薄肉構造部材の離散化モデルによる高精密化解析に関する研究

加 鳥 裕 明

目　次

第1章　　緒　　論

構造物あるいは構造部材の力学的挙動におよぼす各種パラメータの影響を知ることは構造設計において重要である。実際にどのパラメータがどのような影響をおよぼすかは、解析的方法による方が数値的方法より明確に知ることができる。解析的方法は、解析対象となる連続体の領域が幾何学的に簡明で境界条件が単純な場合にしか適用できない。そのため、解析対象となる領域の形状が複雑になると、解析的方法は一般に応用できず、数値的方法によらざるをえない。数値的な構造解析法は、コンピュータの急速な発達に伴って、飛躍的に発展した。特に有限要素法や境界要素法に基づく解析手法は、構造物の設計においてはもはやなくてはならないものとなっている。これらの解析手法に対して、構造物の安全性や信頼性を明らかにするため、より高い精度でしかもより効率的に解析することが要求されるようになった。構造解析に数値解析法を適用する場合、はり理論や平板理論に基づく定式化が行なわれている。構造力学の基礎を与えているはり理論にもいくつかの問題点があり、その解決によって精密化と適用範囲の拡大が期待できることは明らかである。以下では、はり理論および平板理論の歴史的背景と特徴および問題点などについて概観する。また、種々の数値解析法の特徴などについてまとめる。最後に、本研究の内容について記述する。

1・1　はり理論

近年、自動車、鉄道車両、航空機などをはじめとし各種構造物において軽量化・大型化が進むに伴い、次第に薄板構造に変わりつつある。このような薄板構造の中には、薄肉はり理論を用いて設計が行なわれているものが少なくない。

はり理論は、Bernoulli-Eulerの曲げ理論に端を発し、数多くの研究者の貴重な業績の蓄積によって体系化されてきた。その歴史[1]を辿ってみると、Bernoulli-Eulerのはりの曲げ理論とSaint-Venentのねじり理論が結びついてはりの古典的理論が生まれた。その後、航空工学や船舶工学における構造物の軽量化に対する関心が高まるなか、Bachは構造用形材の曲げねじりの実験を行ない、それに続いて、Wagnerの曲げねじり理論が生まれ、Timoshenkoの研究、Reissnerのせん断遅れの理論を経て、Vlasovがはりの曲げねじり理論を体系づけた。そして今日のはりの工学的理論が形成された。

しかしながらこの最も基本的なはりの曲げ理論はいくつかの問題点を含んでいる。はり理論の問題点はせん断変形などに対する理論の不完全さに原因があると考えられる。例えば

(a) はりの曲げ理論は横荷重に対するせん断ひずみがゼロの仮定より出発している。このはり理論においては、曲げ応力につり合うべきせん断応力を、変位解から直接求めることができない。そのため、材軸方向の応力のつり合い方程式を用いて、曲げ応力を積分することにより、せん断応力を求める手法がとられている。このせん断応力計算法は、半逆解法(semi-inverse method)と呼ばれている。

(b) 純ねじり、そり拘束ねじりのように外力としてねじりモーメントが作用する場合、あるいは、曲げねじりの問題、さらに、対称断面でも横荷重が断面の任意点に作用する場合、非対称断面はりの曲げ問題においては、はり断面のねじりに関する諸断面定数を求める必要がある。はりが薄肉断面であるならば、比較的簡単に断面定数を定めることが出来る。しかし、中実断面材に対する配慮が不十分であり、統一的であるとはいえない。また、薄肉といえども、閉断面と開断面とでは別々に取り扱わねばならないという不便さもある。

(c) せん断変形が重要な因子となる薄肉構造でも、いわゆるせん断流理論はせん断変形を一般には無視し、ただ薄肉閉断面でのねじれ変形だけを考慮している。

(d) 弾性論では、Saint-Venantによる一様せん断力、一様ねじりの解があるが、ねじりとせん断の連成について実用的な計算法が望まれる。

(e) せん断変形を厳密に評価しようとすれば、三次元弾性論の立場から議論せざるを得なくなり、せん断変形のみならず、断面変形の影響も考慮に入れたはり理論の展開へと向かっていくことになる。

このようにはり理論はいくつかの問題点を含んでいるが、これが解決されることにより理論の精密化と適用範囲の拡大が期待できる。

せん断変形の影響は一般には小さいが、断面寸法に比べて長さが短いはりや固定端のように断面拘束の強い部分では無視することが出来ない。せん断変形の影響を考慮したはりの曲げに関する理論には、Timoshenkoはり理論[2]がある。この理論は平面保持の仮定を基本とし、せん断ひずみは断面内で一様に分布するとしている。Timoshenkoのせん断補正係数については多くの研究があるが、Cowper[3]はせん断補正係数を三次元弾性論から厳密に求めている。さらにねじりを受けるはりの理論にはSaint-Venantのねじり理論[4]がある。これは、Semi-Inverse Methodによって厳密解が求められている。そして、はり端のwarpingの拘束ない

し接続を考えたものに、ねじりでのWagner[5]、Timoshenko[6]、Vlasov[7]によるものがある。さらに、Saint-Venantのねじれ以外のせん断応力によるせん断変形の影響を考慮した薄肉材の理論に発展している[8][9]。これらの研究はせん断変形としてせん断応力によるひずみエネルギと等価になるようなせん断ひずみを用いており、本質的にはTimoshenkoはり理論の拡張といえよう。

薄肉箱形はりのshear-lagに関するものにReissnerの研究がある[10][11]。これは、箱形はりフランジ直応力分布を2次曲線と仮定し、エネルギ最小の原理より求めている。

また、三次元せん断変形解析として、川井・藤谷[12-16]の研究がある。これは、与えられた構造物をどのように理想化しても、実際の構造物の剛性との間にはずれがあるが、そのずれを評価してもとの解を修正することによって、少ない自由度でも実際の挙動に近い解を与えることが可能になるという構造物の理想化の原理に基づき、有限要素法によるはりの精密なせん断変形解析を行なったものである。しかし、その解析はかなり複雑化している。

前にも述べたように、はりのせん断変形問題を厳密に取り扱おうとすると断面変形も考慮しなければならなくなる。断面変形がはりの力学特性に大きく影響する問題の一つにBrazier効果[17]として知られている問題がある。それは、薄肉円管に曲げモーメントが作用すると断面の偏平化によって剛性が低下するというものである。

はりの力学的挙動におよぼす断面変形の影響は、断面を板要素に分割し、おのおのに薄板理論を適用して調べることができる。薄板理論を適用して、断面変形を扱った研究にBijlaardとFisher[18]の研究がある。その後、薄板理論を発展させた折板理論や有限帯板法を用いて断面変形の影響を調べた研究も数多く報告されている[19][20]。

1・2　平板理論

構造物の長大化に伴い薄肉構造物が使用されているが、平板はそれを構成する基本要素である。また、最近では軽くて強いという特質を生かして複合材料が構造要素として用いられることが多くなった。それゆえ、はりと同様に平板の強さあるいは変形の問題は、構造設計において極めて重要である。

平板における初期の研究は振動問題に関するものであり、Chladni[21]は種々の

自由振動モードを実験的に初めて見付け出した。また、Kirchhoffは、曲げと伸びの組み合わせ変形状態を考慮した平板理論を示した。この理論は、変形前に板の中央面に垂直な断面は変形後も平面を保持し、中央面に垂直のままであるという仮定を用いている。この仮定は、薄板の場合は十分実際の挙動を表しており、今日の平板理論の基礎となっている。Huber[22]は、波板、縦横に補剛された板などを直交異方性板とみなし、直交異方性板理論を展開した。

Bernoulli-Eulerの仮定に基づくはり理論と同様、Kirchhoffの仮定に基づく薄板理論ではせん断変形の効果が含まれておらず、実際の構造解析に適用する場合問題となることがある。例えば、板厚がある程度大きくなると、Kirchhoffの薄板理論が適用できなくなる。それは、横方向のせん断変形が大きくなりKirchhoffの仮定が成り立たなくなるからである。この問題に関する初期の研究の中で最も有名なものは、Reissner[23][24]のせん断変形理論である。この理論はReissnerの変分原理によりたわみｗとせん断力Q_x、Q_yを含む６階偏微分方程式および板の辺上における３個の境界条件を導いている。その後、Mindlin[25]は等方性板の二次元曲げ振動問題に横せん断変形と回転慣性の影響を含む定式化を実行した。さらに、これらの理論を改善する試みがなされ、いわゆる高次理論が数多く提案されている。例えば、NelsonとLorch[26]、Reissner[27]、Lo、ChristensenとWu[28]の理論などがある。また、DeshmukhとArcher[29]は中程度の厚さの板の曲げに関するReissnerの微分方程式の新しい数値解析法を示した。IgarashiとTakizawa[30]は任意の厚さの板に任意の分布荷重が作用する場合についての変位成分を板厚方向座標ｚの冪級数に展開して厚板に関する２次元方程式を定式化した。古賀と遠藤[31]は、応力または変位をルジャンドル多項式の級数にし、平板の曲げに関する高次理論を定式化した。

平板の曲げ問題の解析における最近の傾向はコンピュータに依存することが大きく、低コストでかつより精密な解析理論についての研究がなされている。精密化の一つの考えとして、せん断変形を考慮した定式化がある。有限要素法の発展に伴い、せん断変形を考慮に入れた板要素の剛性マトリックスが開発された[32][33]。ReissnerおよびMindlinの理論は厚板の有限要素の定式化に利用されている。Mindlinの理論は、せん断変形を考慮する場合の定式化が比較的容易なことからCloughとFelippa[34]以来、多くの研究が報告されている。ところが、板厚が次第に小さくなるにつれて、要素の剛性が真の値より大きく評価される、いわゆるロッキング現象が起きる。そこで、Zienkiewicz、TaylorとToo[35]やPawseyと

Clough[36]は低減積分を利用することによって厚板のみならず薄板にも有効に利用できる要素を示した。また、SpilkerとMunir[37]はhybrid応力法に基づく中程度の板厚および薄板について、ロッキング現象を生じない比較的効率の良い平板曲げ要素(Serendipity hybrid応力要素)を定式化した。HughesとCohen[38]はHeterosis Mindlin要素と呼ばれるMindlin平板曲げ要素を示した。この有限要素はアイソパラメトリック9節点任意四辺形曲線要素であって、隅角点および辺上の各節点において3自由度(たわみと直角な2方向の断面回転角)を有し、要素内の節点9においては2自由度(直角な2方向の断面回転角)を有するものである。

近年、複合材料の用途が拡大するにつれ、その力学的特性を明らかにすることが重要となっている。複合材料は繊維と樹脂からなるラミナを積み重ねて板状にすることが多いが、これは微視的には不均質であり、繊維と母材の特性から複合材料としての特性を知ることが必要となる。しかも、複合材料の平板あるいはサンドイッチ板のような面外せん断剛性が面内剛性と曲げ剛性に比べて極めて小さい場合にはせん断変形を考慮しなければならない。

面外せん断変形の影響を含んだ複合材料板の研究には、Navierの方法を適用し、面外荷重を受ける4辺単純支持の複合材料板の解析を行なったDobyns[39]の研究がある。また、たわみの形を高次の項まで考慮して検討したものとしてMurthy[40]、Reddy[41]、ReddyとLiu[42]をはじめとして多くの研究がある。さらに、Dobynsは動的荷重が作用する単純支持積層板の解を回転慣性を無視してたたみ込み積分を用いて求めた。また、直交異方性板の高次理論も数多く提案されている。例えば、Lo、ChristensenとWu[43][44]は変位を級数展開して近似し、11個の未知数を含む11個の微分方程式を導いている。この理論は、動的問題には適しているが、応力の評価に難点がある。文献[44]では、変位解で表された面内応力を平衡方程式に代入し、それを解いて面外応力を求めている。RehfieldとValisetty[45]は、はりの面内曲げについて平面応力の厳密解と古典はり理論の応力との比較から高次修正に最も寄与する成分を評価し、その結果を利用して平板の面内応力の高次項を仮定している。また、加藤と古賀[46][47]は、面内応力をルジャンドル多項式の級数に展開し3次項まで取り入れて直交異方性板の曲げに関する高次理論を定式化した。

1・3　数値解析法

連続体の弾性問題は、つり合い式、適合条件式および材料構成則を連続体内のすべての点で満足し、かつ境界条件を満足する解を求めることに帰着する。古典的解法では上述の基礎式から導かれる未知量に関する微分方程式の境界値問題として級数展開法などを用いて解を求める。しかし、問題の領域の形状が複雑になると数値解析法に頼らなければならない。

連続体の問題を数値解析法を用いて解析する場合、その解法のいかんにかかわらず解析過程の中で離散化による近似が行なわれる。従来、その数値解析法には現象を直接支配する微分方程式を差分方程式で近似し、それを解くことが行なわれてきたが、この方法は、考える領域内での幾何学的特性、物理的特性が単純でないと解析が実用上困難で、解析する対象が変わると、原則として計算手順が変わり、コンピュータによって解析する場合であれば、一々プログラムを修正しなければならない。この差分法は有限要素法の出現以前においては、微分方程式の数値解析法の代名詞のごとく使われていた。コンピュータの進歩により、連続体を離散モデルに置き換え、その離散モデルを対象として解析するという考え方が生まれ、それに基づいて現われたのが有限要素法である。連続体を離散化するという考えは、Hrennikoff[48]が複雑な平板の問題の解析において等価な格子構造系を導入することで示された。その後、Turner、Clough, MartinとTopp[49]は、構造物を三角形や長方形の要素に分割し変位法を平面応力問題に適用した。これにより複雑な平板の問題を数値計算することができるようになった。さらに、Zienkiewicz[50][51]がこの分野の発展に大きく貢献した。

構造工学の分野から発展した有限要素法を数学的に考えると、変分法に基礎をおく微分方程式の数値解析法であるということができる。すなわち、問題の基礎方程式が与えられると、これを停留条件とする変分原理を導き、この変分原理を基礎にして解くべき方程式を導出し近似解を求めるものである。そして、重み付き残差法[52]の出現により、変分原理の必ずしも存在しない物理や工学の分野にまで適用範囲が広がり、理工学諸問題の数値解析に対する最も有力な手法として、不動の地位を確保するに至った。物理や工学の諸問題の解析に有限要素法は著しい成果を収めたが、一方で、有限要素法の難点も明らかになってきた。その難点の1つは、解析の対象となる領域全体を要素分割するため、複雑な領域形状を持つ問題や三次元問題の解析に計算コストがかかり過ぎるということである。差分法や有限要素法のよ

うな考察領域全体を扱う領域法とは対照的に境界上の未知量に関する境界積分方程式を組み立て、それを数値解析するという解法が注目を浴びるようになった。これが境界要素法である。

境界要素法[53]は微分方程式で記述される場の問題を積分方程式に変換し、これに有限要素法と同様の離散化を施して、代数方程式を解く問題に帰着させる方法である。境界上の境界積分方程式を解析の対象にするので、考えている問題の次元を一つだけ下げて取り扱うことができる。このため領域解法と呼ばれる差分法や有限要素法に比べて取り扱う代数方程式の元数が少なくなり入力データ数および計算時間を大幅に減少させることができる。そして、今日では工学の各分野での有効性と実用性が確認されている。有限要素法、境界要素法いずれも連続体内の各種の物理現象の解析法として広く用いられている。与えられた問題に応じてそれぞれの方法を使い分けることによって、それぞれの長所を生かした効率的な解析が可能となる。

1・4　本研究の内容

コンピュータの進歩は力学のすべての分野に大きな影響を与えているが、その中でも構造力学とそれを用いて行う構造物の設計計算手法は、最も大きな影響を受けている分野である。有限要素法による構造解析はコンピュータによる数値実験として、実物で実験が行えない構造試験、多額の経費と労力および時間を必要とする実験に取って変わりつつある。そして、苛酷な環境のもとでも信頼性や安全性の高い構造設計が要求されるようになった。このようなことから、信頼性が高く、またより精度の良い解析手法が要求されるようになった。

構造解析に数値解析法を適用する場合、はり理論や平板理論に基づく定式化が行われている。しかし、従来のBernoulli-Eulerの仮定に基づくはり理論、およびKirchhoffの仮定に基づく薄板理論では、せん断変形の効果が含まれておらず、これらの理論を実際の構造解析に適用する場合問題になることがあり、その問題点を解決することによって理論の一段の精密化と適用範囲の拡大が期待できることは明らかである。このような状況の中で、著者らは、はり理論のせん断変形に関する研究に着手した。この種の問題に関する研究としては、はりの三次元せん断変形解析法が、川井・藤谷によって提案されているが、その解析はかなり複雑化していることは否めない事実である。そこで、実用性を考慮しながらはり理論の精密化に関する研究を行ない、その手法の有用性を調べた。

また、はり理論においては、せん断変形のみならず断面変形も考慮しなければならない。断面変形がはりの力学的挙動に及ぼす影響は、断面を板要素に分割して、その各々に薄板理論を適用して調べることが出来る。パイプラインや一般構造物の構成要素として利用されている曲りはりや曲り管は、曲げを受けると断面が偏平化し、その剛性が低下し、同一断面形状の直線はりに比べて小さな曲げモーメントで屈服が起きる。このような現象の解明はこれまで薄肉円管を対象としたものであった。そこで、任意の断面形をもつ曲りはりの有限曲げを解析する手法を提案し、その有用性を調べた。

さらに、前節でも述べたように、平板においても板厚が大きくなったり、サンドイッチ板のように面外せん断剛性が面内剛性・曲げ剛性に比べて小さい場合には、せん断変形を考慮しなければならない。そこで、近年、構造要素として用途の拡大している複合材料の板の解析のために実用性の高い手法を提案した。これは、Mindlin理論に基づきZienkiewiczらの非適合要素を基礎とした三角形板曲げ要素である。さらに、著者らは、動的問題への応用として、平板の自由振動および超音速パネルフラッタに関する解析を行った。

本論文は以上の研究結果を8章にわたって述べたものであり、各章の概要は次のようである。

第1章は緒論であって、本論文に関係の深いこれまでの研究についてその概要を述べ、本研究の目的および意義を明らかにするとともに、本論文の内容の大略について記述している。

第2章では、Saint-Venant理論に基づくはり理論のせん断変形理論について論じる。この章では、はじめに、せん断変形理論の基礎方程式を導く。次に、この問題を仮想仕事の原理を用いて有限要素法による定式化を行なう。さらに、せん断変形を考慮した立体骨組要素の剛性行列を求める。また、せん断変形理論の基礎方程式が、ポアソン方程式になることに着目して境界要素法を用いた解析方法を示し、最後に、種々の解析例について示す。

第3章では、第2章で示した立体骨組要素の剛性行列が、材端でのwarpingの拘束、接続を考慮できないので、これを考慮するためにWagner式の曲げねじり剛性の一般化拡張を行なう。次に、せん断変形を考慮した曲げねじり要素の剛性行列を誘導し、数値解析例を示す。

第4章では、平板の曲げ問題をせん断変形を考慮して解析するための方法を示す。

せん断変形を考慮した理論がReissnerやMindlinによって提案されているが、ここでは、Mindlinの理論を用いて異方性平板にも適用できる三角形板曲げ要素を誘導する。そして、得られた三角形板曲げ要素の精度や実用性を検討し、種々の平板の曲げ問題に適用した。

第5章では、第4章においてその実用性が認められた三角形板曲げ要素を、動的問題の解析へ応用した。まず、せん断変形を考慮した平板の自由振動の解析を行ないその有用性を検討する。次に、平板の安定問題への応用例として、超音速パネルフラッタを考える。この問題が、複素固有値問題に帰着することを示し、種々の支持条件をもつ異方性平板について解析を行なう。

第6章では、曲りはりにおける断面の偏平化による剛性の低下について有限要素法による解析法について述べる。最初に仮想仕事の原理による基礎式を説明し、次に薄肉断面材の剛性行列を求める。本解析法を用いて各種断面形の曲がりはりの有限曲げを解析し、その有用性を検討する。

第7章では、第6章において述べた解析法を、弾塑性大変形解析に拡張する。ここでは、材料の構成式には、有限増分塑性理論を用い、種々の薄肉曲りはりの弾塑性挙動について検討を行った。

第8章において、以上の研究のまとめ、研究の総括を行なう。

本論文で使用する主な記号

行列・ベクトルなどの記法

[A]	：行列[A]
$[A]^T$	：[A]の転置行列
$[A]^{-1}$	：[A]の逆行列
{a}	：列ベクトル{a}
$\{\dot{a}\}$	：列ベクトル{a}の時間tに関する微分(第5章) および{a}の増分量(第6章、第7章)

第2、3章

u、v、w	：x、y、z方向変位
ξ,η,ζ	：x, y, z方向剛体変位
η^*,ζ^*	：y、z方向の曲げによるたわみ
η',ζ'	：y、z方向のせん断変形によるたわみ
θ	：ねじり角
$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$	：応力
Q_y、Q_z	：せん断力
M_y、M_z	：曲げモーメント
M_x	：ねじりモーメント
I_y、I_z	：y、z軸まわりの断面2次モーメント
I_{yz}	：y、z軸についての断面相乗モーメント
$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{yz},\gamma_{xy},\gamma_{xz}$	：ひずみ
ϕ	：warping関数
y_s、z_s	：せん断中心
B_x、B_y、B_z	：バイモーメント
q	：せん断流
[N]	：形状関数
[G]	：せん断剛性・ねじり剛性の行列
{S}、$\{S_B\}$、$\{S_S\}$	：部材力ベクトル(要素/曲げ変形/せん断変形)
{s}、$\{s_B\}$、$\{s_S\}$	：部材変形ベクトル(要素/曲げ変形/せん断変形)

$\{r\}$	:	節点変位ベクトル
$[f]$、$[f_B]$、$[f_S]$	:	フレキシビリティー行列（要素/曲げ変形/せん断変形）
$[k_e]$、$[k_B]$、$[k_S]$	:	剛性行列（要素/曲げ変形/せん断変形）
$\delta(\ )$	:	微小な仮想量

第４章

w	:	たわみ
$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$	:	面積座標係
ϕ_x, ϕ_y	:	断面回転角
γ_x, γ_y	:	せん断ひずみ
Q_x、Q_y	:	せん断力
$\{M_x\}$	:	曲げモーメントベクトル
$[D_x]$	:	異方性弾性行列
$(Gh)_1$、$(Gh)_2$	:	主軸方向のせん断剛性
$\{w_e\}$	:	要素節点変位ベクトル
$[k_e]$	:	要素剛性行列

第５章

$[M]$、$[m_e]$	:	質量行列（全体/要素）
$[K]$、$[k_e]$	:	剛性行列（全体/要素）
$[A]$、$[A_e]$	:	空力行列（全体/要素）
$\{Q\}$	:	外荷重ベクトル
$\{w_e\}$	:	要素節点変位ベクトル
$[D_e]$	:	要素空力減衰行列
p	:	空気力
q, M	:	一様流の動圧およびマッハ数
$\overline{\beta}_{cr}$	:	フラッタ動圧パラメータ
$\overline{\lambda}_{cr}$	:	フラッタ角振動数
$\delta(\ )$	:	微小な仮想量

第６章

$\{R\}$	：	外荷重ベクトル
$\{r\}$	：	節点変位ベクトル
$\{S\}$	：	内力ベクトル
$\{\sigma\}$	：	応力ベクトル
$\{\varepsilon\}$	：	ひずみベクトル
$[H]$	：	弾性係数行列
$[K]$	：	剛性行列
$[K_E]$	：	弾性剛性行列
$[k_G]$	：	幾何剛性行列
$\{r_e\}$	：	要素節点変位ベクトル
$\delta(\ )$	：	微小な仮想量

第７章

$\{\varepsilon\}$	：	全ひずみ増分ベクトル
$\{\varepsilon^e\}$	：	弾性ひずみ増分ベクトル
$\{\varepsilon^p\}$	：	塑性ひずみ増分ベクトル
$\{Q\}$	：	残差荷重ベクトル
$\{P\}$	：	塑性による見かけの荷重増分ベクトル

第２章　Saint-Venant理論に基づくせん断変形理論[54～58]

はりや柱は三次元体であるので、その弾性変形挙動は厳密には三次元弾性論において示される三つの基礎式すなわちつり合い式、適合条件式および材料構成則を弾性体内のあらゆる点で満足し、かつ境界条件を満足する解を求めなければならない。しかしながら、そのような解を求めることはまことに煩雑となり、実用的でない。そのため、断面寸法に比べて長さが十分に大きいはりの特性を考察し、多くの仮定と近似を用いて今日のはり理論が作られてきた。はり理論は、材料力学、構造力学などの基礎となる理論であるが、前章で述べたようにいくつかの問題点を含んでいる。それらの問題点はせん断変形を無視することから出発しているが、これから生ずる不合理を補うための諸理論もまだ十分に統一的であるとはいえない。　はじめに断面形不変、一様断面直線はりに限ることにするが、それでも、せん断力によるせん断変形、ねじりモーメントによる変形を考慮する実用的な方法が確立されていない。せん断変形が重要な因子となる薄肉構造でも、いわゆるせん断流理論はせん断変形を一般には無視し、ただ閉断面でのねじり変形だけを考慮している。弾性論では、Saint-Venantによる一様せん断力・一様ねじりの解があるが、ねじりとせん断の連成について実用的計算法が望まれる。また、これまでのはり、ねじり理論ではいつもねじりはせん断中心まわりでねじり剛性を考えるから、せん断中心が図心と離れているときの取り扱いを考えねばならなかった。

そこで、本章では、Saint-Venant理論による任意断面はりの一様せん断・ねじりにおけるせん断応力分布を定めるため、はりの断面を有限要素に分割しwarpingとせん断たわみ、ねじり角とに関する連立方程式を有限要素法の標準的手法により導く。これを数値的に解いて、せん断剛性、ねじり剛性の行列（３×３）を求める。この行列は、一般にせん断たわみとねじりの連成をあらわすが、非対角項を消すように座標軸を定めてせん断中心が得られる。さらに、上述のせん断剛性、ねじり剛性の行列を用いて、せん断変形を考慮した立体骨組要素の剛性行列を求める。これは、曲げ変形のみを考える通常の表現を補正する形で与えられるが、これまでは平面骨組要素の場合だけが得られていた[59]。また、せん断中心が図心と離れているとき、せん断中心の節点に関する剛性行列も簡単に得られる。

2・1　せん断変形理論の基礎方程式

はり理論の基本的仮定としていわゆるBernoulli-Eulerの仮定が用いられているが、Vlasovは断面不変の仮定がその出発点であるとしている。ここでも断面不変を仮定することとする。いま一様断面直線はりに対して図2-1に示すように、図心軸をx軸に取り、これに垂直にy、z軸を右手系で定める。最初にはりの任意点の変位を表す式を考える。さて、断面不変の仮定は、断面内のひずみが生じないということであるから、この仮定を式で表現すると次のようになる。

$$\varepsilon_y=\varepsilon_z=\gamma_{yz}=0 \tag{2-1}$$

断面上の任意点のy、z軸方向変位v、wは、図心におけるy、z軸方向変位η,ζおよび図心まわりの断面の回転θによって、断面不変の仮定から次のように表される。

$$v=\eta-z\theta,\qquad w=\zeta+y\theta \tag{2-2}$$

ここで、η,ζ,θ　はxのみの関数である。

一様断面はりを$x=\ell$端で固定し、$x=0$端に荷重が作用する片持ちはり先端荷重による一様せん断力、一様ねじりモーメントを受ける場合を考える。このときの直応力分布を次のようにする。

$$\sigma_x=x(\alpha y+\beta z) \tag{2-3}$$

曲げモーメントをM_y、M_z、せん断力をQ_y、Q_zとしたとき、次式が成り立つ。

$$xQ_y=M_z=\int_A\sigma_x y\,dA、\qquad xQ_z=M_y=\int_A\sigma_x z\,dA$$

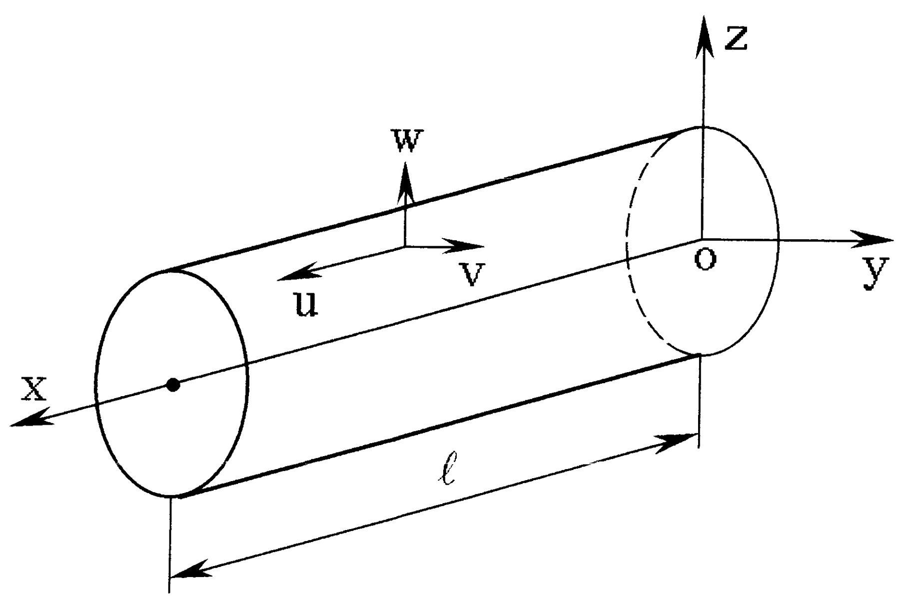


図2-1　座標系

上式より

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = [\ I\ ] \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \qquad (2\text{-}4)$$

ここに、$I_z = \int_A y^2 dA$,　$I_y = \int_A z^2 dA$,　$I_{yz} = \int_A yz dA$である。

次に式(2-2)で与えられる断面変位に随伴すべき軸方向変位uは、軸方向ひずみ $\varepsilon_x = \partial u / \partial x = \sigma_x / E = x(\alpha y + \beta z) / E$ を積分して端条件を考えると次のようになる。

$$u = \frac{1}{2E}(x^2 - \ell^2)(\alpha y + \beta z) + \varphi(y, z) \qquad (2\text{-}5)$$

ここで、Eはヤング率である。断面不変の仮定を厳密に守って理論を組み立てていくと、三次元弾性体の応力、ひずみ関係式は

$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_y, \quad \sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_z,$$

$$\tau_{yz} = 0, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

となることから、$E' = E(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu)$ を用いなければならないことになるが、従来のはり理論の立場を取ってEを用いることにする。

断面に生ずるせん断ひずみγ_{xy}, γ_{xz}は式(2-2)と(2-5)を用いて次のように表される。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\tau_{xy}}{G} = \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\eta}{dx} - z\frac{d\theta}{dx} + \frac{x^2 - \ell^2}{2E}\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - z\frac{d\theta}{dx} \\ \frac{\tau_{xz}}{G} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d\zeta}{dx} + y\frac{d\theta}{dx} + \frac{x^2 - \ell^2}{2E}\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} + y\frac{d\theta}{dx} \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}6)$$

ここで、η, ζ を通常のはり理論によるたわみη^*, ζ^*とせん断変形によるたわみη', ζ'の和としてそれぞれ$\eta = \eta^* + \eta'$, $\zeta = \zeta^* + \zeta'$とし

$$\frac{d\eta^*}{dx} + \frac{x^2 - \ell^2}{2E}\alpha = 0, \quad \frac{d\zeta^*}{dx} + \frac{x^2 - \ell^2}{2E}\beta = 0$$

となることを考慮し、ϕを次式のように定義する。

$$\phi = \varphi + y\frac{d\eta'}{dx} + z\frac{d\zeta'}{dx} \qquad (2\text{-}7)$$

各応力成分を、弾性体のx軸方向のつり合いに関する基礎方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad (2\text{-}8)$$

に代入すると、ϕに関する次の基礎方程式が得られる。

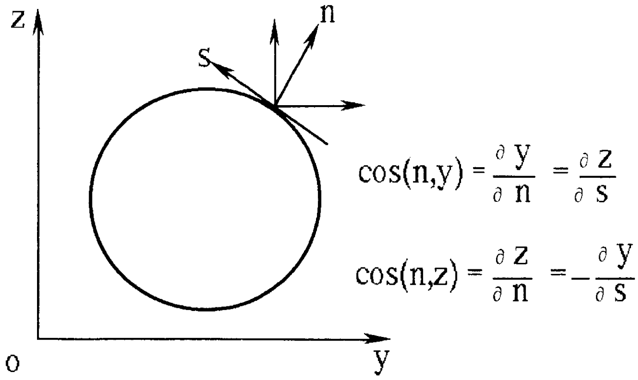


図2-2　断面境界の法線と接線

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=-\frac{1}{G}\left(\alpha y+\beta z\right) \tag{2-9}$$

この方程式に対する境界条件は、図2-2に示すようなはりの表面における無応力の条件より求められる。すなわち

$$\tau_{xy}\cos\left(n,y\right)+\tau_{xz}\cos\left(n,z\right)=0 \tag{2-10}$$

より

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(y^2+z^2\right)\frac{d\theta}{dx} \tag{2-11}$$

ここに、nは境界の外向きに立てた法線方向を表し、sは接線方向を表す。

これを解いてϕが得られたのち式(2-7)からφ，$d\eta'/dx$，$d\zeta'/dx$を求めるには、φが$y\,d\eta'/dx$，$z\,d\zeta'/dx$と独立となるための条件$\int_A\varphi dA=\int_A\varphi y dA=\int_A\varphi z dA=0$を用いて

$$\begin{Bmatrix}\int_A\phi y dA\\ \int_A\phi z dA\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}I_z & I_{yz}\\ I_{yz} & I_y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d\eta'/dx\\ d\zeta'/dx\end{Bmatrix}=\left[\,I\,\right]\begin{Bmatrix}d\eta'/dx\\ d\zeta'/dx\end{Bmatrix} \tag{2-12}$$

が得られる。これからせん断変形を定めることができる。

2・2　せん断変形理論の有限要素法による定式化

2・2・1　中実断面材

前節で述べた問題を仮想仕事の原理を用い、有限要素法による定式化を行なう。x軸方向単位長さ当たりの仮想仕事を考えると次のようになる。すなわち

仮想内力仕事は

$$\delta V=\int_A\left(\delta\gamma_{xy}G\gamma_{xy}+\delta\gamma_{xz}G\gamma_{xz}\right)dA=\int_A\left(\delta\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\\\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\\\dfrac{d\theta}{dx}\end{Bmatrix}\right)^T G\begin{bmatrix}1&0&-z\\0&1&y\\-z&y&y^2+z^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\\\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\\\dfrac{d\theta}{dx}\end{Bmatrix}dA \tag{2-13}$$

外力のなす仮想仕事は

$$\delta W=\int_A\delta\varphi\left(\alpha y+\beta z\right)dA+\delta\left(\frac{d\eta'}{dx}\right)Q_y+\delta\left(\frac{d\zeta'}{dx}\right)Q_z+\delta\left(\frac{d\theta}{dx}\right)M_x$$

$$=\int_A\delta\phi\left(\alpha y+\beta z\right)dA+\delta\left(\frac{d\theta}{dx}\right)M_x \tag{2-14}$$

ϕ を有限要素分割により表現しなおして、次のようにする。

$$\phi=\sum N_i\phi_i=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & \cdots\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\vdots\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}N\end{bmatrix}\{\phi\} \tag{2-15}$$

ここで、$\{\phi\}$ は節点値ベクトル、［N］は座標ｙ、ｚの関数で形状関数と呼ばれる。また、ϕ のｙ、ｚ座標に関する偏微分を $\partial\phi/\partial y=[N_y]\{\phi\}, \partial\phi/\partial z=[N_z]\{\phi\}$ のように表し、式(2-4)により式(2-14)の α,β を書き直し、式(2-13)と(2-14)を、仮想仕事方程式 $\delta V-\delta W=0$ に代入すると、次式が得られる。

$$\left(\delta\begin{Bmatrix}\{\phi\}\\\dfrac{d\theta}{dx}\end{Bmatrix}\right)^T\begin{bmatrix}[A]&[B]\\{[B]}^T&C\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\phi\}\\\dfrac{d\theta}{dx}\end{Bmatrix}=\left(\delta\begin{Bmatrix}\{\phi\}\\\dfrac{d\theta}{dx}\end{Bmatrix}\right)^T\begin{bmatrix}[D]&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_y\\Q_z\\M_x\end{Bmatrix} \tag{2-16}$$

