解法には、差分法を適用する。

数値例として衝撃内圧を受ける両端固定の厚肉円筒殻の問題を取り上げ、内力および変位の時間的变化の様子を解析し、回転慣性の影響を考察する。

### 9.1 回転慣性を考慮した厚肉回転対称殻の基礎関係式

本章の解法には、厚肉殻の動的応答問題を取り扱った第8章の諸式と同一のものを多く使用するので、ここでは回転慣性を考慮に入れることにより前章と異なる基礎式のみを記述する。

Naghdi は等方性材料からなる一様厚さの弾性薄肉殻を対象として、微小変形理論のもとで Reissner の変分原理 [115] を適用して、殻厚方向のせん断変形と回転慣性を考慮に入れた運動方程式を導いている [38]。本章ではこの Naghdi の理論にならって、Reissner の変分原理を回転対称殻の弾/粘塑性動的応答問題に適用することにより、回転慣性を考慮に入れた運動方程式、ならびに合応力、合モーメントと変位、回転との関係式を得る。

まず、Reissner の変分原理を本問題に適用すると、次式のように与えられる。ただし、垂直応力  $\sigma_{\xi}$  は省略する。

$$\begin{aligned}
 & \delta \int_V \int_{\Delta t} [\Delta \sigma_{\xi} \Delta \varepsilon_{\xi} + \Delta \sigma_{\theta} \Delta \varepsilon_{\theta} + 2(\Delta \sigma_{\xi\theta} \Delta \varepsilon_{\xi\theta} + \Delta \sigma_{\xi\zeta} \Delta \varepsilon_{\xi\zeta} \\
 & \quad + \Delta \sigma_{\theta\zeta} \Delta \varepsilon_{\theta\zeta}) - \Lambda - 0.5 \rho_0 \{ [\partial(\Delta U_{\xi})/\partial t]^2 + [\partial(\Delta U_{\theta})/\partial t]^2 \\
 & \quad + [\partial(\Delta W)/\partial t]^2 \} ] (1 + \zeta/R_{\xi}) (1 + \zeta/R_{\theta}) a r d \xi d \theta d \zeta d t \\
 & - \delta \int_S \int_{\Delta t} [\{ \Delta P_{\xi}^- \Delta U_{\xi}^- + \Delta P_{\theta}^- \Delta U_{\theta}^- + \Delta P_{\zeta}^- \Delta W^- \} (1 - h/(2R_{\xi})) \\
 & \quad \times (1 - h/(2R_{\theta})) - \{ \Delta P_{\xi}^+ \Delta U_{\xi}^+ + \Delta P_{\theta}^+ \Delta U_{\theta}^+ + \Delta P_{\zeta}^+ \Delta W^+ \} \\
 & \quad \times (1 + h/(2R_{\xi})) (1 + h/(2R_{\theta})) ] a r d \xi d \theta d t = 0
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

ここで、 $\Lambda$ は  $\partial \Lambda / \partial (\Delta \sigma_{\xi}) = \Delta \varepsilon_{\xi}$ 、 $\partial \Lambda / \partial (\Delta \sigma_{\theta}) = \Delta \varepsilon_{\theta}$  などを満たす次の補ひずみエネルギー関数である。

$$\Lambda = (1/2E) \left\{ (\Delta \sigma_{\xi} + \Delta \sigma_{\xi}^{vp})^2 + (\Delta \sigma_{\theta} + \Delta \sigma_{\theta}^{vp})^2 - 2\nu (\Delta \sigma_{\xi} + \Delta \sigma_{\xi}^{vp}) (\Delta \sigma_{\theta} + \Delta \sigma_{\theta}^{vp}) + 2(1+\nu) \{ (\Delta \sigma_{\xi\theta} + \Delta \sigma_{\xi\theta}^{vp})^2 + (\Delta \sigma_{\xi\zeta} + \Delta \sigma_{\xi\zeta}^{vp})^2 + (\Delta \sigma_{\theta\zeta} + \Delta \sigma_{\theta\zeta}^{vp})^2 \} \right\} \quad (9.2)$$

また  $P_{\xi}^-$ 、 $P_{\theta}^-$ 、 $P_{\zeta}^-$  および  $P_{\xi}^+$ 、 $P_{\theta}^+$ 、 $P_{\zeta}^+$ 、ならびに  $U_{\xi}^-$ 、 $U_{\theta}^-$ 、 $W^-$  および  $U_{\xi}^+$ 、 $U_{\theta}^+$ 、 $W^+$  は、殻の内外面に作用する荷重、ならびに内外面の変位を示す。

式(9.1)、(9.2)に、応力成分と内力成分の関係式(3.16)、ひずみ、曲率の変化量と変位、回転の関係式(3.4)~(3.6)を代入し、積分に関する近似式(3.13)を用いて整理すると、増分形で表した運動方程式(9.3)および合応力と合モーメントの式(9.5)が得られる。

まず運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial(\Delta N_{\xi})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta N_{\xi} - \Delta N_{\theta}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta N_{\theta\xi})}{\partial \theta} + \omega_{\xi}(\Delta Q_{\xi}) + a \left[ \Delta P_{\xi} - \rho_0 h \left\{ \left( 1 + \frac{h^2}{12R_s R_{\theta}} \right) \frac{\partial^2(\Delta U_{\xi})}{\partial t^2} + \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_{\theta}} \right) \frac{\partial^2(\Delta \Phi_{\xi})}{\partial t^2} \right\} \right] = 0 \\ & \frac{\partial(\Delta N_{\theta\xi})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta N_{\theta\xi} + \Delta N_{\theta\xi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta N_{\theta})}{\partial \theta} + \omega_{\theta}(\Delta Q_{\theta}) + a \left[ \Delta P_{\theta} - \rho_0 h \left\{ \left( 1 + \frac{h^2}{12R_s R_{\theta}} \right) \frac{\partial^2(\Delta U_{\theta})}{\partial t^2} + \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_{\theta}} \right) \frac{\partial^2(\Delta \Phi_{\theta})}{\partial t^2} \right\} \right] = 0 \\ & \frac{\partial(\Delta Q_{\xi})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta Q_{\xi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta Q_{\theta})}{\partial \theta} - (\omega_{\xi} \Delta N_{\xi} + \omega_{\theta} \Delta N_{\theta}) + a \left[ \Delta P_{\zeta} - \rho_0 h \left( 1 + \frac{h^2}{12R_s R_{\theta}} \right) \frac{\partial^2(\Delta W)}{\partial t^2} \right] = 0 \\ & \Delta Q_{\xi} - \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial(\Delta M_{\xi})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta M_{\xi} - \Delta M_{\theta}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta M_{\theta\xi})}{\partial \theta} \right] - \Delta \bar{M}_{\xi} + \rho_0 \frac{h^3}{12} \left\{ \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_{\theta}} \right) \frac{\partial^2(\Delta U_{\xi})}{\partial t^2} + \left( 1 + \frac{3h^2}{20R_s R_{\theta}} \right) \frac{\partial^2(\Delta \Phi_{\xi})}{\partial t^2} \right\} = 0 \\ & \Delta Q_{\theta} - \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial(\Delta M_{\theta\xi})}{\partial \xi} + \gamma(\Delta M_{\theta\xi} + \Delta M_{\theta\xi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta M_{\theta})}{\partial \theta} \right] - \Delta \bar{M}_{\theta} + \rho_0 \frac{h^3}{12} \left\{ \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_{\theta}} \right) \frac{\partial^2(\Delta U_{\theta})}{\partial t^2} + \left( 1 + \frac{3h^2}{20R_s R_{\theta}} \right) \frac{\partial^2(\Delta \Phi_{\theta})}{\partial t^2} \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

ここで、 $P_{\xi}$ 、 $P_{\theta}$ 、 $P_{\zeta}$  および  $\bar{M}_{\xi}$ 、 $\bar{M}_{\theta}$  は殻の中央面の単位面積あたりの分布荷重の成分であり、殻の内外面に作用する分布荷重  $\{P_{\xi}^-, P_{\theta}^-, P_{\zeta}^-\}$ 、 $\{P_{\xi}^+, P_{\theta}^+, P_{\zeta}^+\}$  と、それぞれ式(3.2)および次の関係を有する。

$$\bar{M}_{\xi} = -\frac{h}{2}(P_{\xi}^+ h^+ + P_{\xi}^- h^-), \quad \bar{M}_{\theta} = -\frac{h}{2}(P_{\theta}^+ h^+ + P_{\theta}^- h^-) \quad (9.4)$$

ただし、 $P_{\xi}^+$ 、 $P_{\xi}^-$ などは座標方向のものを正とし、 $P_{\xi}^+$ などはこれと反対方向のものを正とする。また、 $h^{\pm}$ は式(3.3)で表される。

次に、合応力および合モーメントと変位および回転との関係は、

$$\begin{aligned}
 \Delta N_{\xi} &= Eh/a(1-\nu^2) \left[ \frac{\partial(\Delta U_{\xi})}{\partial \xi} + \omega_{\xi} \Delta W + \nu \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_{\theta})}{\partial \theta} + \gamma \Delta U_{\xi} + \omega_{\theta} \Delta W \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{h^2}{12a} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \frac{\partial(\Delta \Phi_{\xi})}{\partial \xi} \right] - \Delta N_{\xi}^{vp} \\
 \Delta N_{\theta} &= Eh/a(1-\nu^2) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_{\theta})}{\partial \theta} + \gamma \Delta U_{\xi} + \omega_{\theta} \Delta W + \nu \left\{ \frac{\partial(\Delta U_{\xi})}{\partial \xi} + \omega_{\xi} \Delta W \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{h^2}{12a} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta \Phi_{\theta})}{\partial \theta} + \gamma \Delta \Phi_{\xi} \right\} \right] - \Delta N_{\theta}^{vp} \\
 \Delta N_{\xi\theta} &= Eh/2a(1+\nu) \left[ \frac{\partial(\Delta U_{\theta})}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_{\xi})}{\partial \theta} - \gamma \Delta U_{\theta} + \frac{h^2}{12a^2} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \left\{ \omega_{\xi} \frac{\partial(\Delta U_{\theta})}{\partial \xi} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - a \frac{\partial(\Delta \Phi_{\theta})}{\partial \xi} \right\} \right] - \Delta N_{\xi\theta}^{vp} \\
 \Delta N_{\theta\xi} &= Eh/2a(1+\nu) \left[ \frac{\partial(\Delta U_{\theta})}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_{\xi})}{\partial \theta} - \gamma \Delta U_{\theta} + \frac{h^2}{12a^2} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) \left\{ \omega_{\theta} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_{\xi})}{\partial \theta} - \gamma \Delta U_{\theta} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - a \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta \Phi_{\xi})}{\partial \theta} - \gamma \Delta \Phi_{\theta} \right) \right\} \right] - \Delta N_{\theta\xi}^{vp} \\
 \Delta M_{\xi} &= Eh^3/12a(1-\nu^2) \left[ \frac{\partial(\Delta \Phi_{\xi})}{\partial \xi} + \nu \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta \Phi_{\theta})}{\partial \theta} + \gamma \Delta \Phi_{\xi} \right\} - \frac{1}{a} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \left\{ \frac{\partial(\Delta U_{\xi})}{\partial \xi} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \omega_{\xi} (\Delta W) \right\} \right] - \Delta M_{\xi}^{vp} \\
 \Delta M_{\theta} &= Eh^3/12a(1-\nu^2) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta \Phi_{\theta})}{\partial \theta} + \gamma \Delta \Phi_{\xi} + \nu \frac{\partial(\Delta \Phi_{\xi})}{\partial \xi} - \frac{1}{a} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_{\theta})}{\partial \theta} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \gamma \Delta U_{\xi} + \omega_{\theta} \Delta W \right\} \right] - \Delta M_{\theta}^{vp} \\
 \Delta M_{\xi\theta} &= Eh^3/24a(1+\nu) \left[ \frac{\partial(\Delta \Phi_{\theta})}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta \Phi_{\xi})}{\partial \theta} - \gamma \Delta \Phi_{\theta} + \frac{1}{a} (\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) \frac{\partial(\Delta U_{\theta})}{\partial \xi} \right] - \Delta M_{\xi\theta}^{vp} \\
 \Delta M_{\theta\xi} &= Eh^3/24a(1+\nu) \left[ \frac{\partial(\Delta \Phi_{\theta})}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta \Phi_{\xi})}{\partial \theta} - \gamma \Delta \Phi_{\theta} + \frac{1}{a} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta U_{\xi})}{\partial \theta} - \gamma \Delta U_{\theta} \right\} \right] - \Delta M_{\theta\xi}^{vp} \\
 \Delta Q_{\xi} &= 5Eh/12a(1+\nu) \left[ \frac{\partial(\Delta W)}{\partial \xi} - \omega_{\xi} \Delta U_{\xi} + a \Delta \Phi_{\xi} \right] - \Delta Q_{\xi}^{vp} \\
 \Delta Q_{\theta} &= 5Eh/12a(1+\nu) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\Delta W)}{\partial \theta} - \omega_{\theta} \Delta U_{\theta} + a \Delta \Phi_{\theta} \right] - \Delta Q_{\theta}^{vp}
 \end{aligned}
 \tag{9.5}$$

で、フーリエ係数で表した式(3.20)に対応する。

構成関係には式(5.6)~(5.9)に示すように、Perzynaの理論[53]に基づくFyfeの構成式[54]を用いる。殻厚方向の垂直応力 $\sigma_{\xi}$ を前章と同様に無視すると、応力-ひずみ関係式は式(8.2)~(8.4)で与えられる。



## 9.2 フーリエ級数展開と無次元方程式

非軸対称問題を解析するために、各変数を  $\theta$  方向にフーリエ級数で表し、その係数を定める。各変数のフーリエ級数展開において、第3章および第8章で展開した変数〔式(2.22), (3.17)〕と同様に、 $\bar{M}_\xi$ 、 $\bar{M}_\theta$  についても次式のように展開する。

$$\{ \Delta \bar{M}_\xi, \Delta \bar{M}_\theta \} = \sigma_0 h \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \bar{m}_\xi^{(n)} \cos n \theta, \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \bar{m}_\theta^{(n)} \sin n \theta \right\} \quad (9.6)$$

平衡方程式(9.3)をフーリエ級数を用いて書き表すと、次式のようになる。ここでフーリエ係数の添字 ( $n$ ) は省略する。

$$\left. \begin{aligned} & (\Delta n_\epsilon)' + \gamma(\Delta n_\epsilon - \Delta n_\theta) + \frac{n}{\rho} \Delta n_{\theta\epsilon} + \omega_\epsilon \Delta q_\epsilon + \Delta p_\epsilon - \frac{a\rho_0}{E} \left[ a \left( 1 + \frac{h^2}{12R_s R_\theta} \right) \Delta \ddot{u}_\epsilon \right. \\ & \quad \left. + \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) \Delta \ddot{\varphi}_\epsilon \right] = 0 \\ & (\Delta n_{\theta\theta})' + \gamma(\Delta n_{\theta\theta} + \Delta n_{\theta\epsilon}) - \frac{n}{\rho} \Delta n_\theta + \omega_\theta \Delta q_\theta + \Delta p_\theta - \frac{a\rho_0}{E} \left[ a \left( 1 + \frac{h^2}{12R_s R_\theta} \right) \Delta \ddot{u}_\theta \right. \\ & \quad \left. + \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) \Delta \ddot{\varphi}_\theta \right] = 0 \\ & (\Delta q_\epsilon)' + \gamma \Delta q_\epsilon + \frac{n}{\rho} \Delta q_\theta - (\omega_\epsilon \Delta n_\epsilon + \omega_\theta \Delta n_\theta) + \Delta p_\epsilon - \frac{a^2 \rho_0}{E} \left( 1 + \frac{h^2}{12R_s R_\theta} \right) \Delta \ddot{w} = 0 \\ & \Delta q_\epsilon - \lambda^2 \left[ (\Delta m_\epsilon)' + \gamma(\Delta m_\epsilon - \Delta m_\theta) + \frac{n}{\rho} \Delta m_{\theta\epsilon} \right] - \Delta \bar{m}_\epsilon + \frac{h^2 \rho_0}{12 E} \left[ a \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) \Delta \ddot{u}_\epsilon \right. \\ & \quad \left. + \left( 1 + \frac{3h^2}{20R_s R_\theta} \right) \Delta \ddot{\varphi}_\epsilon \right] = 0 \\ & \Delta q_\theta - \lambda^2 \left[ (\Delta m_{\theta\theta})' + \gamma(\Delta m_{\theta\theta} + \Delta m_{\theta\epsilon}) - \frac{n}{\rho} \Delta m_\theta \right] - \Delta \bar{m}_\theta + \frac{h^2 \rho_0}{12 E} \left[ a \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) \Delta \ddot{u}_\theta \right. \\ & \quad \left. + \left( 1 + \frac{3h^2}{20R_s R_\theta} \right) \Delta \ddot{\varphi}_\theta \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

ここに、 $\lambda = h / a$ 。

式(9.5)をフーリエ級数を用いて書き改め(式(3.20))、式(9.7)に代入すると、5変数  $\Delta \mathbf{u}_\xi^{(n)}$ 、 $\Delta \mathbf{u}_\theta^{(n)}$ 、 $\Delta \mathbf{w}^{(n)}$ 、 $\Delta \varphi_\xi^{(n)}$ 、 $\Delta \varphi_\theta^{(n)}$  に関する次の五元連立二階微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & A_1 \mathbf{z}'' + A_2 \mathbf{z}' + A_3 \mathbf{z} \\ & = A_4 \mathbf{N}' + A_5 \mathbf{N} + A_6 \mathbf{Q}' + A_7 \mathbf{Q} + A_8 \mathbf{M}' + A_9 \mathbf{M} + A_{10} \mathbf{P} + A_{11} \ddot{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (9.8)$$

ここで、 $A_1 \sim A_{11}$ は殻の形状と材質によって定まる $5 \times 5$ の行列であり、 $A_1 \sim A_9$ は式(3.18)の各係数〔式(3.19)〕と同一である。 $A_{10}$ 、 $A_{11}$ 、 $\mathbf{z}$ 、 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{P}$ は、

$$\left. \begin{aligned}
 A_{10} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_{11} &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 \\ 0 & 0 & c_5 & 0 & 0 \\ c_6 & 0 & 0 & c_7 & 0 \\ 0 & c_8 & 0 & 0 & c_9 \end{bmatrix} \\
 c_1 = c_3 = c_5 &= \frac{a^2 \rho_0}{E} \left( 1 + \frac{h^2}{12 R_s R_\theta} \right) \\
 c_2 = c_4 = -c_6 = -c_8 &= \frac{a \rho_0}{E} \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) \\
 c_7 = c_9 &= -\frac{\rho_0}{E} \frac{h^2}{12} \left( 1 + \frac{3h^2}{20 R_s R_\theta} \right) \\
 \mathbf{z} &= \{ \Delta u_\xi^{(n)}, \Delta u_\theta^{(n)}, \Delta w^{(n)}, \Delta \varphi_\xi^{(n)}, \Delta \varphi_\theta^{(n)} \}^T, \\
 \mathbf{N} &= \{ \Delta n_\xi^{vp(n)}, \Delta n_\theta^{vp(n)}, \Delta n_{\xi\theta}^{vp(n)}, \Delta n_{\theta\xi}^{vp(n)}, 0 \}^T \\
 \mathbf{Q} &= \{ \Delta q_\xi^{vp(n)}, \Delta q_\theta^{vp(n)}, 0, 0, 0 \}^T \\
 \mathbf{M} &= \{ \Delta m_\xi^{vp(n)}, \Delta m_\theta^{vp(n)}, \Delta m_{\xi\theta}^{vp(n)}, \Delta m_{\theta\xi}^{vp(n)}, 0 \}^T \\
 \mathbf{P} &= \{ \Delta p_\xi^{(n)}, \Delta p_\theta^{(n)}, \Delta p_\zeta^{(n)}, \Delta \bar{m}_\xi^{(n)}, \Delta \bar{m}_\theta^{(n)} \}^T
 \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

である。

その他の基礎式、すなわち粘塑性に関する内力成分、応力成分と粘塑性ひずみ成分との関係式等は、第3章および第8章で取り扱った式〔例えば、式(3.22),(3.23)〕と同じである。

### 9.3 数値計算法

ある任意の計算段階における変位と回転の増分は、式(9.8)を適当な境界条件式のもとで解けば得られ、またこれらを用いて内力成分の増分は、式(9.5)から求められる。式(9.8)の解を差分法によって数値的に求める際、境界と不連続点では前進および後退差分式を、その他の点では中間差分式を用いる。慣性項には Houbolt の後退時間差分式(7.13)、(7.14)を用いる。これらの差分式によって得られる $\mathbf{z}_{i,j}$ に関する多元連立方程式〔式(7.15)〕の各係数 $A_i \sim D_{i,j}$ は、式(9.8)の各係数〔 $A_1 \sim A_9$ は式(3.19)で、又 $A_{10}$ 、 $A_{11}$ は式(9.