ここで、[A], [B]などは次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
&[A]=\int_A G\left([N_y]^T[N_y]+[N_z]^T[N_z]\right)dA, && [I]=\begin{bmatrix}I_z&I_{yz}\\I_{yz}&I_y\end{bmatrix}\\
&[B]=\int_A G\left(-[N_y]^T z+[N_z]^T y\right)dA, &&\\
&C=\int_A\left(y^2+z^2\right)dA && [D]=\int_A\left([N]^T y,\ [N]^T z\right)dA\cdot[I]^{-1}
\end{aligned}\right\} \tag{2-17}$$

式(2-16)は任意の仮想量 $\delta\{\ \}$ に関して成立するのであるから $\left\{\{\phi\}, d\theta/dx\right\}^T$ に関する次の連立方程式が導かれる。

$$\begin{Bmatrix} \{\phi\} \\ \dfrac{d\theta}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [D] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{Bmatrix} \tag{2-18}$$

ただし、上式は$\{\phi\}$の定数項は無意味であることを考慮して解く必要がある。

ところで、せん断たわみは式(2-12)と(2-15)より

$$\begin{Bmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \end{Bmatrix} = [I]^{-1} \begin{Bmatrix} \int_A \phi y\, dA \\ \int_A \phi z\, dA \end{Bmatrix} = [I]^{-1} \begin{bmatrix} \int_A y[N]dA \\ \int_A z[N]dA \end{bmatrix} \{\phi\} = [D]\{\phi\}$$

よって

$$\begin{Bmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \\ d\theta/dx \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D]^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\} \\ \dfrac{d\theta}{dx} \end{Bmatrix} \tag{2-19}$$

ゆえに、せん断たわみとせん断力の関係は式(2-18)と式(2-19)より次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \\ d\theta/dx \end{Bmatrix} = [G]^{-1} \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{Bmatrix} \tag{2-20}$$

ここで、[G]行列の内容は次式のとおりである。

$$[G] = \left[\begin{bmatrix} [D]^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B]^T & C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [D] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \tag{2-21}$$

[G]は式(2-20)に示されるとおり、せん断剛性・ねじり剛性を与えるものであって、一般には非対角項を生ずるから、せん断変形とねじり変形が連成することとなる。なお、せん断応力分布は

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} [N_y] & -z \\ [N_z] & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\} \\ \dfrac{d\theta}{dx} \end{Bmatrix} \tag{2-22}$$

によって表されるから上述の式と結び付けてせん断力あるいはせん断たわみによって表すこともできる。

これまでの原点（図心）における変位、作用力と、(y_s、z_s)点における変位、作用力との間には次の関係がある。

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -z_s & y_s & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{ys} \\ Q_{zs} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{Bmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \\ d\theta/dx \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & -y_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\eta_s'/dx \\ d\zeta_s'/dx \\ d\theta_s/dx \end{Bmatrix} \qquad (2\text{-}23)$$

したがって、(y_s、z_s)点におけるせん断たわみとせん断力の関係は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} Q_{ys} \\ Q_{zs} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = [G]_s \begin{Bmatrix} d\eta_s'/dx \\ d\zeta_s'/dx \\ d\theta_s/dx \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{Bmatrix} d\eta_s'/dx \\ d\zeta_s'/dx \\ d\theta_s/dx \end{Bmatrix} = [G]_s^{-1} \begin{Bmatrix} Q_{ys} \\ Q_{zs} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} \qquad (2\text{-}24)$$

$[G]_s$は(y_s、z_s)点に関するせん断剛性、ねじり剛性を表す行列で、次に示すとおりである。

$$[G]_s = [T]^T [G][T] \quad , \quad [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_s \\ 0 & 1 & -y_s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}25)$$

$[G]_s$または$[G]_s^{-1}$行列の(1、3)、(2、3)要素を0にするように(y_s、z_s)点を定めることによりせん断中心が決定される。すなわち

$$y_s = \frac{G_{11}G_{23} - G_{12}G_{13}}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}, \quad z_s = \frac{G_{12}G_{23} - G_{22}G_{13}}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2} \qquad (2\text{-}26)$$

ただし、G_{ij}は[G]のij要素である。

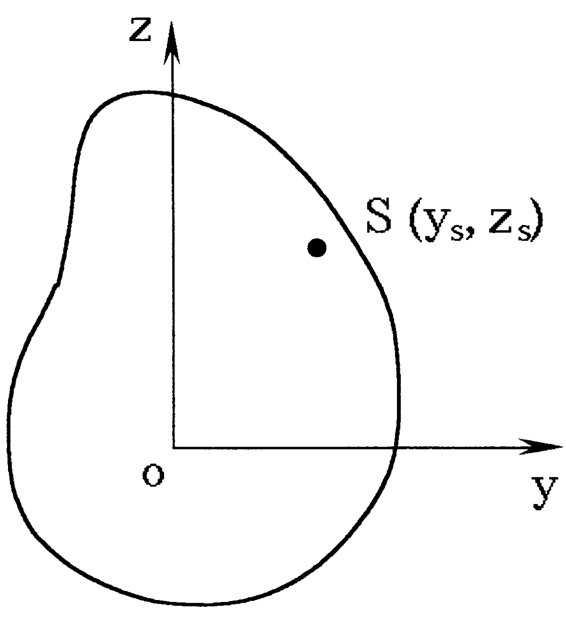


図2-3 断面上の任意点S

2・2・2 薄肉断面材

前節では、中実材について考えたがここでは図2-4に示すような薄肉断面材について考える。

この場合簡単のために要素分割の後、軸力にたえる面積を節点に集中し、これを結ぶパネルはせん断流のみに耐えるものとする。この場合の変位および直応力は次のように表される。

$$v=\eta-z\theta,\quad w=\zeta+y\theta,\quad \sigma_x=x\left(\alpha y+\beta z\right) \tag{2-27}$$

s方向変位 $$V=v\cos\alpha_k+w\sin\alpha_k \tag{2-28}$$

軸方向変位 $$u_i=\frac{1}{2E}\left(x^2-\ell^2\right)\left(\alpha y_i+\beta z_i\right)+\varphi_i$$

$$=-\left(\frac{d\eta^*}{dx}y_i+\frac{d\zeta^*}{dx}z_i\right)+\varphi_i \tag{2-29}$$

ここで、$\cos\alpha_k=\left(y_j-y_i\right)/b_k$, $\sin\alpha_k=\left(z_j-z_i\right)/b_k$, $b_k=\sqrt{\left(y_j-y_i\right)^2+\left(z_j-z_i\right)^2}$ である。

節点 i j を結ぶパネルのせん断変形は、次式で表される。

$$b_k\gamma_k=\left(\frac{dV}{dx}+\frac{u_j-u_i}{b_k}\right)b_k=\phi_j-\phi_i+\rho_k\frac{d\theta}{dx}\qquad \rho_k=y_iz_j-y_jz_i \tag{2-30}$$

したがって、せん断流は

$$q_k=\left(\tau t\right)_k=\left(\frac{Gt}{b}\right)_k\left(\phi_j-\phi_i+\rho_k\frac{d\theta}{dx}\right) \tag{2-31}$$

となる。これを行列表示すると、次式のようになる。

$$\{q\}=[H]\left[[a]\{\phi\}+[b]\frac{d\theta}{dx}\right] \tag{2-32}$$

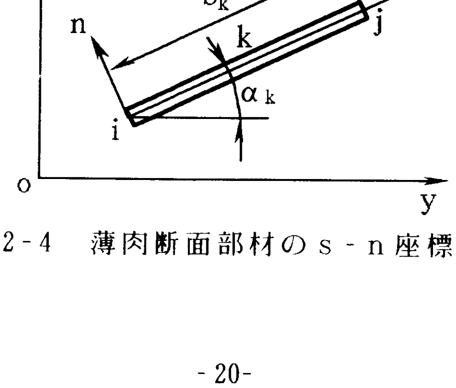


図2-4 薄肉断面部材のs-n座標系

ここで、[H]は$(Gt/b)_k$を要素とする対角行列、[b]はρ_kを要素とする列行列、[a]は 0, 1, -1を要素とする行列でパネルkの両端がｉｊ節点に接続している場合k行ｊ列には1が、k行ｉ列には -1が入る。

薄肉断面材のつり合い式およびねじりモーメントは、次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dP_i}{dx}=\frac{d(\sigma_i A_i)}{dx}=\sum q_{ij} \\ &M_x=\sum\left(\frac{Gbt^3}{3}\right)_k\frac{d\theta}{dx}+\sum\rho_k q_k \end{aligned}\right\} \tag{2-33}$$

上式より

$$\begin{bmatrix} [a]^T[H][a] & [a]^T[H][b] \\ [b]^T[H][a] & [b]^T[H][b]+C_0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \{\phi\} \\ \dfrac{d\theta}{dx} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} [D] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{Bmatrix} \tag{2-34}$$

ここで、$C_0=\sum\left(Gbt^3/3\right)_k$である。また、せん断たわみは、式(2-12)より

$$\begin{Bmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \end{Bmatrix}=[I]^{-1}\begin{Bmatrix} \sum\phi_i y_i A_i \\ \sum\phi_i z_i A_i \end{Bmatrix}=[D]^T\{\phi\} \tag{2-35}$$

したがって、せん断たわみとせん断力の関係は、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \\ d\theta/dx \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} [D]^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \{\phi\} \\ \dfrac{d\theta}{dx} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} [D]^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [a]^T[H][a] & [a]^T[H][b] \\ [b]^T[H][a] & [b]^T[H][b]+C_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [D] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{Bmatrix} \tag{2-36}$$

上式は、中実材と全く同じ形式で表され、せん断中心も同様に求められる。

2・3 せん断変形を考慮した立体骨組要素の剛性行列

図2-5に示すような立体骨組要素ｉｊを考える。ここで、中心線ｘ軸は断面の図心を結ぶ直線とする。要素両端の節点をｉおよびｊとし、要素の長さをℓとする。部材力{S}はつり合いを考えて図2-5に示すような6成分をとる。すなわち

$$\{S\}=\{T、M_z、M_y、Q_y、Q_z、M_x\} \tag{2-37}$$

曲げによってはりに貯えられるひずみエネルギを考えると、次のようになる。

$$\frac{1}{2}\int\frac{\sigma_x^2}{E}dA\,dx=\frac{1}{2}\{S\}^T\begin{bmatrix} [f_{B1}] & 0 \\ 0 & [f_{B2}] \end{bmatrix}\{S\} \tag{2-38}$$

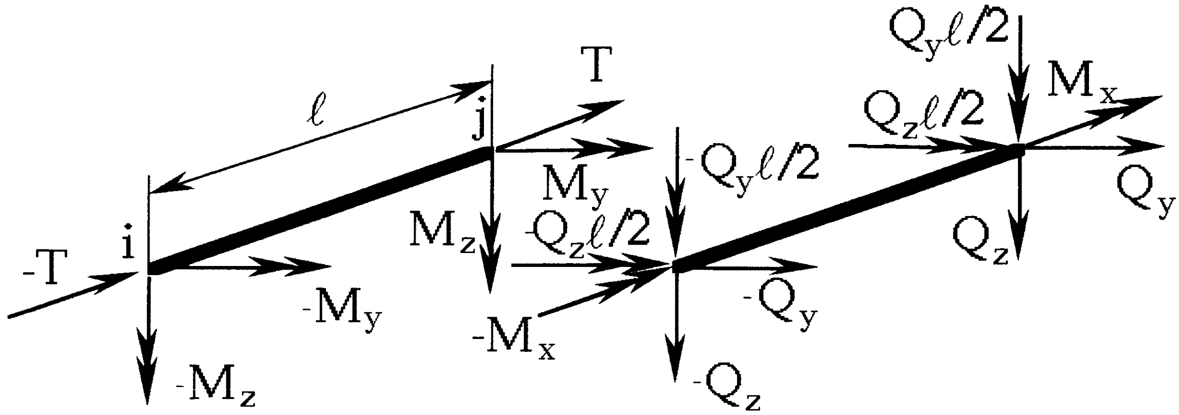


図2-5　部材力

ここに、$[f_{B1}]$、$[f_{B2}]$の具体的な形は次式のとおりである。

$$\left[f_{B1}\right]=\begin{bmatrix} \ell/EA & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\dfrac{\ell}{E}\begin{bmatrix} I_z & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_y \end{bmatrix}^{-1}} \end{bmatrix}, \qquad \left[f_{B2}\right]=\begin{bmatrix} \dfrac{\ell^3}{12E}\begin{bmatrix} I_z & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_y \end{bmatrix}^{-1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}39)$$

また、せん断力によってはりに貯えられるひずみエネルギを考えると、次のようになる。

$$\frac{1}{2}\int\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \\ d\theta/dx \end{Bmatrix} dx=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{Bmatrix}^T \left[G\right]^{-1}\ell\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\left\{S\right\}^T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left[f_{S2}\right] \end{bmatrix}\left\{S\right\} \qquad (2\text{-}40)$$

ここに、$[f_{S2}]$の具体的な形は前節で求めた$[G]$行列を用いて次のように表される。

$$\left[f_{S2}\right]=\left[G\right]^{-1}\ell \qquad (2\text{-}41)$$

部材力$\{S\}$に対応する部材変形を$\{s\}$として、たわみ性行列を$[f]$とすると、この$[f]$は、曲げ変形によるもの$[f_B]$とせん断変形によるもの$[f_S]$の和で与えられる。すなわち

$$\left(\delta\left\{S\right\}\right)^T\left[f\right]\left\{S\right\}=\left(\delta\left\{S\right\}\right)^T\begin{bmatrix} \left[f_{B1}\right] & 0 \\ 0 & \left[f_{B2}\right]+\left[f_{S2}\right] \end{bmatrix}\left\{S\right\} \qquad (2\text{-}42)$$

また、上式は$\delta\left\{S\right\}$が任意量において成立しなければならないから、上式より次式が得られる。

$$\left\{s\right\}=\left[f\right]\left\{S\right\} \qquad (2\text{-}43)$$

あるいは

$$\{S\}=[f]^{-1}\{s\} \tag{2-44}$$

ここで、

$$[f]^{-1}=\begin{bmatrix}[f_{B1}]^{-1} & 0 \\ 0 & [[f_{B2}]+[f_{S2}]]^{-1}\end{bmatrix}=[k] \tag{2-45}$$

一方、要素の節点変位を{r}として要素両端の３軸方向変位と３軸まわりの回転をとり、$\{r\}=\{u_i \ v_i \ w_i \ p_i \ q_i \ r_i \ \vdots \ u_j \ v_j \ w_j \ p_j \ q_j \ r_j\}$とし、要素の部材変形{s}を次のように書き表す。

$$\{s\}=[a]\{r\} \tag{2-46}$$

ここに、[a]行列の具体的な形は次のとおりである。

$$[a]=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\ell/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\ell/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ell/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ell/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{2-47}$$

したがって、せん断変形を含んだ立体骨組要素の節点変位に関する剛性方程式は、次のようになる。

$$\{P\}=[k_e]\{r\} \tag{2-48}$$

ここで、{P}は節点力ベクトルであり、$[k_e]$は次のとおりである。

$$[k_e]=[a]^T[k][a] \tag{2-49}$$

この行列が、せん断変形を含んだ立体骨組要素の剛性行列である。

これまでは、簡単のため図心とせん断中心が一致している場合を考えた。しかし、せん断中心が図心と離れていて、せん断中心の節点変位を自由度として解析する場合、式(2-49)の要素剛性行列をそのまま使用することができない。前節において、図心における変位・力をせん断中心における変位・力に変換することを考えた。そして、式(2-25)で示される$[G]_s$行列を得た。この$[G]_s$行列を式(2-41)の[G]行列と入れ替え、式(2-45)と式(2-49)によりせん断中心の節点変位に関する要素剛性行列$[k_e]_s$が次のように得られる。

$$\left.\begin{aligned}&[f_{S2}]=[G]_S^{-1}\ell,\quad [k]_S=\begin{bmatrix}[f_{B1}]^{-1} & 0 \\ 0 & [[f_{B2}]+[f_{S2}]]^{-1}\end{bmatrix}, \\ &[k_e]_S=[a]^T[k]_S[a]\end{aligned}\right\} \tag{2-50}$$

2・4　せん断変形理論の境界要素解析法

これまでに、はり理論の問題点の一つであるせん断変形に対する理論の不完全さを補うため、Saint-Venant理論に基づく任意形一様断面の直線はりのせん断とねじれの連成変形問題を考え、この問題がポアソン方程式を支配方程式とする境界値問題となることを示した。有効な数値解析法として注目されている境界要素法では、これを境界積分方程式に変換し解析できる。しかも断面の幾何学量などをすべて横断面の境界積分に変換して扱えば、問題の解析を横断面の境界上だけで行なうことができる[60]。

2・4・1　せん断とねじれの連成問題の境界要素解法

これまで考えてきた一様断面直線はりに対して図心軸をx軸にとり、y、z軸をこれに垂直に断面の主軸にとる。片持ちはりの一端に横荷重を受ける場合の支配方程式と境界条件は式(2-7)で定義された関数

$$\phi = \varphi + y\frac{d\eta'}{dx} + z\frac{d\zeta'}{dx}$$

により次のように表される。

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{Q_y y}{GI_z} - \frac{Q_z z}{GI_y} && (\text{in } A) \\ &\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(y^2+z^2\right)\frac{d\theta}{dx} && (\text{on } s) \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}51)$$

ここで、上式の解を次のように書き表す。

$$\phi = \phi_0\frac{d\theta}{dx} + \phi_1\frac{Q_y}{GI_z} + \phi_2\frac{Q_z}{GI_y} \qquad (2\text{-}52)$$

式(2-52)を式(2-51)に代入し支配方程式と境界条件を書き直すと次のようになる。

$$\nabla^2\phi_0 = 0 \quad (\text{in } A), \qquad \frac{\partial\phi_0}{\partial n} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(y^2+z^2\right) \quad (\text{on } s) \qquad (2\text{-}53)$$

$$\nabla^2\phi_1 = -y \quad (\text{in } A), \qquad \frac{\partial\phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } s) \qquad (2\text{-}54)$$

$$\nabla^2\phi_2 = -z \quad (\text{in } A), \qquad \frac{\partial\phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } s) \qquad (2\text{-}55)$$

式(2-53)～(2-55)を解いて関数ϕが定まればせん断応力τ_{xy}, τ_{xz}は次式から求め

られる。

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial\phi}{\partial y} - z\frac{d\theta}{dx}\right), \qquad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + y\frac{d\theta}{dx}\right) \tag{2-56}$$

また、式(2-12)に式(2-52)を代入して得られる式

$$\left.\begin{aligned} I_z\frac{d\eta'}{dx} &= \int_A \phi\, y\, dA = \frac{d\theta}{dx}\int_A \phi_0\, y\, dA + \frac{Q_y}{GI_z}\int_A \phi_1\, y\, dA + \frac{Q_z}{GI_y}\int_A \phi_2\, y\, dA \\ I_y\frac{d\zeta'}{dx} &= \int_A \phi\, z\, dA = \frac{d\theta}{dx}\int_A \phi_0\, z\, dA + \frac{Q_y}{GI_z}\int_A \phi_1\, z\, dA + \frac{Q_z}{GI_y}\int_A \phi_2\, z\, dA \end{aligned}\right\} \tag{2-57}$$

からせん断変形が求められる。また、ねじりモーメントM_xは

$$M_x = \int_A\left(\tau_{xz}\, y - \tau_{xy}\, z\right)dA = G\int_A\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}y - \frac{\partial\phi}{\partial y}z\right)dA + GI_p\frac{d\theta}{dx} \tag{2-58}$$

$$I_p = \int_A\left(y^2 + z^2\right)dA$$

となる。そこで、式(2-57)と上式に式(2-52)を代入して得られるものをまとめ、行列表示すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} I_z & 0 & -B_z \\ 0 & I_y & -B_y \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \\ d\theta/dx \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{zz}/I_z & C_{zy}/I_y & 0 \\ C_{yz}/I_z & C_{yy}/I_y & 0 \\ \psi_z/I_z & \psi_y/I_y & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_y/G \\ Q_z/G \\ M_x/G \end{Bmatrix} \tag{2-59}$$

ここに、

$$\left.\begin{aligned} &B_z = \int_A \phi_0\, y\, dA, \quad B_y = \int_A \phi_0\, z\, dA, \quad J = I_p + \int_A\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial z}y - \frac{\partial\phi_0}{\partial y}z\right)dA \\ &C_{zz} = \int_A \phi_1\, y\, dA, \quad C_{yz} = \int_A \phi_1\, z\, dA, \quad \psi_z = -\int_A\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}y - \frac{\partial\phi_1}{\partial y}z\right)dA \\ &C_{zy} = \int_A \phi_2\, y\, dA, \quad C_{yy} = \int_A \phi_2\, z\, dA, \quad \psi_y = -\int_A\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial z}y - \frac{\partial\phi_2}{\partial y}z\right)dA \end{aligned}\right\} \tag{2-60}$$

である。ただし、これらの係数のうちC_{zy}、B_z、・・・等は次の関係がある。

$$\left.\begin{aligned} &C_{zy} = C_{yz} = \int_A \nabla\phi_2\cdot\nabla\phi_1\, dA, \\ &B_z = \psi_z = \int_s \phi_1\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(y^2+z^2\right)ds, \quad B_y = \psi_y = \int_s \phi_2\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(y^2+z^2\right)ds \end{aligned}\right\} \tag{2-61}$$

式(2-61)を考慮して式(2-59)からせん断たわみとせん断力の関係を求めると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} d\eta'/dx \\ d\zeta'/dx \\ d\theta/dx \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{Bmatrix} \tag{2-62}$$

ここに、[G]行列の内容は次のとおりである。

$$\begin{bmatrix} G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} \dfrac{C_{zz}+B_z^2/J}{I_z^2} & \dfrac{C_{zy}+B_z B_y/J}{I_z I_y} & \dfrac{B_z}{I_z J} \\ & \dfrac{C_{yy}+B_y^2/J}{I_y^2} & \dfrac{B_y}{I_y J} \\ \text{sym.} & & \dfrac{1}{J} \end{bmatrix} \tag{2-63}$$

2·2·1節の場合と同様に、これまでの座標原点における変位、作用力を$(y_s、z_s)$点に変換し、$(y_s、z_s)$点におけるせん断力とせん断たわみの関係を求めると式(2-24)が得られる。また、式(2-25)の$(y_s、z_s)$点に関するせん断剛性、ねじり剛性を表す行列$[G]_s$の式の右辺の[G]に式(2-60)を用いることになる。また、せん断中心も式(2-25)によって得られる$[G]_s$または$[G]_s^{-1}$行列の(1、3)、(2、3)要素を0にするように$(y_s、z_s)$点を定めることによりせん断中心が決定される。すなわち

$$y_S = -\frac{B_y}{I_y}, \quad z_S = \frac{B_z}{I_z} \tag{2-64}$$

2・4・2　ポアソン方程式の境界要素法による一解法

ここでは、前節で示した式(2-53)～(2-55)のラプラスおよびポアソン方程式を境界要素法で解くことを考える。ラプラス方程式を境界要素法で解く方法は、多くの境界要素法の本などで詳細に説明されており、そのプログラムなども紹介されている。式(2-54)(2-55)のポアソン方程式を境界要素法で解く場合も基本的にはラプラス方程式を解くのとほとんど同じであるが、面積積分の項が含まれてくる。例えば、式(2-54)に対する境界積分方程式を示すと次のようになる。

$$c\,\phi_1(R) = \int_s \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial n_P} v^*(P,R) - \frac{\partial v^*}{\partial n_P} \phi_1(P) \right] ds - \int_A (-y) v^*(Q,R) dA \tag{2-65}$$

ここで、v^*は基本解、cは境界の形状によって決まる定数、点Q、Rを領域A内の点、点Pを境界s上の点とする。

いま、上式の右辺第3項の面積積分を数値積分によって計算するために解析領域

を有限要素に分割しなければならない。ここでは、この面積積分を省略する別の解法により計算を行なう。

いま式(2-54)、(2-55)のポアソン方程式を満足する特解をそれぞれ$u_1(y、z)$、$u_2(y、z)$としてϕ_1, ϕ_2を次のように表す。

$$\phi_i = \phi_i^* + u_i \qquad (i = 1,\ 2) \tag{2-66}$$

これを式(2-54)と式(2-55)に代入すると、ϕ_i^*に関する次のような境界値問題が導かれる。

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 \phi_i^* = 0 && (\text{in } A) \\ &\frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} = -\frac{\partial u_i}{\partial n} && (\text{on } s) \end{aligned}\right\} \tag{2-67}$$

支配方程式がラプラス方程式であるから、特解をそれぞれ得ることが出来れば、式(2-53)と式(2-67)のラプラス方程式を境界積分方程式に変換して解くことができる。

また、断面の幾何学量も積分定理により境界積分に変換できる。すなわち

$$\left.\begin{aligned} &A = \int_A dy\,dz = \frac{1}{2}\int_s \left(y\,n_y + z\,n_z\right)ds, \quad I_y = \int_s \frac{z^3}{3} n_z\,ds, \quad I_z = \int_s \frac{y^3}{3} n_y\,ds \\ &I_p = \int_s \left(\frac{y^3}{3} n_y + \frac{z^3}{3} n_z\right)ds, \quad J = I_p - \int_s \left(-y\,\phi_0\,n_z + z\,\phi_0\,n_y\right)ds \\ &B_z = \int_s \left(-y\,\phi_1 n_z + z\,\phi_1 n_y\right)ds, \quad B_y = \int_s \left(-y\,\phi_2 n_z + z\,\phi_2 n_y\right)ds \end{aligned}\right\} \tag{2-68}$$

また、特解として$u_1 = -y^3/6$、$u_2 = -z^3/6$を考えると

$$\left.\begin{aligned} &C_{zz} = \int_s \left(\phi_1^* \frac{y^2}{2} - \frac{7}{60} y^5\right) n_y\,ds, \quad C_{yy} = \int_s \left(\phi_2^* \frac{z^2}{2} - \frac{7}{60} z^5\right) n_z\,ds \\ &C_{yz} = \int_s \phi_1^* \frac{y^2}{2} n_z\,ds - \int_s \left(\frac{z^3 y^2}{12} + \frac{y^4 z}{24}\right) n_y\,ds \end{aligned}\right\} \tag{2-69}$$

したがって、領域積分によって表される断面の幾何学量がすべて横断面の境界積分のみで扱うことができ、境界要素法によって合理的な解析が行なえる。

ポアソン方程式の特解を必要とするため関数$u_i(y、z)$が与えられる場合に限られる。しかし、特解が得られる問題の場合には、ラプラス方程式の解析プログラムを変更することなくポアソン方程式の解析に応用することができる。さらに、特解を求める場合に境界条件を考慮する必要がないため、任意の断面形状の問題に適用することができる。

2・5　数値解析例

2・5・1　半円断面のせん断中心

はり理論を展開したりあるいはその解析を行なうとき、断面のせん断中心を正しく把握しておくことが必要であり、いくつかの方法が提案されている［4］。ここでは、断面不変の仮定に基づいて得られた基礎方程式および境界条件を、解析的に解いてせん断中心を求め、Timoshenkoらの断面内無応力の仮定に基づくはり理論より得られたせん断中心と比較する。

計算例として、図2-6に示すような半円断面を取り上げ、そのせん断中心を求める。ここでは、式(2-53)を解いて関数ϕ_0を求め、式(2-60)で示されるB_zを求め、式(2-64)よりせん断中心を求める。

図2-6に示すように図心に（y、z）座標の原点を取り、r、θ を図のようにとる。座標（y、z）と（r、θ ）の関係は

$$y = r\cos\theta \quad , \qquad z = r\sin\theta - e \tag{2-70}$$

ここに、eは図心の位置であり、$e = 4a/(3\pi)$となる。

最初に境界条件を書き表すと、r = aの周上での条件は

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial n} = \left(\frac{\partial\phi_0}{\partial r}\right)_{r=a} = y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds} = -e\cos\theta \tag{2-71}$$

となり、z = - eの直径上での条件は

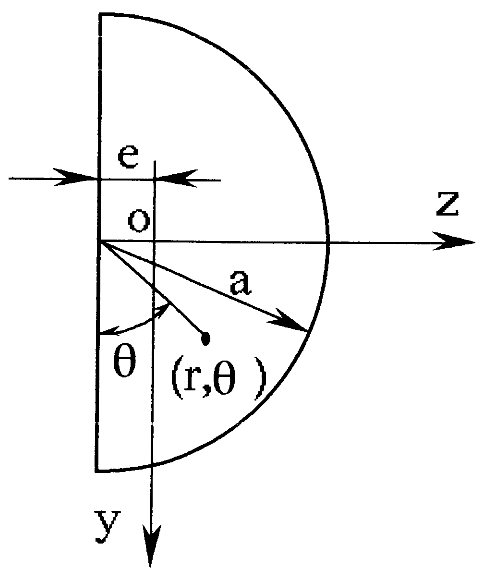


図2-6　半円断面

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = -\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial z}\right)_{z=-e} = -\left(\frac{\partial \phi_0}{r\,\partial \theta}\right)_{\theta=0,\pi} = r \tag{2-72}$$

となる。

いま、関数ϕ_0を次のように考えると式(2-72)は満足される。

$$\phi_0 = -\frac{r^2}{2}\sin 2\theta + \sum_{n=odd} C_n r^n \cos n\theta \tag{2-73}$$

また、上式の$\sin 2\theta$ をフーリエ展開して式(2-71)の第2式に代入すると

$$\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial r}\right)_{r=a} = -a\sum_{n=odd}\frac{2}{\pi}\frac{4}{4-n^2}\cos n\theta + \sum_{n=odd} C_n n a^{n-1}\cos n\theta \tag{2-74}$$

よって、C_n（$n=1$、3、・・・）は

$$\left.\begin{aligned} -a\frac{2}{\pi}\frac{4}{4-n^2} + C_n n a^{n-1} &= -e \qquad (n=1) \\ &= 0 \qquad (n \neq 1) \end{aligned}\right\} \tag{2-75}$$

より定まる。すなわち

$$C_1 = -e + \frac{8a}{3\pi}, \qquad C_n = \frac{8a^{2-n}}{n(4-n^2)\pi} \qquad (n \neq 1) \tag{2-76}$$

結局

$$\phi_0 = -\frac{r^2}{2}\sin 2\theta + \left(-e + \frac{8a}{3\pi}\right) r\cos\theta + \sum_{n=3,5,\ldots}\frac{8a^{2-n}}{n(4-n^2)\pi} r^n \cos n\theta \tag{2-77}$$

となり、式(2-60)の$B_z = \int_A \phi_0 y\, dA$ を計算し、せん断中心を求めると次のようになる。

$$e + z_s = e + \frac{B_z}{I_z} = \frac{8a}{5\pi} = 0.509a \tag{2-78}$$

ところで、Timoshenkoらは断面内無応力の仮定に基づくはり理論より、半円断面のせん断中心を求めており[4]、その値は

$$e + z_s = 0.511a \tag{2-79}$$

である。両者のせん断中心の位置は、ほぼ同一の解が得られた。しかし、式(2-79)の計算は、円形断面のせん断応力分布をもとにして、半円断面のせん断応力分布が、

$\left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)_{半円図心} = 0$ となるよう補正して求めてある。

しかし、先に示した計算例ではそのような補正は不必要であり、計算も簡単である。

上述の問題を有限要素法と境界要素法により解いた結果は、ともに次のようにな

った。

$$e + z_s = 0.509a \qquad (2\text{-}80)$$

なお、有限要素法では線形三角形要素を用い、要素数322、節点数186に分割して計算を行ない、境界要素法では線形境界要素を用い、境界要素数48に分割して計算を行なった。

2・5・2　キー溝を持つ丸棒の応力集中

各種の機械部品において、横荷重やねじりモーメントを受けると応力集中を生じ、損傷を招くことがある。しかし、各種断面形状のはりが横荷重やねじりモーメントを受ける場合の応力集中解析は、Prandtlの応力関数を定め、ラプラス方程式を解くことにより解が得られる。しかし、実際の構造で使われる断面形状においては解が確立していないものが多い。一方、この種の問題に良く用いられる三次元有限要素法でも、簡単な断面形状の応力集中解析でも、膨大な計算時間と費用を要する。ここでは、横荷重やねじりモーメントを受けるキー溝を持つはりを例題として、前述の有限要素法と境界要素法により応力集中解析を行なう。

最初に、有限要素法の解析精度を確認するため図2-7に示すような楕円断面につ

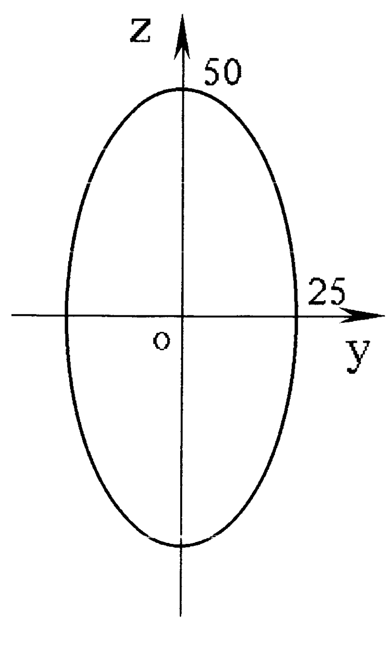


図2-7　楕円断面

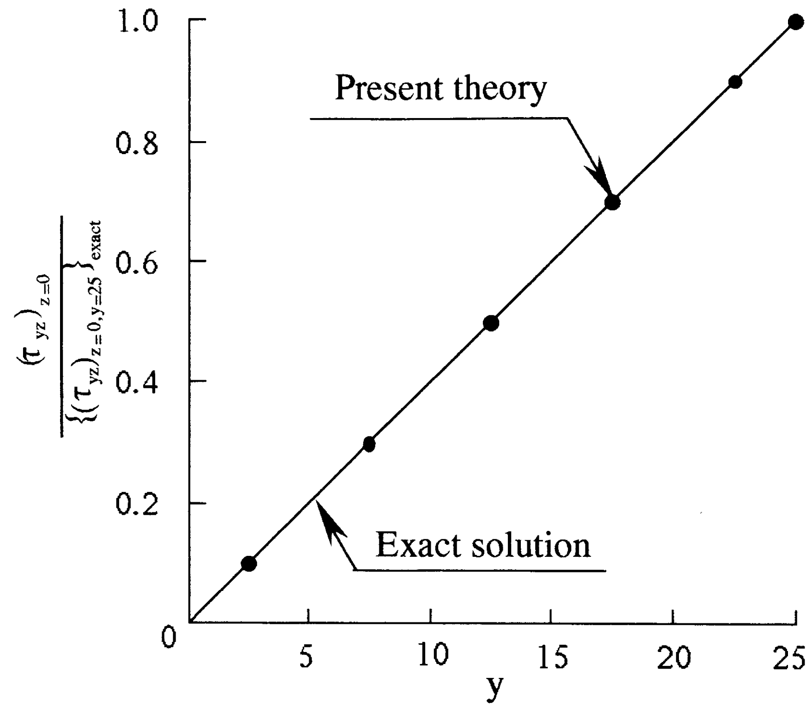


図2-8　楕円断面のｙ軸上のせん断応力

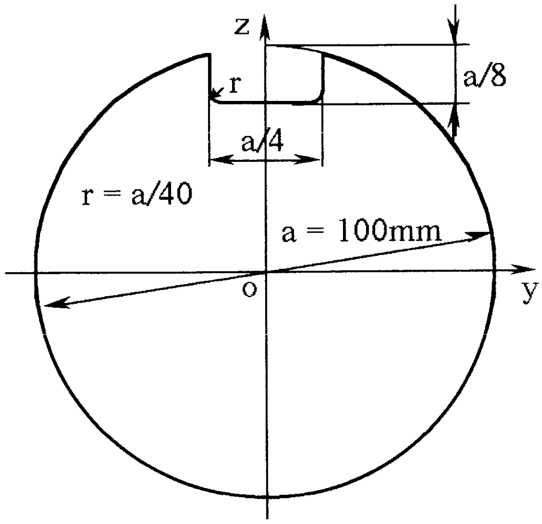
いて計算を行なう。節点数は200、要素数は346に分割した。ねじり剛性について厳密解と計算値を比べると

$$C = 1.9635 \times 10^{6} G \qquad (\text{厳密解})$$

$$C = 1.9604 \times 10^{6} G \qquad (\text{計算値})$$

であり、良く一致している。また、ねじりモーメントM_xが作用したときのｙ軸上のせん断応力分布について、比較したのが図2-8である。縦軸は解析解における短軸上の表面に生じる最大応力で無次元化した値である。両者は極めてよく一致している。

次に、図2-9に示すキー溝を持つ丸棒が、せん断力やねじりモーメントを受けるときのせん断応力分布や溝のすみ部の応力集中を解析する。図2-10には、有限要素法および境界要素法における要素分割を示す。有限要素法では線形補間関数を用いた三角形要素を、境界要素法では線形要素をそれぞれ用いた。計算結果および関連データについて両解析法の比較を示したのが表2-1である。境界要素法は入力データ数が少なくてすみ、計算時間も短く労力が節約される。図2-11はせん断力やねじりモーメントが作用したときの関数ϕやせん断応力の分布を有限要素法で求めた結果をもとに等高線で描いたものである。なお、せん断力Q_y、Q_zが作用したときのせん断応力の分布はそれぞれQ_y／Ａ、Q_z／Ａで無次元化し、ねじりモーメントM_x



$$[G]^{-1}=\frac{1}{G}\begin{bmatrix} 1.6168\times10^{-4} & 0 & -2.4810\times10^{-7} \\ & 1.5456\times10^{-4} & 0 \\ \mathrm{Sym.} & & 1.1731\times10^{-7} \end{bmatrix}$$

$(y_G, z_G)=(0, -1.6918\mathrm{mm})$, $(y_S, z_S)=(0, -3.8067\mathrm{mm})$

$A = 7543\mathrm{mm}^2$

図2-9　キー溝を持つ丸棒の断面寸法と断面定数

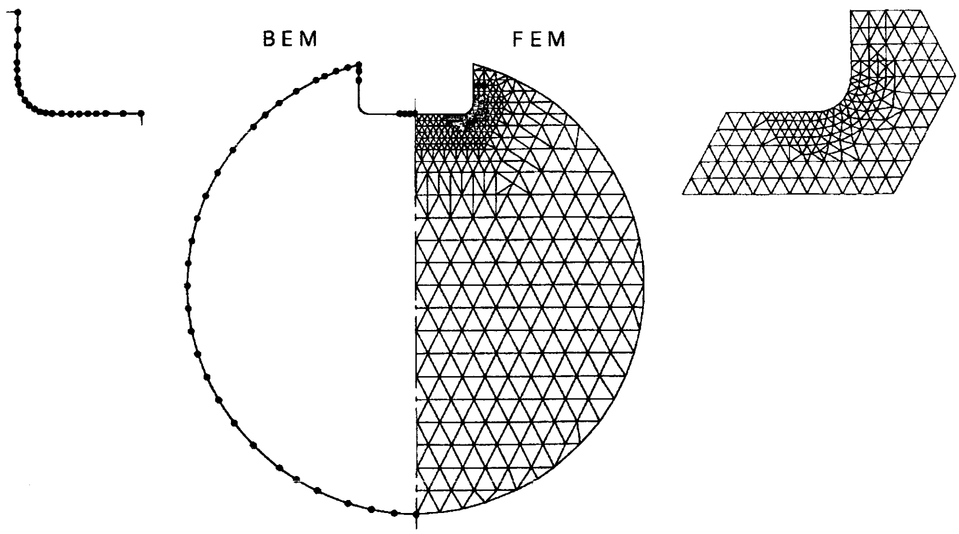
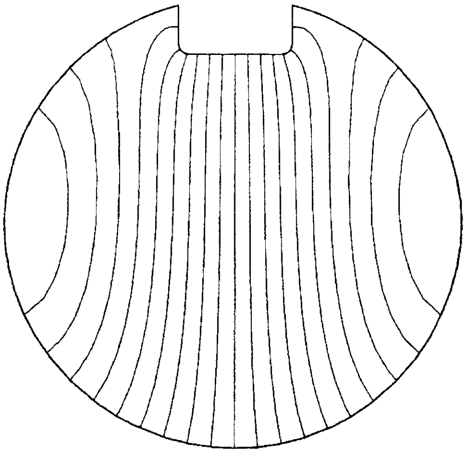
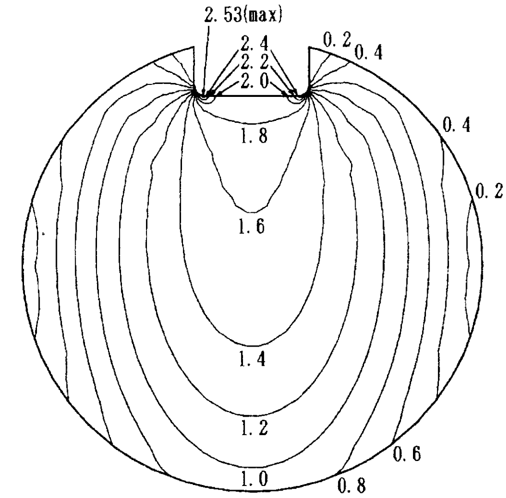


図2-10　キー溝を持つ丸棒の要素分割

表2-1　キー溝を持つ丸棒の応力集中の計算比較

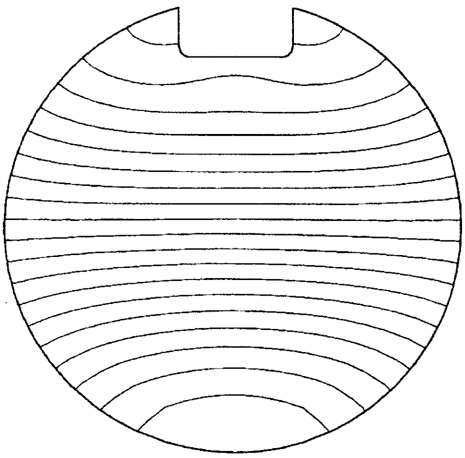
	FEM	BEM
Number of nodes	791	114
I/O+CPU time (sec.)	3.18	0.85
Maximum stress factor	2.133	2.303

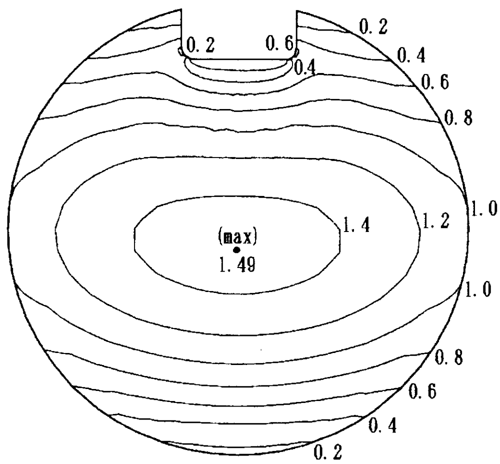




（ａ）関数φ の等高線　　　　　　（ｂ）せん断応力の分布

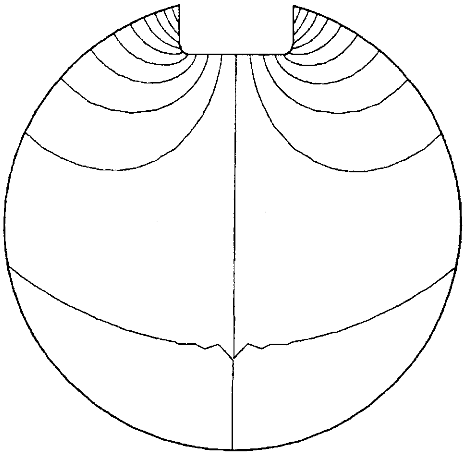
Q_yが作用した場合

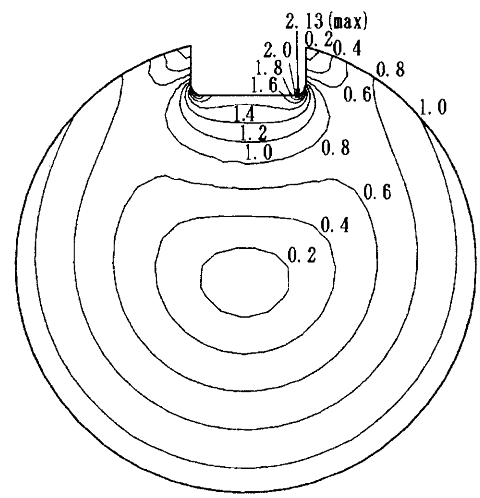




（ｃ）関数φ の等高線　　　　　　（ｄ）せん断応力の分布

Q_zが作用した場合





（ｅ）関数φ の等高線　　　　　　（ｆ）せん断応力の分布

M_xが作用した場合

図2-11　キー溝を持つ丸棒の関数φ とせん断応力の分布

が作用したときは合せん断応力$\tau=\sqrt{\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2}$を$16M_x/\pi a^3$で無次元化した。最大値を生ずる点を図中にmaxで示した。図2-12は、ねじりモーメントM_xを受けるときのz軸上の合せん断応力$\tau=\sqrt{\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2}$の有限要素法（実線）と境界要素法（○印）による結果を示す。両者はよく一致している。キー溝すみ部の曲率半径と応力集中率の関係を図2-13に示す。理論値[61]との比較により、簡便な境界要素法によってほぼ妥当な解が得られていることが分かる。また、有限要素法によって得られた応力集中率の値は理論値と多少の差はあるが、要素分割をさらに細かくすればより妥当な値が得られる。

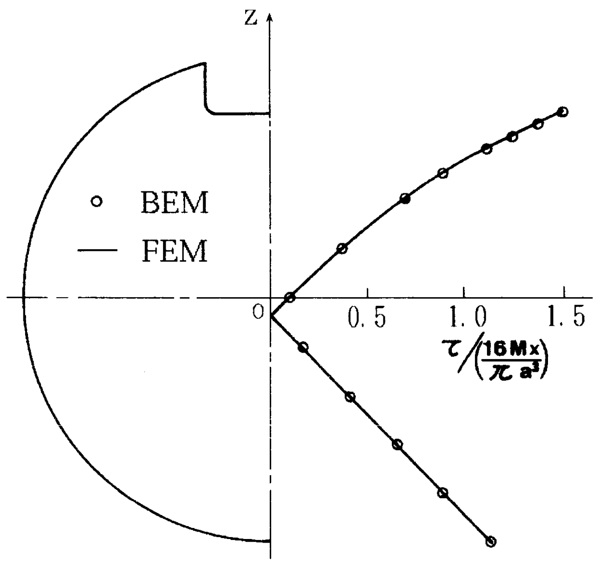


図2-12　合せん断応力のz軸上の分布

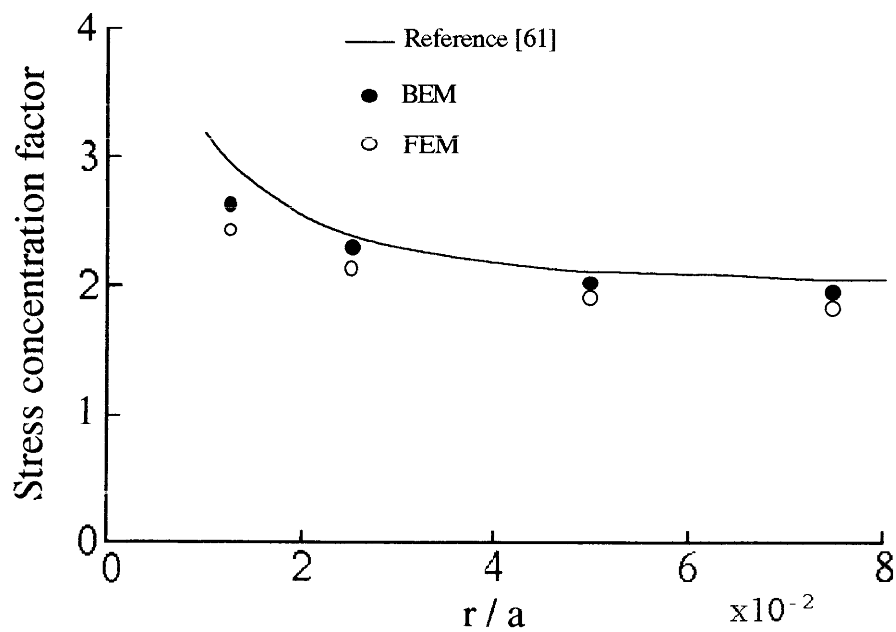
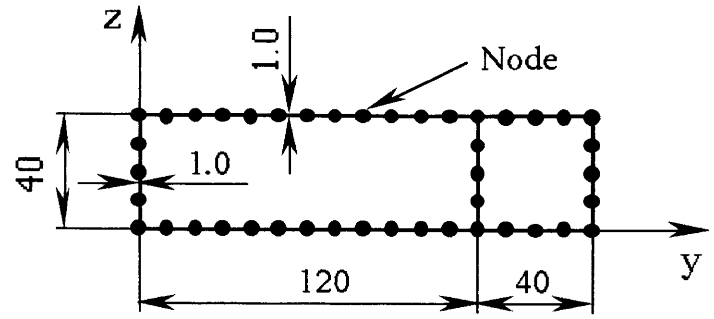


図2-13 キー溝を持つ丸棒の応力集中率

2・5・3　多室薄肉閉断面のせん断流解析

図2-14に示すような隔壁をもつ閉断面材を取り上げ、有限要素法によって解析を行



$$[G]^{-1}=\frac{1}{G}\begin{bmatrix}3.448\mathrm{x}10^{-3} & 0 & 0\\ 0 & 1.506\mathrm{x}10^{-2} & -8.991\mathrm{x}10^{-6}\\ 0 & -8.991\mathrm{x}10^{-6} & 2.421\mathrm{x}10^{-6}\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}(y_G,z_G)=(83.64,20.00)\\ (y_S,z_S)=(87.35,20.00)\\ A=440.0\mathrm{mm}^2\end{matrix}$$

図2-14　隔壁を持つ閉じ断面部材の断面寸法と断面定数

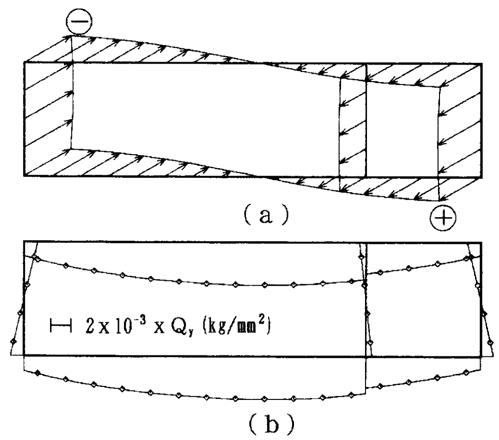


図2-15　Q_yによる(a)ϕおよび(b)せん断応力分布

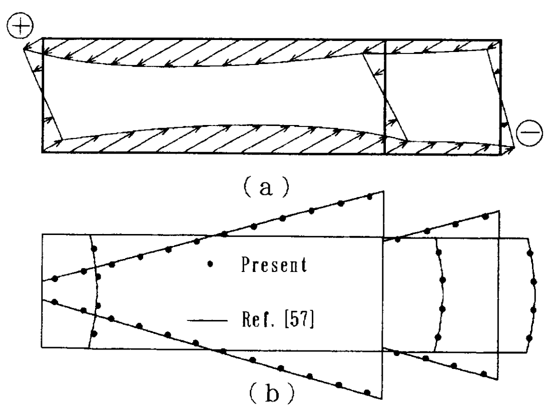


図2-16　Q_zによる(a)ϕおよび(b)せん断応力分布

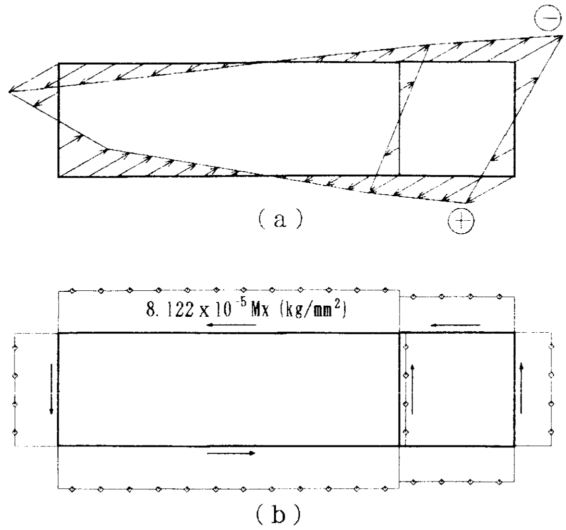
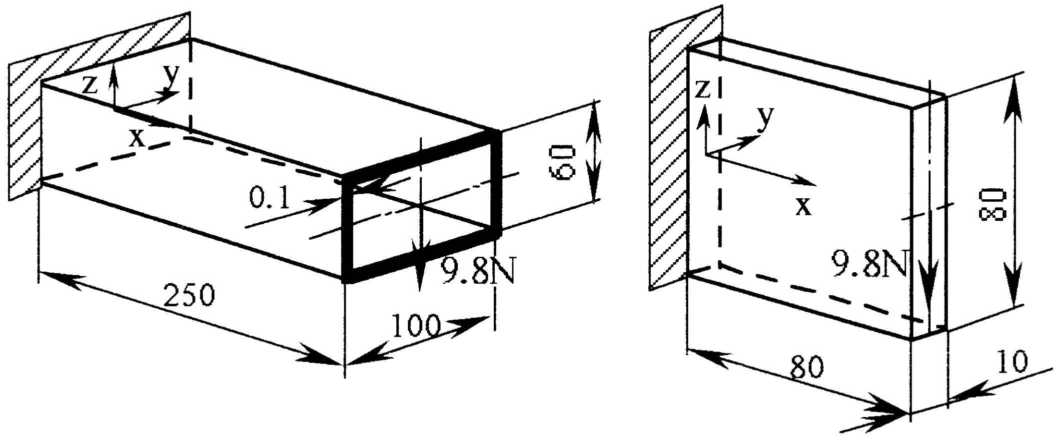


図2-17 M_xによる（a）ϕ および（b）せん断応力分布



（a） 薄肉箱形断面はり　　　　（b） 矩形断面はり

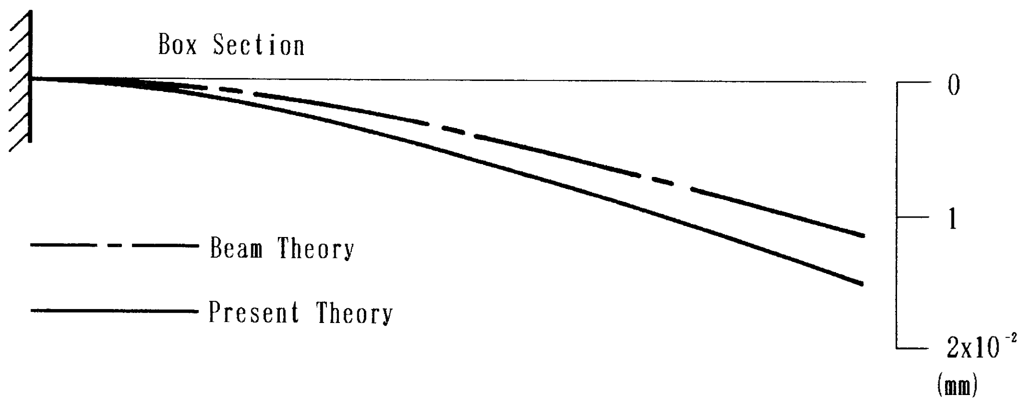
図2-18 解析モデル

なった。要素数は44、節点数は43である。せん断力Q_y、Q_z、ねじりモーメントM_xによる関数ϕとせん断流の分布を図2-15～図2-17に示す。せん断流の分布は要素中心点でプロットしてある。なお、図2-16(b)には文献[62]で示されている不静定せん断流を未知数とする多元の連立方程式を組み立てて解く方法による値を実線で示してあるが、両者はよく一致している。最大で約0.2%程度の差が見られるが、要素分割数を増すことで精度を上げることができる。図2-15と図2-17のせん断流分布図の実線は要素中心点の値を滑らかに結んだ線である。

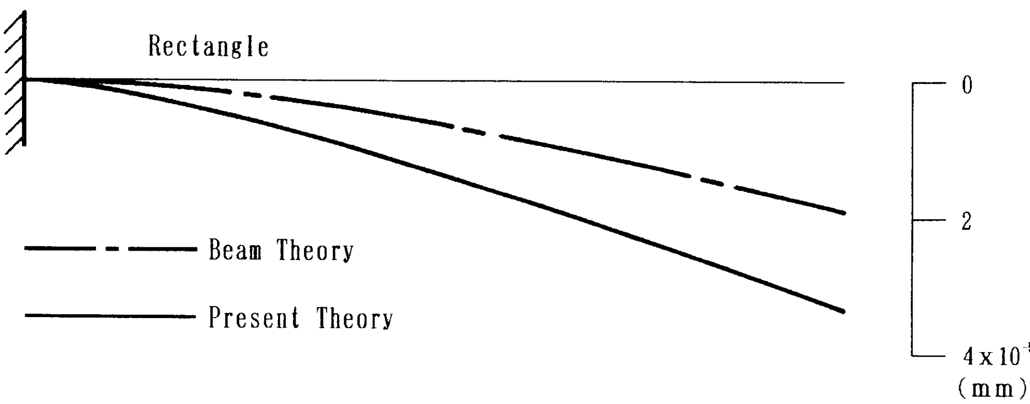
2・5・4 はりの曲げ変形

2・3節に示した剛性行列を用いて、図2-18に示すような2種類のはりの先端に

集中荷重が作用するときの曲げ変形解析を行なった。図2-19はたわみをはり理論と比較したものである。図2-19(a)は薄肉箱形断面はり、(b)は矩形断面はりの場合であるが、はり理論と比べてかなり差がある。また、Timoshenkoの理論、Cowperの方法、はり理論および本法によって得られた最大たわみを表2-2に示す。表から分かるようにTimoshenko理論は矩形断面はりでは過大評価され、薄肉箱形断面はりではやや小さく評価されている。Cowperの方法は、Timoshenkoのせん断補正係数を三次元弾性論より正確に求めており正解に近いと思われるが、Cowperの方法と本法との差は、薄肉箱形断面はりの場合で1.8%、矩形断面はりの場合で0.7%とわずかであり、両者はよい一致を示している。



(a) 薄肉箱形断面はり



(b) 矩形断面はり

図2-19たわみ図

表2-2 薄肉箱形断面はりおよび矩形断面はりの最大たわみの比較

Cross section / Theory	Box section (mm)	Rectangle (mm)
Beam theory	1.1477×10^{-2}	1.9047×10^{-5}
Timoshenko	1.4049×10^{-2}	3.7565×10^{-5}
Cowper	1.4826×10^{-2}	3.3579×10^{-5}
Present theory	1.5092×10^{-2}	3.3816×10^{-5}

2・5・5　はりの自由振動

せん断変形を考慮したはり要素の剛性行列が求められれば、それを用いて、はりの振動解析を容易に行なうことができる。すなわち、自由振動の振動数方程式は次のように表される[63]。

$$\left|[K]-p^2[M]\right|=0 \tag{2-81}$$

ここに、[K]、[M]は構造全体の剛性行列および質量行列であり、pは固有角振動数である。質量行列に集中質量行列を考えると[M]は対角行列となり、分布質量系に比べて記憶容量は少なくなる。また、運動方程式を解く場合にも逆行列の演算も容易で能率的となる。よって、節点に集中質量と集中慣性能率を考え、しかも慣性能率は3軸まわりみな同じ球状体に取ることとする。具体的には部材質量は折半し、慣性能率は材軸まわりのものを折半する。

例題としては、図2-18(a)に示した薄肉箱形断面の片持ちはりを考える。計算には次に示すような材料定数を用いた。

$E=205.9\mathrm{Gpa}$、　$G=79.4\mathrm{Gpa}$、　$\rho=7.86\mathrm{g/cm^3}$（密度）

要素分割数は前の場合と同じとする。曲げ振動、ねじり振動および縦振動について、はり理論、Saint-Venantのねじり理論および棒理論と本法による計算結果の比較を行なう。

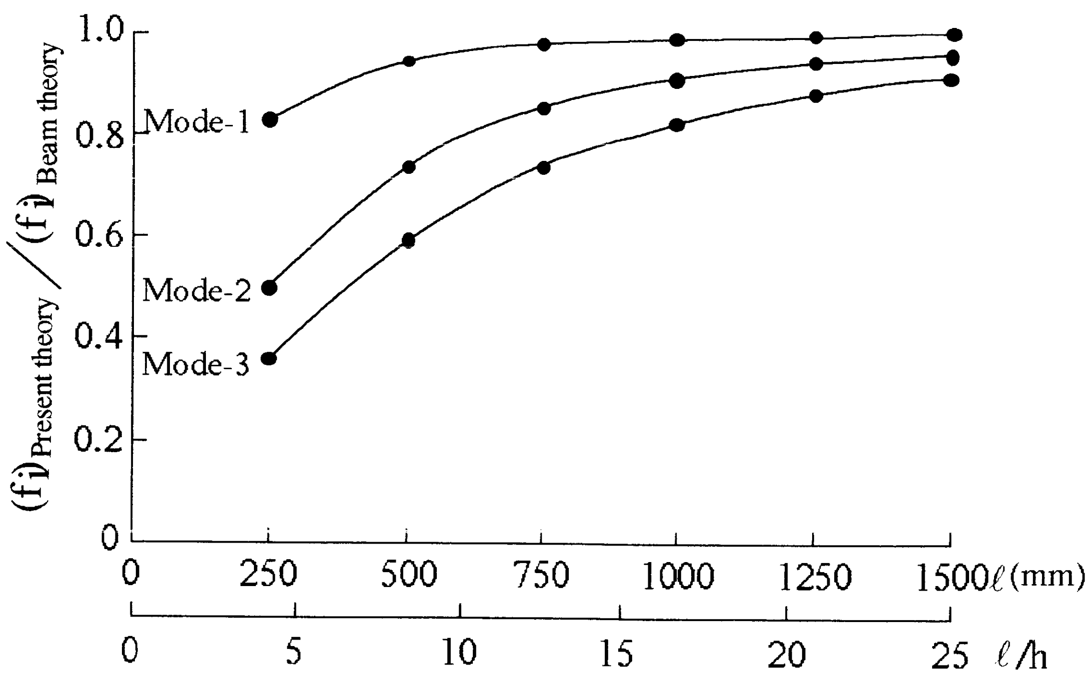


図2-20　はりの長さが曲げ振動数におよぼす影響

表2-3　曲げ振動数（Ｈｚ）

Mode	Beam theory		Present theory	
			Consist. mass	Lumped mass
1	z	1190.4	975.7	953.1
	y	1750.5	1428.7	1377.3
2	z	7460.9	3665.7	3382.2
	y	10970.7	5337.8	4676.1
3	z	20892.8	7537.2	6634.0
	y	30721.4	10941.1	9223.1

表2-4　ねじり振動数（Ｈｚ）

Mode	Torsion theory	Present theory	
		Consist. mass	Lumped mass
1	3178.0	2589.0	2572.7
2	9534.0	7941.9	7542.4
3	15890.1	13828.0	11999.3

表2-5　縦振動数（Ｈｚ）

Mode	Bar theory	Present theory	
		Consist. mass	Lumped mass
1	5117.1	5126.6	5102.1
2	15351.3	15747.4	14960.0
3	25585.4	27425.8	23799.7

図2-20に、はりの長さを種々変えたときの曲げ振動の１次から３次までの固有振動数の変化を示す。はり理論の解に対する比を縦軸にとり、横軸には細長さの度合いを表すℓ/hをとってある。この図から、はりが太く短くなるに連れて、せん断変形の影響により固有振動数が小さくなることが分かる。表2-3に、曲げ振動、ねじり振動および縦振動の、１次から３次までの固有振動数の計算結果を集中質量行列と整合質量行列を用いた場合についてそれぞれ示す。曲げ振動およびねじり振動において１次振動数で約20％の差が生じている。また、上述の集中質量行列による計算によって、ほぼ妥当な結果が得られることが分かる。

2・6　まとめ

せん断変形を考慮したはり理論を、断面不変の基本的仮定を出発点として理論を展開した。本章の内容は以下のようにまとめることができる。

（１）　はり理論の最大の特徴は、いわゆる一次元の棒理論であり簡単にその解が得られることである。しかるに本章で提案したせん断変形理論では、その意味においてはり理論の特徴を損なうことなく、理論の展開ができた。

（２）　本理論の適用にあたって、断面の幾何学量を有限要素法あるいは境界要素法によって簡単に計算できる。特に境界要素法による解法では、断面の境界積分のみで扱うことができ合理的な解析ができる。また、せん断中心の定義が明確になった。半円断面はりを対象としてそのせん断中心を解析的に求めたが、断面内無応力の仮定に基づいて求める場合のような補正が不必要であり、簡単な計算でせん断中心を求めることができた。

（３）　せん断変形を考慮した立体骨組要素の剛性行列を求めることができた。これは、曲げ変形のみを考える通常の表現を補正する形で与えられるが、これまでは平面骨組要素の場合だけが得られていた。例題として、薄肉箱形断面はりおよび矩形断面はりの曲げ問題を解析し、TimoshenkoやCowperらの結果と比較して、その精度を検討し、この定式化の妥当性を示すことができた。

（４）　ポアソン方程式を境界要素法によって解く場合、一般には面積積分の項が含まれてくる。そのため、解析領域を有限要素に分割しなければならないが、ここで示したようにポアソン方程式を満足する特解を見い出すことができれば、面積積分をすることなくラプラス方程式の解析プログラムを用いて、容易に問題を解くことができる。

（５）　動的問題への応用例として片持ちはりの自由振動問題を解析し、せん断変形の影響を明らかにすることができた。ここで用いた集中質量行列の有用性を示すことができた。

第３章　せん断変形を考慮した曲げねじり理論[64]

前章において、Saint-Venant理論に基づく任意形断面はりのせん断とねじれの連成に関する問題を有限要素法や境界要素法を用いて解析し、せん断とねじれの連成を表すせん断剛性とねじれ剛性の行列を求めた。さらに、この剛性行列を用いて、せん断変形を考慮した立体骨組要素の剛性行列を示し、その有用性を示した。

前章において考えたSaint-Venant理論に基づくはりのせん断とねじれの連成問題においては、はりの横断面のwarpingは横断面の直交座標ｙ、ｚのみの関数であり、軸方向ｘには無関係であった。はりの両端断面においても、はりはｘ軸方向に何らの拘束をも受けずにそることができるものと仮定した。

これに反して、はりの横断面のwarpingが拘束される場合、あるいはｘ軸の任意点にねじりモーメントが作用する場合などにおいては、状況が異なり、断面力としてのねじりモーメントおよびねじり率はいずれもｘ軸に沿って変化することになる。すなわち、横断面のwarpingは、ｙおよびｚのみならずｘの値にも依存することになる。そのために、ｘ軸方向にひずみが生じ、その結果として、ｘ軸方向の直応力が現われる。この直応力によってせん断応力が生ずるが、これによるせん断変形を考えていない。

そこで、本章ではせん断変形を考慮した曲げねじり理論について考える。前章で求めた立体骨組要素の剛性行列では、材端でのwarpingの拘束・接続を考慮できない。そこで、これを近似的に取り入れるためwarpingのモードをそのままにして大きさを軸方向に変化させるWagner式の曲げねじり剛性の一般化拡張を考える。数値計算例として、矩形断面はりおよび薄肉箱形断面はりの問題を扱う。

３・１　支配方程式と境界条件

最初に断面のwarpingφをせん断たわみ$\{d\eta'/dx,\ d\zeta'/dx,\ d\theta/dx\}$と関係づける。すなわち、前章の式(2-7)に式(2-15)と式(2-19)を代入することにより関係づけられるが、それを簡単にひとまず次のように書いておく。

$$\varphi=\begin{bmatrix}\varphi_\eta & \varphi_\zeta & \varphi_\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{d\eta'}{dx} & \dfrac{d\zeta'}{dx} & \dfrac{d\theta}{dx}\end{Bmatrix}^T \tag{3-1}$$

いま、前章と同じように一様断面直線はりに対して図2-1に示すように図心軸をｘ軸に取り、これに垂直にｙ、ｚ軸を右手系で定める。材端拘束があるときも、軸方

向変位u、横方向変位v、wを次のように表す。

$$\left.\begin{aligned}
u &= \xi - y\frac{d\eta^*}{dx} - z\frac{d\zeta^*}{dx} + \begin{bmatrix}\varphi_\eta & \varphi_\zeta & \varphi_\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{d\eta'}{dx} & \dfrac{d\zeta'}{dx} & \dfrac{d\theta}{dx}\end{Bmatrix}^T \\
v &= \eta - z\theta = \eta^* + \eta' - z\theta \\
w &= \zeta + y\theta = \zeta^* + \zeta' + y\theta
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}2)$$

ここでは、$\{d\eta'/dx,\ d\zeta'/dx,\ d\theta/dx\}$は一般にxの関数とする。

上式からひずみ成分は次のように求められる。

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\xi}{dx} - y\frac{d^2\eta^*}{dx^2} - y\frac{d^2\zeta^*}{dx^2} + \begin{bmatrix}\varphi_\eta & \varphi_\zeta & \varphi_\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{d^2\eta'}{dx^2} & \dfrac{d^2\zeta'}{dx^2} & \dfrac{d^2\theta}{dx^2}\end{Bmatrix} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi_\eta}{\partial y} + 1 & \dfrac{\partial\varphi_\zeta}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_\theta}{\partial y} - z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{d\eta'}{dx} & \dfrac{d\zeta'}{dx} & \dfrac{d\theta}{dx}\end{Bmatrix} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi_\eta}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi_\zeta}{\partial z} + 1 & \dfrac{\partial\varphi_\theta}{\partial y} + y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{d\eta'}{dx} & \dfrac{d\zeta'}{dx} & \dfrac{d\theta}{dx}\end{Bmatrix}
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}3)$$

したがって、はりの仮想内力仕事は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta V &= \iiint\left(\delta\varepsilon_x E\varepsilon_x + \delta\gamma_{xy} G\gamma_{xy} + \delta\gamma_{xz} G\gamma_{xz}\right) dx\,dy\,dz = \int\delta\left(\frac{d\xi}{dx}\right)EA\frac{d\xi}{dx}dx \\
&+ \int\delta\left(\begin{Bmatrix}d^2\eta^*/dx^2 \\ d^2\xi^*/dx^2\end{Bmatrix}^T\right)E\begin{bmatrix}I\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d^2\eta^*/dx^2 \\ d^2\xi^*/dx^2\end{Bmatrix}dx + \int\delta\left(\frac{d^2\{\eta\}^T}{dx^2}\right)\begin{bmatrix}L\end{bmatrix}\frac{d^2\{\eta\}}{dx^2}dx \\
&+ \int\delta\left(\frac{d\{\eta\}^T}{dx}\right)\begin{bmatrix}G\end{bmatrix}\frac{d\{\eta\}}{dx}dx
\end{aligned} \qquad (3\text{-}4)$$

ここで、$\{\eta\} = \{\eta',\ \zeta',\ \theta\}$と略記している。また、[L]、[G]，[I]行列は次のとおりである。

$$\left.\begin{aligned}
\begin{bmatrix}L\end{bmatrix} &= \int_A E\begin{bmatrix}\varphi_\eta \\ \varphi_\zeta \\ \varphi_\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_\eta & \varphi_\zeta & \varphi_\theta\end{bmatrix}dA, \qquad \begin{bmatrix}I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}G\end{bmatrix} &= \int_A G\begin{bmatrix}\partial\varphi_\eta/\partial y + 1 \\ \partial\varphi_\zeta/\partial y \\ \partial\varphi_\theta/\partial y - z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi_\eta}{\partial y} + 1 & \dfrac{\partial\varphi_\zeta}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_\theta}{\partial y} - z\end{bmatrix}dA \\
&+ \int_A G\begin{bmatrix}\partial\varphi_\eta/\partial z \\ \partial\varphi_\zeta/\partial z + 1 \\ \partial\varphi_\theta/\partial z + y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi_\eta}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi_\zeta}{\partial z} + 1 & \dfrac{\partial\varphi_\theta}{\partial z} + y\end{bmatrix}dA
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}5)$$

また、材端での仮想外力仕事は次のようになる。

$$\delta W=\int_A\left(\delta u\,\sigma_x+\delta v\,\tau_{xy}+\delta w\,\tau_{xz}\right)dA \tag{3-6}$$

式(3-6)に式(3-2)を代入して積分を実行すると次のようになる。

$$\delta W=\left[\delta\xi\ P\right]+\left[\delta\left(\frac{d\eta^*}{dx}\right)M_z\right]-\left[\delta\left(\frac{d\zeta^*}{dx}\right)M_y\right]+\left[\delta\eta^*\ Q_y\right]+\left[\delta\zeta^*\ Q_z\right]$$

$$+\left[\delta\eta'\ Q_y+\delta\zeta'\ Q_z+\delta\theta\ M_x\right]+\left[\delta\left(\frac{d\eta'}{dx}\right)B_y+\delta\left(\frac{d\zeta'}{dx}\right)B_z+\delta\left(\frac{d\theta}{dx}\right)B_z\right] \tag{3-7}$$