9)で表される] ならびに式(7.13)の  $a_j \sim d_j$  を用いて、式(8.7)で与えられる。一般に弾／粘塑性問題の解は、これらの各計算段階の増分を積分することによって得られる。

#### 9.4 計算例

計算例として、両端固定の 6061-T6 アルミ厚肉円筒殻に、衝撃内圧が作用する場合(図 9.1) を取り上げる。この材料の応力-ひずみ線図は図5.3に示され、静的応力-ひずみ線図は弾完全塑性体で表されるとともに、ひずみ速度依存性が小さい材料である。円筒殻の形状は、全長  $l = 800$  mm、半径  $R = 400$  mm とし、殻厚  $h = 20, 60, 120$  mm の 3 種類について計算を行い、回転慣性の影響の違いを明かにする。内圧は、各殻厚の場合に対して、無次元量  $\rho \zeta^{(0)}$  [ $= \alpha P \zeta / (h \sigma_0)$ ] が等しくなるように、 $P_0 = 20, 60, 120$  MPa とする。

円筒殻の形状諸量、境界条件式および計算に用いる 6061-T6 アルミの材料定数は、次のようである。

形状諸量：

$$\alpha = R, \quad \Delta \xi = l / (2R(N-1)), \quad \rho = 1, \quad \rho' = 0, \quad \gamma = 0, \quad \omega_\theta = 1, \quad \omega_\xi = \omega_{\xi'} = 0$$

(9.10)

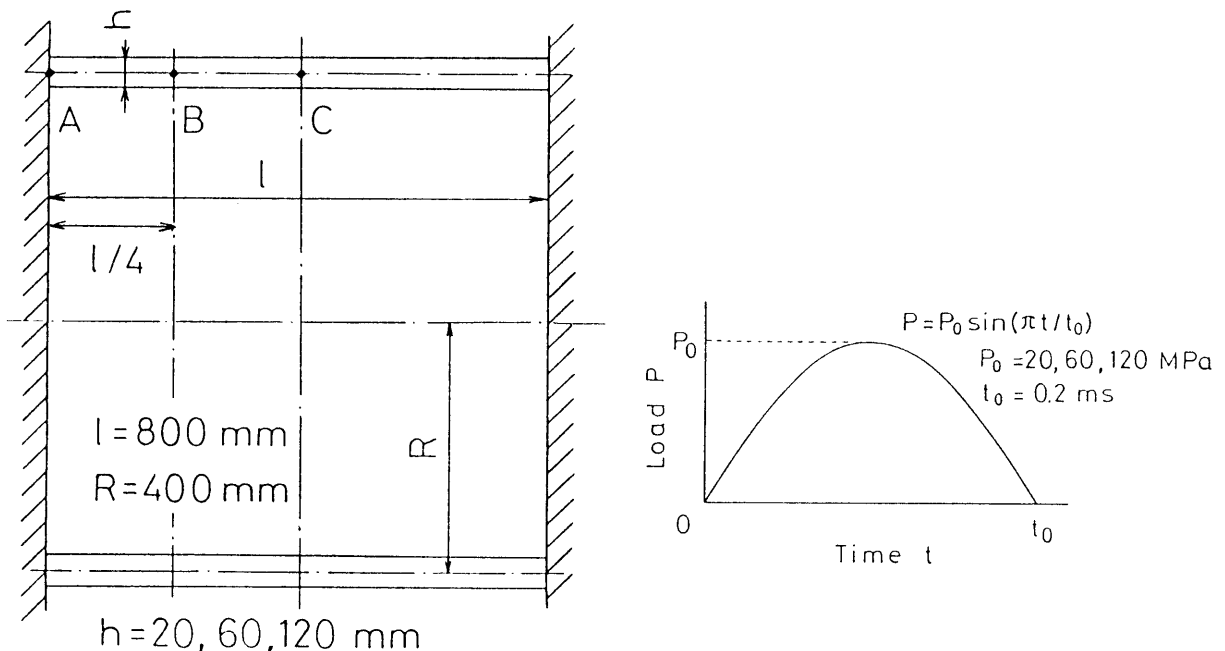


図 9.1 円筒殻と荷重

境界条件式：

$$\left. \begin{array}{l} \text{固定端 ( } i=1 \text{ ) : } \quad \Delta U_{\xi} = \Delta U_{\theta} = \Delta W = \Delta \Phi_{\xi} = \Delta \Phi_{\theta} = 0 \\ \text{中央 ( } i=N \text{ ) : } \quad \Delta U_{\xi} = \Delta \Phi_{\xi} = \Delta Q_{\xi} = \Delta N_{\xi\theta} = \Delta M_{\xi\theta} = 0 \end{array} \right\} \quad (9.11)$$

材料定数 [54]：

$$\left. \begin{array}{l} E = 71.3 \text{ GPa, } \nu = 0.33, \rho_0 = 2.71 \text{ g/cm}^3, \alpha = 2, \gamma_0 = 5000 \text{ 1/s} \\ \sigma_Y = \sigma^* = 294 \text{ MPa} \end{array} \right\} \quad (9.12)$$

差分点数は子午線方向に  $N=51$  とし、殻厚方向には41個の格子点を採用する。時間間隔  $\Delta t$  は  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$  ms とする。これらの値は解の収束性と計算機の容量および計算時間を考慮して決定した。

## 9.5 計算結果と考察

図9.2～9.6において、実線は本理論による結果を、破線は殻厚方向のせん断変形のみを考慮し、回転慣性を無視した理論による結果を表す。また一点鎖線は、せん断変形も回転慣性も共に省略した古典理論 (Sanders, Jr.の理論 [32]) による結果であり、 $h = 60$  mm の場合についてのみ示す。殻厚が 20, 60, 120 mm の3種類の円筒殻について、作用する内圧の殻厚中央面での大きさを無次元量  $w_{\xi}$  が等しくなるようにとったので、 $W$ ,  $N_{\xi}/h$ ,  $N_{\theta}/h$ ,  $M_{\xi}/h^2$ ,  $M_{\theta}/h^2$  の最大値 (絶対値) は、3者ともほぼ同じ値を示し [ $h = 20$  mm の場合を基準にすると、10%以内]、周期も似た応答をしている。なお図には示していないが、 $h = 3$  mm の円筒殻についても同一の  $w_{\xi}$  に対して同様な計算を行い、すべての成分において回転慣性の影響は見られなかった。

ここで説明を容易にするために、円筒殻の固定端、固定端より  $l/4$  離れた点および中央断面上の点をそれぞれ点A, B, Cとする (図9.1)。

図9.2は、点Bおよび点Cの変位成分  $W$  の時間的变化を示す。点Bと点Cにおける値を比較すると、殻厚の比較的薄い場合には、点Bの変位のほうが点Cの変位よりもむしろ大きいが、殻厚が大きくなると、点Cの変位のほうが大きくなる。また殻厚の比較的薄い  $h = 20$  mm の場合には実線と破線の差はわずかであるが、殻厚が大きくなるにつれて差が大きくなる傾向にある。また回転慣性の影響は、古典理論による結果との差に比べれば非常に小さい。

図9.3は、点Aおよび点Cの軸方向の面内力  $N_{\xi}$  の時間的变化である。点Aと点Cにおける値を比較すると、殻厚が比較的薄い場合には、両者の値はほぼ等しいが、殻厚が大きくなると、点Cの値が点Aの値よりも大きくなる傾向がある。

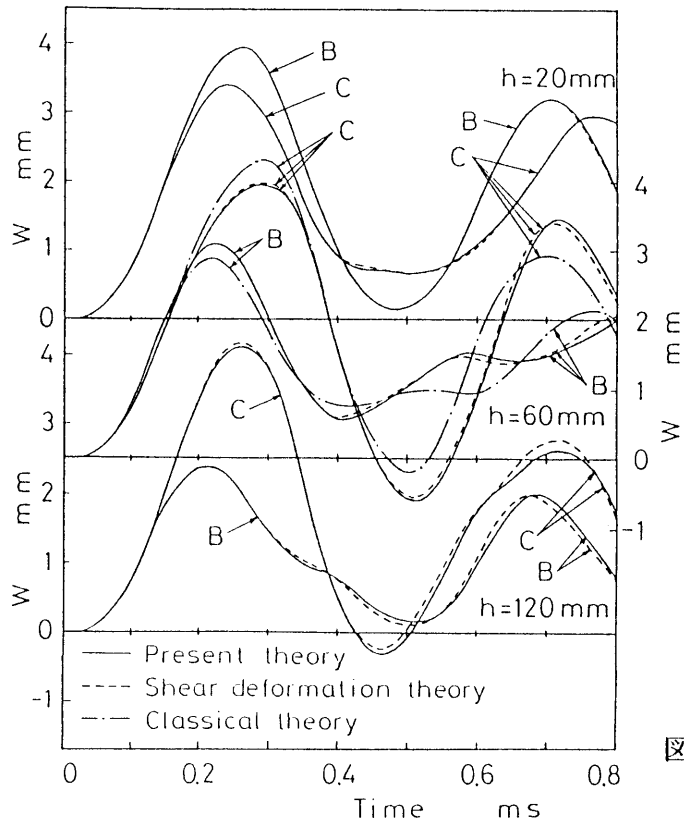


図 9.2 変位  $W$  の時間的变化

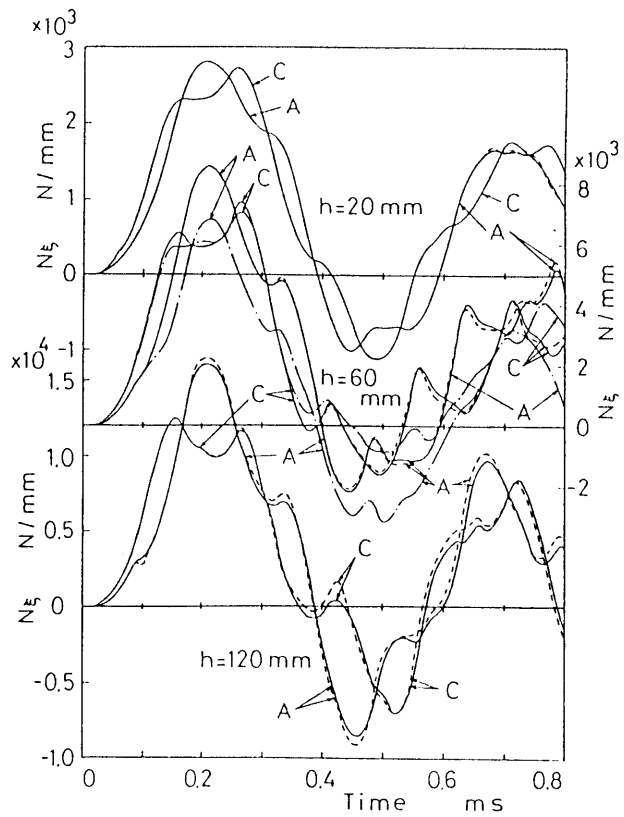


図 9.3 合応力  $N_x$  の時間的变化

なると、点Aの値のほうが大きくなる。実線と破線の差は、殻厚が比較的薄い場合には、わずかであるが、殻厚と共に大きくなる。また、これらと古典理論による値との差は点Aにおいて特に大きい。

図9.4は、点Aおよび点Cの軸方向の曲げモーメント  $M_z$  の時間的変化の様子を示す。図9.2, 9.5で示すように、殻厚が大きくなると変形形状の時間的変化が異なってくるために、特に点Cの  $M_z$  は殻厚の変化とともに異なった応答を示す。実線と破線を比較すると、比較的殻厚の小さい  $h = 20$  mmの場合でも、少し差が生じており、他の内力成分よりも回転慣性の影響を強く受けることがわかる。古典理論による値との差は点Aで特に大きい。なおここには示さなかったが、円周方向の曲げモーメント  $M_\theta$  は、 $M_z$  と比べて値は1/2程度と異なるが、時間的変化の様子は類似している。

子午線方向変位  $U_z$  ならびに円周方向面内力  $N_\theta$  は図には示さなかったが、殻厚が大きい

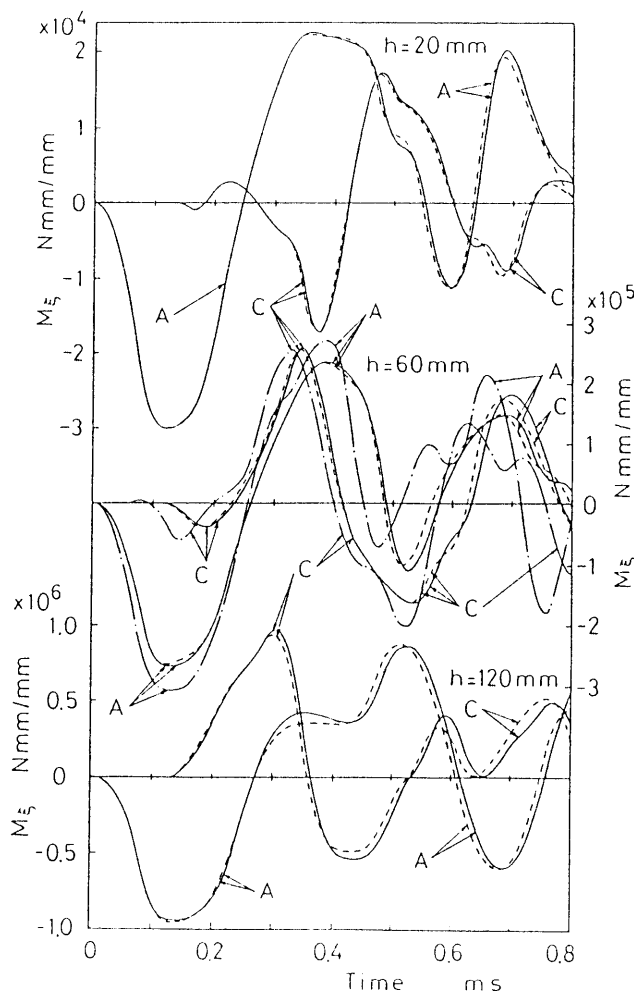


図 9.4 合モーメント  $M_z$  の時間的変化

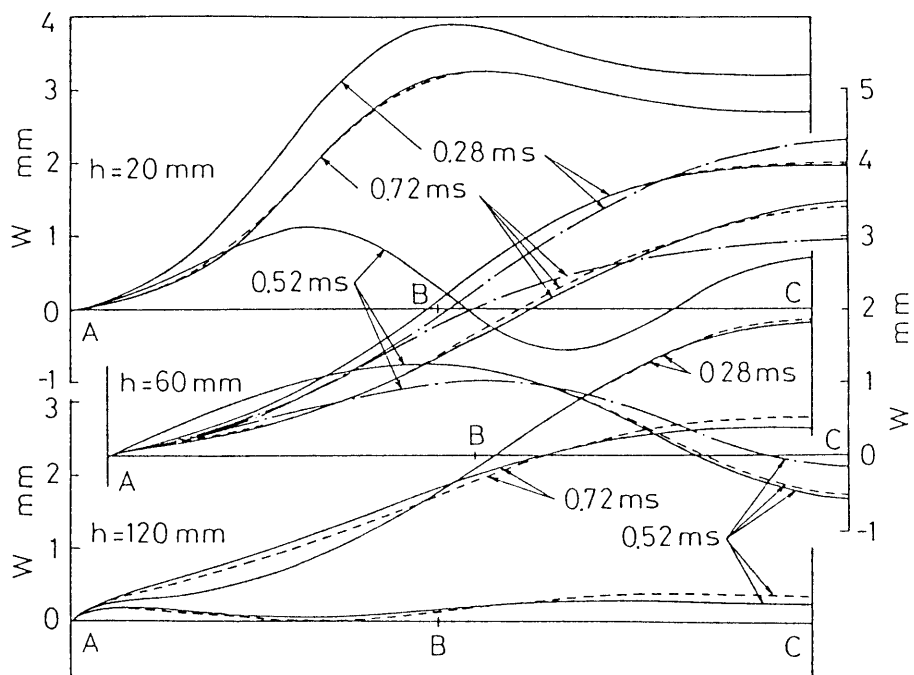


図 9.5 変位  $W$  の軸方向分布の時間的变化

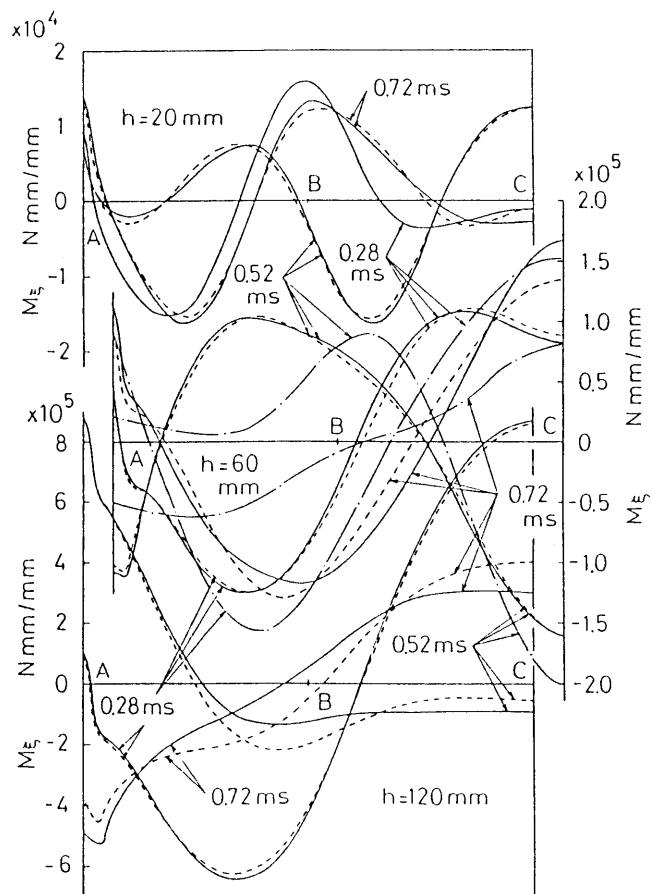


図 9.6 合モーメント  $M_{\xi}$  の軸方向分布の時間的变化

場合でも回転慣性の影響はかなり小さかった。続いて点B, Cの $W$ がほぼ極値を表す時刻  $t = 0.28, 0.52, 0.72$  msの $W$ と $M_x$ の軸方向分布の時間的変化を次に示す。

図9.5は $W$ の軸方向分布の時間的変化を示す。殻厚が比較的薄い  $h = 20$  mmの場合には、 $W$ は点Bで大きくなるが、殻厚が大きくなると、点Cで大きな値を示すようになる。回転慣性の影響は殻厚が大きくなるとわずかながら大きくなり、差の示す領域も広がってくる。また古典理論による値との差は、軸方向の全域にわたって非常に大きくなっている。

図9.6は、 $M_x$ の軸方向分布の時間的変化である。 $h = 20$  mmの場合には極大および極小を示す位置で実線と破線の差が見られるが、殻厚の増加とともに差は大きくなり、かつ差の

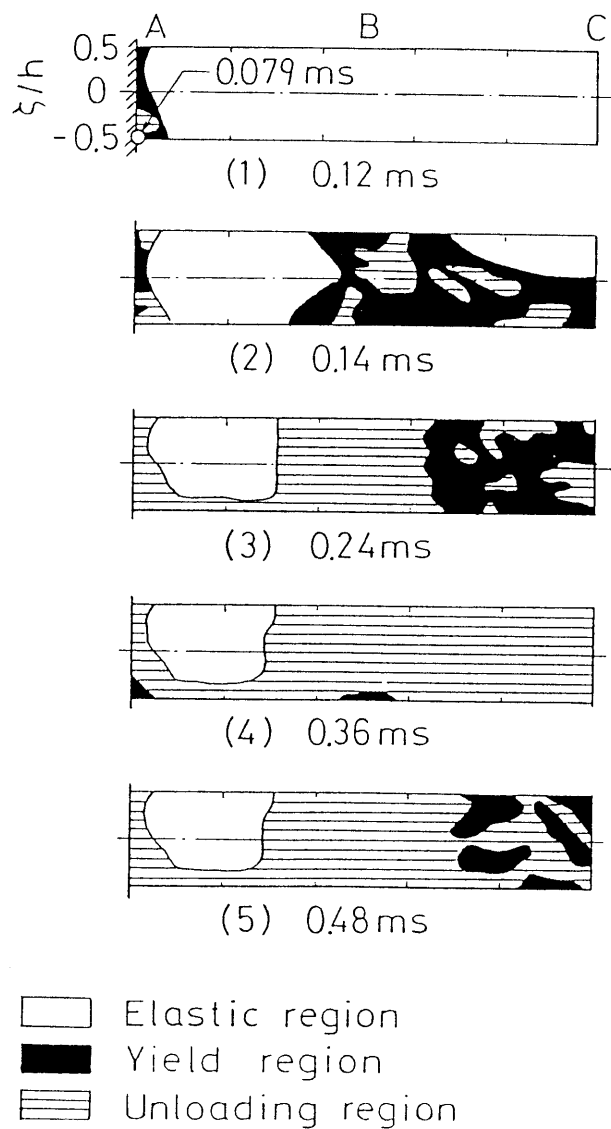


図 9.7 降伏領域の進展 ( $h = 60$  mm)



示す領域も子午線上の全域に広がり、点Cの差が最も大きいようである。 $h = 60$  mmの場合を見ると、せん断変形と回転慣性を無視した古典理論による解は、非常に異なった挙動を示すことがわかる。

図9.7に、 $h = 60$  mmの場合について、本理論による殻内部の降伏域の進展の様子を示す。 $h = 20, 120$  mmの場合もほぼ同様である。図に示すように、まず点Aの内表面で降伏を起し、これが外側に向かって広がる。続いてA Cの中間部で降伏域が発生し、中央部に向かって広がっていくが、すぐその後を除荷域が追いかける。その後、中央部の降伏した部分は、殻の振動と共に除荷と再降伏を繰り返す。なお、点Aより少し離れた部分は、降伏せずに弾性のままで残ることになる。

以上計算例として、両端固定の 6061-T6 アルミ円筒殻に、衝撃内圧が時間に対して正弦波状に作用する問題を取り扱い、殻厚を種々変えて内力及び変位の時間的変化の様子を解析し、回転慣性の影響を調べた。その結果、次の事柄が明らかになった。

- (1) 両端固定の殻に衝撃荷重が加わると、殻が薄い場合には殻の中央部よりも端部付近で大きな半径方向変位を示すが、殻厚が厚くなると、中央部の半径方向変位の方が大きくなる。
- (2) 殻厚と半径の比が5%程度の円筒殻でも、変位と内力のほとんど全ての成分にわずかながら回転慣性の影響がみられ、殻厚が増すにつれてその影響が大きくなる。
- (3) 回転慣性の影響は合モーメント成分に大きく現れ、変位および合応力 $N_{\theta}$ 成分では小さい。
- (4) 古典理論（薄肉殻理論）との比較から、回転慣性の影響よりもせん断変形の影響の方がかなり大きい。したがって、厚肉殻の動的応答問題を解析する際には、せん断変形を考慮することがまず第一に重要であるが、回転慣性も考慮に入れることが必要である。

本例題では、殻厚を種々変えて回転慣性の影響について調べたが、荷重波形の違いによる影響も見てみる必要がある。

## 第10章 薄肉回転対称殻の動的応答の解析結果と実験結果との比較

殻構造物に衝撃荷重が作用する場合の弾塑性問題においては、ひずみ速度が大きくなるため、塑性領域において粘性を考慮に入れることが重要であり、これまで第5章から第9章にかけて、薄肉および厚肉回転対称殻、ならびに一般形状を有する薄肉の殻を対象として、バウシinger効果や回転慣性をも考慮に入れて、弾／粘塑性動的応答問題の解析を行ってきた。しかしながら、得られた解析結果の妥当性については比較すべき他の研究報告、文献等がほとんどなく、実験で確かめる必要がある。

本章では、形状が単純で実験の容易な両端自由のアルミ円筒殻を取り上げる。円筒殻の中央部に局所的な分布の衝撃荷重を負荷し、荷重および変形の時間的変化を求め、実験結果と解析結果の比較検討を試みる。実験による変形は、微小ひずみでかつ比較的小さい変形量の範囲内にとどめる。解析には、Sanders, Jr.の弾性線形薄肉殻理論 [32] および弾／粘塑性Overlay モデルを用いた薄肉回転対称殻を対象とする第7章の解法を採用する。数値計算に必要な各種材料定数は、静的な引張試験ならびに Split Hopkinson Bar 法による衝撃圧縮試験から求める。

### 10.1 円筒殻試験片および材料定数

#### 10.1.1 円筒殻試験片の作製

塑性領域でひずみ速度依存性が大きく現われる材料として、アルミ 1050 を選び、中実丸棒（直径 100 mm）より切削によって、円筒殻試験片を作製した。作製後、350℃、70分の焼鈍を施している。円筒殻の形状寸法は、平均半径  $R=48.6$  mm、殻厚  $h=1.75$  mm、長さ  $l=170$  mmとし、寸法比  $R/h$  は 27.8 である（図10.1）。

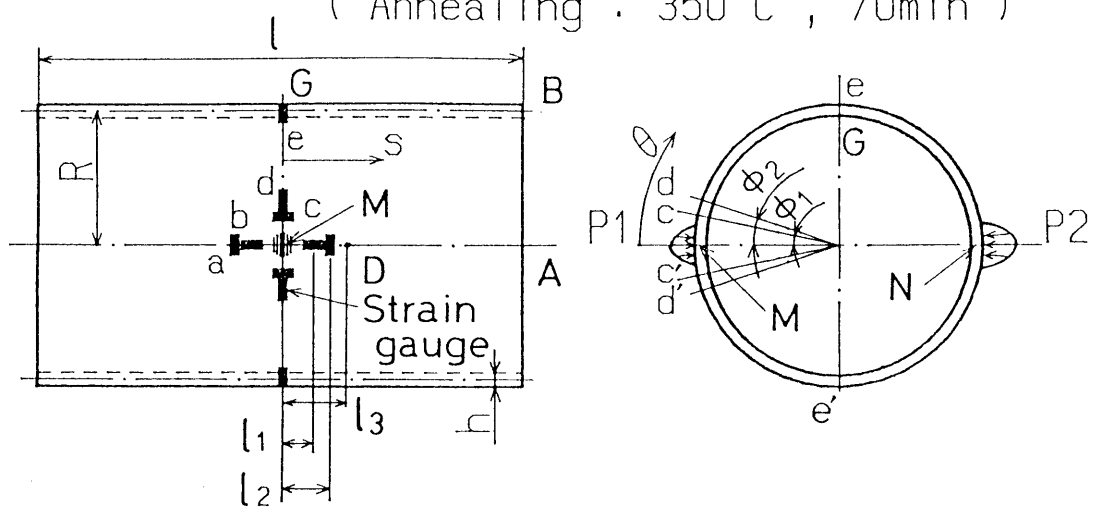
#### 10.1.2 材料定数の決定

##### 〔1〕 静的引張試験

円筒殻試験片の材料特性を調べるために、中実丸棒外周部の円筒殻試験片採取位置付近から、軸方向および円周方向の単軸引張試験片（図10.2）を切り出し、円筒殻試験片と同一条件で熱処理（焼鈍）した後、 $\dot{\epsilon}=2.0 \times 10^{-5}$  1/s 程度のひずみ速度で引張試験を行った。この試験結果（図10.3）より、次のように材料定数の値を定めた。

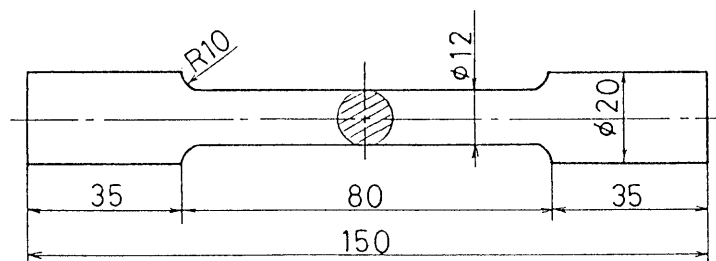
Aluminum A1050

( Annealing : 350°C , 70min )

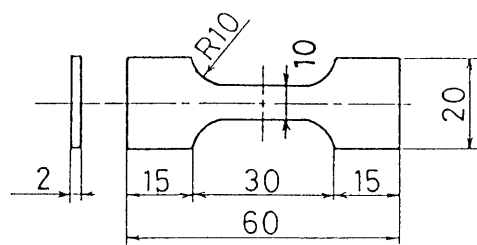


$R=48.6 \text{ mm}$  ,  $l_1=11.3 \text{ mm}$  ,  $\phi_1=14.4^\circ$   
 $l=170 \text{ mm}$  ,  $l_2=14.2 \text{ mm}$  ,  $\phi_2=18.0^\circ$   
 $h=1.75 \text{ mm}$  ,  $l_3=21.25 \text{ mm}$

図 10.1 円筒殻試験片及びひずみゲージ貼付位置



( a ) 軸方向試験片



( b ) 円周方向試験片

図 10.2 単軸静的引張試験片

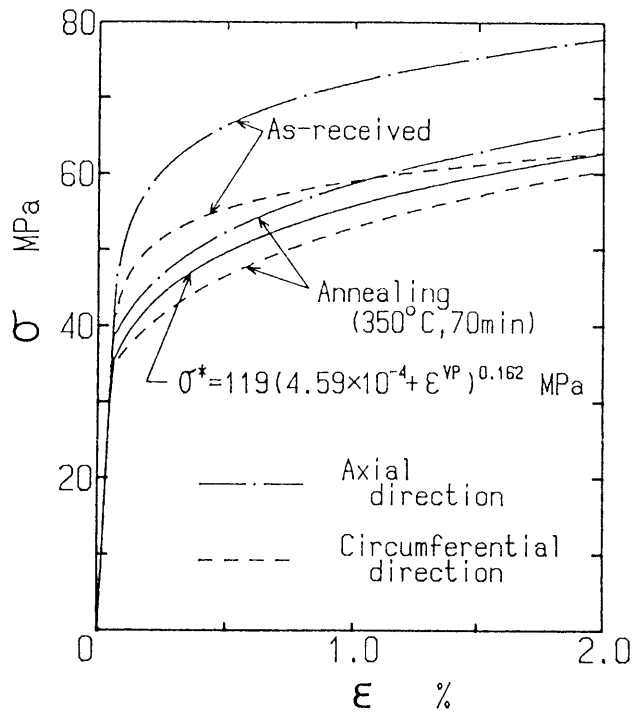


図 10.3 静的応力-ひずみ関係

$$\left. \begin{aligned}
 E &= 70.6 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.34, \quad \text{初期降伏応力: } \sigma_Y = 34.0 \text{ MPa} \\
 \text{静的応力-ひずみ関係式: } \sigma^* &= 119 (4.59 \times 10^{-4} + \varepsilon^{VP})^{0.162} \text{ MPa}
 \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

ここで  $\varepsilon^{VP}$  は粘塑性ひずみである。図10.3より、350°C、70分の焼鈍を施すと、異方性は納入時に比べてかなり緩和される。式(10.1)は、軸方向と円周方向の試験片による結果の平均値から定めた。また密度は  $\rho_0 = 2.71 \text{ g/cm}^3$  である。

## 〔2〕 Split Hopkinson Bar 法による衝撃圧縮試験

動的な応力-ひずみ関係は、Split Hopkinson Bar 法試験装置による衝撃圧縮試験より求めた。試験装置はスプリングの力を利用した発射装置、直径12 mm の応力棒〔打撃棒 ( $l_1 = 500 \text{ mm}$ )、入出力棒 ( $l_2 = 1200 \text{ mm}$ )、出力吸収棒 ( $l_3 = 500 \text{ mm}$ )〕および測定系から構成され、各棒は軸線が一致するようにVブロック上に並べられている。試験片は、中実丸棒の円筒殻試験片採取位置付近から軸方向に、直径12mm (応力棒と同一径)、長さ12mm の円柱状のものを切り出し、両端面を注意深く機械仕上げした後、焼鈍を施した。両端面は二硫化モリブデンで潤滑し、入出力棒間にはさみ、軸方向に無視できる程度の力で押し付けながら、衝撃荷重を加えた。

試験片に負荷される圧縮応力は、長さ  $l_2$  の入力棒上の試験片側端面より  $l_2/2$ 、

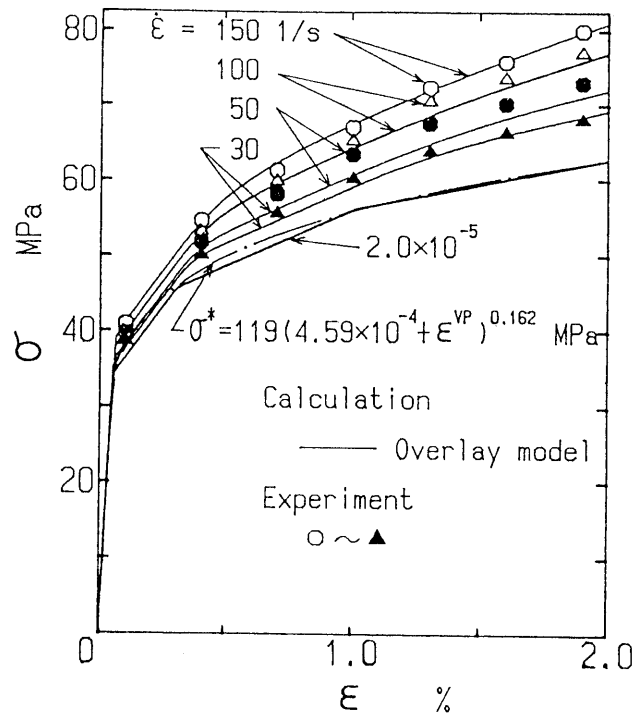


図 10.4 動的応力-ひずみ関係

$l_2/4$  の2ヶ所に、それぞれ円周上 $180^\circ$ の位置に貼ったひずみゲージ（ゲージ長1mm）の出力より算出した。貼付したひずみゲージの位置の、時刻 $t$ における応力を各々  $\sigma(l_2/2, t)$ 、 $\sigma(l_2/4, t)$  とおくと、入力棒の試験片側端面での衝撃応力  $\sigma(0, t)$  は、次式によって求められる [116,117]。

$$\left. \begin{aligned} \sigma(0, t) = & \sigma(l_2/4, t + l_2/4c)H(t + l_2/4c) \\ & + \sigma(l_2/4, t - l_2/4c)H(t - l_2/4c) - \sigma(l_2/2, t)H(t) \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

ここで、 $c$  は応力波の伝播速度 ( $=\sqrt{E/\rho_0}$ )、 $H(t)$  は単位ステップ関数である。

一方、試験片が受けるひずみは、試験片の中央に貼付したひずみゲージ（ゲージ長 2mm）による値から求めた。ひずみゲージは同一円周上に2枚貼付した。

各ひずみゲージからの出力は、波形記憶装置に記録され、パソコン(NEC PC-9801)に入力し、式(10.2)を用いて演算処理の後、X-Yプロッターに出力した。

図10.4に動的応力-ひずみ関係を示す。衝撃試験に用いた試験片は、供試材の軸方向より採取しているため、図10.3の  $\sigma^*$ - $\varepsilon$  曲線と軸方向試験片の  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲線の差を考慮して、実験から得られた各一定ひずみ速度での  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲線を同じ比率で修正している。図中で実線

は、5層の弾／完全粘塑性体から成るOverlay モデルで実験値を近似したものである。各層の材料定数は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{Yk} &= [\sigma_{Y1} \sim \sigma_{Y5}] = [34.1, 217, 716, 1606, 3424] \quad (\text{MPa}) \\ t_k &= [t_1 \sim t_5] = [0.936, 0.042, 0.012, 0.004, 0.006] \\ \gamma_k &= [\gamma_1 \sim \gamma_5] = [1380, 220, 77, 42, 18] \quad (1/s) \\ \Psi(f_k) &= \left( \frac{\bar{\sigma}_k - \sigma_{Yk}}{\sigma_{Yk}} \right) 1.18 \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

## 10.2 円筒殻衝撃試験

実験装置の概略を図10.5に示す。Split Hopkinson Bar 法衝撃圧縮試験装置を利用したもので、衝撃荷重は発射装置のスプリングの力を利用して、打撃棒（直径12mm，長さ1800mm）を飛ばし、円筒殻の中央点M（ $s=0$ ）に負荷させる。試験片は、点Mと反対の点（点N）が吸収棒（直径20mm，長さ2250mm）と接触するように、糸で吊しておく。打撃棒、吸収棒の円筒殻接触側端面は、図10.6に示す形状に作製し、圧力分布が円周方向にある程度の幅をもつようにしている。先端には測定に影響を与えない程度の微小な突起を設けて、衝突点の位置決めを容易にしている。

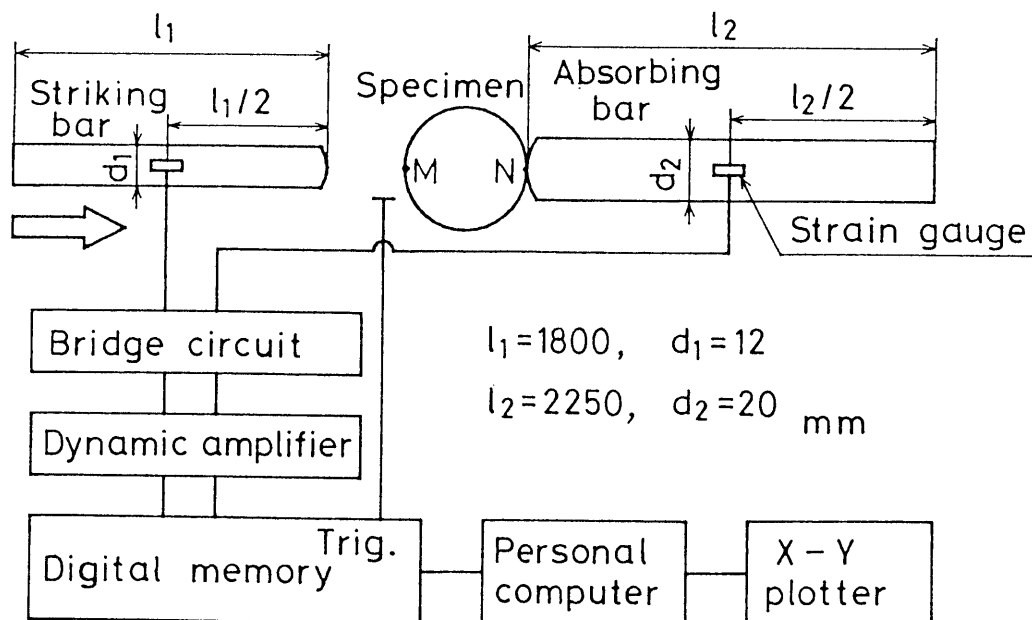


図 10.5 円筒殻衝撃試験装置

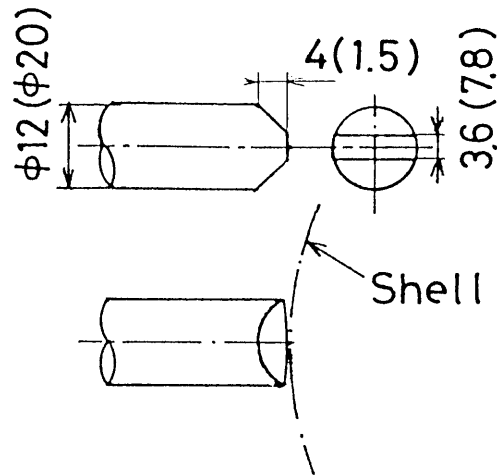


図 10.6 打撃棒（吸収棒）の先端の形状寸法

円筒殻に加わる荷重は、打撃棒および吸収棒の各中央点に貼ったひずみゲージの出力より算出した。有限長さの細長い真直棒の一端が自由で、他端に衝撃応力  $\sigma(0, t)$  が作用する場合に、衝撃端から  $l/2$  の位置の応力  $\sigma(l/2, t)$  を用いて、衝撃応力は次式により求められる [116, 117]。

$$\left. \begin{aligned} \sigma(0, t) &= \sigma(l/2, t + l/2c)H(t + l/2c) \\ &+ 2\sigma(l/2, t - 3l/2c)H(t - 3l/2c) \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