したがって、式(3-4)と式(3-7)のδVとδWを仮想仕事方程式$\delta V-\delta W=0$に代入し、δVについて部分積分を行ない変形していくと次のような式が得られる。

$$\left[\delta\xi\left(EA\frac{d\xi}{dx}-P\right)\right]+\left[\delta\left(\begin{Bmatrix}d\eta^*/dx\\ d\zeta^*/dx\end{Bmatrix}^T\right)\left(E\left[I\right]\begin{Bmatrix}d\eta^*/dx\\ d\zeta^*/dx\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}M_z\\ -M_y\end{Bmatrix}\right)\right]$$

$$+\left[\delta\left(\begin{Bmatrix}\eta^*\\ \zeta^*\end{Bmatrix}^T\right)\left(-E\left[I\right]\begin{Bmatrix}d^3\eta^*/dx^3\\ d^3\zeta^*/dx^3\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}Q_y\\ Q_z\end{Bmatrix}\right)\right]+\left[\delta\left(\frac{d\left\{\eta\right\}^T}{dx}\right)\left(\left[L\right]\frac{d^2\left\{\eta\right\}}{dx^2}-\left\{B\right\}\right)\right]$$

$$+\left[\delta\left(\left\{\eta\right\}^T\right)\left(-\left[L\right]\frac{d^3\left\{\eta\right\}}{dx^3}+\left[G\right]\frac{d\left\{\eta\right\}}{dx}-\left\{Q\right\}\right)\right]\Bigg|_0^{\ell}$$

$$+\int_0^{\ell}\left(\delta\xi\left(-EA\frac{d^2\xi}{dx^2}\right)+\delta\left(\begin{Bmatrix}\eta^*\\ \zeta^*\end{Bmatrix}^T\right)E\left[I\right]\frac{d^4}{dx^4}\begin{Bmatrix}\eta^*\\ \zeta^*\end{Bmatrix}+\delta\left(\left\{\eta\right\}^T\right)\left(\left[L\right]\frac{d^4\left\{\eta\right\}}{dx^4}-\left[G\right]\frac{d^2\left\{\eta\right\}}{dx^2}\right)\right)dx=0 \tag{3-8}$$

式(3-8)が$\delta\left\{\ \right\}$の任意の仮想変位に関して成り立つのであるから、次のようなつり合い方程式と境界条件を容易に導くことができる。

(I) 変分$\delta\xi$に関して

はりの内部で

$$EA\frac{d^2\xi}{dx^2}=0 \tag{3-9a}$$

はりの両端($x=0$およびℓ)で

$$\delta\xi\left(EA\frac{d\xi}{dx}-P\right)=0 \tag{3-9b}$$

(II) 変分$\delta\eta^*,\delta\zeta^*$に関して

はりの内部で

$$E\left[I\right]\begin{Bmatrix}d^4\eta^*/dx^4\\ d^4\zeta^*/dx^4\end{Bmatrix}=0 \tag{3-10a}$$

はりの両端（ x ＝ 0 および ℓ ）で

$$\delta\left(\begin{Bmatrix} d\eta^*/dx \\ d\zeta^*/dx \end{Bmatrix}^T\right)\left(E\left[I\right]\begin{Bmatrix} d^2\eta^*/dx^2 \\ d^2\zeta^*/dx^2 \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} M_z \\ -M_y \end{Bmatrix}\right)=\delta\left(\begin{Bmatrix} \eta^* \\ \zeta^* \end{Bmatrix}^T\right)\left(-E\left[I\right]\begin{Bmatrix} d^3\eta^*/dx^3 \\ d^3\zeta^*/dx^3 \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix}\right)=0$$

(3-10b)

(III) 変分 $\delta\{\eta\}$ に関して

はりの内部で

$$\left[L\right]\frac{d^4\{\eta\}}{dx^4}-\left[G\right]\frac{d^2\{\eta\}}{dx^2}=0 \tag{3-11a}$$

はりの両端（ x ＝ 0 および ℓ ）で

$$\delta\left(\frac{d\{\eta\}^T}{dx}\right)\left(\left[L\right]\frac{d^2\{\eta\}}{dx^2}-\{B\}\right)=\delta\left(\{\eta\}^T\right)\left(-\left[L\right]\frac{d^3\{\eta\}}{dx^3}+\left[G\right]\frac{d\{\eta\}}{dx}-\{Q\}\right)=0$$

(3-11b)

ここに、

$$\{Q\}=\{Q_y,\ \ Q_z,\ \ M_x\},\ \{B\}=\{B_y,\ \ B_z,\ \ B_x\}=\left\{\int_A\varphi_\eta\sigma_x dA,\ \int_A\varphi_\zeta\sigma_x dA,\ \int_A\varphi_\theta\sigma_x dA\right\}$$

であり、B_y、B_z、B_x はいわゆるバイモーメントを表す。

式(3-11)は、軸拘束ねじりにおいてよく知られた関係の一般化である。

ところで、上式の中の[G]は前章で導かれたものと同じであることはエネルギ式から見れば明らかである。また、[L]を作るためにはwarpingφとせん断変形 $d\{\eta\}/dx$ の関係を式(3-1)と書いたが、その内容は次のようになる。

$$\varphi_\eta=\left[N\right]\{\phi_\eta\}-y,\quad \varphi_\zeta=\left[N\right]\{\phi_\zeta\}-z,\quad \varphi_\theta=\left[N\right]\{\phi_\theta\} \tag{3-12}$$

よって、[L]行列の各要素は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
L_{11}&=\int_A E\varphi_\eta^2 dA=\{\phi_\eta\}^T\int_A E\left[N\right]^T\left[N\right]dA\{\phi_\eta\}-2\{\phi_\eta\}^T\int_A E\left[N\right]^T y\,dA+EI_{yy}\\
L_{12}&=\int_A E\varphi_\eta\varphi_\zeta dA=\{\phi_\eta\}^T\int_A E\left[N\right]^T\left[N\right]dA\{\phi_\zeta\}-\{\phi_\eta\}^T\int_A E\left[N\right]^T z\,dA\\
&\qquad\qquad -\{\phi_\zeta\}^T\int_A E\left[N\right]^T y\,dA+EI_{yz}\\
L_{13}&=\int_A E\varphi_\eta\varphi_\theta dA=\{\phi_\eta\}^T\int_A E\left[N\right]^T\left[N\right]dA\{\phi_\theta\}-\{\phi_\theta\}^T\int_A E\left[N\right]^T y\,dA\\
L_{22}&=\int_A E\varphi_\zeta^2 dA=\{\phi_\zeta\}^T\int_A E\left[N\right]^T\left[N\right]dA\{\phi_\zeta\}-2\{\phi_\zeta\}^T\int_A E\left[N\right]^T z\,dA+EI_{zz}\\
L_{23}&=\int_A E\varphi_\zeta\varphi_\theta dA=\{\phi_\zeta\}^T\int_A E\left[N\right]^T\left[N\right]dA\{\phi_\theta\}-\{\phi_\theta\}^T\int_A E\left[N\right]^T z\,dA\\
L_{33}&=\int_A E\varphi_\theta^2 dA=\{\phi_\theta\}^T\int_A E\left[N\right]^T\left[N\right]dA\{\phi_\theta\}
\end{aligned}\right\} \tag{3-13}$$

式(3-11)を形式的に解くことは容易であるが、実用的にはさらに進めてはりの軸

方向に要素分割して有限要素近似による計算を行なうのがよい。これについては、次節に述べる。

3・2　せん断変形を考慮した曲げねじり要素の剛性行列

2・3節では、せん断変形を考慮した骨組要素の剛性行列を求めた。しかし、warpingの拘束などが考慮できない。ここでは、せん断変形を含んだはりの曲げねじり要素の剛性行列を示す。

要素両端の節点をｉｊとする長さℓの要素について考える。はりの材軸方向の変形を支配する式(3-9a)より、軸心に沿う変位ξはxの1次式で表されることが分かる。また、y、z軸方向の曲げによるたわみη^*,ζ^*は、式(3-10a)からそれぞれxの3次式で表されることになる。いま、軸方向の変位および曲げ変位は、要素両端の軸方向変位ξ_i,ξ_j、曲げ変位η_i^*,η_j^*,ζ_i^*,ζ_j^*などを用いて、次のように表現することができる。

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \xi_i\left(1-\frac{x}{\ell}\right)+\xi_j\frac{x}{\ell}\\
\eta^* &= \eta_i^*\left(1-\frac{3x^2}{\ell^2}+\frac{2x^3}{\ell^3}\right)+\eta_j^*\left(\frac{3x^2}{\ell^2}-\frac{2x^3}{\ell^3}\right)+\frac{d\eta_i^*}{dx}x\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^2+\frac{d\eta_j^*}{dx}\ell\left(\frac{x^3}{\ell^3}-\frac{x^2}{\ell^2}\right)\\
\zeta^* &= \zeta_i^*\left(1-\frac{3x^2}{\ell^2}+\frac{2x^3}{\ell^3}\right)+\zeta_j^*\left(\frac{3x^2}{\ell^2}-\frac{2x^3}{\ell^3}\right)+\frac{d\zeta_i^*}{dx}x\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^2+\frac{d\zeta_j^*}{dx}\ell\left(\frac{x^3}{\ell^3}-\frac{x^2}{\ell^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3-14}$$

軸方向変位と曲げ変形による内力仕事を考えると式(3-4)の右辺第１項と第２項より、次のようになる。

$$\int\left(\delta\begin{Bmatrix} d\xi/dx\\ d^2\eta^*/dx\\ d^2\zeta^*/dx\end{Bmatrix}\right)^T\begin{bmatrix} EA & 0 & 0\\ 0 & EI_z & EI_{yz}\\ 0 & EI_{yz} & EI_y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\xi/dx\\ d^2\eta^*/dx\\ d^2\zeta^*/dx\end{Bmatrix}dx=\left(\delta\{s_B\}\right)^T[k_B]\{s_B\} \tag{3-15}$$

ここに、$\{s_B\}$は曲げ変形に関する部材変位、$[k_B]$はその剛性行列で、それぞれ次のように表される。

$$\{s_B\}=\left\{\xi_j-\xi_i,\ \ \eta_j^*-\eta_i^*,\ \ \zeta_j^*-\zeta_i^*,\ \ d\eta_i^*/dx,\ \ d\zeta_i^*/dx,\ \ d\eta_j^*/dx,\ \ d\zeta_j^*/dx\right\}^T \tag{3-16}$$

$$[k_B]=\begin{bmatrix} \dfrac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ & \dfrac{12E[I]}{\ell^3} & -\dfrac{6E[I]}{\ell^2} & -\dfrac{6E[I]}{\ell^2} \\ & & \dfrac{4E[I]}{\ell} & \dfrac{2E[I]}{\ell} \\ \text{sym.} & & & \dfrac{4E[I]}{\ell} \end{bmatrix}, \quad [I]=\begin{bmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y \end{bmatrix} \tag{3-17}$$

また、せん断変形によるたわみ $\{\eta\}=\{\eta', \ \zeta', \ \theta\}^T$ を支配する式(3-11a)より、はり要素内のせん断変形によるたわみは、xの3次式で表されることが分かる。そして、次のように表現することができる。

$$\{\eta\}=\{\eta\}_i\left(1-\frac{3x^2}{\ell^2}+\frac{2x^3}{\ell^3}\right)+\{\eta\}_j\left(\frac{3x^2}{\ell^2}-\frac{2x^3}{\ell^3}\right)+\frac{d\{\eta\}_i}{dx}x\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^2+\frac{d\{\eta\}_j}{dx}\ell\left(\frac{x^3}{\ell^3}-\frac{x^2}{\ell^2}\right) \tag{3-18}$$

ここに、$\{\eta\}_i, \{\eta\}_j$ は、せん断変形による節点 i 、 j の変位ベクトルである。
せん断変形に関する仮想内力仕事は式(3-4)の右辺第3項と第4項より次のようになる。

$$\int\delta\left(\frac{d^2\{\eta\}^T}{dx^2}\right)[L]\frac{d^2\{\eta\}}{dx^2}dx+\int\delta\left(\frac{d\{\eta\}^T}{dx}\right)[G]\frac{d\{\eta\}}{dx}dx=\left(\delta\{s_S\}^T\right)[k_S]\{s_S\} \tag{3-19}$$

ここに、$\{s_S\}$ はせん断に関する部材変形、$[k_S]$ はその剛性行列でそれぞれ次のように表される。

$$\{s_S\}=\left\{\{\eta\}_j-\{\eta\}_i, \ \ d\{\eta\}_i/dx, \ \ d\{\eta\}_j/dx\right\} \tag{3-20}$$

$$[k_S]=\begin{bmatrix} \dfrac{6[G]}{5\ell}+\dfrac{12[L]}{\ell^3} & -\dfrac{[G]}{10}-\dfrac{6[L]}{\ell^2} & -\dfrac{[G]}{10}-\dfrac{6[L]}{\ell^2} \\ & \dfrac{2\ell[G]}{15}+\dfrac{4[L]}{\ell} & -\dfrac{\ell[G]}{30}+\dfrac{2[L]}{\ell} \\ \text{sym.} & & \dfrac{2\ell[G]}{15}+\dfrac{4[L]}{\ell} \end{bmatrix} \tag{3-21}$$

仮想外力仕事を考え仮想仕事方程式を求めると、次のようになる。

$$\delta\left(\begin{Bmatrix} s_B \\ s_S \end{Bmatrix}^T\right)\begin{bmatrix} [k_B] & 0 \\ 0 & [k_S] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} s_B \\ s_S \end{Bmatrix}=\delta\left(\begin{Bmatrix} s_B \\ s_S \end{Bmatrix}^T\right)\begin{Bmatrix} S_B \\ S_S \end{Bmatrix} \tag{3-22}$$

ここに、$\{S_B\}$，$\{S_S\}$は部材力を表しそれぞれ曲げ変形とせん断変形に関する部材変形$\{s_B\}$、$\{s_S\}$に対応しており次のとおりである。

$$\left.\begin{aligned}\{S_B\}&=\{P \quad Q_y \quad Q_z \quad -M_{zi} \quad M_{yi} \quad -M_{zj} \quad M_{yj}\}\\ \{S_S\}&=\{Q_y \quad Q_z \quad M_x \ \vdots\ -B_{yi} \quad -B_{zi} \quad -B_{x_i} \ \vdots\ B_{yi} \quad B_{zi} \quad B_{x_i}\}=\{Q \quad -B_i \quad B_j\}\end{aligned}\right\} \tag{3-23}$$

いま、要素全体の部材変形を$\{s\}$として

$$\begin{aligned}\{s\}=\{&\xi_j-\xi_i,\ \ \eta_j-\eta_i,\ \ \zeta_j-\zeta_i,\ \ d\eta_i^*/dx,\ \ d\zeta_i^*/dx,\ \ d\eta_j^*/dx,\ \ d\zeta_j^*/dx\ \ \vdots\\ &\{\eta\}_j-\{\eta\}_i,\ \ d\{\eta\}_i/dx,\ \ d\{\eta\}_j/dx\}^T,\end{aligned} \tag{3-24}$$

$$\eta_j-\eta_i=\eta_j^*+\eta_j'-(\eta_i^*+\eta_i'),\qquad \zeta_j-\zeta_i=\zeta_j^*+\zeta_j'-(\zeta_i^*+\zeta_i')$$

を考えると曲げとせん断に関する部材変形$\{s_B、s_S\}^T$との間に次のような関係がある。

$$\begin{Bmatrix}s_B\\ s_S\end{Bmatrix}=[C]\{s\} \tag{3-25}$$

ここに、[C]行列は次のとおりである。

$$[C]=\begin{bmatrix}[E]_{7\times7} & \begin{bmatrix}0&0&0&\cdots\\-1&0&0&\cdots\\0&-1&0&\cdots\\0&0&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix}_{7\times9}\\ [0]_{9\times7} & [E]_{9\times9}\end{bmatrix} \tag{3-26}$$

なお、$[E]_{n\times n}$は$n\times n$の単位行列、$[0]_{m\times n}$は$m\times n$の零行列を表す。

式(3-25)を式(3-22)の仮想仕事方程式に代入し仮想外力仕事の項を整理すると次のようになる。

$$(\delta\{s\})^T[C]\begin{bmatrix}[k_B]&0\\0&[k_S]\end{bmatrix}[C]\{s\}=(\delta\{s\})^T\begin{Bmatrix}\{S_B\}\\ \cdots\\ 0\\ 0\\ M_x\\ -\{B\}_i\\ \{B\}_j\end{Bmatrix}=(\delta\{s\})^T\{S\} \tag{3-27}$$

上式が任意の仮想量$\delta\{s\}$に関して成り立つのであるから、次のような剛性方程式が得られる。

$$
\left.\begin{aligned}
&[k]\{s\}=\{S\},\\
&[k]=[C]^T\begin{bmatrix}[k_B] & 0\\ 0 & [k_S]\end{bmatrix}[C],\quad \{S\}=\left\{\{S_B\},\ 0,\ 0,\ M_x,\ -\{B\}_i,\ \{B\}_j\right\}^T
\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}28)
$$

上の剛性方程式において部材変形 $\eta'_j-\eta'_i$, $\zeta'_j-\zeta'_i$ に関する部材力がゼロとなっている。この２つの量と他の量にそれぞれ部材変形ベクトル、部材力ベクトル、剛性行列を分割して、次のように書く。

$$
\begin{bmatrix}[k_{11}] & [k_{12}]\\ [k_{21}] & [k_{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{s_1\}\\ \{s_2\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{S_1\}\\ 0\end{Bmatrix}\qquad(3\text{-}29)
$$

ここに、$\{S_1\}$、$\{s_1\}$、$\{s_2\}$ は次に示すとおりである。

$$
\left.\begin{aligned}
&\{S_1\}=\left\{\{S_B\}\ \vdots\ M_x,\ -\{B\}_i,\ \{B\}_j\right\}^T\\
&\{s_1\}=\left\{\xi_j-\xi_i,\ \eta_j-\eta_i,\ \zeta_j-\zeta_i,\ d\eta_i^*/dx,\ \cdots\ \vdots\ \theta_j-\theta_i,\ d\{\eta\}_i/dx,\ d\{\eta\}_j/dx\right\}^T\\
&\{s_2\}=\left\{\eta'_j-\eta'_i,\ \zeta'_j-\zeta'_i\right\}^T
\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}30)
$$

したがって、式(3-29)から $\{s_2\}$ を消去し $\{s_1\}$ に関する剛性方程式を求めると次のように表される。

$$
\{S_1\}=\left[[k_{11}]-[k_{12}][k_{22}]^{-1}[k_{21}]\right]\{s_1\}=[k_{ef}]\{s_1\}\qquad(3\text{-}31)
$$

この $[k_{ef}]$ は $\{s_2\}$ の変位場の影響を考慮した $\{s_1\}$ に関する剛性行列であり、せん断変形を考慮した $\{s_1\}$ に関する剛性行列と見ることができる。

さらに、要素の節点変位 $\{r\}$ と部材変形 $\{s_1\}$ が次のように関係づけられる。

$$
\{s_1\}=[a]\{r\}\qquad(3\text{-}32)
$$

結局、$\{r\}$ に関する要素剛性行列は、次式で与えられる。

$$
[K_{ef}]=[a]^T[k_{ef}][a]\qquad(3\text{-}33)
$$

式(3-33)は、はりのせん断変形を考慮に入れた曲げねじり要素の剛性行列である。

3・3 数値解析例

前節で説明したはりのせん断変形理論に基づく解析例を以下に２つ示す。

3・3・1 矩形断面はり

図3-1に示すような矩形断面をもつ片持ちはりの曲げ問題を、本章で示した方法で解析を行なった。はり断面は、85節点、128要素に分割し断面諸係数を求め、長さ方向には８要素に等分割し計算を行なった。図3-2は変位図であり、図中の一点鎖線はせん断変形を無視した従来のはり理論の解である。細線（本方法の結果を表す太い実線と重なっている。）は川井・藤谷らの三次元せん断変形解析法による結果である。また、破線は定ひずみ三角形要素を用いた有限要素法による平面応力場の解である。本方法による解は、この問題の正解と考えられる平面応力場の解や三次元せん断変形解析の結果とよく一致している。なお、表3-1は、種々の方法によって得られたはりの先端の最大たわみを比較したものである。せん断補正係数を三次元弾性論より正確に求めたCowperの理論解と本法の結果はよく一致している。図3-3は、せん断応力図であり、図中の細線は三次元せん断変形解析法による結果であり、固定端の近くを除けば、よい対応をしている。図3-4は、材軸方向の垂直応力の解である。せん断変形を無視したはり理論による解を一点鎖線で示し、三次元せん断変形解析法によって得られた結果を細線で示す。三次元せん断変形解析結果と本方法による結果はよく一致している。

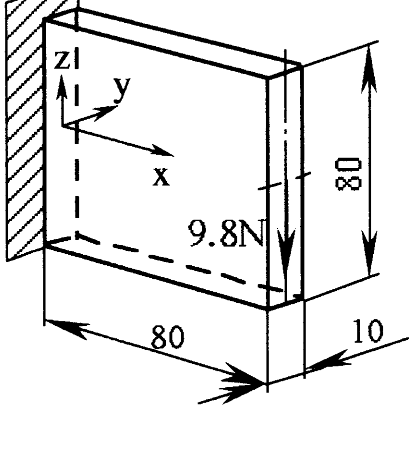


図3-1　矩形断面はり

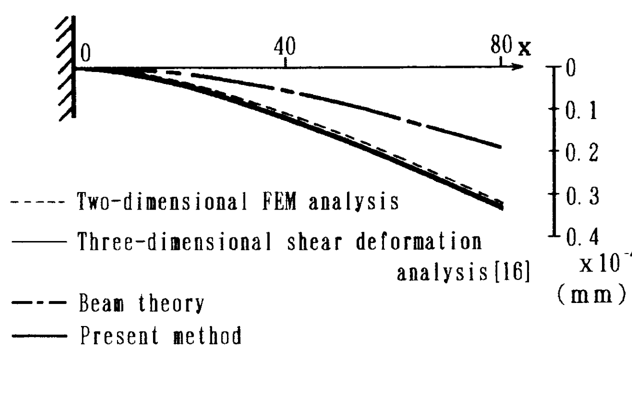
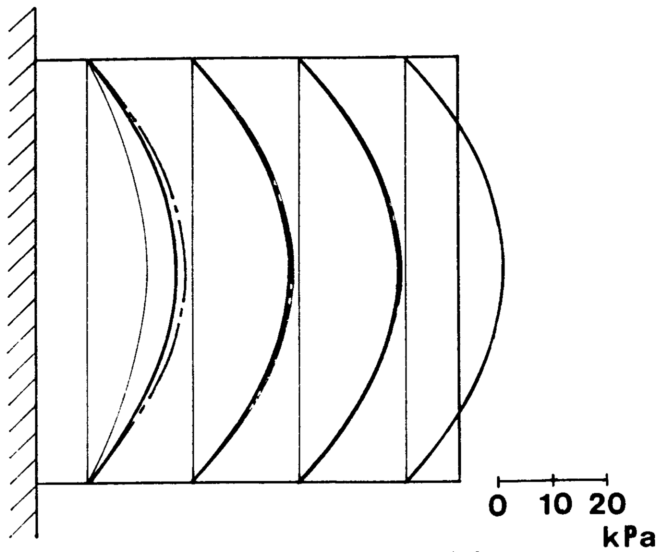


図3-2　たわみ図

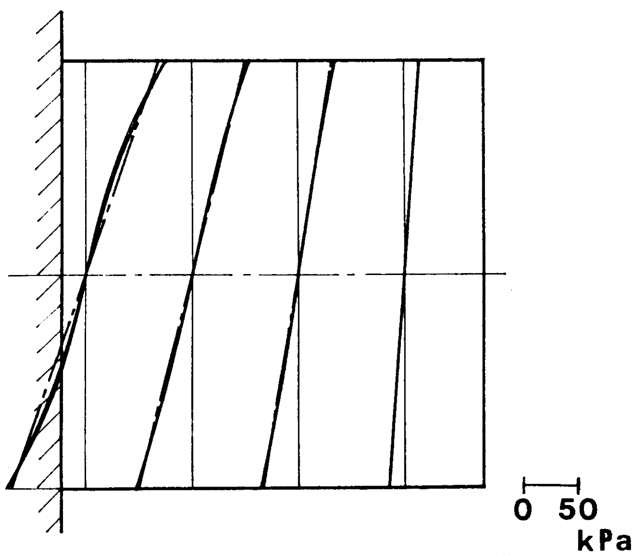
表3-1 矩形断面はりの最大たわみの比較（mm）

Theory	Beam	Timoshenko	Cowper	Present
Deflection	1.905×10^{-5}	3.757×10^{-5}	3.358×10^{-5}	3.300×10^{-5}



—— Three-dimensional shear deformation analysis [16]
– – – Beam theory
—— Present method

図3-3 せん断応力分布図



—— Three-dimensional shear deformation analysis [16]
-·-·– Beam theory
—— Present method

図3-4 直応力分布図

３．３．２　薄肉箱形断面はり

図3-5に示す薄肉箱形断面を持つ片持ちはりの曲げ問題の解析を行なった。断面は、32節点、32要素に分割し、長さ方向は６要素に等分割した。変位図の実線は本法によって得られたはりのたわみ曲線を描いたものであり、一点鎖線はせん断変形を考慮しない通常のはり理論によるたわみの解であり、細線（本方法の結果を表す太い実線と重なっている）は川井らの三次元せん断変形解析法によって得られた結果である。表3-2は種々の方法によってえられた最大たわみの値を示す。Cowperの理論解と三次元せん断変形解析法による解と本法の結果は一致している。図3-6(a)、(b)は、はりの先端および中央部に9.8Nの集中荷重が作用したときの断面内の直応力をはり理論より得られる直応力との比で示したものである。

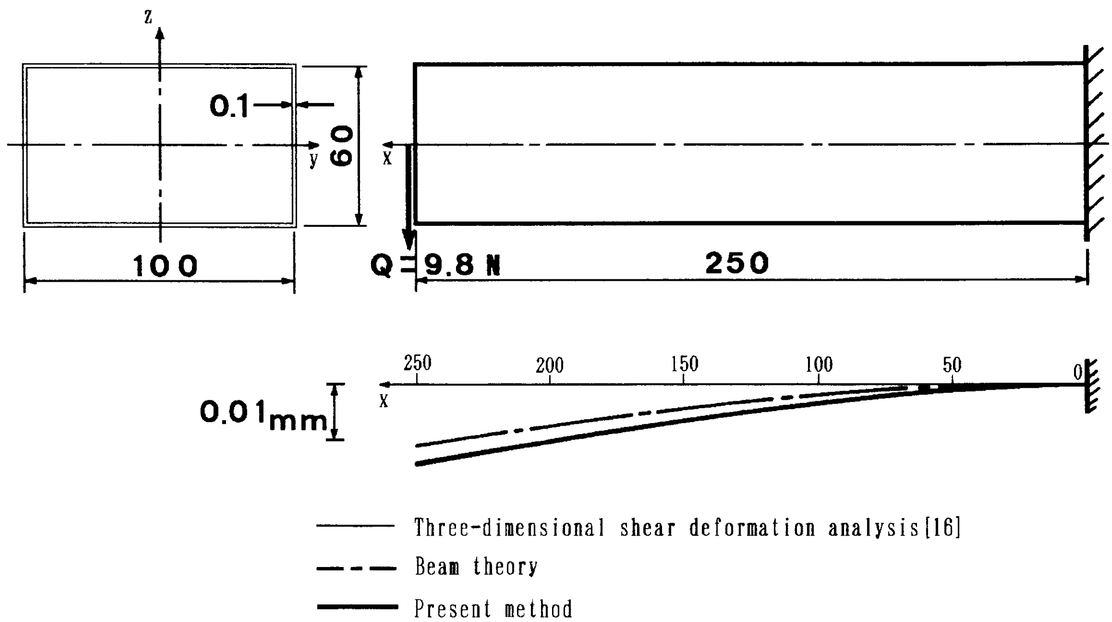
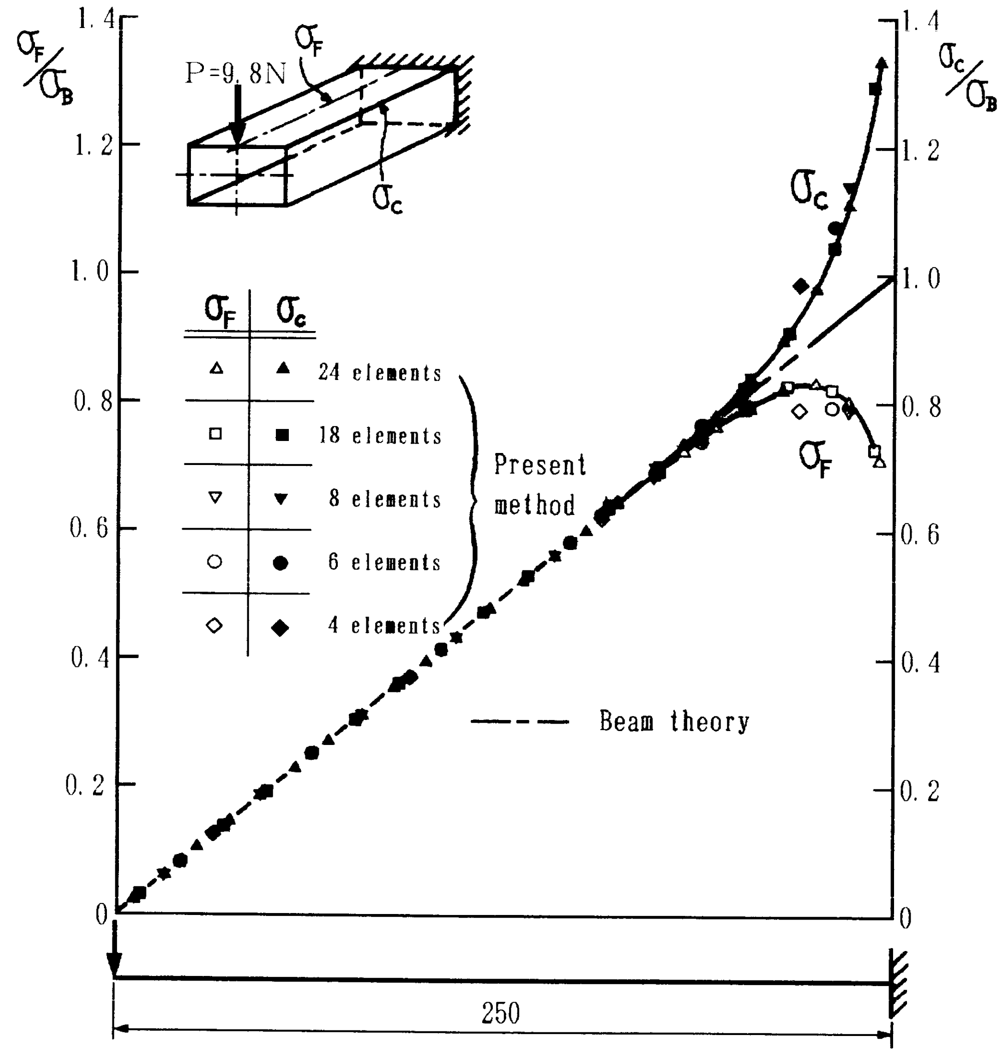


図3-5　薄肉箱形断面はりの寸法とたわみ図

表3-2　薄肉箱形断面はりの最大たわみの比較（ｍｍ）

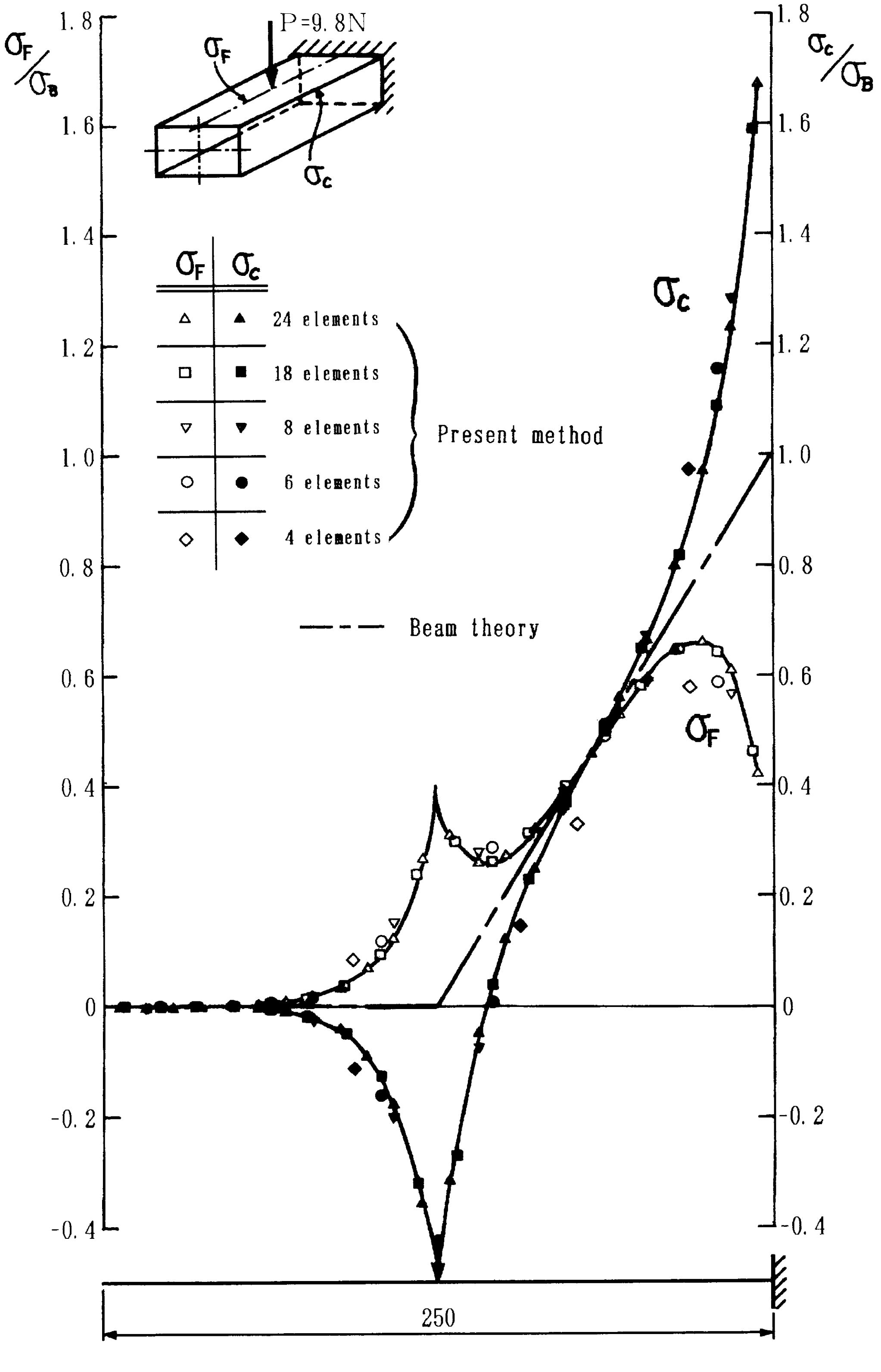
Theory	Beam	Timoshenko	Cowper	Reissner	Kawai	Present
Deflection	1.148×10^{-2}	1.405×10^{-2}	1.483×10^{-2}	1.236×10^{-2}	1.487×10^{-2}	1.487×10^{-2}

図は、上板の中央部(σ_F)と端部(σ_C)に於ける直応力をはりの長さ方向に沿って示してある。固定端およびはり中央部の荷重点の近くで、shear-lag現象が顕著に見られる。



（ａ）　はり先端集中荷重

図3-6　薄肉箱形断面はりのShear-lag



（ｂ）　はり中央集中荷重

図3-6　薄肉箱形断面はりのShear-lag

図3-7は、薄肉箱形断面はりの自由端にねじりモーメントを作用させたときの解析結果である。はりの長さがねじり角の大きさに及ぼすせん断変形の影響を調べたものである。横軸は、h／ℓ（hははりの高さ、ℓははりの長さ）である。縦軸は通常の曲げねじり理論に基づいて有限要素法で解析した解に対する本法によって得られた解との比を示している。細線は、三次元せん断変形解析法により求められた結果であり、本方法により得られた結果はよく一致している。図3-8は、薄肉箱形断面を持つ単純支持はりに中央集中荷重が作用する場合のたわみと断面内応力分布を示したものである。荷重点付近の垂直応力分布にshear-lag現象が現われている。