円筒殻試験片のひずみの測定は、図10.1に示すように、荷重作用点Mに対して対称的に5組計10枚のひずみゲージ（a～e'）を、子午線方向と円周方向に貼付して行った。

### 10.3 計算条件の設定

第7章の弾／粘塑性Overlayモデルを用いた薄肉回転対称殻の解法を用いて、数値計算を行う。

問題の対称性から計算は円筒殻の1/4形状について行えばよい。円筒殻の形状パラメータは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a = l, \quad \xi = s/l, \quad \rho = R/l, \quad \rho' = 0, \quad r = 0 \\ \omega_\theta = l/R, \quad \omega_\xi = \omega_{\xi'} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

境界条件は、円筒殻の自由端および中央断面では

$$\left. \begin{aligned} \text{自由端: } N_\xi = \hat{N}_{\xi\theta} = M_\xi = \hat{Q}_\xi = 0 \\ \text{中央断面: } U_\xi = \hat{N}_{\xi\theta} = \hat{Q}_\xi = \phi_\xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

を用いた。

荷重負荷部（点M, N）の近傍では、変位および内力の分布の子午線方向の変化が著しいので、円筒をMD部（21.25 mm）とDA部（63.35 mm）に2分割し、MD部の差分間隔を小さくした。差分点数はMD間で31、DA間で37の合計  $N=68$  とし、殻厚方向には13個の格子点を採用した。またフーリエ級数の項数は  $n=50$  とし、時間間隔  $\Delta t$  は  $2\mu s$  とした。これらの数値は、解の収束性と計算機的能力（FACOM VP-200）を考慮して決定した。

円筒殻の中央部に局所的に作用する衝撃圧力の分布領域は、円筒殻の荷重負荷部に貼った圧力判別シートの色の变化から、打撃棒側（点M側）では子午線方向に3.6 mm、円周方向に7.8 mmの、また吸収棒側（点N側）では子午線方向に7.8 mm、円周方向に9.8 mmのほぼ矩形であることがわかった。本解析では、打撃棒側および吸収棒側とも子午線方向に一様で、円周方向には余弦状の荷重分布を仮定した。すなわち、

$$\left. \begin{array}{l} \text{人力棒側: } p_1 \cos 20\theta \quad (0 \leq s \leq 1.77 \text{ mm}, 0 \leq \theta \leq \pi/40) \\ \text{吸収棒側: } p_2 \cos 16\theta \quad (0 \leq s \leq 3.90 \text{ mm}, 31\pi/32 \leq \theta \leq \pi) \end{array} \right\} \quad (10.7)$$

ここで  $p_1$ 、 $p_2$  は荷重  $P_1$ 、 $P_2$  と次の関係にある。

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = 4p_1 (R + h/2) \times 1.77 \int_0^{\pi/40} \cos 20\theta \, d\theta \\ P_2 = 4p_2 (R + h/2) \times 3.90 \int_{\pi}^{31\pi/32} \cos 16\theta \, d\theta \end{array} \right\} \quad (10.8)$$

実験より得られた荷重  $P_1$ 、 $P_2$  の時間的变化を図10.7に示す。 $P_1$ 、 $P_2$  とも複雑な変化を示しているが、数値計算は破線のように折線近似して行った。

#### 10.4 実験値と計算値の比較

実験と計算は数個の殻について行い、ほぼ同様の結果を得たので、その中の一つについて記述する。本計算では負荷開始後7 msまで計算を行い、実験結果と比較した。

図10.8は、ひずみゲージ（図10.1）より得られた、各点のひずみの時間的变化と計算結果とを示したものである。実験値は対称位置に貼ったゲージ値を平均したが、両者の差はほとんどなく、ひずみの対称性が確認できた。図中実線は実験値を、また破線は計算結果を示す。各ひずみは階段状に増加していることがわかる。実験値と計算値を比較すると、点Gの  $\varepsilon_{\theta}|_e$  ( $s=0, \theta=90^\circ$ ) は荷重負荷部から離れているため、荷重の分布形状の影響をあまり受けないこと、又ひずみの分布もこの付近では急変しないことから、両者は良く



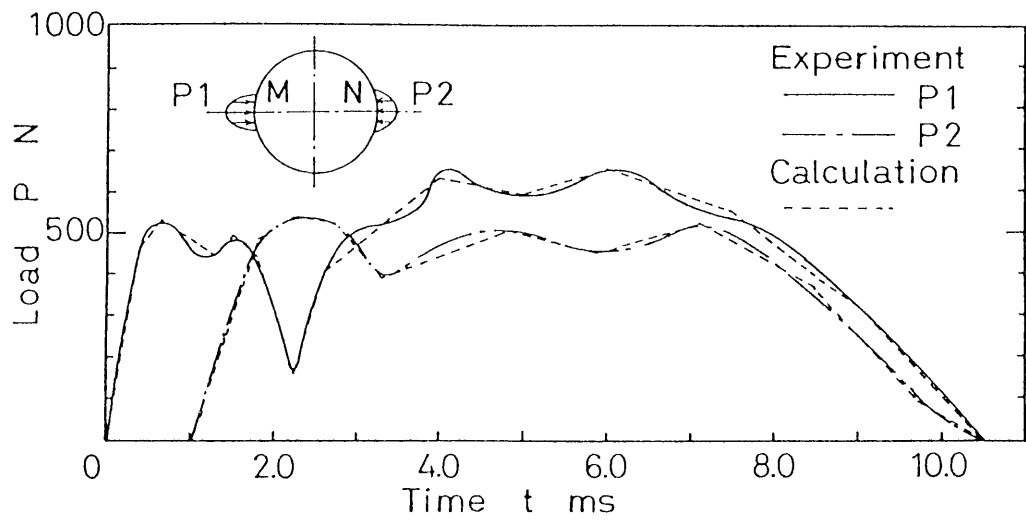


図 10.7 衝撃荷重

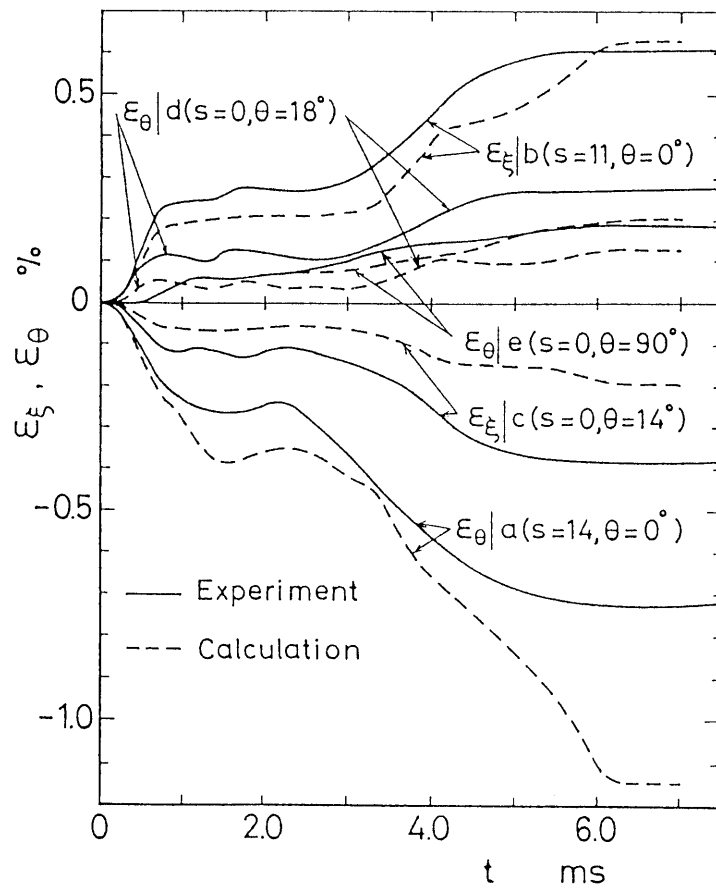


図 10.8  $\epsilon_\xi, \epsilon_\theta$  の時間的变化

一致しているものと考えられる。荷重点に近い所に貼付したゲージの値と計算値との間には、差が見られるものもあり、特に中央断面上の  $\varepsilon_{\xi|c}$  ( $s=0, \theta=14^\circ$ )、 $\varepsilon_{\theta|d}$  ( $s=0, \theta=18^\circ$ ) の実験値は、計算値のほぼ2倍の大きさに推移している。これは荷重の円周方向分布の時間的変化や、殻の微小な局所的座屈の問題があるのかも知れない。材料の粘性定数の評価、材料の異方性の問題等も含めて両結果を完全に一致させることは極めて困難であり、この程度でほぼ良好な結果が得られたと思われる。

参考までに、本計算による殻の外表面の降伏域の進展の様子を図10.9に示す。ここには示さなかったが、内表面も降伏域の広がり方はほぼ同様である。図に示すように、まず  $t=0.082$  msで点Mの外表面で降伏を起こし、これが子午線方向に広がる。続いて  $t=0.84$

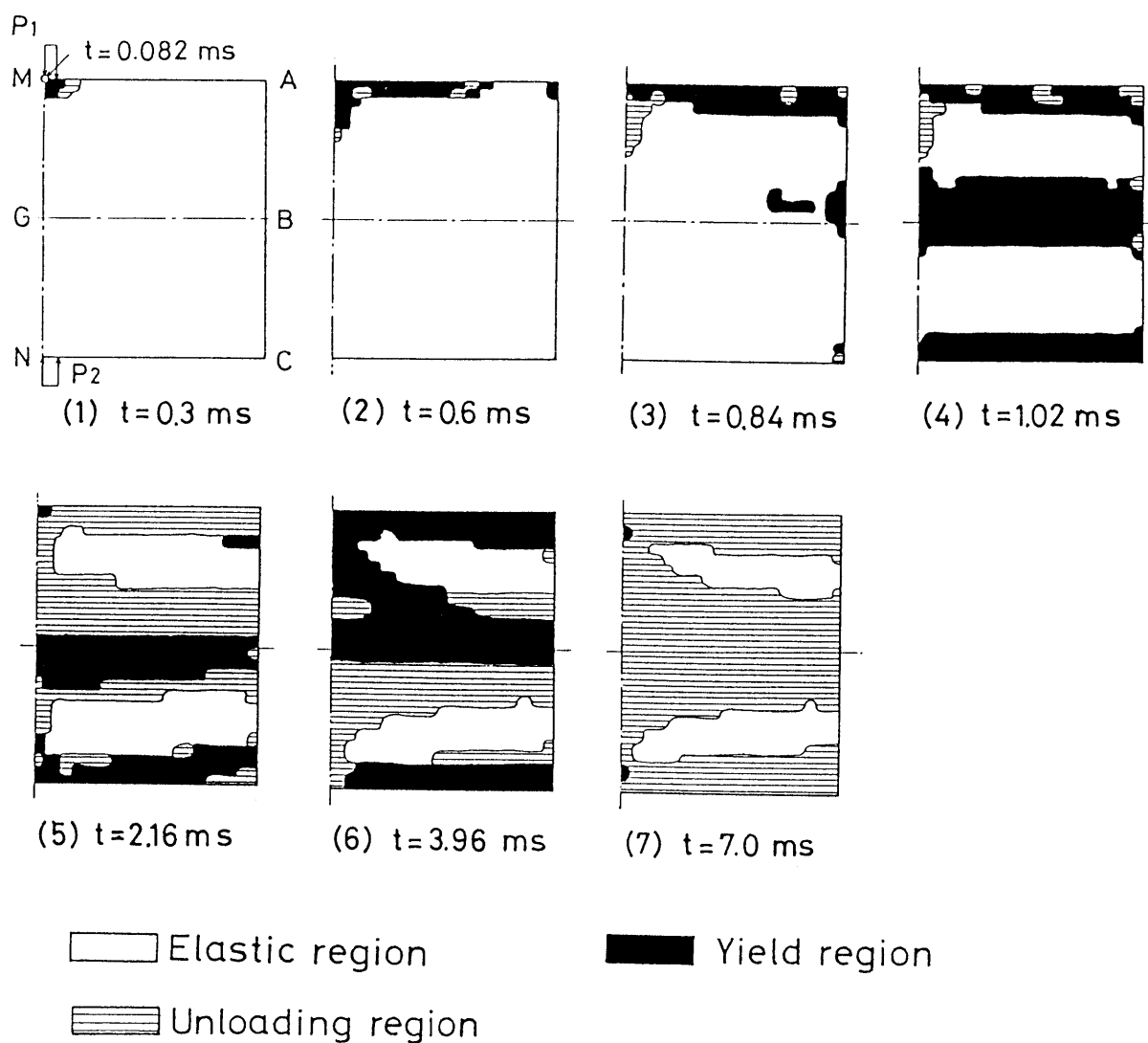


図 10.9 降伏領域の進展 (外表面)

msには点B付近に、さらに遅れてGB、NCの子午線上に降伏域が発生し、円周方向に広がる。降伏した領域は殻の振動とともに部分的に除荷ならびに再降伏を繰り返す。

なお $t = 7$  msまでの計算において、最大ひずみならびに最大ひずみ速度は点Mの外表面に生じ、各々 $\varepsilon_{\theta} = 9.1\%$  ( $t = 6.3$  ms)、 $\dot{\varepsilon}_{\theta} = 90$  1/s ( $t = 0.4$  ms)である。実験による殻の最終形状は、荷重負荷部が少しくぼんだほぼ一様な楕円筒である。最初の円筒殻の荷重方向の直径の減少量は、荷重部で5.4 mm、他の部分でほぼ一様に3.5 mmであり、荷重に垂直な方向の直径の増加量は、ほぼ一様に子午線方向に3.1 mmである。

以上、実験結果と計算結果の比較より、次の事柄が明らかになった。

実験値と計算値は、荷重負荷部に近い所では差が見られるものもあったが、全体的に見て比較的良好な一致を示した。両結果が完全に一致するに至らなかった原因として、荷重の円周方向分布の時間的变化、材料の粘性定数の評価、材料の異方性の問題等が考えられる。

なお本計算で使用した計算機は FACOM VP-200 で、1 msの現象の解析に約150分の計算時間を要した。

## 第 1 1 章 結 論

殻は機械構造物の構成要素として、従来から多方面に数多く使用されている。特に、高温高荷重の過酷な条件下では、殻は粘弾性変形や粘塑性変形をひきおこす。構造要素の安全性、信頼性と共に高経済性を追求するためには、使用材料の特性を十分把握すると同時に、材料の特性を十分生かして利用する設計が必要であり、材料の粘性の影響を考慮に入れた解析が望まれる。

本研究の開始当初（1973年頃）には、殻に静的な荷重が作用する場合のクリープ変形問題や弾塑性変形問題についての多数の研究結果が報告されていたが、材料の塑性領域における粘性の影響を考慮に入れた研究は、まだ報告されていなかった。また動的荷重を受ける殻の応答問題に関しては、ひずみ速度が大きくなるため、塑性領域において粘性を考慮に入れることが必要不可欠となるが、それまでなされてきた研究のほとんどが、弾性（粘弾性）理論かあるいは塑性領域で材料の粘性を考慮しない古典的塑性理論に基づくものであった。

そこで本論文では、強度上ならびに加工の容易さ等の点ですぐれた利点を持ち、過酷な条件下で数多く使用されている回転対称殻をおもに取り上げ、塑性領域における材料の粘性の影響を考慮に入れて、静的及び動的な荷重が作用する場合の弾／粘塑性応答問題の理論解析を展開し、この解析法による数値解析と考察、さらに実験による解法の妥当性の検討を行った。各章で例題を解析して得られた結果は、それぞれの章末において述べたが、ここではそれらの主要な知見を要約する。

まず第2章から第4章では、回転対称殻に静的荷重が作用する場合の弾／粘塑性変形問題を解析し、薄肉回転対称殻ばかりでなく、中程度の厚さの殻さらには異方性を有する殻への適用を試みた。構成関係式には塑性領域で粘性の影響を考慮したPerzynaの式を採用し、数値解法には差分法を用いた。また計算の際の時間間隔  $\Delta t$  の選び方に、Zienkiewiczらの式を用いて、計算の無駄を少なく、また誤差を小さくした。

第2章では、非軸対称荷重を受ける薄肉回転対称殻の弾／粘塑性変形問題の解法を示した。Sanders, Jr. の弾性微小変形殻理論に基づく Budiansky らの数値解法を、弾／粘塑性問題に拡張した。計算例として、両端支持のアルミ円筒殻の端部に、非軸対称な曲げモーメントが時間に対して階段状に作用する問題を解析した。得られた結果を要約すると、次のようになる。

- (1) 荷重が大きくなり降伏領域が広がってくるにつれて、粘性の影響が顕著になり、全変形中クリープ変形の占める割合が大きくなる。
- (2) 例題では円筒殻の全長が半径に等しい場合を取り上げたが、薄肉殻の場合、両端に曲げモーメントを負荷しても、変位、内力成分は端部に近い領域で大きく現れ、中央部分はあまり影響を受けない。
- (3) 例題で取り上げたひずみ速度依存性の小さい材料では、瞬間的に負荷してから定常時に至るまでの時間が極めて短い。ひずみ速度依存性が顕著に現われるような材料の使用、ならびに高温高圧等の環境下では、負荷時からの変位や応力等の変動が著しく大きくなることが想定される。これらの時間的履歴を把握しておくことは大切であり、粘塑性解析の重要性が認められる。

次に、高温高荷重の過酷な環境下で使用されている殻は、それに耐えるだけの厚肉化が図られているが、薄肉殻理論を用いた解析では解の精度が悪くなり、殻の力学応答を正しく評価できない。そこで第3章では、殻厚方向のせん断変形の影響を考慮に入れて、中程度の厚さ（殻厚の主曲率半径に対する比が、 $1/20$  から  $1/5$ 程度）の回転対称殻に非軸対称荷重が作用する場合の、弾／粘塑性変形問題の解析方法を示した。Reissner-Naghdi の理論（ひずみ-変位関係）を採用して基礎式を導いた。計算例として、殻厚と半径の比が $0.2$ の両端支持アルミ円筒殻を取り上げ、時間に対して階段状の局所的分布荷重が、その中央部に作用する問題を解析した。また、せん断変形の影響を無視した薄肉殻理論（第2章の解法）による計算結果と比較検討した。その結果、第2章で得られた知見(1),(3)の他に次の結論が挙げられる。

- (4) 厚肉殻理論とせん断変形の影響を無視した薄肉殻理論による結果との差は、荷重が大きくなり変形が進むにつれて、変形量の大きい領域で内力の円周方向成分および変位に、両理論による差が顕著に現れ、殻厚方向のせん断変形の影響を考慮に入れた解析が不可欠である。

続いて第4章では、直交異方性材料からなる中程度の厚さの回転対称殻の弾／粘塑性変形問題の解法を示した。第1節では軸対称荷重が作用する場合に限られるが、幾何学的非線形を考慮に入れて、比較的大きな変形問題に適用可能な解法を示し、第2節では第3章の解法を拡張して、変形量は小さいが、非軸対称荷重の場合にも適用可能な解法を示した。両者とも構成関係式には、Hillの直交異方性理論に従って、Perzynaの式を直交異方性の場合に拡張したものを使い、厚肉の場合に考慮すべきせん断変形には Reissner-Naghdiの

理論を採用した。また、第1、2節の両理論について、両端自由のチタン円筒殻中央部に、軸対称荷重を加えた実験ならびに局所的分布荷重を加えた実験を行い、円筒殻外表面のひずみの時間的変化を求め、計算結果との比較検討を行った。第1、2節とも共通して次の事柄が明らかになった。

- (5) 実験値と計算値は、ひずみの分布ならびに各点のひずみの時間的変化とも、荷重負荷部近傍を除いて、かなりよく一致しており、解法の妥当性が確かめられた。
- (6) 薄肉殻理論による解と本理論による解との間には差が見られ、その大きさは、応力とひずみが共に大きな値を示す位置で大きく、殻厚と半径の比が0.12程度の円筒殻では、せん断変形の影響を考慮に入れた厚肉殻理論の適用が不可欠である。
- (7) 第2節の解法の考察に際して、等方性理論による解との比較も試みたが、変位成分は殻全体にわたって、また内力成分は荷重負荷部で差が見られ、異方性が顕著な場合に精度良く殻の解析を行うためには、異方性を無視することができなくなる。しかしながら取り上げた例題では、等方性理論による解との差よりも、薄肉殻理論による解との差が大きかった。

以上殻の準静的応答問題において、各章で得られた結論を要約したが、これらの解析から得られた定常状態（最終状態）の値が、時間の影響を無視した塑性理論による結果と一致することは、いくつかの論文で報告されている。それ故、定常状態を対象とする限りでは、粘性の影響を考慮しない塑性理論で十分である。本論文では、粘性を考慮に入れた解析を行うことにより、定常状態に至るまでの遷移状態の様子が明らかになった。

続く第5章から第10章では、回転対称殻ならびに一般形状の薄肉殻に衝撃荷重が作用する場合の、弾／粘塑性動的応答問題の解法を示し、パウシンガー効果、殻厚方向のせん断変形および回転慣性の影響の考察も試みた。構成関係式には塑性領域において粘性の影響を考慮した Perzyna の式、ならびに Perzyna の理論に基づく Fyfe の構成式を用い、数値解法には差分法を適用した。

第5章では、薄肉回転対称殻に一般の非軸対称な衝撃荷重が作用する場合を取り上げ、その弾／粘塑性応答の解析方法を示した。殻の運動方程式には Sanders, Jr. の非線形理論式に慣性項を加えたものを用い、またひずみ-変位式には膜ひずみに殻の回転の項を考慮した。本解法はやや変形が大きい場合にも適用可能である。計算例として、両端固定のアルミ円筒殻の半周部分に、衝撃外圧が作用する問題を取り上げ、内力および変位の時間的変化の様子を明らかにした。得られた結果を要約すると、次のようになる。

- (8) 変形はまず荷重側が半径方向に変位し、続いて横側が突出し、最後に荷重の反対側が半径方向に変位する。
- (9) 内力は円筒殻の固定端および横側を除いた部分で、ほぼ膜応力状態になっている。
- (10) 弾性解と弾/粘塑性解を比較すると、降伏領域がある程度広がると両者の差は顕著になり、弾/粘塑性解では変動が緩慢になる。
- (11) 本章の解法では、計算精度を上げるために円周方向の差分点数を多くとる必要があり、計算機の必要容量が大きくなるが、計算時間はこれまでの章で示したフーリエ級数展開の方法よりも、約1/3程度に短縮できる。また非線形項を含む基礎式も計算可能で、利点大きい。

第6章では、第5章の回転対称殻に対する解法を発展させて、一般の任意形状を有する薄肉殻の弾/粘塑性応答問題を解析する方法を示した。前章と同じく殻の運動方程式には、Sanders, Jr.の殻の非線形理論式に慣性項を加えたものを用い、またひずみ-変位式には膜ひずみに殻の回転の項を考慮した。計算例として、両端固定のアルミ楕円筒殻の半周部に衝撃外圧が作用する問題を取り扱った。その結果、第5章で得られた知見(8),(10),(11)の他に、次の事柄が明らかになった。

- (12) 第5章の例題で取り扱った円筒殻の場合と比較して、楕円筒殻では荷重を受けない領域では変形量が極めて小さく、衝撃荷重の影響はほぼ荷重側の部分に限られる。
- (13) 各内力成分は一般に荷重側において大きく、特に固定端付近で大きくなる。
- (14) 荷重が作用する領域の反対側の部分で、内力は膜応力状態となっている。

次に降伏後変形とともにひずみ硬化する材料では、応力反転後のパウシンガー効果を考慮しなければ、十分正確な解を得ることはできない。そこで第7章では、ひずみ速度依存性とパウシンガー効果が表現可能な弾/粘塑性 Overlay モデルを用いた、薄肉回転対称殻の動的応答問題の解法を示した。殻の運動方程式ならびにひずみ-変位式には、第2章で用いた Sanders, Jr.の薄肉殻理論式を採用した。基礎方程式に含まれる空間の導関数には一般の差分式を、また慣性項には Houbolt の後退時間差分式を用いた。弾/粘塑性Overlayモデルは、単軸応力-ひずみ線図より容易にモデルの材料定数を決定でき、殻の動的応答問題に導入することが可能である。このモデルは繰返し硬化や軟化を示さない材料に対して有効であり、モデルの層数を増やしていけば、計算機の必要容量および計算時間は増えるが、解の精度は向上する。計算例として、頂点に開口部を有する球殻、円環殻および円筒

殻からなるアルミ容器に、衝撃内圧が作用する問題を取り上げ、内力および変位の時間的変化の様子を解析し、等方硬化モデルによる計算結果と比較した。その結果、次の事柄が明らかになった。

(15) 応力が反転して再降伏が生ずると、変位、内力成分とも等方硬化モデルとOverlayモデルの結果に差が現れ、特に面内力成分に顕著な差が現われる。また等方硬化モデルでは再降伏直後の面内力成分の変動を、大きめに見積ることになることがわかった。

続いて第8章では、中程度の厚さの回転対称殻に、一般の非軸対称な衝撃荷重が作用する場合の弾/粘塑性応答問題の解法を示した。準静的応答問題を取り扱った第3章の解法を、動的応答問題に発展させたものである。すなわち、Reissnerの殻理論による平衡方程式に慣性項を加えて動的応答問題とし、厚肉の場合に考慮すべき殻厚方向のせん断変形には、Naghdiの理論を採用した。慣性項にはHouboltの後退時間差分式を用いた。計算例として、両端固定のアルミ円筒殻の半周部分に、衝撃外圧が作用する問題を解析し、せん断変形を考慮しない薄肉殻理論(第7章の解法)による結果と比較検討した。その結果、得られた知見は次のようにまとめられる。

(16) 第5章で取り上げた薄肉円筒殻の場合と比較して、厚肉殻では変形様式ならびに各内力成分がかなり異なる。本例題では一般的に面内力は円筒殻中央部で大きくなり、一方曲げモーメントは殻の端部の荷重側で大きくなる。

(17) 本理論による結果と従来のせん断変形の影響を無視した古典理論による結果の間には、変位成分はあまり差は認められなかったが、内力成分の差は大きく、特に降伏領域で顕著な差を示した。この程度の厚さの円筒殻(殻厚と半径の比が0.15)でも、荷重が大きくなり降伏領域が広がると、せん断変形を考慮に入れた解析が必要である。

第9章では、第8章のせん断変形の影響を考慮に入れた厚肉回転対称殻の解法に、さらに回転慣性を考慮に入れた解析法を示した。厚肉の場合に考慮すべき殻厚方向のせん断変形と回転慣性には、Naghdiの理論を採用した。計算例として、衝撃内圧を受ける両端固定の厚肉円筒殻の問題を取り上げ、殻厚方向のせん断変形と回転慣性を考慮した理論、せん断変形のみを考慮した理論および両者を省略した理論による結果を比較して、せん断変形ならびに回転慣性の影響を考察した。その結果、次の事柄が明らかになった。

(18) 両端固定の殻に衝撃内圧が加わると、殻が薄い場合には殻の中央部よりも、端部



付近で大きな半径方向変位を示すが、殻厚が厚くなると、中央部の半径方向変位の方が大きくなる。

(19) 例題で取り上げた殻厚と半径の比が0.05程度の円筒殻でも、変位と内力のほとんどの成分にわずかながら回転慣性の影響が見られ、殻厚が増すにつれてその影響が大きくなる。また曲げモーメント成分の方が、面内力成分よりも回転慣性の影響を強く受ける。

(20) 回転慣性の影響よりも、せん断変形の影響の方が大である。よって厚肉殻の動的応答問題を解析する際には、せん断変形を考慮に入れることがまず第1に重要であるが、回転慣性も考慮に入れることが望ましい。

第10章では、これまで提案してきた動的応答問題に対する解法の妥当性を調べるため、両端自由の薄肉アルミ円筒殻に、局所的に衝撃荷重を加えて、円筒殻外表面の荷重負荷部近傍のいくつかの点のひずみの時間的变化を調べた。第7章で取り上げた弾/粘塑性Overlayモデルによる解法を用いて計算を行い、実験結果と比較し、解法の妥当性、有効性を検討した。その結果、

(21) 第4章の静的問題の場合ほどではないが、計算結果と実験結果は比較的よく合う傾向を示すこと、

が明らかになった。

以上より、本研究により殻、おもに回転対称殻の静的ならびに動的な弾/粘塑性応答の一つの解析法が確立されたものと考えられる。各章で得られた解法の適用範囲については、殻の形状、材質、荷重条件等によって降伏領域の広がり方が異なるため、明確に示すことは困難である。個々の問題に対して解析を行い、調べてみる必要がある。また本解法の一部では、やや大きなひずみまで考慮しているが、荷重がさらに高くなり、変形がより大きくなる場合にも適用可能な解析手法の確立が望まれる。

## 謝 辞

本論文をまとめるにあたり、名古屋大学工学部 村上澄男 教授には、懇切丁寧な御指導ならびにゆき届いた御検討を賜りました。ここに深く感謝の意を表します。

また名古屋大学工学部 清家政一郎 教授、神谷紀生 教授には、本論文の取りまとめに際し、御指導および貴重な御助言を賜りました。ここに厚く御礼申し上げます。

本論文は、恩師 豊橋技術科学大学 竹園茂男 教授（昭48～61年：熊大教授）のもとで、昭和48年から行った研究結果をまとめたものです。本研究を行うに際し、課題の選択から研究のとりまとめに至るまで、終始懇切なる御指導と激励を賜ったことに対し、深謝するとともに、心から御礼申し上げます。

衝撃実験を行うに際して、熊本大学工学部 藤田昌大 教授、上田昇 助教授には、有益な御助言をいただきました。また、豊橋技術科学大学 沖津昭慶 教授、本間寛臣 教授、上村正雄 助教授、大野信忠 助教授、熊本大学工学部 平井一男 教授、濟木弘行 教授、小田勇 教授、里中忍 助教授、真下茂 助教授、宮崎靖男 技官、熊本工業大学 緒方典介 助教授、八代工業高等専門学校 仲町英治 助教授、中村祐一 助教授、福山重美 技官には、実験の遂行に際し、実験装置や測定機器等でいろいろと便宜を図っていただきました。さらに、熊本大学の中央工場ならびに豊橋技術科学大学の工作センター実験実習工場の皆様には、実験装置や試験片の製作等に御助力をいただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

また豊橋技術科学大学 草鹿履一郎 教授、ならびに同大学エネルギー工学系、および熊本大学機械系の教職員の方々の暖かい励ましのお言葉も忘れることはできません。ここに深く感謝致します。

本研究を遂行する上で、当時熊本大学工学部あるいは大学院の学生であった宿利清巳氏、金崎研一氏、内堀博雄氏、長野卓氏、戸高晴男氏、荒毛秀夫氏、白石博文氏、松岡展伸氏、持留裕之氏、豊橋技術科学大学大学院学生 大坪一三氏、越川啓章氏らの御協力を得ました。ここに記して感謝の意を表します。

なお、本論文の数値計算は、九州大学大型計算機センターのFACOM M 230-75, M-190, M-200, M-382, VP-100 および名古屋大学大型計算機センターのFACOM M-382, M-780/20, VP-200 を使用しました。熊本大学および豊橋技術科学大学の計算機室の方々には、大変お世話になりました。感謝致します。

## 参 考 文 献

1. 市川 昌弘, “「非弾性設計」小特集号発刊に際して”, 日本機械学会誌, 90-826 (昭62-9),1175.
2. Penny,R.K., “Axisymmetric Bending of the General Shell of Revolution during Creep”, J. Mech. Engng. Sci., 6-1(1964-3),44.
3. 村上 澄男, 岩附 周平, “円筒殻の定常クリーブ解析”, 日本機械学会論文集, 36-291(昭45-11),1761.
4. 村上 澄男, 鈴木 一芳, “内圧を受ける両端固定円筒殻の定常クリーブ変形”, 日本機械学会論文集, 37-303(昭46-11),2062.
5. 竹園 茂男, 田中 光三, 中司 雅文, “一般軸対称殻の遷移クリーブ問題”, 日本機械学会論文集, 38-310(昭47-6),1183.
6. 村上 澄男, 鈴木 一芳, “軸対称殻の定常クリーブ解析への拡張ニュートン法の応用”, 日本機械学会論文集, 38-316(昭47-12),3048.
7. 竹園 茂男, 中司 雅文, 白井 正己, “一般軸対称殻の大たわみクリーブ問題”, 日本機械学会論文集, 39-327(昭48-11),3304.
8. 竹園 茂男, 渡辺 吉典, 小笠原 文隆, “非対称荷重を受ける回転対称殻のクリーブ変形”, 日本機械学会論文集, 41-341(昭50-1),51.
9. 竹園 茂男, 井上 和夫, “回転対称殻の大たわみ弾塑性クリーブ問題”, 日本機械学会論文集, 41-347(昭50-7),1949.
10. 矢川 元基, 宮崎 則幸, 安藤 良夫, “有限要素法による軸対称殻のクリーブ解析 (クリーブ座屈解析)”, 日本機械学会論文集, 41-350(昭50-10),2784.
11. 竹園 茂男, 内田 勝朗, “非対称荷重を受ける厚肉軸対称殻のクリーブ変形問題”, 日本機械学会論文集, A, 49-441(昭58-5),618.
12. 浜田 実, 田中 正隆, “一般軸対称殻の大たわみ弾塑性問題の一数值解法”, 日本機械学会論文集, 36-292(昭45-12),1977.
13. 安藤 良夫, 飯田 国広, 川井 忠彦, 矢川 元基, 菊池 文雄, “有限要素法による軸対称殻の弾塑性大たわみ解析”, 日本機械学会論文集, 37-303(昭46-11),2069.
14. 浜田 実, 田中 正隆, “一般軸対称殻の大たわみ弾塑性問題の一数值解法 (第2報、解析結果と実験値の比較)”, 日本機械学会論文集, 39-318(昭48-2),565.

15. 浜田 実, 田中 正隆, 長砂 和太郎, “軸対称殻の非対称弾塑性曲げ解析”, 日本機械学会論文集, A, 45-395(昭54-7),799.
16. Findlay,G.E., Moffat,D.G. and Stanley,P., “Torispherical Drumheads: A Limit-Pressure and Shakedown Investigation”, J. Strain Analysis, 6-3(1971),147.
17. Takezono,S., Nakamachi,E. and Yamaguchi,T., “Elasto/Viscoplastic Analysis of Thin Circular Plates Under Large Strains and Large Deformations”, Trans. ASME, Ser.E, 47-4(1980-12),741.
18. Humphreys,J.S. and Winter,R., “Dynamic Response of a Cylinder to a Side Pressure Pulse”, AIAA J., 3-1(1965-1),27.
19. Sheng,J., “The Response of a Thin Cylindrical Shell to Transient Surface Loading”, AIAA J., 3-4(1965-4),701.
20. Bushnell,D., “Dynamic Response of Two-Layered Cylindrical Shells to Time-Dependent Loads”, AIAA J., 3-9(1965-9),1698.
21. Bothell,L.E. and Hubka,W.F., “Development of a Method which may be used for Predicting the Inelastic Response of Cylinders Subjected to Strong Blast Loads”, Fluid-Solid Interaction Presented at: The Winter Annual Meeting of the ASME, Pittsburgh, Pennsylvania,(1967-11),42.
22. 鈴木 真一, “衝撃内圧をうける粘弾性薄肉円筒の動的挙動”, 日本機械学会論文集, 38-313(昭47-9),2201.
23. Baker,W.E. and Allen,F.J., “The Response of Elastic Spherical Shells to Spherically Symmetric Internal Blast Loading”, Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.,(1958),79.
24. 竹園 茂男, 村瀬 成一, “衝撃荷重を受ける一般軸対称殻の動的応答問題の一数值解法”, 日本機械学会論文集, 40-337(昭49-9),2555.
25. Stricklin,J.A., Haisler,W.E. and Von Riesemann,W.A., “Large Deflection Elastic-Plastic Dynamic Response of Stiffened Shells of Revolution”, Trans. ASME, Ser.J, 96-2(1974-5),87.
26. Luigi,M., Leech,J.W. and Witmer,E.A., “PETROS 2:A New Finite-Difference Method and Program for the Calculation of Large Elastic-Plastic

- Dynamically-Induced Deformations of General Thin Shells” ,Aeroelastic and Structures Res. Lab. Dept. of Aeronautics and Astronautics, M.I.T., Cambridge,Mass.,ASRL TR 152-1(1969-12).
27. Hunsaker,B.Jr., Vaughan,D.K. and Stricklin,J.A., “A Comparison of the Capability of Four Hardening Rules to Predict a Material’s Plastic Behavior” , Trans. ASME, Ser.J, 98-1(1976-2),66.
28. 熊井 規, 砂川 恵, “浅い粘弾性球形殻の動的挙動” , 東京大学宇宙航空研究所報告, 8-2(昭47-6),355.
29. 竹園 茂男, 田中 宣, “粘弾性軸対称殻の非対称曲げ問題” , 日本機械学会論文集, 40-331(昭49-3),652.
30. Reissner,E., “A New Derivation of the Equations for the Deformation of Elastic Shells” , Am. J. Math., 63-1(1941),177.
31. Love,A.E.H., “Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity” , Fourth ed., Dover Publications,(1944),173.
32. Sanders,J.L.,Jr., “An Improved First-Approximation Theory for Thin Shells” , NASA Rep., R-24(1959),1.
33. Timoshenko,S. and Woinowsky-Krieger,S., “Theory of Plates and Shells” , 2nd ed.,(1959),McGraw-Hill.
34. Novozhilov,V.V., “The Theory of Thin Shells” ,Wolters-Noordhoff,(1959).
35. Flügge,W., “Stresses in Shells” ,(1960),Springer-Verlag.
36. 浜田 実, 間瀬 正隆, “一般軸対称殻の曲げ問題に対する三つの殻理論の適用” , 日本機械学会論文集, 39-325(昭48-9),2625.
37. Naghdi,P.M., “The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Shells of Revolution” , Q. Appl. Math., 15-1(1957),41.
38. Naghdi,P.M., “On the Theory of Thin Elastic Shells” , Q. Appl. Math.,14-4 (1957),369.
39. Reissner,E., “On the Equations for Finite Symmetrical Deflections of Thin Shells of Revolution” , Progress in Applied Mechanics, The Prager Anniversary Volume,(1963),171.
40. 作井 誠太、中村 正久、布村 成具, “軟鋼の高速衝撃引張荷重下における応力ひ