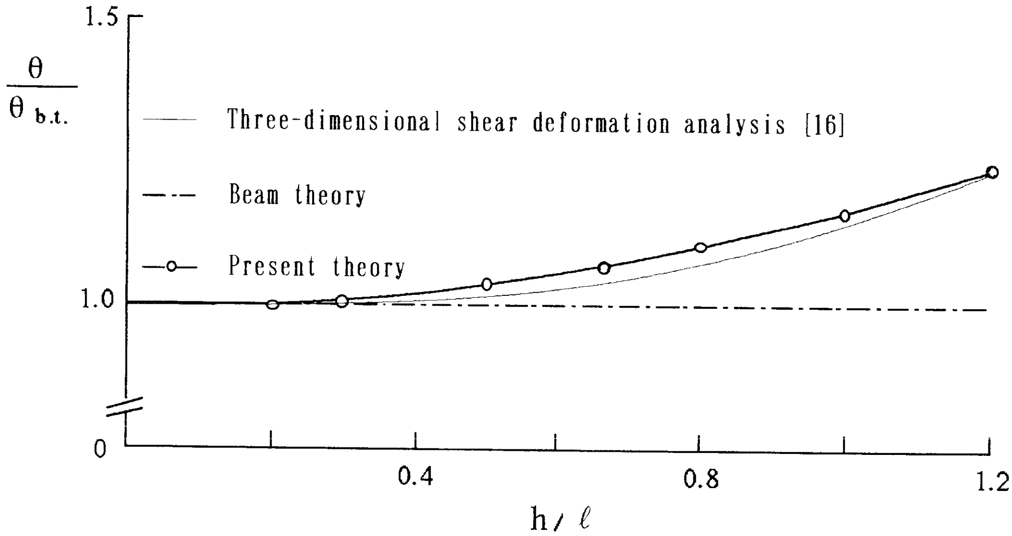


図3-7　先端ねじり角におよぼすせん断変形の影響

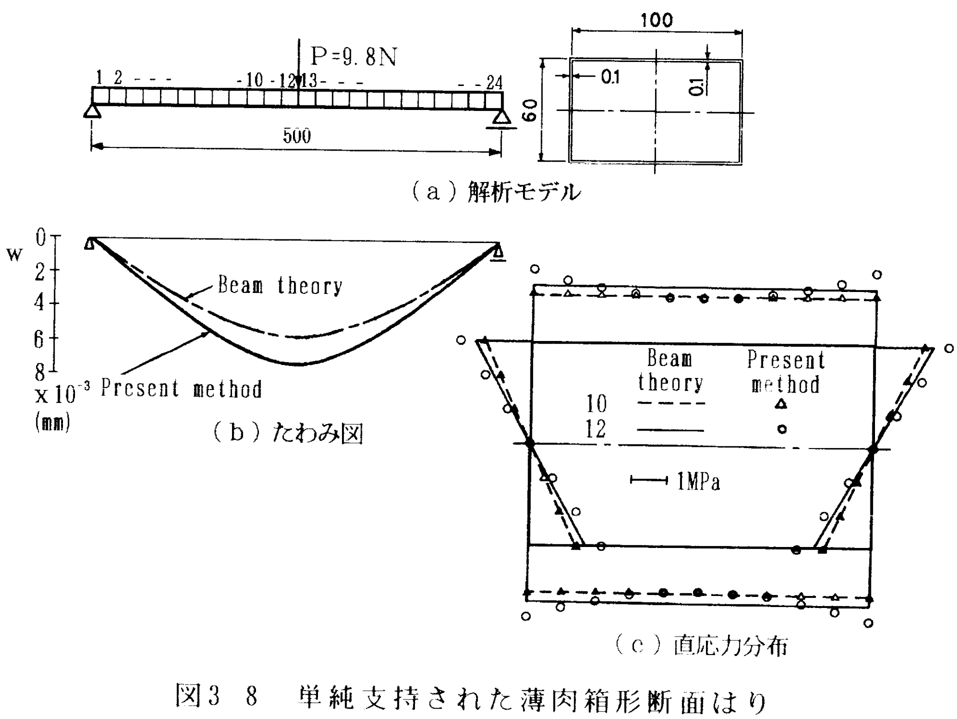


図3　8　単純支持された薄肉箱形断面はり

３．４　まとめ

せん断変形を考慮した曲げねじり理論について述べた。本章は次のようにまとめることができる。

（１）　本章の前半において、せん断変形をほぼ完全に取り入れたはり理論を得ることができた。これは一応、曲げ変形とせん断変形を分離した形で次のように書かれた。

$$[I]\left\{\begin{array}{c}\dfrac{d^2\eta^*}{dx^2}\\ \dfrac{d^2\zeta^*}{dx^2}\end{array}\right\}=\frac{1}{E}\left\{\begin{array}{c}M_x\\ -M_y\end{array}\right\} \qquad \text{および} \qquad [L]\frac{d^4\{\eta\}}{dx^4}-[G]\frac{d^2\{\eta\}}{dx^2}=\{p\}$$

｛ｐ｝は分布荷重およびモーメント

（２）　本章の後半において、せん断変形を考慮した曲げねじり要素の剛性行列を提案し、数値解析例により、その有効性を検証した。

（３）　本章で得られた計算結果で、薄肉箱形断面はりおよび矩形断面はりの最大たわみはCowperの理論解とよく一致した値を示している。また、直応力分布図に於ては三次元せん断変形解析結果ともよく一致している。さらに、片持ちはりの固定端付近などの直応力分布に顕著にShear-lag効果が現われている。本解析法は、はり理論を保持したうえでShear-lag解析が可能であることを示すことができた。

第４章　せん断変形を考慮した平板の曲げ解析[65～67]

前章までに述べたように、従来のBernoulli-Eulerの仮定に基づくはり理論においてはせん断変形の効果が含まれておらず、実際の構造解析に適用する場合に問題になることがある。そこで、せん断変形を考慮したはりの曲げおよび曲げねじり解析法について考えてきた。平板理論では、はりにおけるBernoulli-Eulerの仮定に相当するKirchhoffの仮定に基づく扱いが大多数をしめている。しかし、板厚が大きくなると面外せん断変形が大きくなりKirchhoffの仮定が成り立たなくなり、Kirchhoffの薄板理論が適用できなくなる。この欠点を改善した最初の理論はReissnerによって示され、その後Mindlinは平板の振動問題にせん断変形の影響を考慮した定式化を行なった。ReissnerおよびMindlinの理論はせん断変形を考慮した有限要素の定式化に利用されている。

近年、複合材料の急速な進歩と用途の拡大に伴い、その力学的特性を明らかにすることの必要性が高まってきた。複合材料は、巨視的には均質体としても、強い異方性を示すことになる。複合材料の平板あるいはサンドイッチ板のような面外せん断剛性が面内剛性と曲げ剛性に比べて極めて小さい場合にはせん断変形を考慮しなければならない。

そこで、本章においては、工学上重要な構造要素である複合材料（異方性材料）の平板、あるいは異方性面板と異方性芯材を持つサンドイッチ板などのせん断変形問題を解析のために実用性の高い手法を有限要素法により定式化する。

ここでは、Zienkiewicz等の非適合要素を基礎として、要素内で面外せん断変形を一定とする条件のもとで剛性行列を求める。すなわち、三角形要素において面積座標による不完全３次式でたわみを表し、前記の変形条件により法線回転角と結び付けると、３頂点３自由度（w, ϕ_x, ϕ_y）と一定面外せん断ひずみγ_x, γ_yとでたわみが表せる。これから曲げモーメントを作り、平衡条件からせん断力を求め、せん断ひずみと面外せん断剛性により関係づければ、せん断ひずみも３頂点３自由度で表せる。後は通常の曲げ問題と全く同じ取り扱いが出来る。数値解析例として、等分布荷重と中央集中荷重を受ける等方性および異方性の正方形板と円板の問題を扱う。

４・１　Mindlin平板曲げ要素の定式化

図4-1に示すような三角形要素について、弾性主軸を局所座標x, y軸とする。

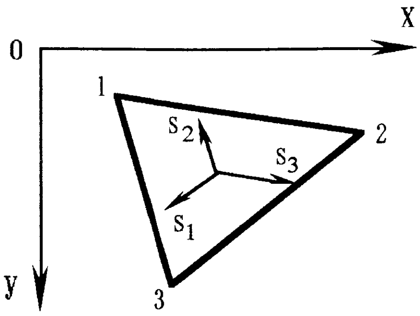


図4-1　三角形要素と座標系

頂点の座標を$(x_i、y_i)$とし、z軸方向のたわみwをZienkiewiczにならい、面積座標ζ_1,ζ_2,ζ_3の不完全3次式で次のように仮定する。

$$
\begin{aligned}
w = {} & w_1\zeta_1 + w_2\zeta_2 + w_3\zeta_3 + B_1\zeta_2\zeta_3 + B_2\zeta_3\zeta_1 + B_3\zeta_1\zeta_2 \\
& + C_1\zeta_2\zeta_3(\zeta_2-\zeta_3) + C_2\zeta_3\zeta_1(\zeta_3-\zeta_1) + C_3\zeta_1\zeta_2(\zeta_1-\zeta_2)
\end{aligned}
\tag{4-1}
$$

局所座標系x、yと面積座標系ζ_1,ζ_2,ζ_3の関係から次の式が得られる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \eta_1\frac{\partial}{\partial\zeta_1} + \eta_2\frac{\partial}{\partial\zeta_2} + \eta_3\frac{\partial}{\partial\zeta_3} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \xi_1\frac{\partial}{\partial\zeta_1} + \xi_2\frac{\partial}{\partial\zeta_2} + \xi_3\frac{\partial}{\partial\zeta_3}
\end{aligned}
\right\}
\tag{4-2}
$$

ここに、η_1,ξ_1などは次式で与えられる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&\eta_1 = y_{23}/\Delta,\ \eta_2 = y_{31}/\Delta,\ \eta_3 = y_{12}/\Delta,\ \xi_1 = x_{32}/\Delta,\ \xi_2 = x_{13}/\Delta,\ \xi_3 = x_{21}/\Delta, \\
&y_{23} = y_2 - y_3,\ \cdots,\ x_{32} = x_3 - x_2,\ \cdots,\ \Delta = x_{21}y_{31} - x_{13}y_{12}
\end{aligned}
\right\}
\tag{4-3}
$$

Mindlinの平板理論にならい、たわみ角$\partial w/\partial x$，$\partial w/\partial y$を断面回転角ϕ_x,ϕ_yとせん断ひずみγ_x,γ_yより次のように表すこととする。

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= \phi_x + \gamma_x \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \phi_y + \gamma_y
\end{aligned}
\right\}
\tag{4-4}
$$

式(4-4)に式(4-2)の関係を用いて式(4-1)を代入し、例えば、頂点2で辺23に沿う微分$\left(\partial w/\partial s_1\right)_{\zeta_2=1} = \theta_{23}$等を考え、せん断ひずみ$\gamma_x$，$\gamma_y$が要素内で一定として、頂点での回転角を$\phi_{xi}$，$\phi_{yi}$で表すと、式(4-1)の中の係数$B_{1\sim3}$、$C_{1\sim3}$は次のように表される。

$$
\left.
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{2}\left(x_{32}\phi_{x2} - y_{23}\phi_{y2} - x_{32}\phi_{x3} + y_{23}\phi_{y3}\right) \\
B_2 &= \frac{1}{2}\left(x_{13}\phi_{x3} - y_{31}\phi_{y3} - x_{13}\phi_{x1} + y_{31}\phi_{y1}\right) \\
B_3 &= \frac{1}{2}\left(x_{21}\phi_{x1} - y_{12}\phi_{y1} - x_{21}\phi_{x2} + y_{12}\phi_{y2}\right)
\end{aligned}
\right\}
\tag{4-5}
$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = w_2 - w_3 + \frac{1}{2}\left(x_{32}\phi_{x2} - y_{23}\phi_{y2} + x_{32}\phi_{x3} - y_{23}\phi_{y3}\right) + x_{32}\gamma_x - y_{23}\gamma_y \\ C_2 = w_3 - w_1 + \frac{1}{2}\left(x_{13}\phi_{x3} - y_{31}\phi_{y3} + x_{13}\phi_{x1} - y_{31}\phi_{y1}\right) + x_{13}\gamma_x - y_{31}\gamma_y \\ C_3 = w_1 - w_2 + \frac{1}{2}\left(x_{21}\phi_{x1} - y_{12}\phi_{y1} + x_{21}\phi_{x2} - y_{12}\phi_{y2}\right) + x_{21}\gamma_x - y_{12}\gamma_y \end{array}\right\} \quad (4\text{-}6)$$

次に、曲率 $\{\kappa_x\} = -\left\{\frac{\partial\phi_x}{\partial x}, \frac{\partial\phi_y}{\partial y}, \frac{\partial\phi_x}{\partial y} + \frac{\partial\phi_y}{\partial x}\right\}^T = -\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right\}^T$ を書き直して $\{\kappa\} = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2} - \frac{\partial}{\partial\zeta_3}\right)^2 w, \left(\frac{\partial}{\partial\zeta_3} - \frac{\partial}{\partial\zeta_1}\right)^2 w, \left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1} - \frac{\partial}{\partial\zeta_2}\right)^2 w\right\}^T$ と結び付ける。

すなわち

$$\{\kappa_x\} = [B]\{\kappa\} = [B][C]\{w\} \quad (4\text{-}7)$$

ここに、[B]、[C]、{w} は次のとおりである。

$$\left.\begin{array}{l} [B] = \begin{bmatrix} \eta_2\eta_3 & \eta_3\eta_1 & \eta_1\eta_2 \\ \xi_2\xi_3 & \xi_3\xi_1 & \xi_1\xi_2 \\ \eta_2\xi_3 + \xi_2\eta_3 & \eta_3\xi_1 + \xi_3\eta_1 & \eta_1\xi_2 + \xi_1\eta_2 \end{bmatrix} \\ [C] = -2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3(\zeta_2 - \zeta_3) & -\zeta_1 & \zeta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \zeta_2 & 3(\zeta_3 - \zeta_1) & -\zeta_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\zeta_3 & \zeta_3 & 3(\zeta_1 - \zeta_2) \end{bmatrix} \\ \{w\} = \{B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3\}^T \end{array}\right\} \quad (4\text{-}8)$$

曲率 $\{\kappa_x\}$ に対応する曲げモーメントを $\{M_x\}$ とすると、構成式は次のように書き表せる。

$$\{M_x\} = [D_x]\{\kappa_x\} \quad (4\text{-}9)$$

ここで、弾性行列 $[D_x]$ は異方性を考えて、次のような行列を用いる。

$$[D_x] = \begin{bmatrix} D_x & D_t & 0 \\ D_t & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_z \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} \lambda_1 & \nu & 0 \\ \nu & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4\text{-}10)$$

ここに、$D = \sqrt{D_x D_y}$, $\lambda_1 = D_x/D$, $\lambda_1\lambda_2 = 1$, $\nu = D_t/D$, $\mu = D_z/D$ であり、D_x、D_y は x、y 方向の曲げ剛性、D_z はねじり剛性を表す。

以上により、要素の曲げの内力仕事を考えると次のようになる。

$$U_B = \int_A \{\kappa_x\}^T \{M_x\} dxdy = \{w\}^T \int_A [C]^T [B]^T [D_X][B][C] dxdy \{w\} = \{w\}^T [k_B] \{w\} \tag{4-11}$$

ここで、$[k_B]$は次式で与えられる。

$$[k_B] = \int_A [C]^T [B]^T [D_X][B][C] dxdy \tag{4-12}$$

次に、せん断力について考える。いま、平衡式$Q_x = \partial M_x / \partial x + \partial M_z / \partial y$などからせん断力を求め、行列表示すると

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = -D \begin{bmatrix} Q_{x1} & Q_{x2} & Q_{x3} \\ Q_{y1} & Q_{y2} & Q_{y3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \tag{4-13}$$

となる。ここで、Q_{x1}、Q_{y1}などは次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
Q_{x1} &= 6(\eta_2 - \eta_3)(\eta_2 \eta_3 \lambda_1 + \xi_2 \xi_3 \lambda_3) - 2\xi_1(\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2)\lambda_3 \\
Q_{x2} &= 6(\eta_3 - \eta_1)(\eta_3 \eta_1 \lambda_1 + \xi_3 \xi_1 \lambda_3) - 2\xi_2(\xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3)\lambda_3 \\
Q_{x3} &= 6(\eta_1 - \eta_2)(\eta_1 \eta_2 \lambda_1 + \xi_1 \xi_2 \lambda_3) - 2\xi_3(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)\lambda_3 \\
Q_{y1} &= 6(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 \xi_3 \lambda_2 + \eta_2 \eta_3 \lambda_3) - 2\eta_1(\eta_2 \xi_3 - \eta_3 \xi_2)\lambda_3 \\
Q_{y2} &= 6(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 \xi_1 \lambda_2 + \eta_3 \eta_1 \lambda_3) - 2\eta_2(\eta_3 \xi_1 - \eta_1 \xi_3)\lambda_3 \\
Q_{y3} &= 6(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 \xi_2 \lambda_2 + \eta_1 \eta_2 \lambda_3) - 2\eta_3(\eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1)\lambda_3 \\
\lambda_3 &= \nu + 2\mu
\end{aligned}\right\} \tag{4-14}$$

いま、せん断ひずみγ_x,γ_yをせん断力Q_x、Q_yと面外せん断剛性により結び付けるのに、せん断剛性主軸が表面板の主軸x、yと角β をなすとし、それぞれの主軸方向のせん断剛性を$(Gh)_1$、$(Gh)_2$と書いて式(4-13)の関係を用いると、次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{Gh} \begin{bmatrix} g_x & g_z \\ g_z & g_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = -\frac{D}{Gh} \begin{bmatrix} g_x & g_z \\ g_z & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{x1} & Q_{x2} & Q_{x3} \\ Q_{y1} & Q_{y2} & Q_{y3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \tag{4-15}$$

ここに、Gh、g_x、g_y などは次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
&Gh = \sqrt{(Gh)_1 (Gh)_2}, \quad g_1 = (Gh)_2 / Gh, \quad g_2 = 1/g_1, \quad c = \cos\beta, \quad s = \sin\beta, \\
&g_x = g_1 c^2 + g_2 s^2, \quad g_y = g_1 s^2 + g_2 c^2, \quad g_z = (g_1 - g_2) cs
\end{aligned}\right\} \tag{4-16}$$

以上により、要素のせん断仕事を考えると次のようになる。

$$U_S=\int_A\left(\gamma_x Q_x+\gamma_y Q_y\right)dxdy=\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{Bmatrix}^T\frac{D}{Gh}DS\begin{bmatrix}Q_{x1}&Q_{x2}&Q_{x3}\\Q_{y1}&Q_{y2}&Q_{y3}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}g_x&g_z\\g_z&g_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_{x1}&Q_{x2}&Q_{x3}\\Q_{y1}&Q_{y2}&Q_{y3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{Bmatrix}$$

$$=\left\{W\right\}^T\left[k_S\right]\left\{W\right\} \qquad (4\text{-}17)$$

ここで、$[k_S]$は次式で与えられる。

$$\left[k_S\right]=\frac{D}{Gh}DS\begin{bmatrix}Q_{x1}&Q_{x2}&Q_{x3}\\Q_{y1}&Q_{y2}&Q_{y3}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}g_x&g_z\\g_z&g_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_{x1}&Q_{x2}&Q_{x3}\\Q_{y1}&Q_{y2}&Q_{y3}\end{bmatrix} \qquad (4\text{-}18)$$

したがって、要素の全内力仕事は式(4-11)、(4-17)から、次のようになる。

$$U=U_B+U_S=\left\{W\right\}^T\left[\left[k_B\right]+\left[k_S\right]\right]\left\{W\right\} \qquad (4\text{-}19)$$

さらに、$\left\{W\right\}=\left\{B_1\ \ B_2\ \ B_3\ \ C_1\ \ C_2\ \ C_3\right\}^T$を基準座標系に関する要素節点変位$\left\{W_e\right\}=\left\{W_1\ \ \phi'_{x1}\ \ \phi'_{y1}\ \ W_2\ \ \phi'_{x2}\ \ \phi'_{y2}\ \ W_3\ \ \phi'_{x3}\ \ \phi'_{y3}\right\}^T$に書き替えねばならない。そこで、式(4-5),(4-6)で示される$B_{1\sim3}$、$C_{1\sim3}$の中の$x_{32}\gamma_x-y_{23}\gamma_y$などを式(4-15)を用いて書き直し、さらに基準座標系と要素面板の弾性主軸とのなす角をαとすれば、局所$(x、y)$座標と基準$(x'、y')$座標の間の関係が次のように表される。

$$\left.\begin{aligned}x&=x'c'+y's', & \phi_x&=\phi'_x c'+\phi'_y s', & c'&=\cos\alpha\\ y&=-x's'+y'c', & \phi_y&=-\phi'_x s'+\phi'_y c', & s'&=\sin\alpha\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}20)$$

なお、ϕ'_x, ϕ'_yなどの「$'$」は基準座標成分の意味である。

よって、節点変位の変換式はつぎのようになる。

$$\{W\}=[T]\{W_e\} \qquad (4\text{-}21)$$

ここに、

$$\left[T\right]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\begin{matrix}0&0&0\\0&-x'_{13}&y'_{31}\\0&x'_{21}&-y'_{12}\end{matrix} & \begin{matrix}0&x'_{32}&-y'_{23}\\0&0&0\\0&-x'_{21}&y'_{12}\end{matrix} & \begin{matrix}0&-x'_{32}&y'_{23}\\0&x'_{13}&-y'_{31}\\0&0&0\end{matrix}\\ \left[A\right]\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&x'_{13}&-y'_{31}\\2&x'_{21}&-y'_{12}\end{bmatrix} & \left[A\right]\begin{bmatrix}2&x'_{32}&-y'_{23}\\0&0&0\\-2&x'_{21}&-y'_{12}\end{bmatrix} & \left[A\right]\begin{bmatrix}-2&x'_{32}&-y'_{23}\\2&x'_{13}&-y'_{31}\\0&0&0\end{bmatrix}\end{bmatrix} \qquad (4\text{-}22)$$

ただし、$\left[A\right]=\left[\left[E\right]_{3x3}+\left[\Gamma\right]\right]^{-1}$で$[E]_{3\times3}$は3×3の単位行列であり、$\left[\Gamma\right]$は次のとおりである。

$$\left[\Gamma\right]=\frac{D}{Gh}\begin{bmatrix}x_{32}&-y_{23}\\x_{13}&-y_{31}\\x_{21}&-y_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_x&g_z\\g_z&g_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_{x1}&Q_{x2}&Q_{x3}\\Q_{y1}&Q_{y2}&Q_{y3}\end{bmatrix} \qquad (4\text{-}23)$$

結局、$\{w_e\}=\{w_1\ \ \phi'_{x1}\ \ \phi'_{y1}\ \ w_2\ \ \phi'_{x2}\ \ \phi'_{y2}\ \ w_3\ \ \phi'_{x3}\ \ \phi'_{y3}\}^T$に関する剛性行列が次式で与えられる。

$$[k_e]=[T]^T\left[[k_B]+[k_S]\right][T] \tag{4-24}$$

この行列が、せん断変形を含んだ板曲げ要素の剛性行列であり、三角形要素の3頂点3自由度に関する行列となっている。

なお、異方性表面板と異方性芯材を持つサンドイッチ板を解析する場合、式(4-10)と式(4-15)に示される曲げ剛性、せん断剛性は、表面板厚h_f、芯材厚h_cを一様として、表面板のヤング率をE_x、E_y、せん断弾性率をG_{xy}、ポアソン比をν_x, ν_yとして、また芯材のせん断弾性率をG_{c1}、G_{c2}とするとき

$$\left.\begin{aligned} &D_x=\frac{E_x h_f(h_f+h_c)^2}{2(1-\nu_x\nu_y)},\quad D_y=\frac{E_y h_f(h_f+h_c)^2}{2(1-\nu_x\nu_y)},\quad D_z=\frac{G_{xy} h_f(h_f+h_c)^2}{2}, \\ &(Gh)_1=G_{c1}h_c,\quad (Gh)_1=G_{c1}h_c \end{aligned}\right\} \tag{4-25}$$

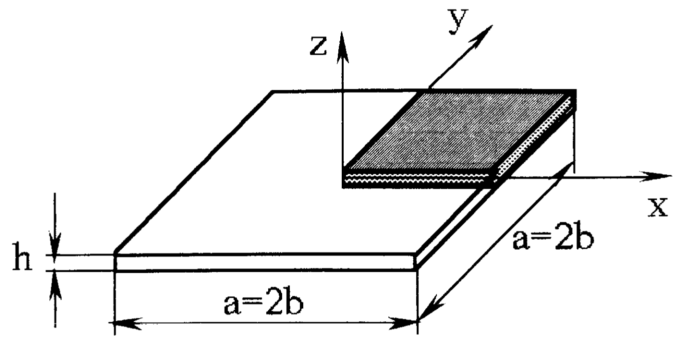
となる。

4・2 数値解析例

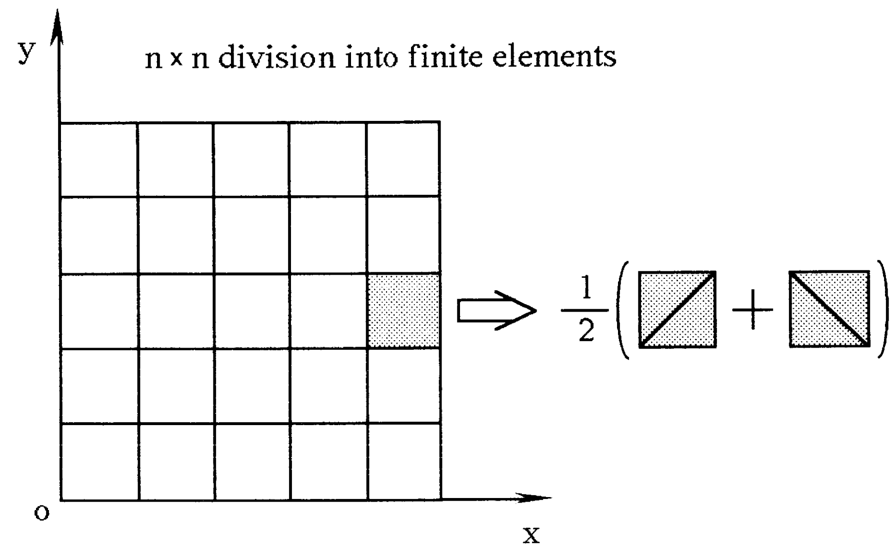
最初に、これまでに述べたMindlin板曲げ要素の精度、有効性を調べるため、等方性平板について解析を行なう。次に、応用例として直交異方性の正方形板および円板、さらに、サンドイッチ平板の曲げ問題について解析を行なった。

4・2・1 等方性平板の曲げ解析

解析モデルは、等方性,均質の弾性平板において中央集中荷重および等分布荷重を受ける周辺単純支持の正方形平板とした。解析は対称性を考慮して正方形平板の1/4の領域について行なった。要素分割は図4-2に示すようにn×nに等分割した。各要素の剛性行列は、図4-2(b)に示すような要素分割で得られた四辺形を基準とし、その四辺形を対角線によって分割する二通りの分割法の平均として求めた。図4-3は一辺の長さaと板厚hとの比a/hが100 の場合に、要素分割数nを2～10と変化させたときの最大たわみの収束の様子を示したものである。図中には、せん断弾性率Gが∞で、曲げ剛性$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$として得られる古典理論の結果も示して



(a)　正方形平板



(b)　要素分割および剛性マトリックス計算のための四角形要素の分割

図4-2　解析モデル

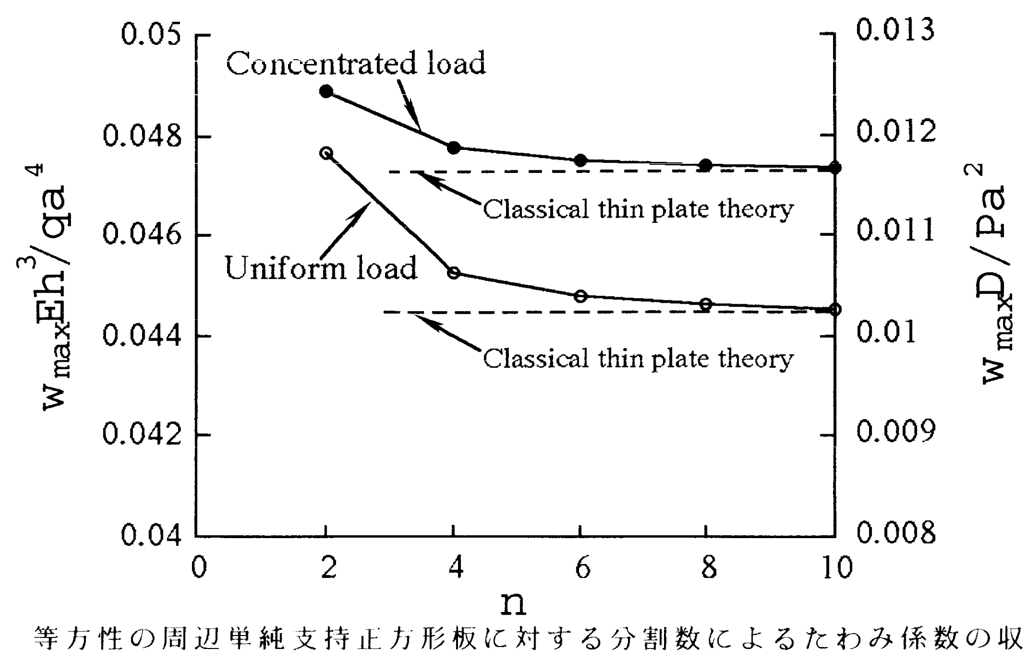


図4-3　等方性の周辺単純支持正方形板に対する分割数によるたわみ係数の収束性

表4-1　等方性の周辺単純支持の正方形平板に対するたわみ係数

$\frac{a}{h}$	$\frac{w_{max}Eh^3}{qa^4}$ (Uniform Load)					$\frac{w_{max}D}{Pa^2}$ (Concentrated Central Load)			
	Classical	Salerno[68]	Reddy[69]	Pryor[33]	Present	Classical	Smith[32]	Pryor[33]	Present
5	0.04437	0.05217	0.0535	0.05186	0.05213	0.01160	--------	0.01801	0.01770
10	0.04437	0.04632	0.0467	0.04612	0.04639	0.01160	0.01200	0.01353	0.01316
20	0.04437	0.04486	-------	0.04469	0.04496	0.01160	0.01174	0.01219	0.01202
100	0.04437	0.04439	0.0444	0.04423	0.04452	0.01160	0.01158	0.01170	0.01167

ある。６分割において古典理論との差は中央集中荷重の場合で1.2%、等分布荷重の場合で0.9%であり、少ない要素分割で実用上十分な精度が得られている。表4-1は本解法で得られた最大たわみを、幅厚比a/hを種々変えて、Reissnerの理論やMindlinの理論を解析的に解いたSalernoとGoldberg[68]やReddy[69]の結果、およびせん断変形を考慮した有限要素法によって解析したPryor、BarkerとFrederick[33]やSmith[32]の結果と比較したものである。なお、要素分割数は図4-3の結果から6分割程度でも十分な精度の解が得られるが、より精度のよい解を得るため、ここでは10分割して計算を行った。Pryorらの解析結果と比較すると、本解析結果は等分布荷重を受ける場合にはわずかに大きな値を示し、中央集中荷重の場合にはやや小さな値を示す。両者の差は、最大でも2.7%とわずかである。また、本解析法による結果と、Salernoらの解析解とは良く一致している。a/hの減少にしたがってせん断変形の影響が増加することが分かる。

４・２・２　異方性板の曲げ解析

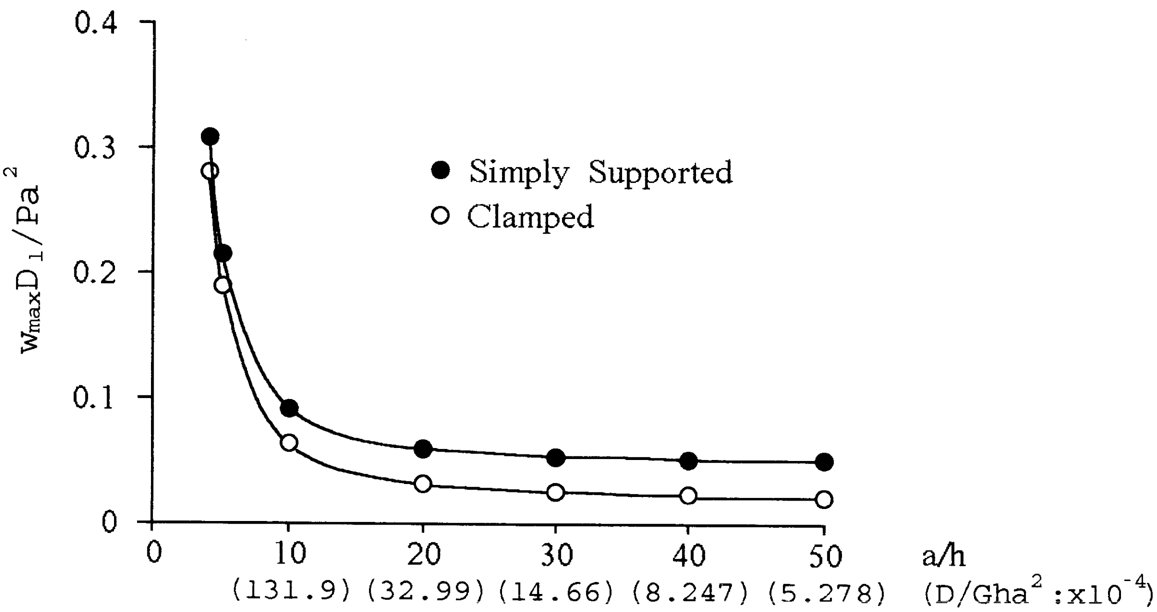
計算は基準座標ｘ、ｙ、ｚと弾性主軸1、2、３が一致する場合について行ない、炭素繊維-エポキシ複合材料の標準的な材料定数である次の値を用いた。

$$E_1=172.37\mathrm{GPa},\quad E_2=6.89\mathrm{GPa},\quad G_{12}=G_{13}=3.45\mathrm{GPa},$$

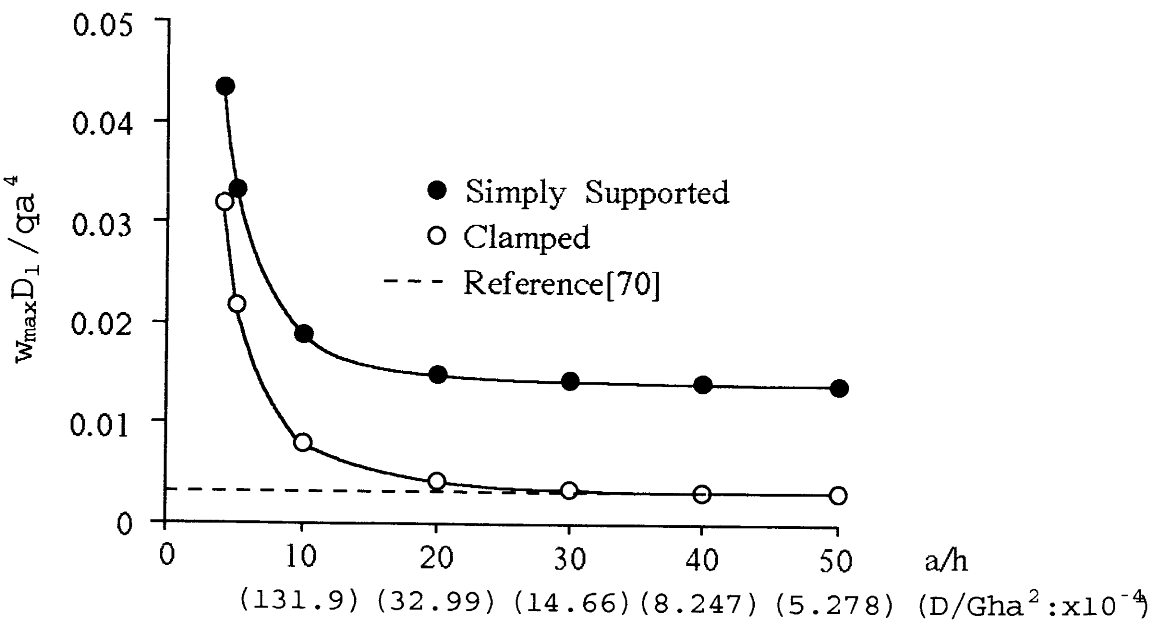
$$G_{23}=1.38\mathrm{GPa},\quad \nu_{12}=0.25$$