- ずみ関係（鉄鋼の高速衝撃試験に関する研究 I）”，鉄と鋼，47-6(昭36),800.
- 4 1. Manjoine, M.J., “Influence of Rate of Strain and Temperature on Yield Stresses of Mild Steel”, J. Appl. Mech., 11(1944), A211.
  - 4 2. Lindholm, U.S. and Yeakley, L.M., “High Strain-rate Testing: Tension and Compression”, Experimental Mech., 8-1(1968-1), 1.
  - 4 3. 岸田 敬三、千田 香苗，“材料の動的応力-ひずみ関係の測定法について”，日本機械学会論文集，37-297(昭46-5), 875.
  - 4 4. 田中 吉之助、松尾 俊三、木下 元洋、前出 恒夫，“高ひずみ速度下の軟鋼の強度”，日本機械学会論文集，31-226(昭40-6), 883.
  - 4 5. 田中 吉之助、木下 元洋，“高温におけるアルミニウムの高ひずみ速度圧縮試験”，材料，13-126(昭39-3), 197.
  - 4 6. 放生 明広、茶谷 明義，“衝撃圧縮試験機の試作と二、三の実験例について”，金沢大学工学部紀要，7-2(昭48), 137.
  - 4 7. Duffy, J., Campbell, J.D. and Hawley, R.H., “On the Use of a Torsional Split Hopkinson Bar to Study Rate Effects in 1100-0 Aluminum”, Trans. ASME, Ser.E, 38-1(1971-3), 83.
  - 4 8. Baker, W.E. and Yew, C.H., “Strain-Rate Effects in the Propagation of Torsional Plastic Waves”, Trans. ASME, Ser.E, 33-4(1966-12), 917.
  - 4 9. 茶谷 明義、放生 明広，“棒の自然落下を利用した衝撃ねじり試験について”，日本機械学会論文集，44-381(昭53-5), 1445.
  - 5 0. 坪内 昌生、工藤 英明，“軟鋼の室温高速ねじりにおける等温せん断応力-ひずみ曲線”，塑性と加工，9-88(昭43-5), 332.
  - 5 1. Prandtl, L., “Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper”, Z.A.M.M., 8-2(1928-4), 85.
  - 5 2. Malvern, L.E., “The Propagation of Longitudinal Waves of Plastic Deformation in a Bar of Material Exhibiting a Strain-Rate Effect”, J. Appl. Mech., 18(1951-6), 203.
  - 5 3. Perzyna, P., “Fundamental Problems in Viscoplasticity”, Adv. in Appl. Mech., (1966), 243, Academic Press.
  - 5 4. Fyfe, I.M., “The Applicability of Elastic/Viscoplastic Theory in Stress

- Wave Propagation” , Trans. ASME, Ser.E, 42-1(1975-3),141.
55. 井上 達雄, “非弾性解析のための構成式(塑性-クリープ相互作用下の挙動について)” , 日本機械学会誌, 90-826(昭62-9),1190.
56. Pugh,C.E., “Progress in Developing Constitutive Equations for Inelastic Design Analysis” , Trans. ASME, Ser.J, 105-3(1983-8),273.
57. Cernocky,E.P. and Krempl,E., “A Theory of Viscoplasticity Based on Infinitesimal Total Strain” , Acta Mech., 36-3(1980),263.
58. Valanis,K.C., “A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface” , Arch. Mech., 23-4(1971),517.
59. Besseling,J.F., “A Theory of Elastic, Plastic, and Creep Deformations of an Initially Isotropic Material Showing Anisotropic Strain-Hardening, Creep Recovery, and Secondary Creep” , Trans. ASME, Ser.E, 25-4(1958-12), 529.
60. 鈴木章彦, 土屋秋夫, “改良型フラクシオンモデルとSUS304のクリープ変形に対する適用” , 日本機械学会論文集, A, 50-453(昭59-5),1026.
61. Kujawski,D. and Mróz,Z., “A Viscoplastic Material Model and Its Application to Cyclic Loading” , Acta Mech., 36(1980),213.
62. Miller,A., “An Inelastic Constitutive Model for Monotonic, Cyclic, and Creep Deformation” , Trans. ASME, Ser.H, 98-2(1976-4),97.
63. Chaboche,J.L. and Rousselier,G., “On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations—Part 1: Rules Developed With Internal Variable Concept” , Trans. ASME, Ser.J, 105-2(1983-5),153.
64. 佐橋 稔之, 今谷 勝次, 井上 達雄, “塑性-クリープ相互作用下の非弾性構成式と21/4 Cr-1 Mo鋼の変形挙動に対する適用” , 日本機械学会論文集, A, 52-476(昭61-4),1126.
65. 村上 澄男, 大野 信忠, “回復可能なクリープ硬化範囲を規定した多軸変動応力クリープ構成式” , 日本機械学会論文集, 48-428(昭57-4),431.
66. 大野 信忠, “非硬化ひずみ領域を考慮した繰返し塑性構成式” , 日本機械学会論文集, A, 48-434(昭57-10),1342.
67. 鈴木 章彦, “材料の粘塑性挙動のモデル化に対する一手法” , 材料, 35-391(昭

- 61-4),350.
68. Budiansky,B. and Radkowski,P.P., "Numerical Analysis of Unsymmetrical Bending of Shells of Revolution" , AIAA J., 1-8(1963-8),1833.
69. Zienkiewicz,O.C. and Corneau,I.C., "Visco-plasticity—Plasticity and Creep in Elastic Solids—A Unified Numerical Solution Approach" , Int. J. for Numerical Methods in Engng., 8(1974),821.
70. Corneau,I., "Numerical Stability in Quasi-static Elasto/Visco-Plasticity", Int. J. for Numerical Methods in Engng., 9(1975),109.
71. Zienkiewicz,O.C., Owen,D.R.J. and Corneau,I.C., "Analysis of Viscoplastic Effects in Pressure Vessels by the Finite Element Method" , Nucl. Engng. and Des., 28(1974),278.
72. Nagarajan,S. and Popov,E.P., "Plastic and Viscoplastic Analysis of Axisymmetric Shells" , Int. J. Solids Structures, 11(1975),1.
73. Kanchi,M.B., Zienkiewicz,O.C. and Owen,D.R.J., "The Visco-plastic Approach to Problems of Plasticity and Creep Involving Geometric Non-linear Effects", Int. J. for Numerical Methods in Engng., 12(1978),169.
74. 竹園 茂男, 杉野 裕幸, 明石 卓二, "一般軸対称殻の弾/粘塑性変形", 日本機械学会論文集, A, 45-396(昭54-8),908.
75. 竹園 茂男, 田上 実秋, 田中 博幸, "厚肉回転対称殻の弾/粘塑性解析", 日本機械学会論文集, A, 47-423(昭56-11),1165.
76. Klee,K.D. and Paulun,J., "On Numerical Treatment of Large Elastic-Viscoplastic Deformations" , Arch. Mech., 32-3(1980),333.
77. Bodner,S.R. and Symonds,P.S., "Experiments on Viscoplastic Response of Circular Plates to Impulsive Loading" , J. Mech. Phys. Solids, 27-2(1979), 91.
78. Symonds,P.S. and Chon,C.T., "Finite Viscoplastic Deflections of an Impulsively Loaded Plate by the Mode Approximation Technique" , J. Mech. Phys. Solids, 27-2(1979),115.
79. 畑 俊明, "衝撃荷重を受ける中空球の弾/粘塑性解析", 日本機械学会論文集, A, 52-478(昭61-6),1594.



80. 畑 俊明, “衝撃荷重を受ける直交異方性中空球の弾／粘塑性解析”, 日本機械学会論文集, A, 53-493(昭62-9),1854.
81. Hata,T., “A Dynamic Elasto/Viscoplastic Solution for a Thick-Walled Spherical Container Subjected to Impulsive Loading”, Bull. JSME, 30-259(1987), 51.
82. Kollmann,F.G. and Mukherjee,S., “Inelastic Deformation of Thin Cylindrical Shells under Axisymmetric Loading”, Ingenieur-Archiv, 54(1984),355.
83. Nagarajan,S. and Popov,E.P., “Non-Linear Dynamic Analysis of Axisymmetric Shells”, Int. J. for Numerical Methods in Engng., 9(1975),535.
84. Atkatsch,R.S., Bieniek,M.P. and Sandler,I.S., “Theory of Viscoplastic Shells for Dynamic Response”, Trans. ASME, Ser.E, 50-1(1983-3),131.
85. 村瀬 勝彦, 西村 融, “有限要素法による粘塑性大変形解析とその応用”, 日本機械学会論文集, A, 45-400(昭54-12),1554.
86. Wojewódzki,W. and Bukowski,R., “Influence of the Yield Function Non-linearity and Temperature in Dynamic Buckling of Viscoplastic Cylindrical Shells”, Trans. ASME, Ser.E, 51-1(1984-3),114.
87. Sanders,J.L.,Jr., “Nonlinear Theories for Thin Shells”, Q. Appl. Math., 21-1(1963),21.
88. 竹園 茂男, 埜 克己, “非対称荷重を受ける回転対称殻の弾／粘塑性解析”, 日本機械学会論文集, A, 46-402(昭55-2),227.
89. Tao,K. and Takezono,S., “Elasto/Visco-Plastic Analysis of Axisymmetrical Shells under Asymmetrical Loading”, Trans. 5th. Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech., M4/8(1979-8),1.
90. 竹園 茂男, 埜 克己, 長野 卓, “非対称荷重を受ける厚肉軸対称殻の弾／粘塑性解析”, 日本機械学会論文集, A, 51-472(昭60-12),2829.
91. Tao,K., Takezono,S. and Nagano,S., “Elasto/Visco-Plastic Analysis of Moderately Thick Shells of Revolution under Asymmetrical Loading”, Trans. 9th. Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech., B(1987-8),605.
92. 竹園 茂男, 埜 克己, 長野 卓, 戸高 晴男, “異方性厚肉回転対称殻の弾／粘塑性変形”, 日本機械学会論文集, A, 52-476(昭61-4),1149.

93. Takezono, S., Tao, K. and Nagano, S., "Elasto/Visco-Plastic Analysis of Orthotropic Moderately Thick Shells of Revolution", Trans. 8th. Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech., L5/2(1985-8), 231.
94. 竹園 茂男, 埜 克己, 白石 博文, "非対称荷重を受ける直交異方性厚肉回転対称殻の弾/粘塑性解析", 日本機械学会論文集, A, 53-495(昭62-11), 2166.
95. 竹園 茂男, 埜 克己, "回転対称殻の弾/粘塑性動的応答", 日本機械学会論文集, 44-381(昭53-5), 1478.
96. Takezono, S. and Tao, K., "Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Shells of Revolution.", Trans. 4th. Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech., M7/7(1977-8), 1.
97. 竹園 茂男, 埜 克己, "薄肉殻の弾/粘塑性動的応答", 日本機械学会論文集, A, 47-421(昭56-9), 949.
98. Takezono, S. and Tao, K., "Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of General Thin Shells to Blast Loads.", Bull. JSME, 25-203(1982-5), 728.
99. Takezono, S., Tao, K. and Kanezaki, K., "Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Axisymmetrical Shells by Overlay Model", Trans. ASME, Ser. J, 102-3(1980-8), 257.
100. 竹園 茂男, 埜 克己, 内堀 博雄, "非対称荷重を受ける厚肉回転対称殻の弾/粘塑性動的応答", 日本機械学会論文集, A, 52-476(昭61-4), 997.
101. Takezono, S., Tao, K. and Uchibori, H., "Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Moderately Thick Shells of Revolution under Asymmetrical Loading.", Proc. Int. Conf. on Computational Mech., 6(1986-5), 41.
102. 竹園 茂男, 埜 克己, 内堀 博雄, "厚肉回転対称殻の弾/粘塑性動的応答(回転慣性を考慮した場合)", 日本機械学会論文集, A, 52-482(昭61-10), 2395.
103. Tao, K., Takezono, S. and Uchibori, H., "Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Moderately Thick Shells of Revolution under Consideration of Rotatory Inertia.", Proc. Int. Conf. on Computational Engng. Sci., 2, 41, ii(1988-4), 1.
104. 竹園 茂男, 佐藤 昌宏, "き裂の成長に及ぼす粘塑性の影響", 日本機械学会講演論文集, No. 775-2(昭52-10), 33.

- 1 0 5. Reissner,E., "Stress Strain Relations in the Theory of Thin Elastic Shells" , J. Math. Phys., 31(1952),109.
- 1 0 6. 浜田 実, 森田 喜保, 新田 勝通, "一般軸対称殻の強度問題に対する電子計算機の応用" , 日本機械学会誌, 68-553(昭40-2),159.
- 1 0 7. Das,M.L., "Consideration of Shear Deformation in the Analysis of Unsymmetrical Bending of Moderately Thick Shells of Revolution" , Trans. 3rd Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech., M3/1,(1975),1.
- 1 0 8. Sepetoski,W.K., Pearson,C.E., Dingwell,I.W. and Adkins,A.W., "A Digital Computer Program for the General Axially Symmetric Thin-Shell Problem" , Trans. ASME, Ser.E, 29-4(1962-12),655.
- 1 0 9. Reissner,E., "On a Variational Theorem for Finite Elastic Deformations" , J. Math. and Phys., 32(1953),129.
- 1 1 0. Reissner,E., "Rotationally Symmetric Problems in the Theory of Thin Elastic Shells" , Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.,(1958),51.
- 1 1 1. Prager,W., "The Theory of Plasticity—A Survey of Recent Achievement" , Proc. Inst. Mech. Engr., 169(1955),41.
- 1 1 2. Ziegler,H., "A Modification of Prager's Hardening Rule" , Q. Appl. Math., 17(1959),55.
- 1 1 3. Zienkiewicz,O.C., Nayak,G.C. and Owen,D.R.J., "Composite and 'Overlay' Models in Numerical Analysis of Elasto-Plastic Continua" , Int. Sympo. Foundations of Plasticity, Warsaw,(1972),107.
- 1 1 4. Houbolt,J.C., "A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft" , J. of Aeronautical Science, 17(1950),540.
- 1 1 5. Reissner,E., "On a Variational Theorem in Elasticity" , J. Math. Phys., 29(1950),90.
- 1 1 6. 柳原 直人, "一次元弾性応力波理論による衝撃力測定法" , 日本機械学会論文集, 43-375(昭52-11),4048.
- 1 1 7. 松本 浩之, 中原 一郎, 木村 正則, "衝撃荷重の直接測定法と間接測定法" , 非破壊検査, 31-4(昭57-4),258.

## 付 録

### 2. 1 式(2.28)の各係数

式(2.28)の係数マトリックスに含まれる各係数 $a_1 \sim a_{36}$ 、および $c_1 \sim c_{26}$ は、次のようになる。

$$a_1 = b$$

$$a_2 = b \gamma$$

$$a_3 = -\nu b \omega_{\xi} \omega_{\theta} - b \gamma^2 - \frac{(1-\nu) b n^2}{2\rho^2} - \lambda^2 d(1-\nu) \left[ (1+\nu) \gamma^2 \omega_{\xi}^2 + \frac{(3\omega_{\xi} - \omega_{\theta})^2 n^2}{8\rho^2} \right]$$

$$a_4 = \frac{(1+\nu) b n}{2\rho} + \frac{\lambda^2 d n (1-\nu)}{8\rho} (3\omega_{\xi} - \omega_{\theta})(3\omega_{\theta} - \omega_{\xi})$$

$$a_5 = -\left(\frac{3-\nu}{2\rho}\right) \gamma b n - \frac{\lambda^2 d \gamma n (1-\nu)}{\rho} \left[ \frac{(3\omega_{\xi} - \omega_{\theta})(3\omega_{\theta} - \omega_{\xi})}{8} + (1+\nu) \omega_{\xi} \omega_{\theta} \right]$$

$$a_6 = b(\omega_{\xi} + \nu \omega_{\theta}) + \lambda^2 d(1-\nu) \left[ (1+\nu) \gamma^2 \omega_{\xi} + (n^2/2\rho^2)(3\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \right]$$

$$a_7 = b [\omega_{\xi}' + \gamma(\omega_{\xi} - \omega_{\theta})] - \frac{\lambda^2 d \gamma n^2 (1-\nu)}{\rho^2} \left[ \frac{(3\omega_{\xi} - \omega_{\theta})}{2} + (1+\nu) \omega_{\xi} \right]$$

$$a_8 = \lambda^2 \omega_{\xi}$$

$$a_9 = \lambda^2 (1-\nu) \gamma \omega_{\xi}$$

$$a_{10} = -a_4$$

$$a_{11} = -\frac{b \gamma n}{2\rho} (3-\nu) + \frac{\lambda^2 d n (1-\nu)}{\rho} \left[ -(1+\nu) \gamma \omega_{\xi} \omega_{\theta} + \frac{\gamma}{8} (6\omega_{\xi} \omega_{\theta} - 7\omega_{\xi}^2 - 3\omega_{\theta}^2) - \frac{\omega_{\xi}'}{4} (5\omega_{\theta} - 3\omega_{\xi}) \right]$$

$$a_{12} = \frac{b(1-\nu)}{2} + \frac{\lambda^2 d(1-\nu)(3\omega_{\theta} - \omega_{\xi})^2}{8}$$

$$a_{13} = \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \gamma b - \frac{\lambda^2 d(1-\nu)}{8} (3\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) [2\omega_{\xi}' - \gamma(5\omega_{\xi} - 3\omega_{\theta})]$$

$$a_{14} = -\gamma a_{13} + \frac{(1-\nu)}{2} b \omega_{\xi} \omega_{\theta} - \frac{b n^2}{\rho^2} - \lambda^2 d(1-\nu) \left[ \frac{(1+\nu) \omega_{\theta}^2 n^2}{\rho^2} \right.$$

$$\left. - \frac{\omega_{\xi} \omega_{\theta}}{8} (3\omega_{\theta} - \omega_{\xi})^2 \right]$$

$$a_{15} = \frac{\lambda^2 d(1-\nu)(3\omega_\theta - \omega_\xi)n}{2\rho}$$

$$a_{16} = \frac{\lambda^2 d(1-\nu)n}{2\rho} [2(1+\nu)\gamma\omega_\theta - \omega_\xi' + 3\gamma(\omega_\xi - \omega_\theta)]$$

$$a_{17} = -\frac{bn(\omega_\theta + \nu\omega_\xi)}{\rho} + \frac{\lambda^2 d(1-\nu)n}{2\rho} \left[ \gamma\omega_\xi' - 2\gamma^2\omega_\xi - \frac{2(1+\nu)\omega_\theta n^2}{\rho^2} + (3\omega_\theta - \omega_\xi)(\gamma^2 + \omega_\xi\omega_\theta) \right]$$

$$a_{18} = -\nu\lambda^2\omega_\theta n / \rho$$

$$a_{19} = -a_6$$

$$a_{20} = -b\gamma(\omega_\theta + \nu\omega_\xi) + \lambda^2 d(1-\nu) [\gamma(1+\nu)(-\gamma\omega_\xi' + \gamma^2\omega_\xi - (n^2\omega_\xi / \rho^2) + 2\omega_\xi^2\omega_\theta) + (n^2 / 2\rho^2)(\gamma\omega_\xi - \gamma\omega_\theta - 3\omega_\xi')] ]$$

$$a_{21} = a_{15}$$

$$a_{22} = \frac{\lambda^2 d(1-\nu)n}{2\rho} [3\gamma\omega_\xi - \gamma\omega_\theta(5+2\nu) - \omega_\xi']$$

$$a_{23} = -\frac{bn(\omega_\theta + \nu\omega_\xi)}{\rho} + \frac{\lambda^2 d(1-\nu)n}{2\rho} \left[ 2(1+\nu) \left( \omega_\xi\omega_\theta^2 - \gamma^2\omega_\xi + 2\gamma^2\omega_\theta - \frac{n^2\omega_\theta}{\rho^2} \right) + \gamma\omega_\xi' + 3\gamma^2(\omega_\theta - \omega_\xi) + \omega_\xi\omega_\theta(3\omega_\theta - \omega_\xi) \right]$$

$$a_{24} = \lambda^2 d(1-\nu) [2n^2 / \rho^2 + (1+\nu)\gamma^2]$$

$$a_{25} = -\lambda^2 d(1-\nu) [(1+\nu)(2\gamma\omega_\xi\omega_\theta + \gamma^3) + (2\gamma n^2 / \rho^2)]$$

$$a_{26} = -b(\omega_\xi^2 + 2\nu\omega_\xi\omega_\theta + \omega_\theta^2) + \frac{\lambda^2 d(1-\nu)n^2}{\rho^2} \left[ (1+\nu) \left( \omega_\xi\omega_\theta - \frac{n^2}{\rho^2} + 2\gamma^2 \right) + 2(\gamma^2 + \omega_\xi\omega_\theta) \right]$$

$$a_{27} = \lambda^2$$

$$a_{28} = \lambda^2\gamma(2-\nu)$$

$$a_{29} = -\lambda^2 [(1-\nu)\omega_\xi\omega_\theta + \nu n^2 / \rho^2]$$

$$a_{30} = d\omega_\xi$$

$$a_{31} = d(\omega_\xi' + \nu\gamma\omega_\xi)$$

$$a_{32} = d\nu n\omega_\theta / \rho$$

$$a_{33} = -d$$

$$a_{34} = -d\nu\gamma$$

$$a_{35} = d\nu n^2 / \rho^2$$

$$a_{36} = -1$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = \gamma$$

$$c_3 = -\gamma$$

$$c_4 = n / \rho$$

$$c_5 = \lambda^2\gamma\omega_\xi\nu$$

$$c_6 = -\lambda^2\gamma\omega_\xi$$

$$\begin{aligned}
c_{7} &= \lambda^2 (n/\rho) (3\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) / 2 & c_{8} &= -1 \\
c_{9} &= -n/\rho & c_{10} &= 1 \\
c_{11} &= 2\gamma & c_{12} &= \lambda^2 (n/\rho) \omega_{\theta} \nu \\
c_{13} &= -\lambda^2 (n/\rho) \omega_{\theta} & c_{14} &= \lambda^2 (3\omega_{\theta} - \omega_{\xi}) / 2 \\
c_{15} &= \lambda^2 \{ \gamma (3\omega_{\theta} + \omega_{\xi}) - \omega_{\xi}' \} / 2 & c_{16} &= -1 \\
c_{17} &= -\omega_{\xi} & c_{18} &= -\omega_{\theta} \\
c_{19} &= \nu \gamma \lambda^2 & c_{20} &= - \{ \omega_{\xi} \omega_{\theta} - (n/\rho)^2 \} \lambda^2 \nu \\
c_{21} &= -\gamma \lambda^2 & c_{22} &= \{ \omega_{\xi} \omega_{\theta} - (n/\rho)^2 \} \lambda^2 \\
c_{23} &= 2\lambda^2 n/\rho & c_{24} &= 2\gamma \lambda^2 n/\rho \\
c_{25} &= -1, & c_{26} &= 1
\end{aligned}$$

## 2.2 式(2.37)の各係数

式(2.37)の係数マトリックスに含まれる各係数 $b_1 \sim b_{16}$ および $d_1 \sim d_6$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 b_1 &= b & b_2 &= \nu\gamma b \\
 b_3 &= \nu n b / \rho & b_4 &= b(\omega_\xi + \nu\omega_\theta) \\
 b_5 &= -\frac{b(1-\nu)n}{2\rho} - \frac{d\lambda^2(1-\nu)n}{8\rho} (3\omega_\xi - \omega_\theta)(3\omega_\theta - \omega_\xi) \\
 b_6 &= \frac{b(1-\nu)}{2} + \frac{\lambda^2 d(1-\nu)}{8} (3\omega_\theta - \omega_\xi)^2 \\
 b_7 &= -\gamma b_6 \\
 b_8 &= \frac{\lambda^2 d(1-\nu)n}{2\rho} (3\omega_\theta - \omega_\xi) \\
 b_9 &= -\gamma b_8 \\
 b_{10} &= -\lambda^2 d(1-\nu)[(1+\nu)\gamma^2\omega_\xi + (n^2/2\rho^2)(3\omega_\xi - \omega_\theta)] \\
 b_{11} &= \frac{\lambda^2 d(1-\nu)n}{2\rho} (3\omega_\theta - \omega_\xi) \\
 b_{12} &= -\frac{\lambda^2 d(1-\nu)\gamma n}{2\rho} [3\omega_\theta - \omega_\xi + 2(1+\nu)\omega_\theta] \\
 b_{13} &= \lambda^2 d(1-\nu)[(2n^2/\rho^2) + (1+\nu)\gamma^2] \\
 b_{14} &= -\lambda^2 d(1-\nu)(3+\nu)(\gamma n^2/\rho^2) \\
 b_{15} &= \lambda^2 & b_{16} &= \lambda^2(1-\nu)\gamma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_1 &= -1 & d_2 &= -1 \\
 d_3 &= -\lambda^2 (3\omega_\theta - \omega_\xi) / 2 & d_4 &= -\lambda^2 \gamma \nu \\
 d_5 &= \lambda^2 \gamma & d_6 &= -2\lambda^2 n / \rho
 \end{aligned}$$

### 3. 1 式(3.19)の各係数

式(3.19)の係数マトリックスに含まれる各係数 $a_1 \sim a_{21}$ および $c_1 \sim c_{28}$ は、次のようになる。

$$a_1 = b$$

$$a_2 = b \gamma$$

$$a_3 = -b \nu \omega_{\xi} \omega_{\theta} - b \gamma^2 - \frac{b(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2} \{1 - \beta(\omega_{\xi} - \omega_{\theta})\omega_{\theta}\} - \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \omega_{\xi}^2$$

$$a_4 = \frac{b(1+\nu)}{2} \frac{n}{\rho}$$

$$a_5 = -\frac{b \gamma(3-\nu)}{2} \frac{n}{\rho} + \frac{b \gamma(1-\nu)}{2} \frac{n}{\rho} \beta \omega_{\theta} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_6 = b (\omega_{\xi} + \nu \omega_{\theta}) + \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \omega_{\xi} \quad a_7 = b \{ \omega_{\xi}' + \gamma(\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \}$$

$$a_8 = -b \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_9 = -b \beta \omega_{\xi}'$$

$$a_{10} = -b \gamma^2 \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) - \frac{b(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) + \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \omega_{\xi}$$

$$a_{11} = -b \gamma \beta \frac{n}{\rho} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) - \frac{b(1-\nu)}{2} \frac{n}{\rho} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \gamma$$

$$a_{12} = -a_4$$

$$a_{13} = a_5$$

$$a_{14} = \frac{b(1-\nu)}{2} \{1 + \beta \omega_{\xi} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})\}$$

$$a_{15} = \frac{b \gamma(1-\nu)}{2} + \frac{b(1-\nu)}{2} \beta \omega_{\xi}' (2\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_{16} = \frac{b(1-\nu)}{2} (\omega_{\xi} \omega_{\theta} - \gamma^2) + \frac{b \gamma^2(1-\nu)}{2} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \omega_{\theta} - \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \omega_{\theta}^2$$

$$a_{17} = -b \frac{n}{\rho} (\omega_{\theta} + \nu \omega_{\xi}) - \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \frac{n}{\rho} \omega_{\theta} \quad -b \frac{n^2}{\rho^2}$$

$$a_{18} = -\frac{b \gamma(3-\nu)}{2} \frac{n}{\rho} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_{19} = -\frac{b(1-\nu)}{2} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_{20} = -\frac{b(1-\nu)}{2} \beta \omega_{\xi}'$$

$$a_{21} = -\frac{b \gamma^2(1-\nu)}{2} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) - b \frac{n^2}{\rho^2} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) + \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \omega_{\theta}$$

$$a_{22} = -\frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \omega_{\xi} - b (\omega_{\xi} + \nu \omega_{\theta})$$



$$a_{23} = -\frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} (\omega_{\xi}' + \gamma \omega_{\xi}) - b \gamma (\nu \omega_{\xi} + \omega_{\theta})$$

$$a_{24} = -\frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \frac{n}{\rho} \omega_{\theta} - b \frac{n}{\rho} (\nu \omega_{\xi} + \omega_{\theta})$$

$$a_{25} = \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2}$$

$$a_{26} = \frac{5}{6} \frac{b \gamma (1-\nu)}{2}$$

$$a_{27} = -\frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2} - b \omega_{\xi} (\omega_{\xi} + \nu \omega_{\theta}) - b \omega_{\theta} (\nu \omega_{\xi} + \omega_{\theta})$$

$$a_{28} = \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} + b \beta \omega_{\xi} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \quad a_{29} = \frac{5}{6} \frac{b \gamma (1-\nu)}{2} - b \gamma \beta \omega_{\theta} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_{30} = \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \frac{n}{\rho} - b \frac{n}{\rho} \beta \omega_{\theta} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_{31} = \lambda^2 d (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_{32} = \lambda^2 d \omega_{\xi}'$$

$$a_{33} = -\frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \omega_{\xi} + \lambda^2 d \gamma^2 (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) + \lambda^2 \frac{d(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_{34} = \lambda^2 \frac{d \gamma (3-\nu)}{2} \frac{n}{\rho} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_{35} = \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} + \lambda^2 d \omega_{\xi} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_{36} = \lambda^2 d \omega_{\xi}' (2\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) + \lambda^2 d \gamma \omega_{\theta} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_{37} = -\lambda^2 d$$

$$a_{38} = -\lambda^2 d \gamma$$

$$a_{39} = \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} + \lambda^2 d (\nu \omega_{\xi} \omega_{\theta} + \gamma^2) + \lambda^2 \frac{d(1-\nu)}{2} \frac{n^2}{\rho^2}$$

$$a_{40} = -\lambda^2 \frac{d(1+\nu)}{2} \frac{n}{\rho}$$

$$a_{41} = \lambda^2 \frac{d \gamma (3-\nu)}{2} \frac{n}{\rho}$$

$$a_{42} = (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) a_{41}$$

$$a_{43} = \lambda^2 \frac{d(1-\nu)}{2} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_{44} = \lambda^2 \frac{d(1-\nu)}{2} \omega_{\xi}'$$

$$a_{45} = -\frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \omega_{\theta} + \lambda^2 d \left( \frac{1-\nu}{2} \gamma^2 + \frac{n^2}{\rho^2} \right) (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$a_{46} = -\frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \frac{n}{\rho} + \lambda^2 d \frac{n}{\rho} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \omega_{\theta}$$

$$a_{47} = \lambda^2 \frac{d(1+\nu)}{2} \frac{n}{\rho}$$

$$a_{48} = \lambda^2 \frac{d \gamma (3-\nu)}{2} \frac{n}{\rho}$$

$$a_{49} = -\lambda^2 \frac{d(1-\nu)}{2}$$

$$a_{50} = \gamma a_{49}$$

$$a_{51} = \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} + \lambda^2 d \frac{(1-\nu)}{2} (\gamma^2 - \omega_{\xi} \omega_{\theta}) + \lambda^2 d \frac{n^2}{\rho^2}$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = \gamma$$

$$c_3 = -\gamma$$

$$c_4 = n / \rho$$

$$c_5 = \omega_{\xi}$$

$$c_6 = -1$$

$$c_7 = 1$$

$$c_8 = -n / \rho$$

$$c_9 = \gamma$$

$$c_{10} = \gamma$$

$$c_{11} = \omega_{\theta}$$

$$c_{12} = -1$$

$$c_{13} = 1$$

$$c_{14} = -\omega_{\xi}$$

$$c_{15} = -\omega_{\theta}$$

$$c_{16} = \gamma$$

$$c_{17} = n / \rho$$

$$c_{18} = -1$$

$$c_{19} = -\lambda^2$$

$$c_{20} = -\lambda^2 \gamma$$

$$c_{21} = \lambda^2 \gamma$$

$$c_{22} = -\lambda^2 n / \rho$$

$$c_{23} = 1$$

$$c_{24} = -\lambda^2$$

$$c_{25} = \lambda^2 n / \rho$$

$$c_{26} = -\lambda^2 \gamma$$

$$c_{27} = -\lambda^2 \gamma$$

$$c_{28} = 1$$

ここで、 $\beta = h^2 / (12a^2)$ ,  $\lambda = h / a$  である。

### 3. 2 式(3.25)の各係数

式(3.25)の係数マトリックスに含まれる各係数  $b_1 \sim b_{21}$ 、および  $d_1 \sim d_5$  は、次のようになる。

$$b_1 = b$$

$$b_2 = b \nu \gamma$$

$$b_3 = b \nu \frac{n}{\rho}$$

$$b_4 = b (\omega_{\xi} + \nu \omega_{\theta})$$

$$b_5 = -b \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$b_6 = -\frac{b(1-\nu)}{2} \frac{n}{\rho}$$

$$b_7 = \frac{b(1-\nu)}{2} \{1 + \beta \omega_{\xi} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})\}$$

$$b_8 = -\frac{b \gamma (1-\nu)}{2}$$

$$b_9 = -\frac{b(1-\nu)}{2} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$b_{10} = -\frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2} \omega_{\xi}$$

$$b_{11} = \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2}$$

$$b_{12} = \frac{5}{6} \frac{b(1-\nu)}{2}$$

$$b_{13} = -d (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$b_{14} = -d \omega_{\xi} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$b_{15} = d$$

$$b_{16} = d \nu \gamma$$

$$b_{17} = d \nu \frac{n}{\rho}$$

$$b_{18} = -\frac{d(1-\nu)}{2} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta})$$

$$b_{19} = -\frac{d(1-\nu)}{2} \frac{n}{\rho}$$

$$b_{20} = \frac{d(1-\nu)}{2}$$

$$b_{21} = -\frac{d \gamma (1-\nu)}{2}$$

$$d_1 = -\dot{n}_{\xi}^{VP}$$

$$d_2 = -\dot{n}_{\xi\theta}^{VP}$$

$$d_3 = -\dot{q}_{\xi}^{VP}$$

$$d_4 = -\dot{m}_{\xi}^{VP}$$

$$d_5 = -\dot{m}_{\xi\theta}^{VP}$$

4. 1 異方性パラメータ  $G, H, F, N$  および粘性パラメータ  $\gamma, \Psi$  の  
決定法

直交異方性円筒殻の異方性主軸  $\xi, \theta, \zeta$  から任意の方向角  $(\alpha, \beta, \gamma)$  に単軸試験片を切り出し (図A4.1)、引張試験を行う。 $\sigma, d\varepsilon_{\xi}^{VP}, d\varepsilon_{\theta}^{VP}$  をそれぞれ引張軸方向の応力、引張軸方向の粘塑性ひずみ増分および引張軸方向に垂直な幅方向の粘塑性ひずみ増分とする。 $\sigma_{\zeta}=0$ としたときの相当応力  $\bar{\sigma}$  は式(4.35)で与えられる。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2(F+G+H)}} [(G+H)\sigma_{\xi}^2 - 2H\sigma_{\xi}\sigma_{\theta} + (F+H)\sigma_{\theta}^2 + 2L\sigma_{\theta\zeta}^2 + 2M\sigma_{\xi\zeta}^2 + 2N\sigma_{\xi\theta}^2]^{1/2} \quad (4.35)$$

また

$$d\varepsilon_{\xi}^{VP} = d\varepsilon_{\xi}^{VP} \cos^2 \alpha + d\varepsilon_{\theta}^{VP} \cos^2 \beta + d\varepsilon_{\zeta}^{VP} \cos^2 \gamma + d\gamma_{\xi\theta}^{VP} \cos \alpha \cos \beta \\ + d\gamma_{\theta\zeta}^{VP} \cos \beta \cos \gamma + d\gamma_{\xi\zeta}^{VP} \cos \gamma \cos \alpha \quad (A4.1)$$

異方性主軸に関する各応力成分は、応力の座標変換則により、 $\sigma, \alpha, \beta, \gamma$  を用いて次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \sigma \cos^2 \alpha, & \sigma_{\theta} &= \sigma \cos^2 \beta, & \sigma_{\xi\theta} &= \sigma \cos \alpha \cos \beta \\ \sigma_{\theta\zeta} &= \sigma \cos \beta \cos \gamma, & \sigma_{\xi\zeta} &= \sigma \cos \gamma \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (A4.2)$$

次に Perzyna の式(2.10)

$$d\varepsilon_{ij}^{VP} = \gamma_0 \langle \Psi(f) \rangle S_{ij} J_2^{-1/2} \Delta t = \gamma_0 \langle \Psi(f) \rangle (\sqrt{3}/\bar{\sigma}) S_{ij} \Delta t$$

より、 $d\lambda = \frac{\sqrt{3}}{\bar{\sigma}(F+G+H)} \gamma_0 \langle \Psi(f) \rangle \Delta t$  とおくと、式(4.37)より

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_{\xi}^{VP} &= \{(G+H)\sigma_{\xi} - H\sigma_{\theta}\} d\lambda, & d\varepsilon_{\theta}^{VP} &= \{(F+H)\sigma_{\theta} - H\sigma_{\xi}\} d\lambda \\ d\gamma_{\xi\theta}^{VP} &= 2N\sigma_{\xi\theta} d\lambda, & d\gamma_{\theta\zeta}^{VP} &= 2L\sigma_{\theta\zeta} d\lambda, & d\gamma_{\xi\zeta}^{VP} &= 2M\sigma_{\xi\zeta} d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (A4.3)$$

ここで  $\xi\theta$  面から採取した試験片に対して、引張軸方向およびそれに直角な幅方向のひずみ増分は、 $\gamma = \pi/2$  より

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_{\xi}^{VP} &= \{(G+H) \cos^4 \alpha + (F+H) \sin^4 \alpha \\ &\quad + 2(N-H) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha\} \sigma d\lambda \\ d\varepsilon_{\theta}^{VP} &= \{-H \sin^4 \alpha - H \cos^4 \alpha + (F+G+2H-2N) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha\} \sigma d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (A4.4)$$

となる。殻厚方向のひずみ増分  $d\varepsilon_{\zeta}^{VP}$  は、塑性変形の新圧縮性の条件から、

$$d\varepsilon_{\zeta}^{VP} = - (d\varepsilon_{\xi}^{VP} + d\varepsilon_{\theta}^{VP}) \\ = - \{G \cos^4 \alpha + F \sin^4 \alpha + (F+G) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha\} \sigma d\lambda \quad (A4.5)$$

となる。Lankford の  $r$  値は

$$r = d\varepsilon_b^{VP} / d\varepsilon_\xi^{VP} \quad (\text{A4.6})$$

で与えられる。

図A4.2に示すように、円筒の軸方向 (①)、円周方向 (②) および  $45^\circ$  方向 (③) から採取した単軸試験片に、それぞれ試験片の引張方向と直角方向にひずみゲージを貼付し、静的引張試験 ( $\dot{\varepsilon} = 0.05 \times 10^{-6}$  /s) によって、 $d\varepsilon_\xi^{VP}$  と  $d\varepsilon_b^{VP}$  を求めると、式(A4.4) ~ (A4.6)より

$\xi$  方向試験片① ( $\alpha = 0$ ) では

$$r_{0^\circ} = H/G \quad (\text{A4.7})$$

$\theta$  方向試験片② ( $\alpha = \pi/2$ ) では

$$r_{90^\circ} = H/F \quad (\text{A4.8})$$

$45^\circ$  方向試験片③ ( $\alpha = \pi/4$ ) では

$$r_{45^\circ} = (2N - F - G) / (2F + 2G) \quad (\text{A4.9})$$

$F$  を基準とする式(4.31)の形で表すと、

$$H/F = r_{90^\circ}, \quad G/F = r_{90^\circ}/r_{0^\circ}, \quad N/F = (r_{45^\circ} + 0.5)(1 + r_{90^\circ}/r_{0^\circ}) \quad (\text{A4.10})$$

また式(2.10)によると、材料の塑性異方性パラメータがわかれば、各方向の粘塑性ひずみ速度は同一の粘性パラメータ  $\gamma$  および関数  $\Psi(f)$  によって決定されることになる。