はじめに図4-２に示すような厚さｈ、一辺の長さa=2bの正方形板の単純支持と固定の二つの周辺支持条件について、中央集中荷重を受ける場合と等分布荷重を受ける場合の解析を行なった。図4-4は、せん断変形がたわみに及ぼす影響を幅厚比

a/hを横軸に無次元化した最大たわみw_{max}を縦軸にとって示した図である。なお、横軸の（　）内の値は、$D=\sqrt{D_1 D_2}$, $Gh=\sqrt{(Gh)_1 (Gh)_2}$として得られる剛性比D/Gha^2を示す。幅厚比a/hが20付近（剛性比で約30×10^{-4}）からせん断変形の影響が大きくなることが分かる。図4-4(a)は中央集中荷重、図4-4(b)は等分布荷重の場合である。 図4-4(b)の中の破線は、微小変形理論によってえられた周辺固定の場合の浅



（a） 中央集中荷重



（b） 等分布荷重

図4-4 異方性正方形板の最大たわみにおよぼすせん断変形の影響

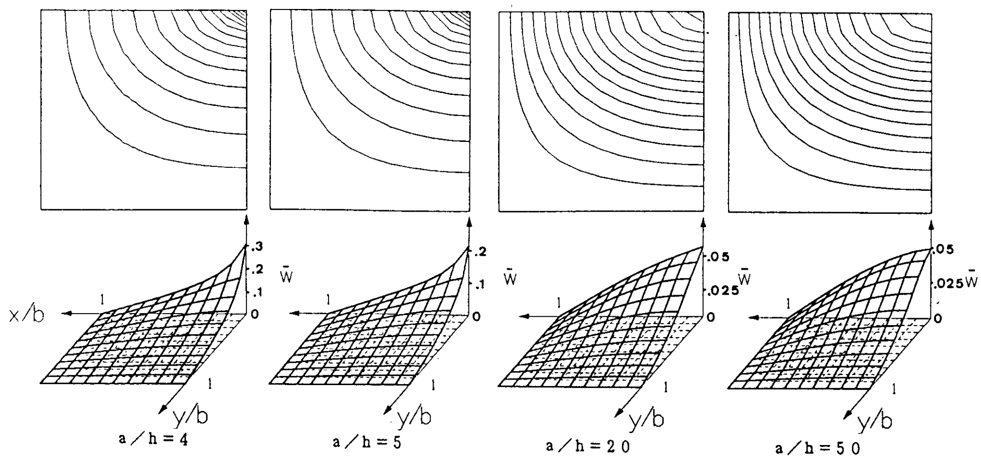


図4-5　中央集中荷重を受ける異方性の周辺単純支持の正方形板のたわみ（$\bar{w}=wD_1/(Pa^2)$）

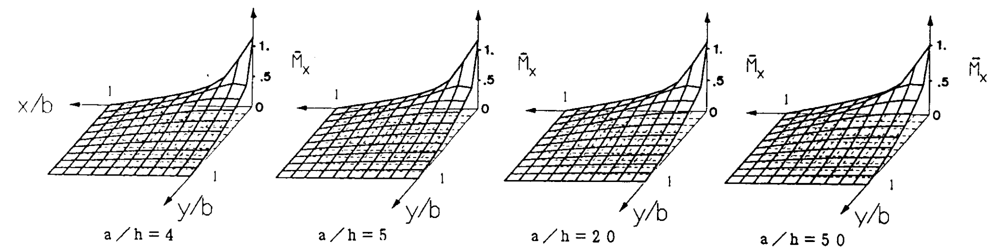


図4-6　中央集中荷重を受ける異方性の周辺単純支持正方形板の曲げモーメント（$\bar{M}_x=M_x/P$）

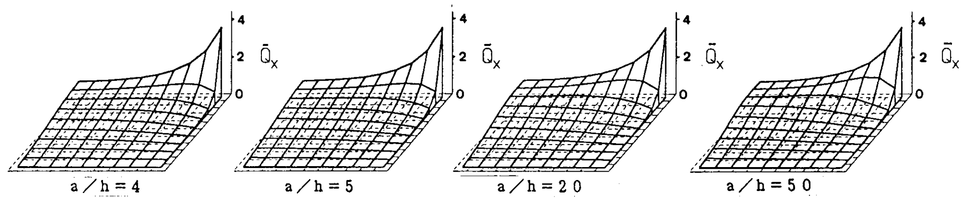


図4-7　中央集中荷重を受ける異方性の周辺単純支持正方形板のせん断力（$\bar{Q}_x=Q_x/(P/a)$）

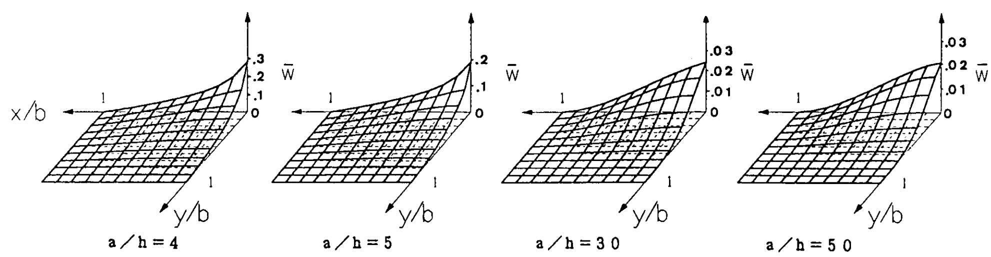


図4-8　中央集中荷重を受ける異方性の周辺固定の正方形板のたわみ（$\bar{w}=wD_1/(Pa^2)$）

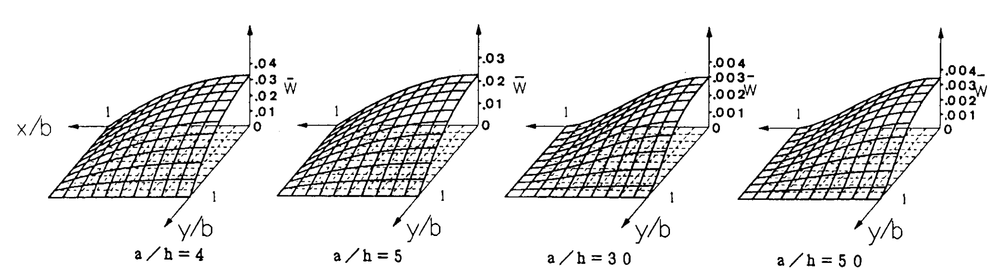


図4-9　等分布荷重を受ける異方性の周辺固定の正方形板のたわみ（$\bar{w}=wD_1/(qa^4)$）

井と横山[70]の結果である。a/hが大きな値（せん断変形の影響が小さくなる）において両者はよく一致している。図4-5～図4-7は周辺単純支持の正方形板が中央集中荷重を受ける場合のたわみ、曲げモーメント、せん断力の分布を幅厚比a/hが4、5、20、50（剛性比D/Gha^2で約8×10^{-2}～5×10^{-4}）と変化した場合についてそれぞれ示した。たわみ図で、a/hが4、5と小さい場合に集中荷重の作用点近傍でせん断変形の影響が現われている。なお、せん断力の計算は図4-2(b)で示された四辺形を対角線によって分割する二通りの方法によって得られる４つの三角形要素内

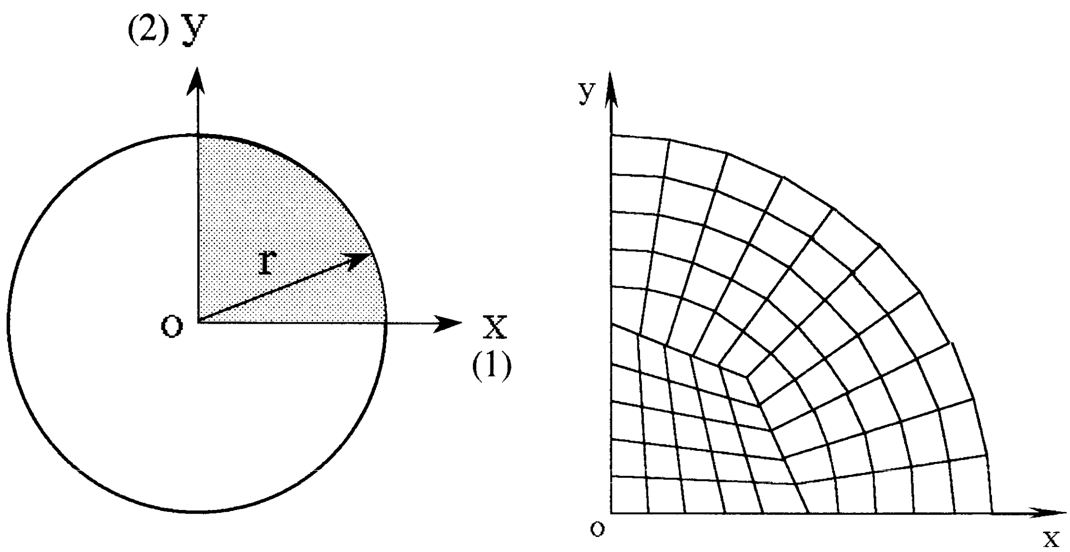


図4-10　円板とその要素分割

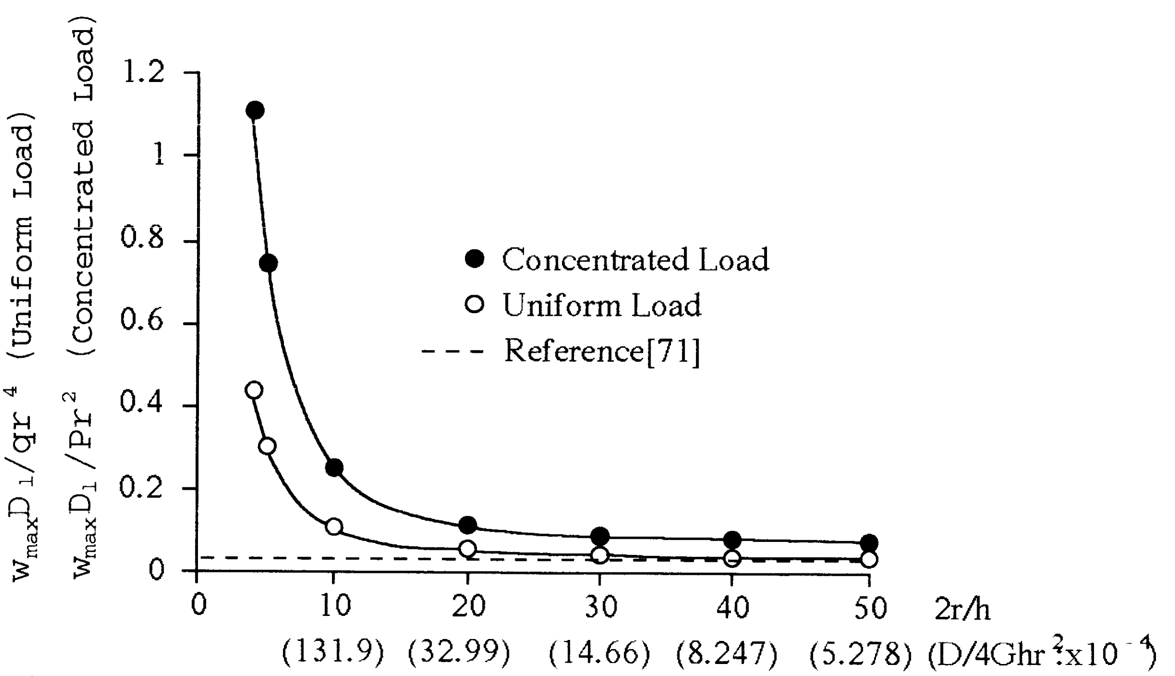
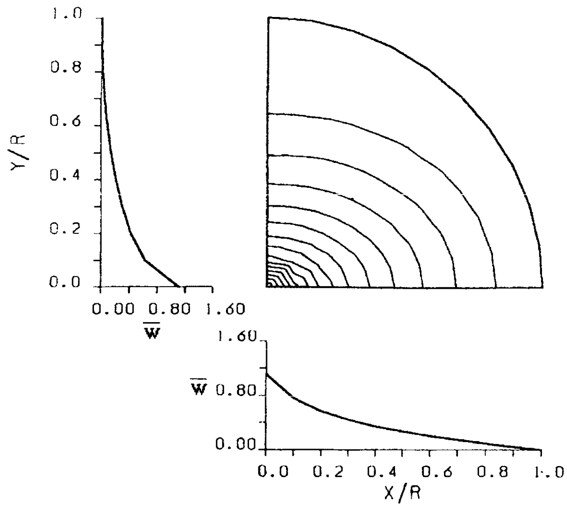


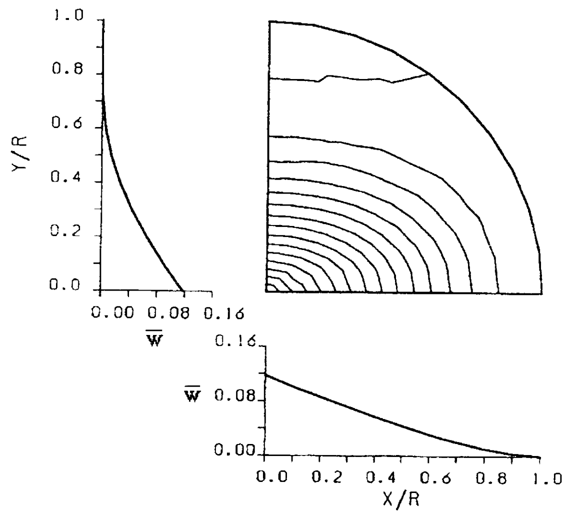
図4-11　異方性の周辺固定円板の最大たわみにおよぼすせん断変形の影響

のせん断力の平均である。図4-8と図4-9は、それぞれ周辺固定の正方形板に中央集中荷重と等分布荷重が作用する場合のたわみ分布を示したものである。これらの図からa/hが4、5と小さい場合に、中央集中荷重の作用点近傍や固定辺近傍でせん断変形の影響が顕著に現われている。

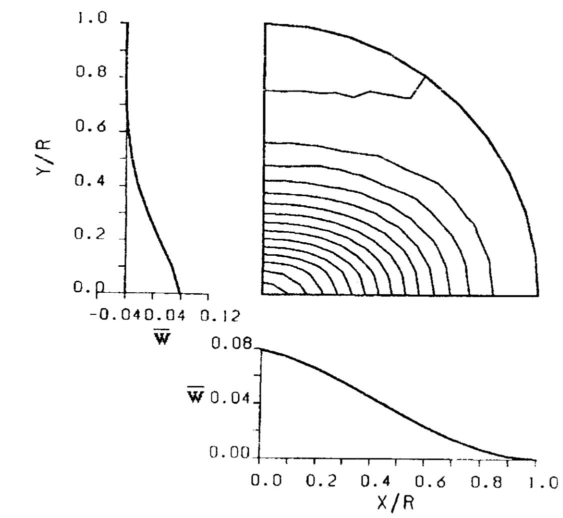
次に、図4-10に示すような厚さh、半径rの円板が周辺を固定され中央集中荷重と等分布荷重を受ける場合の解析を行なった。正方形板の場合と同様に対称性を考慮して1/4の部分を図4-10に示すように要素分割し解析した。図4-11は、せん断変形がたわみにおよぼす影響を径厚比2r/hを横軸にとり、無次元化した最大たわみw_{max}を縦軸にとって示した図である。なお、横軸の（　）内の値は、正方形板の場合と同様$D=\sqrt{D_1 D_2}$, $Gh=\sqrt{(Gh)_1 (Gh)_2}$として得られる剛性比$D/4Ghr^2$を示す。また、図中の破線は浅井[71]によって与えられた等分布荷重を受ける場合の結果である。この図から2r/hが20位（剛性比で約30×10^{-4}）からせん断変形の影響が現われてくることが分かる。図4-12は周辺固定の円板が中央集中荷重を受ける場合のたわみを示した図である。



（ａ） 2r/h=4



（ｂ） 2r/h=20



（ｃ） 2r/h=50

図4-12　中央集中荷重を受ける異方性の周辺固定円板のたわみ（$\bar{w}=wD_1/(Pr^2)$）

4・2・3 サンドイッチ平板の曲げ解析

次に、図4-13のようなサンドイッチ平板の曲げ問題を考える。表面板および芯材ともに、等方性の場合の周辺単純支持長方形サンドイッチ平板の曲げたわみの解析解が、Yen、GunturkunとPohle[72]によって求められているので、その結果と本法による結果を比較検討する。計算は正方形サンドイッチ平板に、中央集中荷重と等分布荷重が作用する場合について行った。モデルの対称性を考慮して1/4の部分を8×8に等分割した。図4-14と図4-15は中央集中荷重Pと等分布荷重qを受ける板の中心における最大たわみw_{max}を剛性比$R=G_c h_f L^2/\pi^2 D_f$と板厚比$r=h_c/h_f$に対して示したものである。図4-16は、R=800でr=10, 25のサンドイッチ平板に等分布荷重が作用する場合のx軸上のたわみ分布を示したものである。なお、G_cは芯材のせん断弾性係数、E_fは表面板のヤング率、$B_c=PL^2/D_f$、$B_d=qL^4/D_f$、$D_f=E_f h_f^3/(12(1-\nu^2))$である。これらの図に見られるように本法の解(○印)は、解析解(実線)によく一致することが分かる。

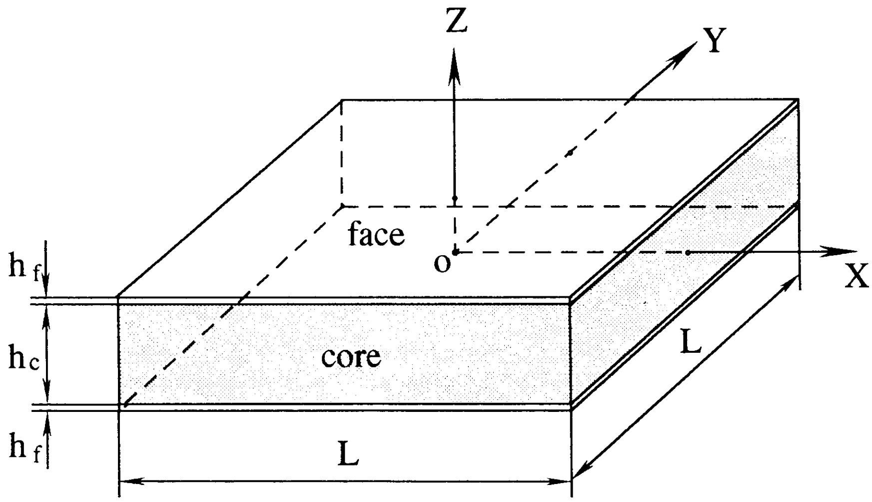


図4-13 サンドイッチ平板

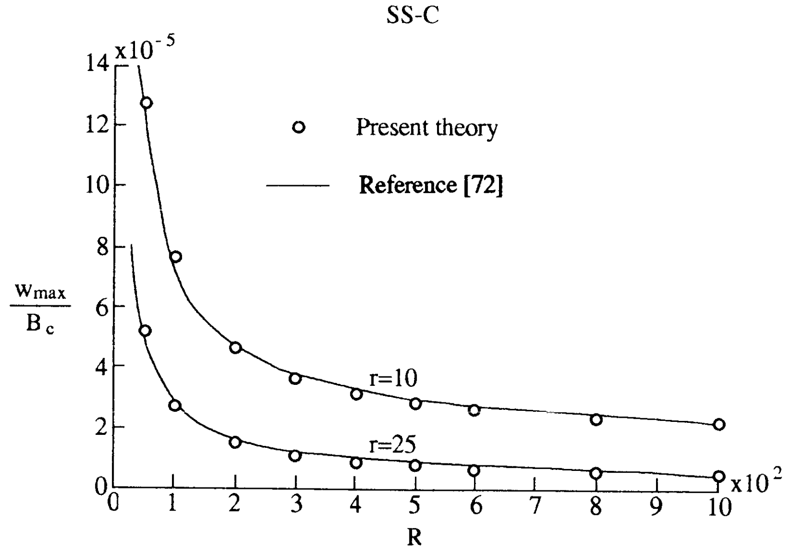


図4-14 中央集中荷重を受ける正方形サンドイッチ平板の最大たわみ

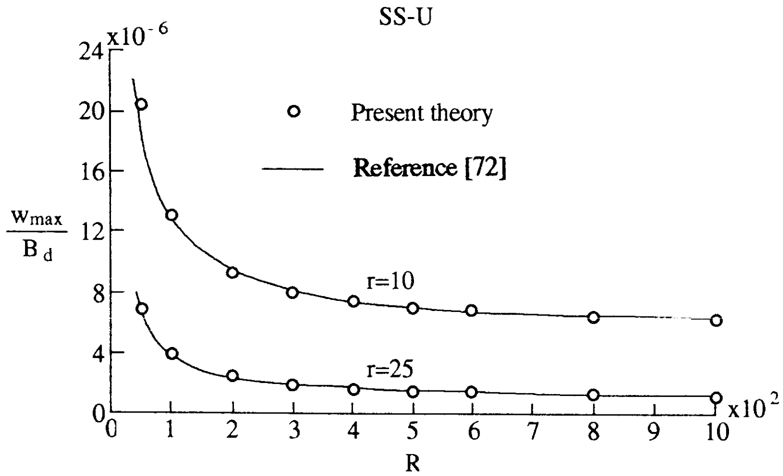


図4-15 等分布荷重を受ける正方形サンドイッチ平板の最大たわみ

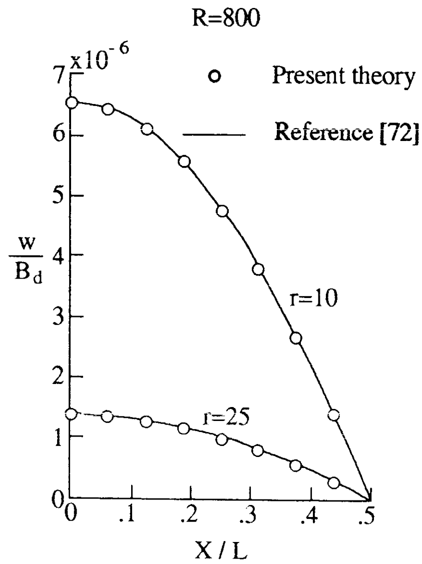
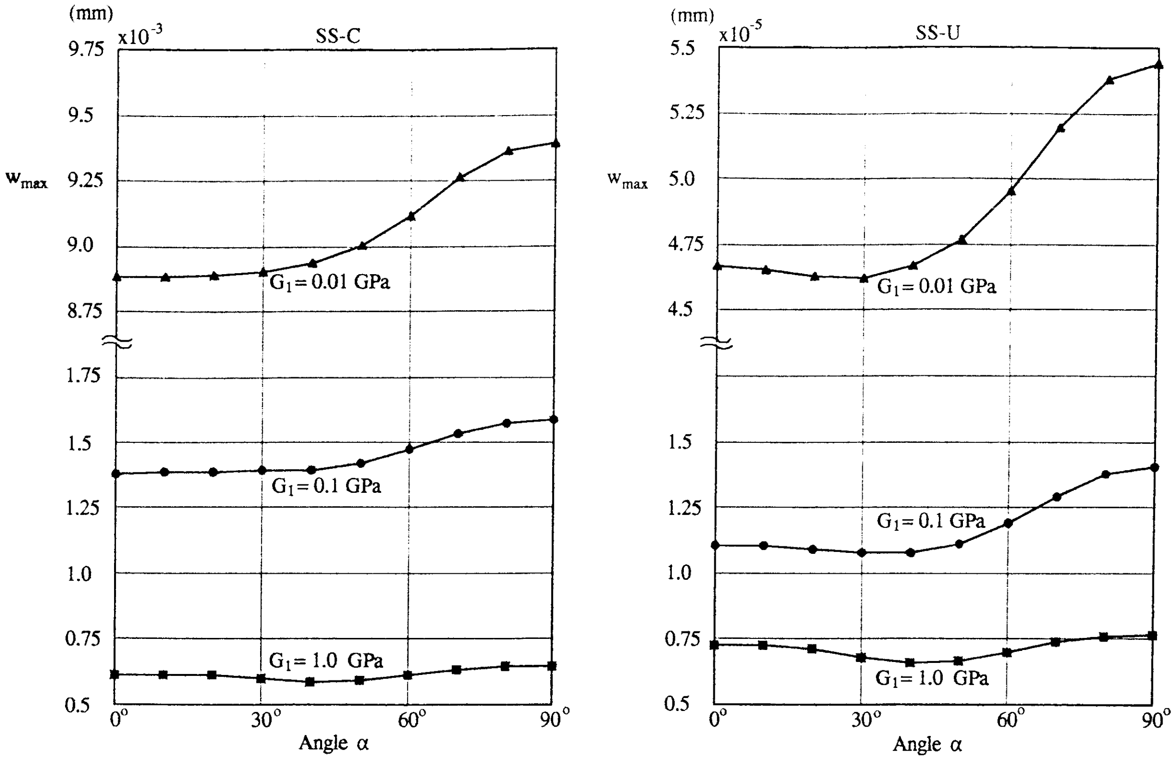


図4-16 等分布荷重を受ける正方形サンドイッチ平板のたわみ分布

次に、異方性表面板と異方性芯材を持つサンドイッチ平板について計算を行った。モデルの寸法は、L=200mm、h_f=0.5mm、h_c=10mmである。また、材料定数は表4-2に示す値を使用した。計算は平板全体を16×16に要素分割して行った。図4-17と図4-18は、周辺単純支持と周辺固定の正方形サンドイッチ平板に中央集中荷重と等分布荷重が作用する場合に、せん断剛性主軸は基準座標と一致し、表面板の弾性主軸方向αが0°～90°と変化した場合の最大たわみを示したものである。なお、せん断弾性係数G_{c1}は、0.01GPa、0.1GPa、1.0GPaとそれぞれ変化させて計算を実施した。これらの図において、G_{c1}が0.01GPa、0.1GPaの場合はαが0°～90°と変化するにしたがい、最大たわみw_{max}は増すことが分かる。また、G_{c1}=1.0GPaにおいては、周辺単純支持の場合α=45°付近で最大たわみが最も小さくなるが、周辺固定の場合はα=45°付近で最も大きなたわみを示している。図4-19は、種々のせん断弾性係数を持つ周辺単純支持の正方形サンドイッチ平板に、中央集中荷重が作用したときのたわみの等高線図である。せん断弾性係数G_{c1}が小さくなるにしたがって、荷重作用点付近の等高線が細かくなっておりせん断変形の影響が現われている。

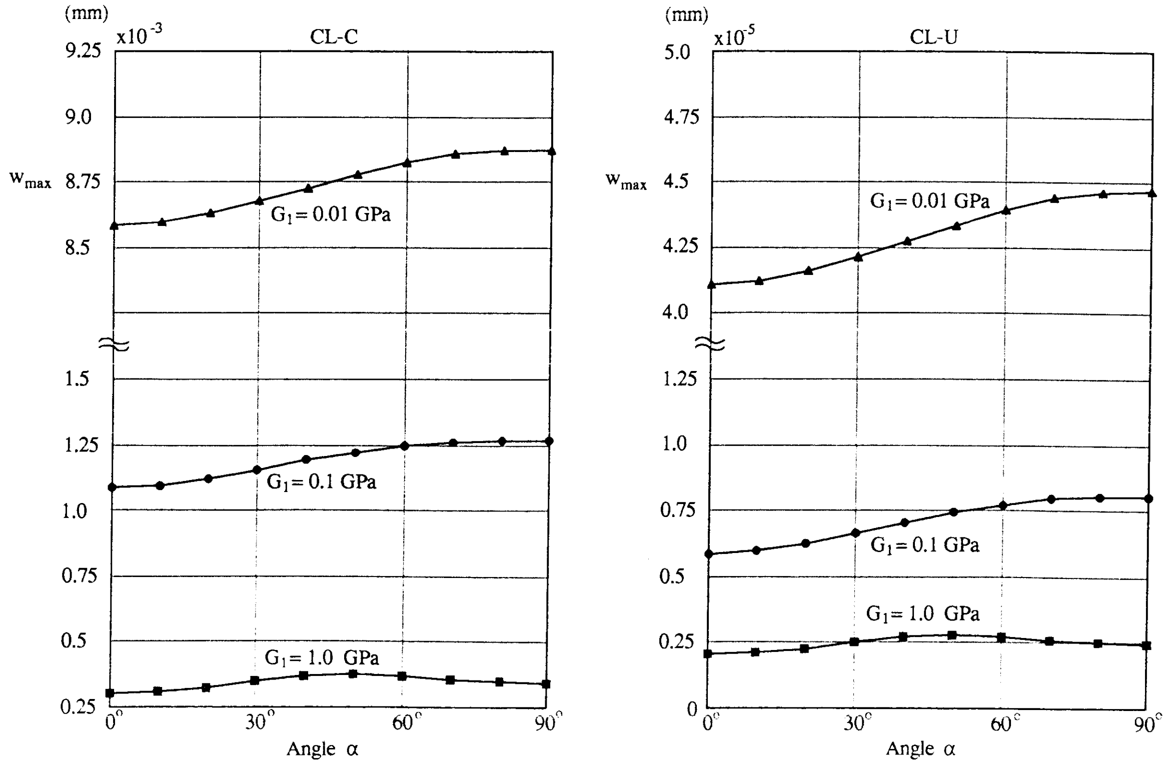
表4-2 異方性表面板と異方性芯材の材料定数

Faceplate				Core	
E_x(GPa)	E_x/E_y	G_{xy}/E_y	ν_x	G_{c1}(GPa)	G_{c1}/G_{c2}
100	10	0.5	0.3	0.01-1.0	2



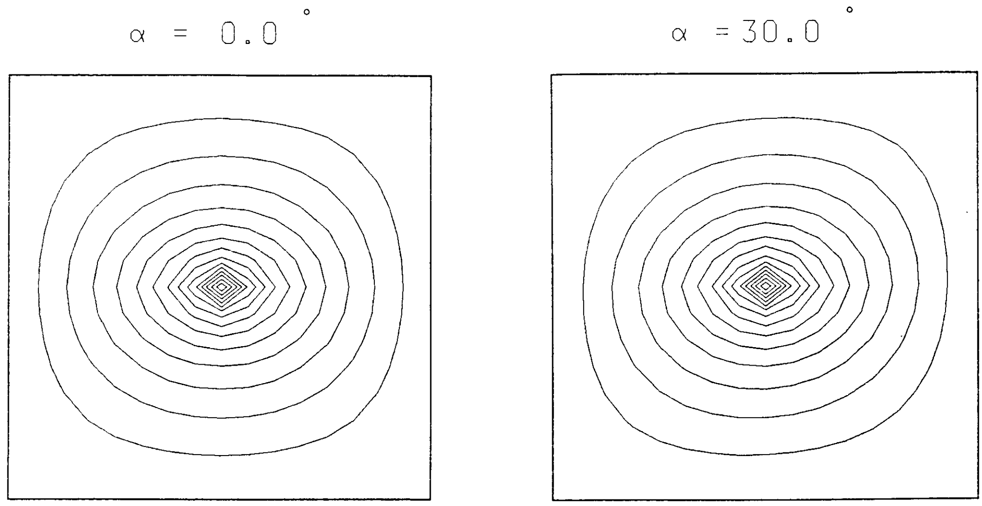
（a）中央集中荷重　　　　　　（b）等分布荷重

図4-17　周辺単純支持正方形サンドイッチ板の最大たわみと
表面板の弾性主軸方向の関係（P=1N、q=1Pa）

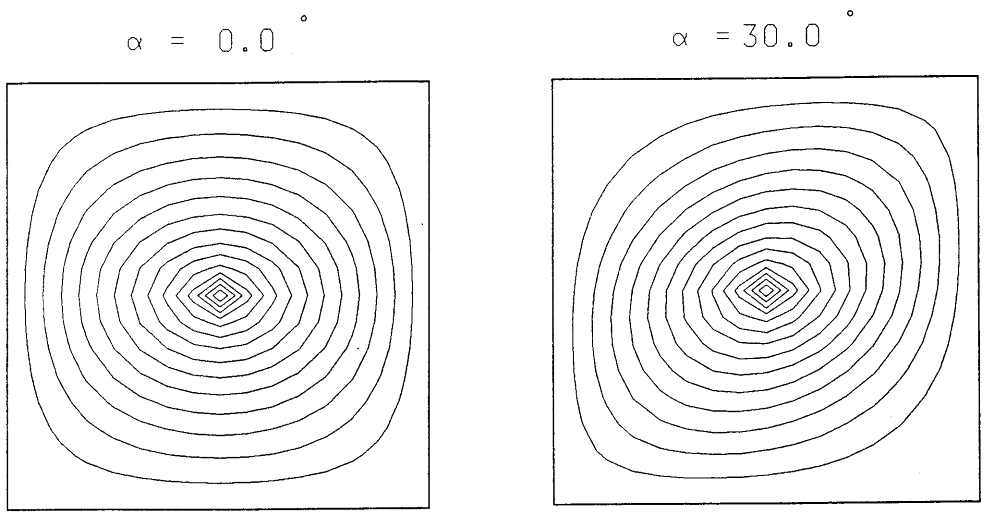


（a）中央集中荷重　　　　　　（b）等分布荷重

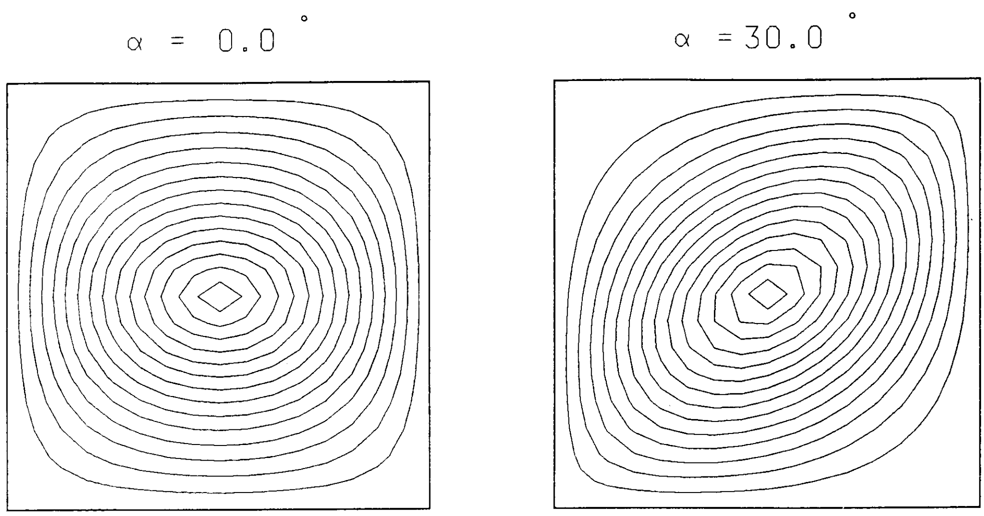
図4-18　周辺固定正方形サンドイッチ板の最大たわみと
表面板の弾性主軸方向の関係（P=1N、q=1Pa）



(a) G_{c1}=0.01GPa



(b) G_{c1}=0.1GPa



(c) G_{c1}=1.0GPa

図4-19 周辺単純支持正方形サンドイッチ平板のたわみ分布

4・3　まとめ

非適合要素を基礎として、Mindlinの平板理論を用いた三角形板曲げ要素モデルを提案し、いくつかの解析例を示した。本章はつぎのように要約することができる。

（1）　これまでに提案されているせん断変形を考慮した板曲げ要素においては、節点変位パラメータのほかに、内部節点をとり対応する形状関数を考えて剛性行列において消去するということがなされているが、ここで提案したせん断変形を考慮した板曲げ要素の定式化は、これまでに提案された要素に比べ労力的な面などで効率的である。少ない要素分割数でも、実用上十分な精度が得られた。

（2）　これまでに提案されているMindlin理論に基づく板曲げ要素は厚板は十分に扱えるが、板厚が次第に小さくなるにつれて板の剛性を過大に評価する傾向がある。Mindlinの理論に基づく本三角形板曲げ要素においては、等方性平板の数値解析例からも分かるように、薄板、厚板の別を問わずせん断剛性の広い範囲にわたって、剛性を過大に評価することなく良好な結果が得られた。