例えば、 $\xi$ 、 $\theta$  方向の単軸引張りの場合には、粘塑性ひずみ速度はそれぞれ次式のようになる。

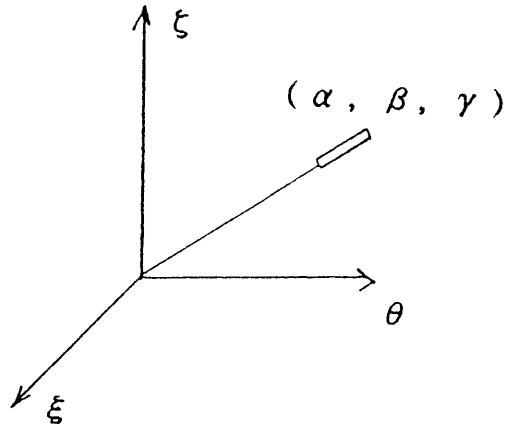
$\xi$  方向試験片① ( $\alpha = 0$ ) では

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{3(G+H)}{2(F+G+H)}} \sigma_\xi, & S_\xi &= \frac{G+H}{F+G+H} \sigma_\xi \quad \text{より} \\ \dot{\varepsilon}_\xi^{VP} &= \gamma_0 \left( \frac{\sigma_\xi - \sigma_{\xi^*}}{\sigma_{\xi^*}} \right)^\alpha \frac{\sqrt{3}}{\bar{\sigma}} S_\xi = \gamma_0 \sqrt{\frac{2(G+H)}{(F+G+H)}} \left( \frac{\sigma_\xi - \sigma_{\xi^*}}{\sigma_{\xi^*}} \right)^\alpha \end{aligned} \quad (\text{A4.11})$$

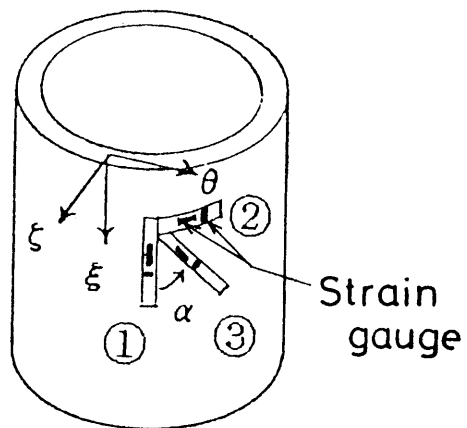
$\theta$  方向試験片② ( $\alpha = \pi/2$ ) では

$$\dot{\varepsilon}_\theta^{VP} = \gamma_0 \sqrt{\frac{2(F+H)}{(F+G+H)}} \left( \frac{\sigma_\theta - \sigma_{\theta^*}}{\sigma_{\theta^*}} \right)^\alpha \quad (\text{A4.12})$$

第4章では、各方向の試験片に対し、種々のひずみ速度 ( $\dot{\varepsilon} = 0.05 \sim 300 \times 10^{-6}$  /s) で引張試験を行い、 $\sigma_\xi - \varepsilon_\xi$ 、 $\sigma_\theta - \varepsilon_\theta$ 、 $\sigma_{45^\circ} - \varepsilon_{45^\circ}$  の関係を求めて、粘性パラメータ  $\gamma$  および  $\Psi$  の関数形を決定した。



図A4.1 座標



図A4.2 直交異方性円筒殻から採取した  
引張試験片

#### 4.2 連立微分方程式の係数マトリックス

第4.2節で用いる連立微分方程式の係数マトリックスに含まれる各係数 $a_1 \sim a_{24}$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 a_1 &= b_{\xi} & a_2 &= b_{\xi} \gamma \\
 a_3 &= -b_{\xi} \nu_{\theta \xi} \omega_{\xi} \omega_{\theta} - b_{\theta} \gamma^2 - b_{\xi \theta} \frac{n^2}{\rho^2} \left\{ 1 - \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \frac{\omega_{\theta}}{a} \right\} - b_{\xi \zeta} \omega_{\xi}^2 \\
 a_4 &= (b_{\xi} \nu_{\theta \xi} + b_{\xi \theta}) \frac{n}{\rho} \\
 a_5 &= - (b_{\theta} + b_{\xi \theta}) \gamma \frac{n}{\rho} + b_{\xi \theta} \gamma \frac{n}{\rho} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \frac{\omega_{\theta}}{a} \\
 a_6 &= b_{\xi} (\omega_{\xi} + \nu_{\theta \xi} \omega_{\theta}) + b_{\xi \zeta} \omega_{\xi} & a_7 &= b_{\xi} \omega_{\xi}' + \gamma (b_{\xi} \omega_{\xi} - b_{\theta} \omega_{\theta}) \\
 a_8 &= -b_{\xi} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) & a_9 &= -b_{\xi} \beta \omega_{\xi}' \\
 a_{10} &= -b_{\theta} \gamma^2 \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) - b_{\xi \theta} \frac{n^2}{\rho^2} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) + b_{\xi \zeta} \omega_{\xi} a \\
 a_{11} &= - (b_{\theta} + b_{\xi \theta}) \gamma \frac{n}{\rho} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) & a_{12} &= - (b_{\theta} \nu_{\xi \theta} + b_{\xi \theta}) \frac{n}{\rho} \\
 a_{13} &= - (b_{\theta} + b_{\xi \theta}) \gamma \frac{n}{\rho} + b_{\xi \theta} \gamma \frac{n}{\rho} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \frac{\omega_{\theta}}{a} \\
 a_{14} &= b_{\xi \theta} \left\{ 1 + \beta \frac{\omega_{\xi}}{a} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \right\} & a_{15} &= b_{\xi \theta} \beta \frac{\omega_{\xi}'}{a} (2\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) + b_{\xi \theta} \gamma \\
 a_{16} &= b_{\xi \theta} (\omega_{\xi} \omega_{\theta} - \gamma^2) + b_{\xi \theta} \gamma^2 \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \frac{\omega_{\theta}}{a} - b_{\theta} \frac{n^2}{\rho^2} - b_{\theta \zeta} \omega_{\theta}^2 \\
 a_{17} &= -b_{\theta} \frac{n}{\rho} (\omega_{\theta} + \nu_{\xi \theta} \omega_{\xi}) - b_{\theta \zeta} \frac{n}{\rho} \omega_{\theta} \\
 a_{18} &= - (b_{\theta} + b_{\xi \theta}) \gamma \frac{n}{\rho} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) & a_{19} &= -b_{\xi \theta} \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \\
 a_{20} &= -b_{\xi \theta} \beta \omega_{\xi}' \\
 a_{21} &= - (b_{\xi \theta} \gamma^2 + b_{\theta} \frac{n^2}{\rho^2}) \beta (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) + b_{\theta \zeta} \omega_{\theta} a \\
 a_{22} &= - (b_{\xi} + b_{\xi \zeta}) \omega_{\xi} - b_{\theta} \nu_{\xi \theta} \omega_{\theta} \\
 a_{23} &= -b_{\xi \zeta} (\omega_{\xi}' + \gamma \omega_{\xi}) - \gamma (b_{\xi} \nu_{\theta \xi} \omega_{\xi} + b_{\theta} \omega_{\theta}) \\
 a_{24} &= -b_{\theta \zeta} \frac{n}{\rho} \omega_{\theta} - (b_{\xi} \nu_{\theta \xi} \omega_{\xi} + b_{\theta} \omega_{\theta}) \frac{n}{\rho}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{25} &= b_{\xi\zeta} & a_{26} &= b_{\xi\zeta}\gamma \\
a_{27} &= -b_{\theta\zeta} \frac{n^2}{\rho^2} - b_{\xi\omega} (\omega_{\xi} + \nu_{\theta\xi}\omega_{\theta}) - b_{\theta\omega} (\nu_{\xi\theta}\omega_{\xi} + \omega_{\theta}) \\
a_{28} &= b_{\xi\zeta}a + b_{\xi\beta}\omega_{\xi} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) & a_{29} &= b_{\xi\zeta}\gamma a - b_{\theta\gamma}\beta\omega_{\theta} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \\
a_{30} &= b_{\theta\zeta} \frac{n}{\rho} a - b_{\theta} \frac{n}{\rho} \beta\omega_{\theta} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) & a_{31} &= -d_{\xi} \frac{1}{a} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \\
a_{32} &= -d_{\xi} \frac{1}{a} \omega_{\xi}' \\
a_{33} &= b_{\xi\zeta}a\omega_{\xi} - (d_{\theta}\gamma^2 + d_{\xi\theta} \frac{n^2}{\rho^2}) \frac{1}{a} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \\
a_{34} &= - (d_{\theta} + d_{\xi\theta}) \gamma \frac{n}{\rho} \frac{1}{a} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) & a_{35} &= -b_{\xi\zeta}a - d_{\xi} \frac{\omega_{\xi}}{a} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \\
a_{36} &= -d_{\xi} \frac{\omega_{\xi}'}{a} (2\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) - d_{\theta}\gamma (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \frac{\omega_{\theta}}{a} \\
a_{37} &= d_{\xi} & a_{38} &= d_{\xi}\gamma \\
a_{39} &= -b_{\xi\zeta}a^2 - d_{\xi}\nu_{\theta\xi}\omega_{\xi}\omega_{\theta} - d_{\theta}\gamma^2 - d_{\xi\theta} \frac{n^2}{\rho^2} \\
a_{40} &= (d_{\xi}\nu_{\theta\xi} + d_{\xi\theta}) \frac{n}{\rho} & a_{41} &= - (d_{\theta} + d_{\xi\theta}) \gamma \frac{n}{\rho} \\
a_{42} &= - (d_{\theta} + d_{\xi\theta}) \gamma \frac{n}{\rho} \frac{1}{a} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) & a_{43} &= -d_{\xi\theta} \frac{1}{a} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \\
a_{44} &= -d_{\xi\theta} \frac{\omega_{\xi}'}{a} \\
a_{45} &= b_{\theta\zeta}a\omega_{\theta} - (d_{\xi\theta}\gamma^2 + d_{\theta} \frac{n^2}{\rho^2}) \frac{1}{a} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \\
a_{46} &= b_{\theta\zeta} \frac{n}{\rho} a - d_{\theta} \frac{n}{\rho} (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) \frac{\omega_{\theta}}{a} & a_{47} &= - (d_{\theta}\nu_{\xi\theta} + d_{\xi\theta}) \frac{n}{\rho} \\
a_{48} &= - (d_{\theta} + d_{\xi\theta}) \gamma \frac{n}{\rho} & a_{49} &= d_{\xi\theta} \\
a_{50} &= d_{\xi\theta}\gamma \\
a_{51} &= -b_{\theta\zeta}a^2 - d_{\xi\theta} (\gamma^2 - \omega_{\xi}\omega_{\theta}) - d_{\theta} \frac{n^2}{\rho^2}
\end{aligned}$$

ここに

$$b_{\xi} = \frac{E_{\xi}h}{a(1 - \nu_{\xi\theta}\nu_{\theta\xi})} \qquad b_{\theta} = \frac{E_{\theta}h}{a(1 - \nu_{\xi\theta}\nu_{\theta\xi})}$$



$$b_{\xi\theta} = \frac{h}{a} G_{\xi\theta}$$

$$b_{\xi\zeta} = \frac{5h}{6a} G_{\xi\zeta}$$

$$b_{\theta\zeta} = \frac{5h}{6a} G_{\theta\zeta}$$

$$\beta = \frac{h^2}{12a}$$

$$d_{\xi} = \frac{E_{\xi} h^3}{12a(1 - \nu_{\xi\theta}\nu_{\theta\xi})}$$

$$d_{\theta} = \frac{E_{\theta} h^3}{12a(1 - \nu_{\xi\theta}\nu_{\theta\xi})}$$

$$d_{\xi\theta} = \frac{h^3}{12a} G_{\xi\theta}$$

## 5.1 式(5.15)の各係数

式(5.15)に含まれる係数 $a_1 \sim a_{34}$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a \left( \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \omega_{\xi} \rho \Phi_{\xi} \right) & a_2 &= a \rho \\
 a_3 &= -a \frac{\partial \rho}{\partial \xi} & a_4 &= -\omega_{\xi} \rho a \Phi_{\theta} \\
 a_5 &= a & a_6 &= \omega_{\xi} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \\
 a_7 &= \omega_{\xi} \rho & a_8 &= -\omega_{\xi} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \\
 a_9 &= 1.5\omega_{\xi} - 0.5\omega_{\theta} & a_{10} &= \rho a^2 \\
 a_{11} &= -\omega_{\theta} \rho a \Phi_{\theta} & a_{12} &= a \\
 a_{13} &= a \left( 2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \omega_{\theta} \rho \Phi_{\xi} \right) & a_{14} &= a \rho \\
 a_{15} &= \omega_{\theta} & a_{16} &= 2\omega_{\theta} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{\rho}{2} \gamma (\omega_{\xi} - \omega_{\theta}) - \frac{\rho}{2} \frac{\partial \omega_{\xi}}{\partial \xi} \\
 a_{17} &= (1.5\omega_{\theta} - 0.5\omega_{\xi}) \rho & a_{18} &= \rho a^2 \\
 a_{19} &= -a \left( \rho \omega_{\xi} + \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \Phi_{\xi} + \rho \frac{\partial \Phi_{\xi}}{\partial \xi} \right) & a_{20} &= -a \rho \Phi_{\xi} \\
 a_{21} &= -a \left( \rho \omega_{\theta} + \frac{\partial \Phi_{\theta}}{\partial \theta} \right) & a_{22} &= -a \Phi_{\theta} \\
 a_{23} &= -a \left( \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \Phi_{\theta} + \rho \frac{\partial \Phi_{\theta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_{\xi}}{\partial \theta} \right) & a_{24} &= -a \rho \Phi_{\theta} \\
 a_{25} &= -a \Phi_{\xi} & a_{26} &= -\rho \omega_{\xi} \omega_{\theta} \\
 a_{27} &= 2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} & a_{28} &= \rho \\
 a_{29} &= \rho \omega_{\xi} \omega_{\theta} & a_{30} &= -\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \\
 a_{31} &= \frac{1}{\rho} & a_{32} &= \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \\
 a_{33} &= 2 & a_{34} &= a^2 \rho
 \end{aligned}$$

6. 1 式(6.12)の各係数

式(6.12)に含まれる各係数  $a_1 \sim a_{13}$ ,  $b_1 \sim b_{13}$  および  $c_1 \sim c_{11}$  は、次のようになる。

$$a_1 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_1} \Phi_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2}$$

$$a_2 = \alpha_2$$

$$a_3 = -\frac{1}{2} \alpha_1 \Phi_n$$

$$a_4 = -\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \alpha_1 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2}$$

$$a_5 = -\frac{1}{2} \alpha_1 \Phi_n$$

$$a_6 = 2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_1} \Phi_2$$

$$a_7 = \alpha_1$$

$$a_8 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}$$

$$a_9 = \frac{\alpha_2}{R_1}$$

$$a_{10} = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}$$

$$a_{11} = \frac{2}{R_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$a_{12} = \frac{\alpha_1}{R_1} + \frac{1}{2} \alpha_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$a_{13} = \alpha_1 \alpha_2$$

$$b_1 = -\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \alpha_2 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}$$

$$b_2 = -\frac{1}{2} \alpha_2 \Phi_n$$

$$b_3 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_2} \Phi_2 - \frac{1}{2} \alpha_2 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}$$

$$b_4 = -\frac{1}{2} \alpha_2 \Phi_n$$

$$b_5 = \alpha_1$$

$$b_6 = 2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_2} \Phi_1$$

$$b_7 = \alpha_2$$

$$b_8 = -\frac{1}{R_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}$$

$$b_9 = \frac{1}{R_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}$$

$$b_{10} = \frac{\alpha_1}{R_2}$$

$$b_{11} = \frac{2}{R_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$b_{12} = \frac{3}{2} \alpha_2 \frac{1}{R_2}$$

$$b_{13} = \alpha_1 \alpha_2$$

$$c_1 = -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_1} - \alpha_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}$$

$$c_2 = -\alpha_2 \Phi_1$$

$$c_3 = -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_2} - \alpha_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}$$

$$c_4 = -\alpha_1 \Phi_2$$

$$c_5 = -\alpha_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \alpha_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}$$

$$c_6 = -\alpha_2 \Phi_2$$

$$c_7 = -\alpha_1 \Phi_1$$

$$c_8 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

$$c_9 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$c_{10} = 2$$

$$c_{11} = \alpha_1 \alpha_2$$

## 発表論文ならびに業績リスト

### I 学位論文に関係のある論文

論文題目	発表雑誌	共同研究者
回転対称殻の弾／粘塑性動的応答	日本機械学会論文集, 44-381 (昭53-5), 1478.	竹園 茂男
非対称荷重を受ける回転対称殻の弾／粘塑性解析	日本機械学会論文集, A, 46-402 (昭55-2), 227.	竹園 茂男
Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Axisymmetrical Shells by Overlay Model	J. Pressure Vessel Tech., Trans. ASME, 102-3 (August 1980), 257.	S.Takezono K.Kanezaki
薄肉殻の弾／粘塑性動的応答	日本機械学会論文集, A, 47-421 (昭56-9), 949.	竹園 茂男
Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of General Thin Shells to Blast Loads	Bull. JSME, 25-203 (May 1982), 728.	S.Takezono
非対称荷重を受ける厚肉軸対称殻の弾／粘塑性解析	日本機械学会論文集, A, 51-472 (昭60-12), 2829.	竹園 茂男 長野 卓
非対称荷重を受ける厚肉回転対称殻の弾／粘塑性動的応答	日本機械学会論文集, A, 52-476 (昭61-4), 997.	竹園 茂男 内堀 博雄
異方性厚肉回転対称殻の弾／粘塑性変形	日本機械学会論文集, A, 52-476 (昭61-4), 1149.	竹園 茂男 長野 卓 戸高 晴男
厚肉回転対称殻の弾／粘塑性動的応答 (回転慣性を考慮した場合)	日本機械学会論文集, A, 52-482 (昭61-10), 2395.	竹園 茂男 内堀 博雄
非対称荷重を受ける直交異方性厚肉回転対称殻の弾／粘塑性解析	日本機械学会論文集, A, 53-495 (昭62-11), 2166.	竹園 茂男 白石 博文
Overlayモデルによる回転対称殻の弾／粘塑性動的応答	日本機械学会論文集 (A編) に投稿中	竹園 茂男 大坪 一三 持留 裕之 松岡 展伸

論文題目	発表雑誌	共同研究者
Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Shells of Revolution	Trans. 4th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, M7/7 (August 1977) ,1.	S.Takezono
Elasto/Visco-Plastic Analysis of Axisymmetrical Shells under Asymmetrical Loading	Trans. 5th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, M4/8 (August 1979) ,1.	S.Takezono
Elasto/Visco-Plastic Analysis of Orthotropic Moderately Thick Shells of Revolution	Trans. 8th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, L5/2 (August 1985) ,231.	S.Takezono S.Nagano
Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Moderately Thick Shells of Revolution under Asymmetrical Loading	Proc. Int. Conf. on Computational Mechanics, 2-6 (May 1986) ,41.	S.Takezono H.Uchibori
Elasto/Visco-Plastic Analysis of Moderately Thick Shells of Revolution under Asymmetrical Loading	Trans. 9th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, B (August 1987) ,605.	S.Takezono S.Nagano
Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Moderately Thick Shells of Revolution under Consideration of Rotatory Inertia	Proc. Int. Conf. on Computational Engineering Science, 2,41,ii (April 1988) ,1.	S.Takezono H.Uchibori

## II その他の論文

論文題目	発表雑誌	共同研究者
回転対称殻の弾／粘塑性動的応答 — 荷重と温度負荷を受ける 場合 —	日本機械学会論文集, A, 54-503 (昭63-7), 1457.	竹園 茂男 田口 智弘 穂多田 一男
Overlayモデルによる薄肉殻の 弾／粘塑性動的応答の解法	日本機械学会論文集, A (掲載決定)	竹園 茂男
Elasto/Visco-Plastic Dynamic Response of Axisymmetrical Shells under Mechanical and/or Thermal Loading	ASME 1989 PVP Conf. — JSME Cosponsorship に投稿中	S. Takezono T. Taguchi