（3）　等分布荷重や集中荷重を受ける異方性正方形平板および円板の曲げ問題を考えた。正方形平板および円板について、板の中心における最大たわみなどを計算し、微小変形理論に基づく解析結果と比較した。両者はよく一致し、異方性平板の曲げ問題に対する本板曲げ要素の有用性を示すことができた。

（4）　Mindlin板曲げ要素をサンドイッチ平板の曲げ問題に適用し、等方性表面材と芯材を持つサンドイッチ平板について、解析解と比較した。その結果、両者はきわめてよく一致し、本解析法がサンドイッチ平板の解析に対しても有効であることが示された。

第５章　せん断変形を考慮した平板の振動と安定性の問題[73]

一般に構造設計を行なう場合に考慮される設計条件は、構造物の２つの特性、いわゆる、構造の強度と構造の剛性に関するものである。すなわち、与えられた荷重に対して

（１）　破壊してはいけない。　（２）変形がある値を越えてはならない。

前者は強度に関する設計条件であり、後者は剛性に関する設計条件である。

構造物が与えられた使用条件や環境のもとで、強度と剛性の設計条件を満足するように構造物の寸法が決定される。その決定に際して、ある設計が設計条件を満たしているか否かは、詳細な構造解析によって確かめられる。構造解析は静的または動的な条件のもとで、構造物の変位や応力の分布を求めることである。

構造物が自由振動数に等しい振動数で加振されると非常に小さなエネルギの入力で時間と共に急速に振幅が大きくなり、構造物に過大な応力が生じ壊れることになる。したがって、構造物のより完全な設計においては、静的解析のみならず動的解析も必要である。しかも、複合材料は最近では各種構造物の構造部材として実用されるようになり、その強度と剛性の評価の重要性は著しく高まっている。

そこで、本章では、前章で示したMindlin理論に基づくせん断変形を考慮した平板の三角形板曲げ要素の動的問題への応用として、自由振動解析とフラッタ解析を行なった。そして、異方性平板において、せん断変形の影響や弾性主軸の方向が変化した場合や異方性パラメータが変化した場合の振動およびパネルフラッタ特性について調べた。

５・１　自由振動

離散化された構造物のひずみエネルギＵ、運動エネルギＴは、それぞれ次のように表される。

$$U=\frac{1}{2}\{w\}^T[K]\{w\} \tag{5-1}$$

$$T=\frac{1}{2}\{\dot{w}\}^T[M]\{\dot{w}\} \tag{5-2}$$

ここに、$\{w\}$は構造物全体の節点変位ベクトル、「・」は時間微分を表す。また、$[K]$は全体剛性行列、$[M]$は全体質量行列である。

Lagrange関数を求めると

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left\{\dot{w}\right\}\left[M\right]\left\{\dot{w}\right\} - \frac{1}{2}\left\{w\right\}^{T}\left[K\right]\left\{w\right\} \tag{5-3}$$

となる。したがって、Lagrangeの方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left\{\dot{w}\right\}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\left\{w\right\}} = \left\{Q\right\} \tag{5-4}$$

より

$$\left[M\right]\left\{\ddot{w}\right\} + \left[K\right]\left\{w\right\} = \left\{Q\right\} \tag{5-5}$$

となる。ここで、$\{Q\}$は外荷重ベクトルである。

いま、式(5-5)で外荷重ベクトル$\{Q\}$が0であるとし、自由振動問題を考える。

$$\left\{w\right\} = \left\{W\right\}e^{i\omega t} \tag{5-6}$$

とすると、式(5-5)は次のような固有値問題になる。

$$\left(\left[K\right] - \omega^{2}\left[M\right]\right)\left\{W\right\} = 0 \tag{5-7}$$

この式を満たす固有振動数ω_iを求め、このω_iの値に対応する固有モードベクトル$\left\{W\right\}_i$を求める。これらの解の組はモデル化された構造物の自由度数だけ存在するが、一般には低い次数の解が重要である。

5・2 超音速流れの気体に対する平板の安定性

ここでは、超音速流れの気体の作用を受ける平板の安定問題を考える。

図5-1に示すように座標軸をとり、平板を三角形要素に分割し、要素の剛性行列

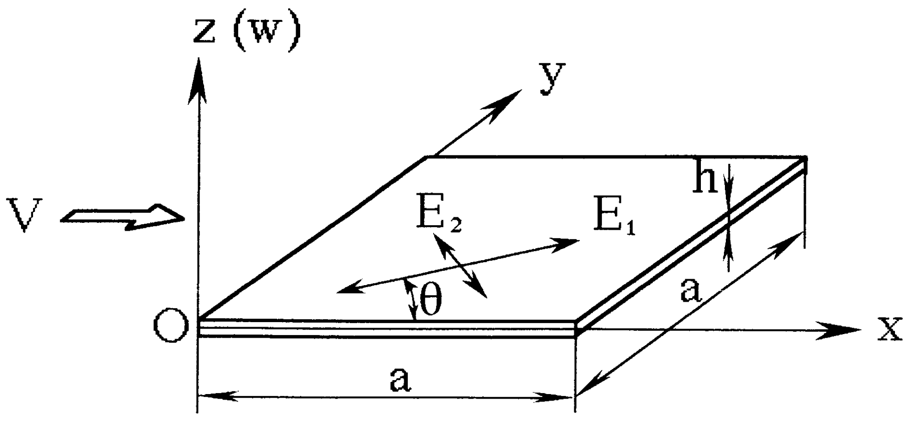


図5-1 座標系

と質量行列を、それぞれ$[k_e]$、$[m_e]$と表し、節点変位を$\{w_e\}$で表すと、ひずみエネルギUと運動エネルギTは、それぞれ次のように表される。

$$U=\frac{1}{2}\{w_e\}^T[k_e]\{w_e\} \tag{5-8}$$

$$T=\frac{1}{2}\{\dot{w}_e\}[m_e]\{\dot{w}_e\} \tag{5-9}$$

いま、流れはOx軸に沿い、一定速度Vとする。板の表面上での空気力pは、準定常空気力によって次のように与えられるものとする[74][75]。

$$p=-\frac{2q}{\sqrt{M^2-1}}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{U}\frac{M^2-2}{M^2-1}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=-\left(\beta\frac{\partial w}{\partial x}+\mu\frac{\partial w}{\partial t}\right) \tag{5-10}$$

ここに、$\beta=\dfrac{2q}{\sqrt{M^2-1}}$, $\mu=\beta\dfrac{1}{U}\dfrac{M^2-2}{M^2-1}$であり、q、Mはそれぞれ一様流の動圧、マッハ数を表す。

ある要素内のたわみwが要素節点変位$\{w_e\}$と補間関数$[N]$によって、次のように表されるとする。

$$w=[N]\{w_e\} \tag{5-11}$$

なお、ここで用いる三角形有限要素では、前章で示したように$\{w_e\}$は3頂点3自由度で表される。また、$[N]$は式(4-1)と式(4-21)から得られる。

式(5-10)と式(5-11)より、空気力による仮想仕事δW_pを考えると次のようになる。

$$\delta W_p=\int_A p\,\delta w\,dA=-\delta\{w_e\}^T\left(\beta\int_A[N]^T[N_{,x}]dA\{w_e\}+\mu\int_A[N]^T[N]dA\{\dot{w}_e\}\right) \tag{5-12}$$

式(5-12)を整理すると

$$\delta W_p=-\delta\{w_e\}^T\left\{\beta[A_e]\{w_e\}+\mu[D_e]\{\dot{w}_e\}\right\}=-\delta\{w_e\}^T\{Q\} \tag{5-13}$$

となる。「・」は時間微分を表す。ここで、$[A_e]$、$[D_e]$はそれぞれ空力行列、空力減衰行列であり、次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
[A_e]&=\int[N]^T[N_{,x}]dA\\
[D_e]&=\int[N]^T[N]dA\\
\{Q\}&=\beta[A_e]\{w_e\}+\mu[D_e]\{\dot{w}_e\}
\end{aligned}\right\} \tag{5-14}$$

また、$[D_e]$、$[m_e]$との間には

$$\left[D_e\right]=\frac{1}{\rho h}\left[m_e\right] \tag{5-15}$$

の関係がある。ここに、ρ, h は、それぞれ平板の密度、厚さを表す。

板全体の節点変位を$\{w\}$として、$[M]$、$[K]$、$[A]$をそれぞれ板全体の質量行列、剛性行列、空力行列として、Lagrangeの方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_i}\right)+\frac{\partial U}{\partial w_i}=Q_i \tag{5-16}$$

より

$$\left[M\right]\left\{\ddot{w}\right\}+\left[K\right]\left\{w\right\}+\beta\left[A\right]\left\{w\right\}+\frac{\mu}{\rho h}\left[M\right]\left\{\dot{w}\right\}=0 \tag{5-17}$$

となる。いま、調和振動を考えて$\left\{w\right\}=\left\{W\right\}e^{i\omega t}$とすると、上式はつぎのような固有値問題に帰着する。

$$\left(\left[K\right]+\beta\left[A\right]-\lambda\left[M\right]\right)\left\{W\right\}=0 \tag{5-18}$$

ここで、$\lambda=\omega^2-i\dfrac{\mu\omega}{\rho h}$ である。

上式において $\beta=0$ の場合は、式(5-7)によって表される自由振動の固有値問題が得られる。β をゼロから増加させて式(5-18)を解くと、実数で与えられる固有値のうち二つがだんだん近づいていき $\beta=\beta_{cr}$で一致しβ_{cr}より大きくなると複素固有値（共役）を持つことになりフラッタを起こすことになる。

式(5-18)の固有値問題を解くときβの値を変化させて$\beta[A]$を計算し、式(5-18)を解くには労力的に問題がある。そこで、$\{W\}$を固有モードを重ね合わせて次のように近似する[76]。

$$\left\{W\right\}=\left[\phi\right]\left\{\delta\right\} \tag{5-19}$$

ここで、$\left[\phi\right]$は自由振動の解析より得られた1次からn次までの固有モードを並べたm×nの正規化されたモード行列で、$\left\{\delta\right\}$は一般座標のベクトルである。

式(5-19)を式(5-18)に代入して$\left[\phi\right]^T$を前から掛けて整理すると次式が得られる。

$$\left(\left[K^*\right]-\lambda\left[I\right]\right)\left\{\delta\right\}=0 \tag{5-20}$$

ここに、$\left[K^*\right]$は次のとおりである。

$$\left[K^*\right]=\left\lceil\omega^2\right\rfloor+\beta\left[\phi\right]^T\left[A\right]\left[\phi\right] \tag{5-21}$$

結局、各々のβに対して$\left[K^*\right]$を求め、上式を解いてβ_{cr}の限界値を求めることになるが、式(5-18)を解く場合に比べて計算時間は短くなる。

5・3　数値解析例

上述の自由振動解析とフラッタ解析に関する計算手順の有用性やせん断変形などの影響などを調べるため、等方性および異方性の正方形平板について解析を行なった。

5・3・1　等方性平板の自由振動およびパネルフラッタ

最初に、計算精度およびフラッタ解析の計算手順の有効性などを検討するために、面内に等方で曲げ剛性Dおよび等方面に垂直な方向のせん断弾性係数Gを持つ周辺単純支持の正方形平板（一辺の長さをa、板厚をh）を例として解析を行なった。計算は平板を10×10に等分割し、剛性行列や質量行列などは、前章の場合と同様に要素分割によって得られた四辺形を基準とし、その四辺形を対角線によって分割する二通りの分割法の平均として求めた。剛性比D/Gha^2を種々変えたときの1次と2次の固有角振動数の変化を図5-2に示す。縦軸は、せん断変形を無視した古典理

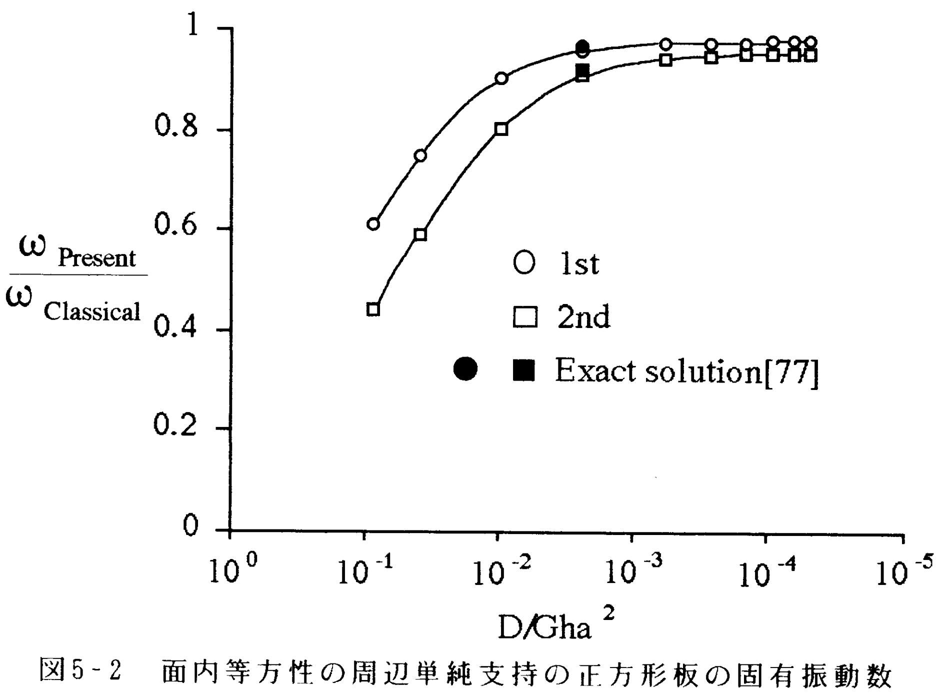


図5-2　面内等方性の周辺単純支持の正方形板の固有振動数におよぼすせん断変形の影響

論との比である。剛性比が大きくなるとせん断変形の影響が大きくなることが分かる。図中には、比較のため三次元弾性理論によって求められた厳密解[77]を● ■印で示す。本解法で求めた固有角振動数は、厳密解と良く一致していることが分かる。図5-3は、正規モード数nを変化させたときのフラッタ動圧パラメータ$\bar{\beta}_{cr}$の収束の様子を示す。この図からフラッタ動圧パラメータは、正規モード数n＝8程度でほぼ収束していることがわかる。図5-4は、剛性比D/Gha^2を種々変化させたときのフラッタ動圧パラメータ$\bar{\beta}_{cr}$を求めた結果である。剛性比が10^{-3}あたりよりも小さくなるとせん断変形の影響が大きくなることが分かる。

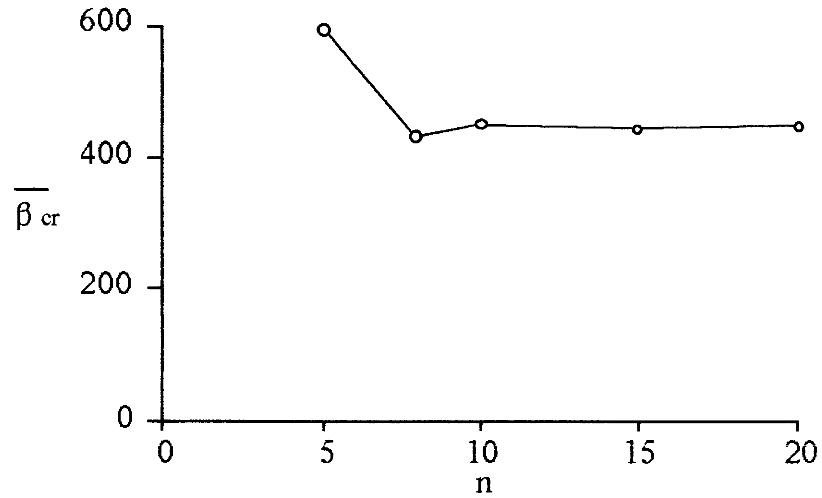


図5-3　面内等方性の周辺単純支持正方形板のフラッタ限界値の収束（$\bar{\beta}_{cr}=\beta_{cr}\dfrac{a^3}{D}$）

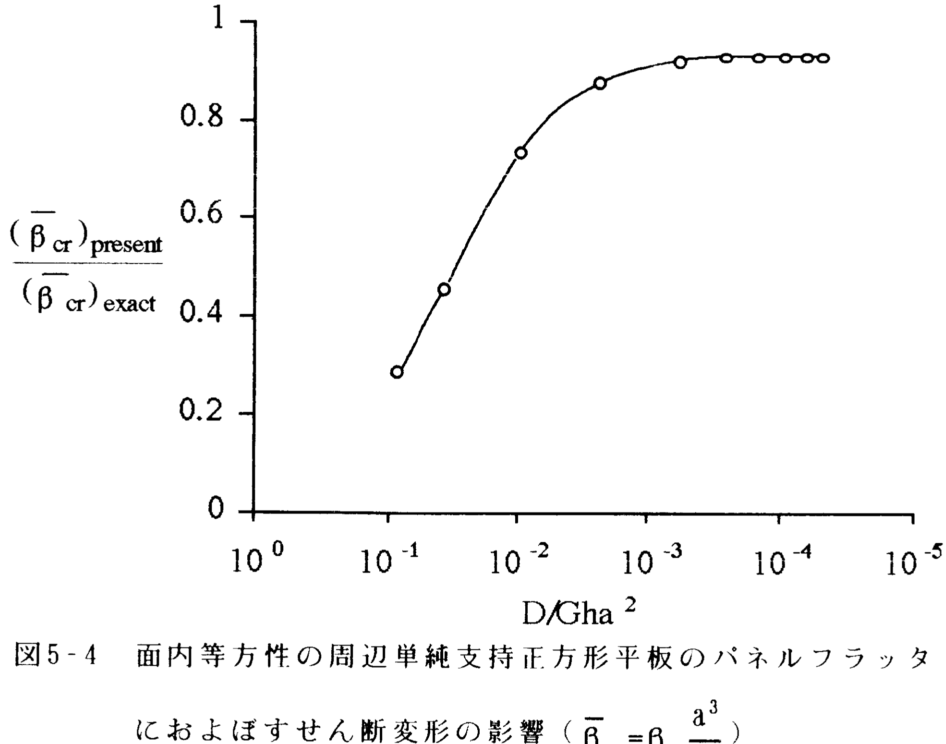


図5-4　面内等方性の周辺単純支持正方形平板のパネルフラッタにおよぼすせん断変形の影響（$\bar{\beta}_{cr}=\beta_{cr}\dfrac{a^3}{D}$）

５・３・２　異方性平板の自由振動およびパネルフラッタ

異方性平板の振動特性とフラッタ特性に対するせん断変形の影響、弾性主軸方向および異方性パラメータE_1/E_2の影響を調べるために、種々の支持条件の異方性正方形平板の自由振動およびフラッタ問題を解析した。

数値計算例として、次のような材料定数を想定し計算を行なった。なお、材料の直交異方性主軸を１、２、３で表し、主軸１と２はｘｙ面内とし、主軸３は座標軸ｚに平行とする。

$$E_2 = 1.0\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2},\ G_{12} = G_{13} = 0.364E_2,\ G_{13} = 2.5G_{23},$$

$$\nu_{12} = 0.24,\ \rho = 1.5\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}.$$

表5-1　異方性の周辺単純支持および周辺固定の正方形平板の固有角振動数

$$\left(\bar{\omega} = \omega\left(\frac{a^2}{h}\right)\sqrt{\frac{\rho}{E_2}}\right)$$

θ (deg)	$k=D/Gha^2$ (E_1/E_2)	Simply supported 1st	2nd	3rd	4th	Clamped 1st	2nd	3rd	4th
0	10^{-6} (2)	6.254	13.967	17.513	23.557	11.988	21.227	26.256	32.882
	10^{-4} (2)	6.251	13.939	17.494	23.514	11.962	21.125	26.180	32.747
	10^{-2} (2)	5.835	11.776	15.111	19.367	9.673	15.066	19.206	22.581
	10^{-2} (5)	7.360	13.019	21.022	22.074	12.652	17.972	25.831	26.330
15	10^{-6} (2)	6.385	14.250	17.362	23.877	11.925	21.385	25.818	32.895
	10^{-4} (2)	6.381	14.223	17.342	23.828	11.898	21.287	25.739	32.751
	10^{-2} (2)	5.933	12.024	14.950	19.305	9.609	15.256	18.904	22.625
	10^{-2} (5)	7.511	13.585	20.570	22.431	12.457	18.200	25.232	26.683
30	10^{-6} (2)	6.655	14.851	17.067	24.467	11.799	21.829	24.823	32.932
	10^{-4} (2)	6.650	14.825	17.043	24.411	11.770	21.737	24.737	32.776
	10^{-2} (2)	6.143	12.557	14.609	19.452	9.486	15.753	18.186	22.657
	10^{-2} (5)	7.888	14.735	19.641	23.009	12.062	18.870	23.828	27.111
45	10^{-6} (2)	6.792	15.178	16.913	24.735	11.737	22.202	24.179	32.955
	10^{-4} (2)	6.787	15.153	16.886	24.676	11.707	22.115	24.086	32.796
	10^{-2} (2)	6.256	12.853	14.417	19.569	9.426	16.143	17.686	22.675
	10^{-2} (5)	8.109	15.278	19.188	23.286	11.864	19.426	22.910	27.216

解析は $D=\sqrt{D_1 D_2}$, $Gh=\sqrt{(Gh)_{13}(Gh)_{23}}$ として $k=D/Gha^2$ の３種類の値，すなわち、$k=10^{-6}$、10^{-4}、10^{-2}について弾性主軸の方向および異方性パラメータE_1/E_2を種々変化させて行なった。表5-1は、周辺単純支持および周辺固定の境界条件において、剛性比kおよび弾性主軸の方向θを種々変えたときの１次～４次の固有角振動数を示す。剛性比が大きくなるすなわち、せん断剛性が小さくなるとせん断変形の影響が増していることが分かる。また、高次の振動になるにしたがい、せん断変形の影響が大きくなることが分かる。図5-5は、異方性の片持ち正方形平板の１次～２次の固有角振動数と弾性主軸の方向θの関係を図示したものである。この図においても振動の次数が高くなると、せん断変形の影響が大きくなることが分かる。なお、図中の細線はRossettosとTong［78］によって求められたhybrid応力法に基づく

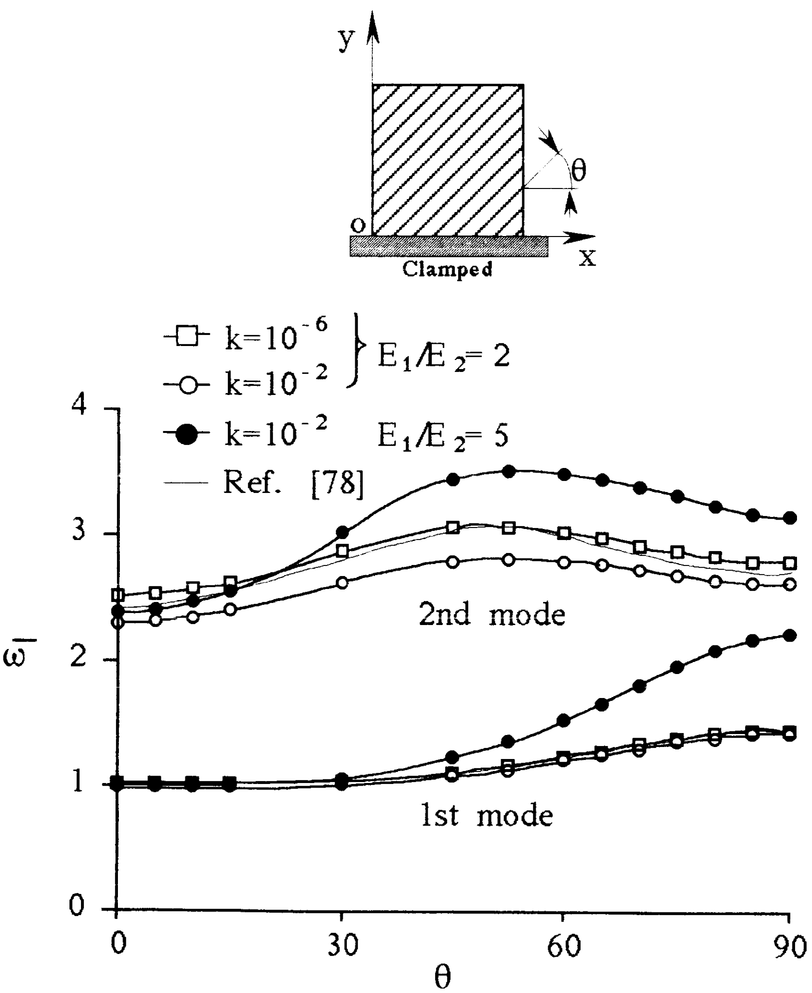


図5-5　異方性の片持ち正方形平板の固有角振動数（$\bar{\omega}=\omega\left(\frac{a^2}{h}\right)\sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$）

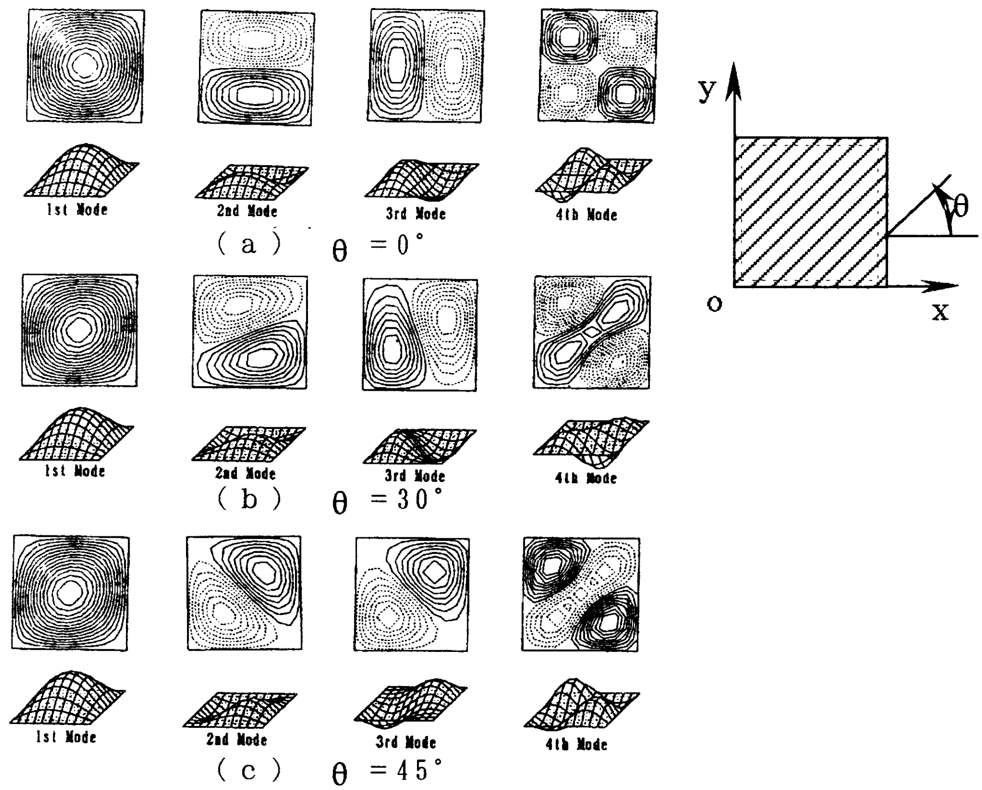


図5-6　異方性の周辺単純支持の正方形平板の振動モード

($E_1/E_2=2$、$k=D/Gha^2=10^{-2}$)

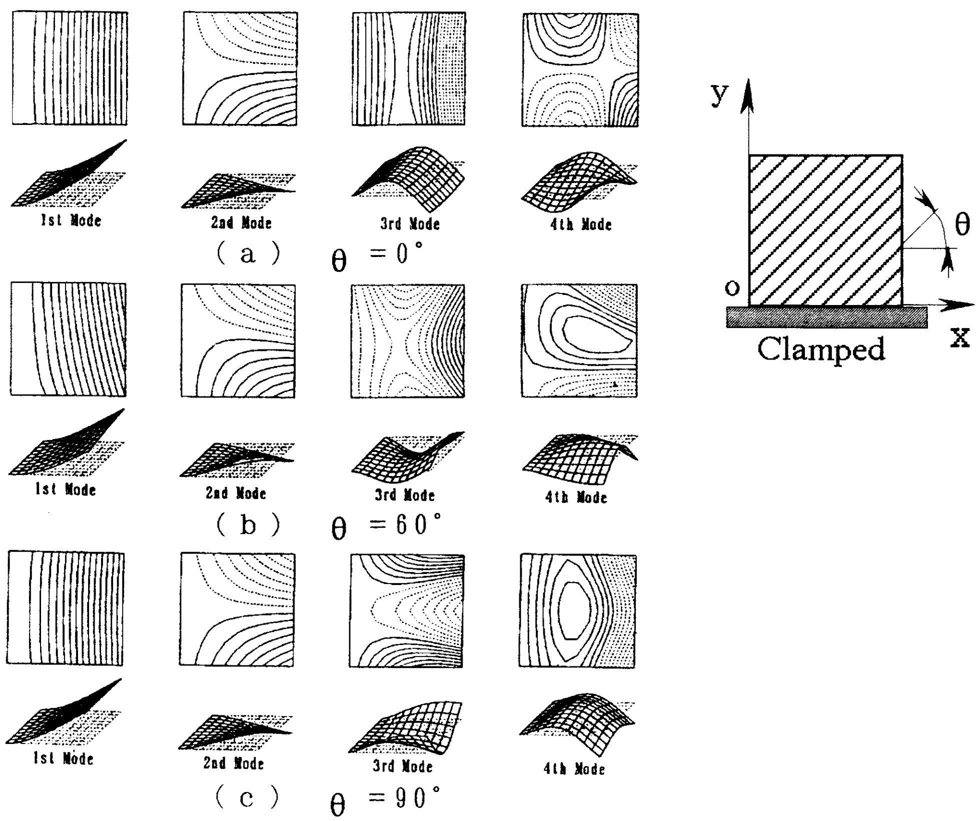


図5-7　異方性の片持ち正方形平板の振動モード

($E_1/E2=2$、$k=D/Gha^2=10^{-2}$)

有限要素解析結果である。$k=10^{-6}$の場合との差はほとんどなく、両者はほぼ一致していることが分かる。図5-5には異方性パラメータE_1/E_2を変化させた場合の結果も示してあるが、$\theta=0°$付近では固有角振動数への異方性パラメータE_1/E_2の影響は小さく、特に最低次の固有角振動数では$\theta=30°$くらいまではE_1/E_2の影響は小さい。図5-6と5-7は、異方性の周辺単純支持と片持ち正方形平板（異方性パラメータ$E_1/E_2=2$）の振動モードを示したものである。周辺単純支持の２次と３次のモードは、等方性正方形平板の場合には縮退するけれども、表5-1からも分かるようにこの２つのモードに対応する固有角振動数はかなり異なる。また、θの変化によって振動モードの節線がθの方向に回転していく様子が分かる。表5-2は、異方性の周辺単純支持と周辺固定の正方形平板のフラッタ動圧パラメータ$\bar{\beta}_{cr}$とフラッタ

表5-2 異方性の周辺単純支持および周辺固定の正方形平板のフラッタ限界値

θ	$k=10^{-6}$ $(E_1/E_2=2)$		$k=10^{-4}$ $(E_1/E_2=2)$		$k=10^{-2}$ $(E_1/E_2=2)$		$k=10^{-2}$ $(E_1/E_2=5)$	
(deg)	$\bar{\beta}_{cr}$	$\bar{\lambda}_{cr}$	$\bar{\beta}_{cr}$	$\bar{\lambda}_{cr}$	$\bar{\beta}_{cr}$	$\bar{\lambda}_{cr}$	$\bar{\beta}_{cr}$	$\bar{\lambda}_{cr}$
	Simply supported							
0	66.851	229.55	66.745	229.26	54.020	196.12	112.48	397.05
30	60.360	217.20	60.235	216.85	48.147	184.92	72.976	265.25
45	53.935	219.31	53.807	201.81	42.508	171.31	57.002	238.67
60	47.309	181.96	47.187	181.65	37.078	154.37	45.669	207.36
90	40.050	154.49	39.940	154.23	31.666	133.24	33.226	155.52
	Clamped							
0	111.94	547.69	111.37	545.06	64.014	323.31	122.48	596.90
30	97.234	491.81	96.620	466.93	54.980	288.29	83.748	426.86
45	84.479	443.36	83.898	440.63	47.283	260.73	66.137	380.20
60	73.935	406.54	73.383	403.95	40.265	236.33	52.027	338.49
90	64.304	375.86	63.753	373.25	33.463	214.19	38.592	302.30

$$k=\frac{D}{Gha^2},\quad D=\sqrt{D_1D_2},\quad Gh=\sqrt{(Gh)_{13}(Gh)_{23}},\quad \bar{\beta}_{cr}=\beta_{cr}\frac{a^3}{E_2h^3},\quad \bar{\lambda}_{cr}=\lambda_{cr}\frac{\rho a^4}{E_2h^2}$$

角振動数$\overline{\lambda}_{cr}$を示したものである。剛性比が大きくすなわち、せん断剛性が小さくなるにしたがい$\overline{\beta}_{cr}$と$\overline{\lambda}_{cr}$は小さくなることが分かる。フラッタ動圧パラメータ$\overline{\beta}_{cr}$はθ＝90°においては、異方性パラメータE_1/E_2の影響は小さい。図5-8は、片持ち異方性正方形平板の場合のフラッタ動圧パラメータ$\overline{\beta}_{cr}$と弾性主軸の方向θの関係の示したものである。 文献[78]で示された結果も示してあるが$\overline{\beta}_{cr}$が最大値付近で両者の間に差があるが概ね一致している。フラッタ動圧パラメータ$\overline{\beta}_{cr}$ はθ＝20°あたりで最も小さくなり、 θ＝70°あたりで最大値となる。剛性比が10^{-6}から10^{-2}と大きなると、フラッタ動圧パラメータ$\overline{\beta}_{cr}$は約20～30%小さくなることが分かる。

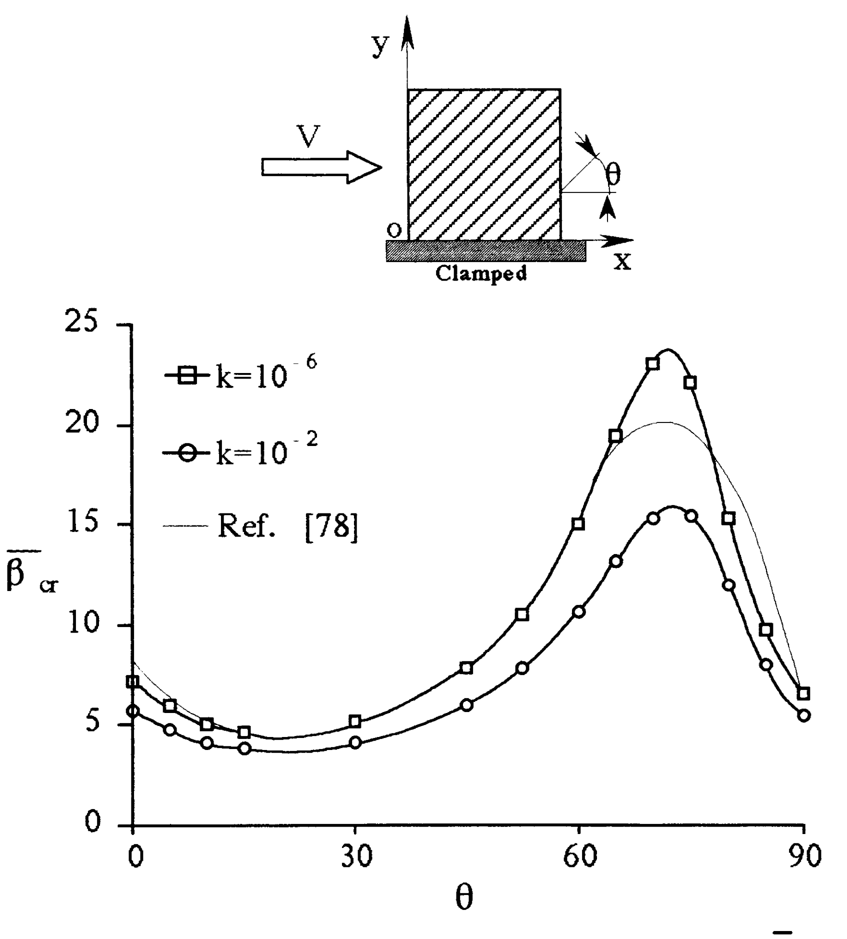


図5-8　異方性の片持ち正方形平板のフラッタ動圧パラメータ（$\overline{\beta}_{cr}=\beta_{cr}\dfrac{a^3}{E_2h^3}$）

5・4　まとめ

せん断変形を考慮した平板の三角形板曲げ要素の動的問題への応用として、等方性および異方性平板の自由振動解析とフラッタ解析を行った。本章において得られた成果をまとめると以下のようである。

（１）　等方性板の固有振動数を求め、これを三次元弾性理論によって求められた厳密解と比較し、精度の良い結果を得ることができた。

（２）　フラッタ解析においてモード解析法に基づく定式化を行い、等方性および異方性平板のパネルフラッタ問題を考えた。等方性平板におけるフラッタ限界値を求め、正規モード数が解に及ぼす影響を調べた。その結果、少ない正規モード数で実用上十分な精度の解が得られることがわかった。また、等方性平板においては、剛性比D/Gha^2が約10^{-3}からせん断変形の影響が大きくなることが分かる。

（３）　片持ち異方性平板の固有振動解析およびパネルフラッタ解析をせん断変形を考慮して行った。hybrid応力法に基づく有限要素解析の結果と比較したが、いずれの解析においても両者はよく一致し、本方法の有効性を示すことができた。

第6章　薄肉曲りはりの有限曲げ[79,80]

これまで、はりおよび板の力学的特性におよぼすせん断変形の影響について有限要素法を用いて検討した。前にも述べたように、薄肉断面はりの力学的特性を厳密に評価しようとすると断面変形も考慮しなければならなくなり、問題は非常に複雑化する。断面変形がはりの力学的特性におよぼす影響は、断面を板要素に分割し、おのおのに薄板理論を適用して調べることができる。薄板理論を適用して、断面変形を扱った研究にBijlaardとFisher[18]の研究がある。さらに、折板理論や有限帯板法を用いて断面変形の影響を調べた研究に尾崎[19]，奥村と坂井[20]の研究がある。

一般構造物やパイプラインの構造要素として薄肉曲りはりが広く利用されている。薄肉曲りはりが、曲げを受けると断面が偏平化し、その剛性が低下し高い応力が生じ、同一断面形状の直線はりより小さな曲げモーメントで屈服が起こることは、古くから知られている。この問題は、Brazier[17]が最初に理論的に解析して以来、近似性の高い解への修正が行なわれてきた[81-83]。しかしこれらの結果はほとんど円管を対象としたものであり、解析結果にも多少の相違がみられる。これまで、有限変位変形を厳密に取り入れる手法に困難があり、任意の断面形状に適用できる実用的な手法が望まれる。また、曲がりはりの剛性評価においても二次応力の効果を考慮しなければならないが[84,85]、その有限曲げにおける剛性低下についてはまだほとんど明らかにされていない。

有限要素法による幾何学的非線形問題の解析は、増分の繰返しの手法によりなんら困難なく実行できるようになった。そこで、本章では、増分の繰り返しの手法により曲りはりの有限曲げを簡便な処理によって解析する方法を示す。この方法によれば任意断面直線はりの屈服現象はいうまでもなく、曲りはりにおいてその中心線面内の有限曲げのほか、面外曲げをも含んで容易に実行できる。対称断面でも主軸と斜交する軸まわりの有限曲げなどについては、本法で初めて明らかにすることができた。

6・1　仮想仕事の原理による基礎式

外荷重$\{R\}$を受けて内力$\{S\}$と応力$\{\sigma\}$を生じて平衡しているとして、平衡条件を近似的に有限自由度の仮想仕事の原理で表すと次のようになる。

$$\delta\{r\}^T\{R\}=\sum_e \delta\{s\}^T\{S\}=\sum_e\int_V \delta\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV \tag{6-1}$$

ここに、$\delta\{\ \}$は仮想量を表す。$\{r\}$は節点変位を表し微小仮想変位を$\delta\{r\}$と書いている。$\{R\}$は$\delta\{r\}$に対応する荷重であり、$\delta\{s\}$は$\delta\{r\}$に応じて生ずる$\{S\}$に対応する仮想変位である。

次に荷重を増して$\{R'\}=\{R\}+\{\dot{R}\}$と増分を与えると、変位$\{\dot{r}\}$を生じて新たな平衡状態を作り、内力$\{S'\}=\{S\}+\{\dot{S}\}$、応力$\{\sigma'\}=\{\sigma\}+\{\dot{\sigma}\}$となるが、そこでの仮想仕事の原理は次のようになる。なお、「・」は増分量を表す。

$$\begin{aligned}\delta\{r\}^T\{R'\}&=\sum_e\int_V \delta\{\varepsilon'\}^T\{\sigma'\}dV=\sum_e\int_V \delta\{\{\varepsilon\}+\{\dot{\varepsilon}\}\}^T\{\{\sigma\}+\{\dot{\sigma}\}\}dV\\&=\sum_e\int_V\left(\delta\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}+\delta\{\varepsilon\}^T\{\dot{\sigma}\}+\delta\{\dot{\varepsilon}\}^T\{\sigma\}\right)dV\end{aligned} \tag{6-2}$$

ここで、ひずみの一成分$\varepsilon_k=\varepsilon_k(r_i)$に注目し、テーラ展開を考えると次の関係式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&\delta\varepsilon_k=\left(\frac{\partial\varepsilon_k}{\partial r_i}\right)_{r=0}\delta r_i\ ,\qquad \dot{\varepsilon}_k=\left(\frac{\partial\varepsilon_k}{\partial r_i}\right)_{r=0}\dot{r}_i\\&\delta\varepsilon'_k=\delta\varepsilon_k+\delta\dot{\varepsilon}_k=\left(\frac{\partial\varepsilon_k}{\partial r_i}\right)_{r=r}\delta r_i=\left(\left(\frac{\partial\varepsilon_k}{\partial r_i}\right)_{r=0}+\left(\frac{\partial^2\varepsilon_k}{\partial r_i\,\partial r_j}\right)_{r=0}\dot{r}_j\right)\delta r_i\end{aligned}\right\} \tag{6-3}$$

ここに、$\partial^2\varepsilon_k/\partial r_i\partial r_j$をi行j列要素とする行列を$[B_k]$と書き表し、上式を行列表示すると次のようになる。

$$\delta\{\varepsilon\}=[C]\delta\{r\},\qquad \delta\dot{\varepsilon}_k=\left(\frac{\partial^2\varepsilon_k}{\partial r_i\,\partial r_j}\right)_{r=0}\dot{r}_j\delta r_i=\delta\{r\}^T[B_k]\{\dot{r}\} \tag{6-4}$$

また、応力ひずみ関係を増分形で次のように書き表す。

$$\{\dot{\sigma}\}=[H]\{\dot{\varepsilon}\} \tag{6-5}$$

ここに、$[H]$は弾性係数行列である。

式(6-3)～(6-5)を式(6-2)に代入し整理すると次式が得られる。

$$\delta\{r\}^T\{R'\}=\delta\{r\}^T\sum_e\int_V[C]^T\{\sigma\}dV+\delta\{r\}^T[[K_E]+[K_G]]\{\dot{r}\} \tag{6-6}$$

ここに、$[K_E]$、$[K_G]$は次式で与えられる。

$$[K_E]=\sum_e\int_V[C]^T[H][C]dV,\qquad [K_G]=\sum_e\int_V\sigma_k[B_k]dV \tag{6-7}$$

式(6-6)において$\delta\{r\}$ は任意であることから、次のような剛性方程式が得られる。

$$\left.\begin{array}{l}\{\dot{R}\}+\{Q\}=[K]\{\dot{r}\},\\ [K]=[K_E]+[K_G],\qquad \{Q\}=\{R\}-\sum_e\int_V[C]^T\{\sigma\}dV\end{array}\right\} \tag{6-8}$$

ここで、$[K_E]$は弾性剛性行列、$[K_G]$は幾何剛性行列である。また、式(6-8)の第1式の左辺は本来なら$\{\dot{R}\}$となるべきであるが、前段までにおいて高次項を省略して進んでいるので左辺は正しく$\{\dot{R}\}$にならない。いわば、平衡をチェックしているわけである。$\{Q\}$を残差荷重ベクトルと呼ぶ。

式(6-8)を解いて$\{\dot{r}\}$を求め前にもどって新しい$\{\dot{S}\},\{\dot{\sigma}\}$を得たのち、次段の平衡位置$\{r\}+\{\dot{r}\}$、内力$\{S\}+\{\dot{S}\}$、応力$\{\sigma\}+\{\dot{\sigma}\}$をそれぞれ定める。これを繰り返して有限変形を得る。

6・2　薄肉断面材におけるひずみ-変位関係

一様断面の薄肉材の適当に選んだ基準点の材軸方向の軌跡が、一平面内に半径R_0の円弧をなしているものとし、長手（軸線）方向に一様な曲げを受けるものとする。いま、座標系は図6-1に示すように、基準点を原点として軸線に垂直な断面と円弧平

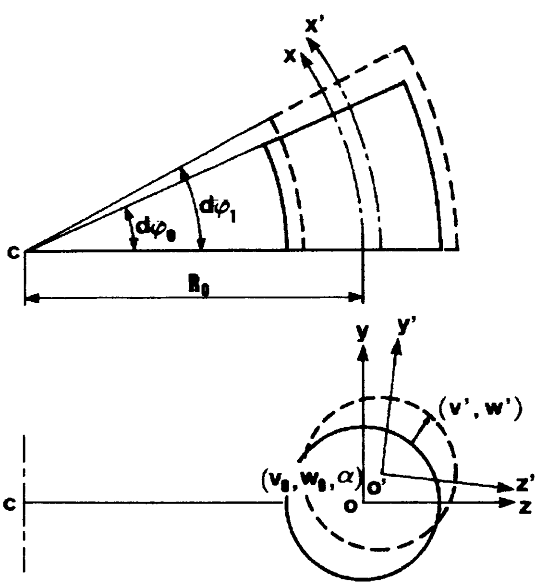


図6-1　座標系と変位

面となす交線方向にz軸、これに垂直に断面内にy軸を選ぶ。微小な開き角$d\varphi_0$をなす二つの断面は変形増分後もおのおの平面を保つと考えてよいが，その角は図6-1に示すように$d\varphi_1$となり、（y、z）点の変位$\{v', w'\}$は断面の剛体的変位$\{v_0, w_0, \alpha\}$によるものと断面ひずみに伴う各点の変位$\{v, w\}$の和として次のように表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} v' \\ w' \\ \theta' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ w_0 \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} \qquad (6\text{-}9)$$

ここで、v、w、θはy、zの関数である。また、（y、z）点の軸線方向の長さds_0が、増分後ds_1となる。すなわち

$$\left.\begin{aligned} ds_0 &= (R_0 + z)\, d\varphi_0 \\ ds_1 &= (R_0 + w_0 + \alpha y + z + w)\, d\varphi_1 \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}10)$$

ここで、軸ひずみ$\varepsilon = ds_1/ds_0 - 1$を考えると次のようになる。

$$\varepsilon = \left(\varepsilon_0 + \frac{w}{R_0} + z\psi + \frac{\alpha y}{R_0} + w\psi + y\alpha\psi\right) \Big/ \left(1 + \frac{z}{R_0}\right) \qquad (6\text{-}11)$$

ここに、原点でのひずみ$\varepsilon_0 = (R_0 + w_0)d\varphi_1 / R_0 d\varphi_0 - 1$および$d\varphi_1 / d\varphi_0 = 1 + \psi R_0$とおいている。

いま、断面要素板厚方向のひずみ分布を表すため、板厚中央面でのひずみをε_t、曲率をκ_tと書き、中央面に垂直な方向の座標をζ（図6-2）として$\varepsilon = \varepsilon_t + \zeta\kappa_t$と書けば、中央面の座標（y、z）を用いて式(6-3)に示された定義式と式(6-11)から次のような関係式が得られる。

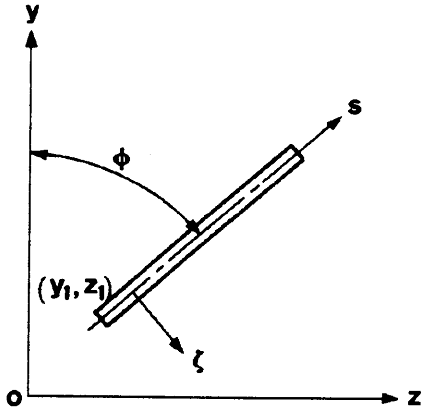


図6-2　局所座標

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_t &= \left(\dot{\varepsilon}_0 + \frac{\dot{w}}{R_0} + z\dot{\psi} + \frac{\dot{\alpha} y}{R_0}\right) \Big/ \left(1 + \frac{z}{R_0}\right) \\
\delta\dot{\varepsilon}_t &= \left(\left(\dot{w} + y\dot{\alpha}\right)\delta\psi + \left(\delta w + y\delta\alpha\right)\dot{\psi}\right) \Big/ \left(1 + \frac{z}{R_0}\right) \\
\dot{\kappa}_t &= \left(\dot{\psi}\cos\phi - \frac{\dot{\alpha}\sin\phi}{R_0}\right) \Big/ \left(1 + \frac{z}{R_0}\right) \\
\delta\dot{\kappa}_t &= -\left(\dot{\alpha}\,\delta\psi + \delta\alpha\,\dot{\psi}\right)\sin\phi \Big/ \left(1 + \frac{z}{R_0}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}12)
$$

ここに、ϕ は板厚中心線が y 軸となす角とする。

次に、断面内変位に伴う横ひずみを考える。薄肉断面を適宜に要素分割を行ない、これを結合する節点を定義する。簡単のため要素は板厚 h の平板とみなす。要素両端の節点変位を $\{v'_i \quad w'_i \quad \theta'_i\}_{i=1,2}$ とし、要素中央面の変位を表現すれば

$$
\begin{Bmatrix} V_i \\ W_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_i \\ w'_i \end{Bmatrix} \qquad (6\text{-}13)
$$

を用いて、次のように表すことができる。

$$
\left.\begin{aligned}
V(\xi) &= V_1(1-\xi) + V_2\xi \\
W(\xi) &= W_1(1-3\xi^2+2\xi^3) + W_2(3\xi^2-2\xi^3) + \theta'_1\ell\xi(1-\xi)^2 + \theta'_2\ell(\xi^3-\xi^2)
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}14)
$$

ここに、ℓ は節点間の長さ、$\xi = s/\ell$, $\sin\phi = (z_2 - z_1)/\ell$, $\cos\phi = (y_2 - y_1)/\ell$ である。

直ひずみを中央面の s 方向のひずみ ε_s と曲率変化 κ_s とによって次のように表す。

$$
\varepsilon_{ss} = \varepsilon_s + \zeta\kappa_s = \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)^2 + \zeta\left(-\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial W}{\partial s}\right)\right) \qquad (6\text{-}15)
$$

式 (6-3) と式 (6-15) からさらに次のような式が得られる。

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{ss} &= \dot{\varepsilon}_s + \zeta\dot{\kappa}_s = \frac{\partial\dot{V}}{\partial s} + \zeta\left(-\frac{\partial^2\dot{W}}{\partial s^2}\right), \\
\delta\dot{\varepsilon}_{ss} &= \delta\dot{\varepsilon}_s + \zeta\left(\delta\dot{\kappa}_s\right) = \frac{\partial(\delta W)}{\partial s}\frac{\partial\dot{W}}{\partial s} + \zeta\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial(\delta V)}{\partial s}\frac{\partial\dot{W}}{\partial s} + \frac{\partial\dot{V}}{\partial s}\frac{\partial(\delta W)}{\partial s}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}16)
$$

式 (6-14) と式 (6-16) から $\dot{\varepsilon}_s, \dot{\kappa}_s$ などは次のように表される。

$$
\left.
\begin{aligned}
&\dot{\varepsilon}_s=\frac{\partial \dot{V}}{\partial s}=\frac{\dot{V}_2-\dot{V}_1}{\ell}\\
&\dot{\kappa}_s=-\frac{\partial^2\dot{W}}{\partial s^2}=-\frac{1}{\ell}\left(\dot{\theta}_2'-\dot{\theta}_1'-3(1-2\xi)\left(\dot{\theta}_2'+\dot{\theta}_1'-2\frac{\dot{W}_2-\dot{W}_1}{\ell}\right)\right)\\
&\delta\dot{\varepsilon}_s=\frac{\partial\dot{W}}{\partial s}\frac{\partial(\delta W)}{\partial s}=\left(\dot{\theta}_1'(1-\xi)+\dot{\theta}_2'\xi-3\xi(1-\xi)\left(\dot{\theta}_2'+\dot{\theta}_1'-2\frac{\dot{W}_2-\dot{W}_1}{\ell}\right)\right)\\
&\qquad\times\left(\delta\theta_1'(1-\xi)+\delta\theta_2'\xi-3\xi(1-\xi)\left(\delta\theta_2'+\delta\theta_1'-2\frac{\delta W_2-\delta W_1}{\ell}\right)\right)\\
&\delta\dot{\kappa}_s=\frac{\partial\dot{V}}{\partial s}\frac{\partial^2(\delta W)}{\partial s^2}+\frac{\partial(\delta V)}{\partial s}\frac{\partial^2\dot{W}}{\partial s^2}\\
&\quad=\frac{1}{\ell^2}\left[(\delta V_2-\delta V_1)\left(\dot{\theta}_2'-\dot{\theta}_1'-3(1-2\xi)\left(\dot{\theta}_2'+\dot{\theta}_1'-2\frac{\dot{W}_2-\dot{W}_1}{\ell}\right)\right)\right.\\
&\quad\left.+(\dot{V}_2-\dot{V}_1)\left(\delta\theta_2'-\delta\theta_1'-3(1-2\xi)\left(\delta\theta_2'+\delta\theta_1'-2\frac{\delta W_2-\delta W_1}{\ell}\right)\right)\right]
\end{aligned}
\right\}
\qquad (6\text{-}17)
$$

上式を用いて要素の仮想内力仕事を考えることにより、要素剛性行列を求めることができる。要素剛性行列の誘導を次節に示す。

6・3　薄肉断面材の剛性行列

剛性行列は式(6-7)より得られるが、その計算の際、剛性行列の各要素には $1+z/R_0$ に関する積分が含まれてくる。ここでは、積分を近似的に行なって剛性行列を利用に便利な形で求めることにする。

薄板要素のために式(6-2)の右辺第2項は次のようになる。

$$
\int_V\delta\{\varepsilon\}^T\{\dot{\sigma}\}dV=\iint\left(\left(\delta\begin{Bmatrix}\varepsilon_t\\ \varepsilon_s\end{Bmatrix}\right)^T\begin{Bmatrix}\dot{T}_t\\ \dot{T}_s\end{Bmatrix}+\left(\delta\begin{Bmatrix}\kappa_t\\ \kappa_s\end{Bmatrix}\right)^T\begin{Bmatrix}\dot{M}_t\\ \dot{M}_s\end{Bmatrix}\right)\left(1+\frac{z}{R_0}\right)R_0\ell d\xi\, d\varphi_0
$$

(6-18)

ここで、$1+z/R_0$ の要素内変位を無視して平均値 $1+z_m/R_0$ を用いて、仮想部材変形とそれに対応する部材力をそれぞれ次のように定義する。すなわち

$$
\left.
\begin{aligned}
&\delta s_1 = \delta\varepsilon_t\left(1+\frac{z_m}{R_0}\right), && \dot{S}_1 = \dot{T}_t\ell \\
&\delta s_2 = \delta\varepsilon_s\ell, && \dot{S}_2 = \dot{T}_s\left(1+\frac{z_m}{R_0}\right) \\
&\delta s_3 = \delta\kappa_t\left(1+\frac{z_m}{R_0}\right), && \dot{S}_3 = \dot{M}_t\ell \\
&\delta s_4 + 3\left(1-2\xi\right)\delta s_5 = \delta\kappa_s\ell, && \dot{S}_4 + \left(1-2\xi\right)\dot{S}_5 = \dot{M}_s\left(1+\frac{z_m}{R_0}\right)
\end{aligned}
\right\} \tag{6-19}
$$

上式から式(6-18)は次のように表される。

$$
\int_V \delta\left\{\varepsilon\right\}^T\left\{\sigma\right\}dV = \sum_i \delta s_i \dot{S}_i R_0 d\varphi_0 \tag{6-20}
$$

また、応力-ひずみ関係式として次式を用いる。

$$
\begin{Bmatrix}\dot{T}_t \\ T_s\end{Bmatrix} = C\begin{bmatrix}1 & \nu \\ \nu & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\varepsilon}_t \\ \varepsilon_s\end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix}\dot{M}_t \\ M_s\end{Bmatrix} = D\begin{bmatrix}1 & \nu \\ \nu & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\kappa}_t \\ \kappa_s\end{Bmatrix} \tag{6-21}
$$

ここに、$C=Eh/\left(1-\nu^2\right)$, $D=Eh^3/12\left(1-\nu^2\right)$であり、Eはヤング率、$\nu$はポアソン比、hは板厚である。

式(6-19)を考慮して式(6-21)の応力-ひずみ関係式を整理すると、次のようになる。

$$
\begin{Bmatrix}\dot{S}_1 \\ S_2\end{Bmatrix} = \left[k_C\right]\begin{Bmatrix}\dot{s}_1 \\ s_2\end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix}\dot{S}_3 \\ S_4 \\ S_5\end{Bmatrix} = \left[k_D\right]\begin{Bmatrix}\dot{s}_3 \\ s_4 \\ s_5\end{Bmatrix} \tag{6-22}
$$

ここに、$[k_C]$、$[k_D]$の具体的な形は次式のとおりである。

$$
\left[k_C\right] = C\begin{bmatrix}\ell' & \nu \\ \nu & 1/\ell'\end{bmatrix}, \qquad \left[k_D\right] = D\begin{bmatrix}\ell' & \nu & 0 \\ \nu & 1/\ell' & 0 \\ 0 & 0 & 3/\ell'\end{bmatrix} \tag{6-23}
$$

ここで、$\ell' = \ell/\left(1+z_m/R_0\right)$である。

また、部材変形$\dot{s}_i$は定義から次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\dot{s}_1 &= \dot{\varepsilon}_0+\dot{w}_m/R_0+z_m\dot{\psi}+y_m\dot{\alpha}/R_0\\
\dot{s}_2 &= \cos\phi\left(\dot{v}_2-\dot{v}_1\right)+\sin\phi\left(\dot{w}_2-\dot{w}_1\right)\\
\dot{s}_3 &= \cos\phi\,\dot{\psi}-\sin\phi\,\dot{\alpha}/R_0\\
\dot{s}_4 &= \dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2\\
\dot{s}_5 &= \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2+\frac{2\sin\phi}{\ell}\left(\dot{v}_2-\dot{v}_1\right)-\frac{2\cos\phi}{\ell}\left(\dot{w}_2-\dot{w}_1\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}24)$$

要素の節点変位ベクトルとして $\{r_e\}^T=\{v_1,\ w_1,\ \theta_1,\ v_2,\ w_2,\ \theta_2,\ \varepsilon_0,\ \psi,\ \alpha\}$ を考える。そして、部材変形との関係は次のように表される。

$$\{s\}=[a]\{r_e\}=\begin{bmatrix}[a_C]\\ [a_D]\end{bmatrix}\{r_e\}\qquad(6\text{-}25)$$

ここに、[a] マトリックスは次のとおりである。

$$\begin{bmatrix}[a_C]\\ [a_D]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1/2R_0 & 0 & 0 & 1/2R_0 & 0 & 1 & z_m & y_m/R_0\\ -\cos\phi & -\sin\phi & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -2\sin\phi/\ell & 2\cos\phi/\ell & 1 & 2\sin\phi/\ell & -2\cos\phi/\ell & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

(6-26)

上式が、変形-変位関係式である。よって、弾性剛性行列は次式より得られる。

$$\delta\{s\}^T\{\dot{S}\}=\left(\delta\begin{Bmatrix}s_1\\ s_2\end{Bmatrix}\right)^T\begin{Bmatrix}\dot{S}_1\\ S_2\end{Bmatrix}+\left(\delta\begin{Bmatrix}s_3\\ s_4\\ s_5\end{Bmatrix}\right)^T\begin{Bmatrix}\dot{S}_3\\ S_4\\ S_5\end{Bmatrix}$$

$$=\delta\{r_e\}^T\left[[a_C]^T[k_C][a_C]+[a_D]^T[k_D][a_D]\right]\{\dot{r}_e\}\qquad(6\text{-}27)$$

したがって、要素弾性剛性行列は次式により与えられる。

$$[k_e]=[a_C]^T[k_C][a_C]+[a_D]^T[k_D][a_D]\qquad(6\text{-}28)$$

幾何剛性行列も同様な手順で求めることができる。すなわち、式(6-2)の右辺第3項より

$$\int_V\delta\{\dot{\varepsilon}\}^T\{\sigma\}dV=\iint\left(\delta\dot{\varepsilon}_tT_t+\delta\dot{\varepsilon}_sT_s+\delta\dot{\kappa}_tM_t+\delta\dot{\kappa}_sM_s\right)\left(1+z/R_0\right)R_0\,\ell\,d\xi\,d\varphi_0\qquad(6\text{-}29)$$

となるが、前のように積分を近似的に行なうことにより式(6-29)は次のように表すことができる。

$$\int_V \delta\{\dot{\varepsilon}\}^T\{\sigma\}dV = \left(\delta\dot{s}_1 S_1 + \delta\dot{s}_2 S_2 + \delta\dot{s}_3 S_3 + \delta\dot{s}_4 S_4 + \delta\dot{s}_5 S_5\right) R_0 d\varphi_0 = \sum \delta\dot{s}_i S_i R_0 d\varphi_0 \tag{6-30}$$

ここに、$\delta\dot{s}_i$はそれぞれ次のように表される。

$$\left.\begin{aligned}
\delta\dot{s}_1 &= \delta\dot{\varepsilon}_t\left(1+z_m/R_0\right) = \left(\dot{w}_m + y_m\dot{\alpha}\right)\delta\psi + \left(\delta w_m + y_m\delta\alpha\right)\dot{\psi} \\
\delta\dot{s}_2 &= \int \frac{\partial(\delta W)}{\partial\xi}\frac{\partial\dot{W}}{\partial\xi}\frac{d\xi}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left(\delta W_2 - \delta W_1\right)\left(\dot{W}_2 - \dot{W}_1\right) \\
&= \frac{1}{\ell}\left(-\sin\phi\left(\delta v_2 - \delta v_1\right) + \cos\phi\left(\delta w_2 - \delta w_1\right)\right)\left(-\sin\phi\left(\dot{V}_2 - \dot{V}_1\right) + \cos\phi\left(\dot{W}_2 - \dot{W}_1\right)\right) \\
\delta\dot{s}_3 &= \delta\dot{\kappa}_t\left(1+z_m/R_0\right) = -\sin\phi\left(\delta\alpha\,\dot{\psi} + \dot{\alpha}\,\delta\psi\right) \\
\delta\dot{s}_4 &= -\frac{1}{\ell}\left(\left(\dot{V}_2 - \dot{V}_1\right)\left(\delta\theta_1 - \delta\theta_2\right) + \left(\delta V_2 - \delta V_1\right)\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)\right) = -\frac{1}{\ell}\left(\dot{s}_2\delta s_4 + \delta s_2\dot{s}_4\right) \\
\delta\dot{s}_5 &= -\frac{1}{\ell}\left(\left(\dot{V}_2 - \dot{V}_1\right)\left(\delta\theta_1 + \delta\theta_2 - \frac{2}{\ell}\left(\delta W_2 - \delta W_1\right)\right) + \left(\delta V_2 - \delta V_1\right)\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 - \frac{2}{\ell}\left(\dot{W}_2 - \dot{W}_1\right)\right)\right) \\
&= -\frac{1}{\ell}\left(\dot{s}_2\delta s_5 + \delta s_2\dot{s}_5\right)
\end{aligned}\right\} \tag{6-31}$$

上式を用いて式(6-30)の$\sum\delta\dot{s}_i S_i$ を$\delta\{r_e\}^T\sum S_k[B_k]\{\dot{r}_e\}$とまとめることができ、要素の幾何剛性行列を与えることができる。

6・4 計算手順

前節で得られた要素弾性剛性行列および幾何剛性行列を用いて全構造について各行列を寄せ集めると、次のような剛性方程式が得られる。

$$\{R'\} - \sum[a]^T\{S\} = [K]\{\dot{r}\} \tag{6-32}$$

ここに、$\{\dot{r}\}$は全節点変位$\{\dot{v}_i, \dot{w}_i, \dot{\theta}_i\}$および$\{\dot{\varepsilon}_0, \dot{\psi}, \dot{\alpha}\}$からなるが、剛体変位

$\{\dot{v}_0, \dot{w}_0, \dot{\alpha}\}$と独立にするため節点変位のうち適当な3個を任意に規定することができる。もちろん、その他に対称変形等の拘束条件が付加される場合もある。3個の選び方の影響は通常大きくないが、厳格にはもっと合理的な手段を取りたい。いま、適宜3自由度を除いて解を得たのち、得られた変位v、wについてこれからいくらかの剛体変位$\{v'_0,\ w'_0,\ \alpha'\}$を差し引いた

$$I = \int_s \left(v - v'_0 + z\alpha'\right)^2 ds + \int_s \left(w - w'_0 - y\alpha'\right)^2 ds \tag{6-33}$$

を最小とするように条件づけて$\{v'_0,\ w'_0,\ \alpha'\}$を定めるとすれば、次式から容易に与えられる。すなわち

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial v'_0} &= \int_s v\,ds - v'_0 \int_s ds + \alpha' \int_s z\,ds = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial w'_0} &= \int_s w\,ds - w'_0 \int_s ds - \alpha' \int_s y\,ds = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial \alpha'} &= \int_s \left(vz - wy\right) ds - v'_0 \int_s z\,ds + w'_0 \int_s y\,ds + \alpha' \int_s \left(y^2 + z^2\right) ds = 0
\end{aligned}\right\} \tag{6-34}$$

したがって、剛体変位$\{v_0 + v'_0,\ w_0 + w'_0,\ \alpha + \alpha'\}$が定まることになる。

なお、増分変位後の曲率は次のようになる。

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_0 + w_0} = \frac{1}{R_0}\left(1 - \dot{\varepsilon}_0\right) + \dot{\psi} \tag{6-35}$$

また、節点座標は

$$y' = y + \dot{v} - z\dot{\alpha}, \qquad z' = z + \dot{w} + y\dot{\alpha} \tag{6-36}$$

として次段に進むことに注意しなければならない。

荷重ベクトル$\{R'\}$の成分は$\dot{\psi}$, $\dot{\alpha}$に対応する項のみが0ではない。図6-3のような外力下で平衡しているとき、仮想外力仕事を考えると

$$\left(P'\delta\varepsilon_0 + M'\delta\psi + N'\delta\alpha/R_0\right)R_0\,d\varphi_0 \tag{6-37}$$

となるが、軸力P'はゼロ、y軸まわりの曲げモーメント$M' = M + \dot{M}$、z軸まわりの曲げモーメント$N' = N + \dot{N}$を用いて$\{R'\}$が形成される。

実際に剛性方程式を解くには、$\dot{\psi}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{M}$, $\dot{N}$のうち2個を与えて他を求めること

なるが、（１）$\dot{\psi}$, $\dot{\alpha}$ を与えてM'、N'を求める、（２）$\dot{\psi}$, $\dot{N}=0$ を与えてM', $\dot{\alpha}$ を求める、などが最も実用的な問題であろう。

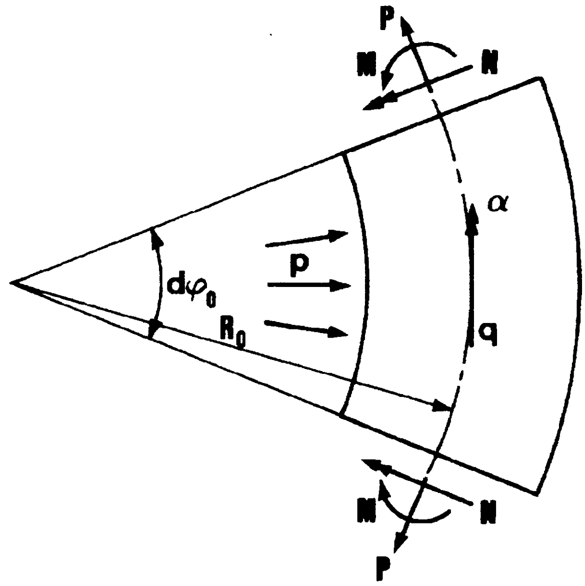


図6-3　外力系

6・5　数値解析例

これまでに述べた解析法を用いて、最初に他の解析結果と比較するため円管の直線はりについて解析を行ない、次に各種断面形の曲りはりについて解析を行なった。計算に用いた数値データは、次の値である。

$$Et/(1-\nu^2)=10^3\mathrm{kgf/mm}\ (9800\mathrm{N/mm})、\ Et^3/12(1-\nu^2)=10^2\mathrm{kgfmm}\ (980\mathrm{Nmm})$$

6・5・1　薄肉円管の曲げ解析

初期形状を直線はりとして$1/R_0=0$とおき解析する。要素数は36とした。図6-4に曲げモーメントMと曲率1/Rとの関係をそれぞれ$E\pi at^2$とa^2/tで無次元化した量で示した。また、Chwalla[81]、Brazier[17]、Reissner[83]らの解析結果も載

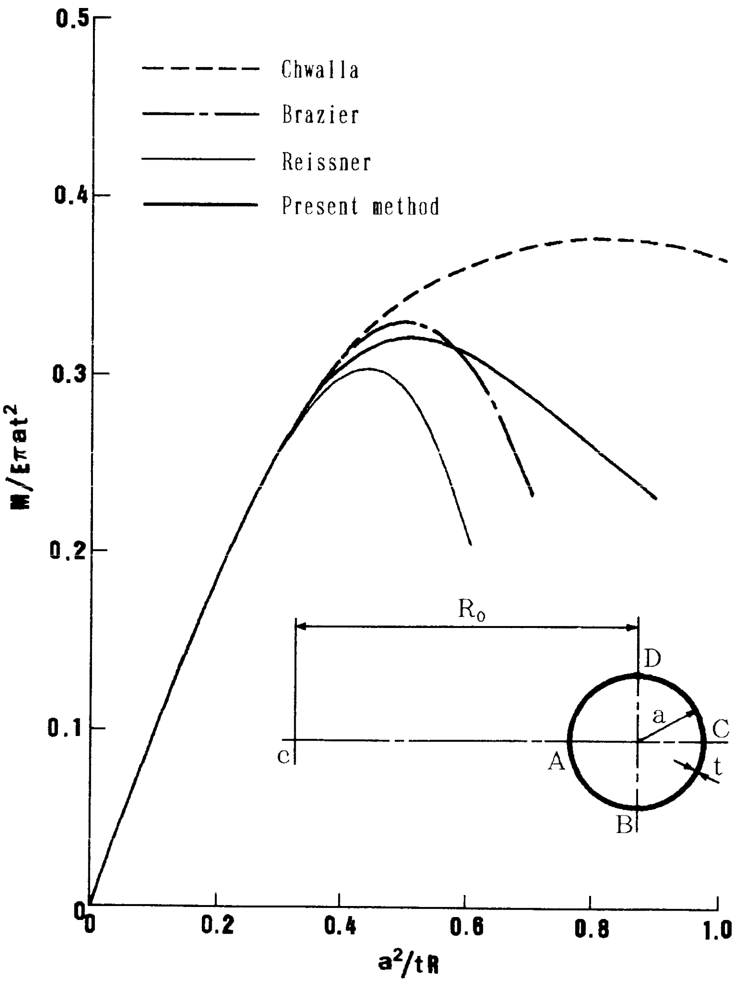


図6-4　円管直線はりの曲げモーメントと曲率の関係

せてある。また、表6-1は各解析法の代表値を比較したものである。これらの結果より、Brazier、Reissnerおよび本解析結果はほとんど同じ傾向を示しているが、Chwallaは大きく異なった傾向を示している。図6-5は、初曲率$1/R_0=0.01$の曲りはりが面内曲げを受ける場合の曲げモーメントと曲率の関係を示したものである。図6-6と6-7は、図6-5の点1～3における断面の変形状態と長手・円周方向の応力分布を示したものである。断面の偏平化の様子や、それに伴い応力が変化する様子

表6-1　各解析法による代表値の比較

	$(a^2/tR)_{max}$	$(M/E\pi at^2)_{max}$
Chwalla[81]	0.806	0.378
Brazier[17]	0.494	0.329
Reissner[83]	0.435	0.303
Present result	0.504	0.320

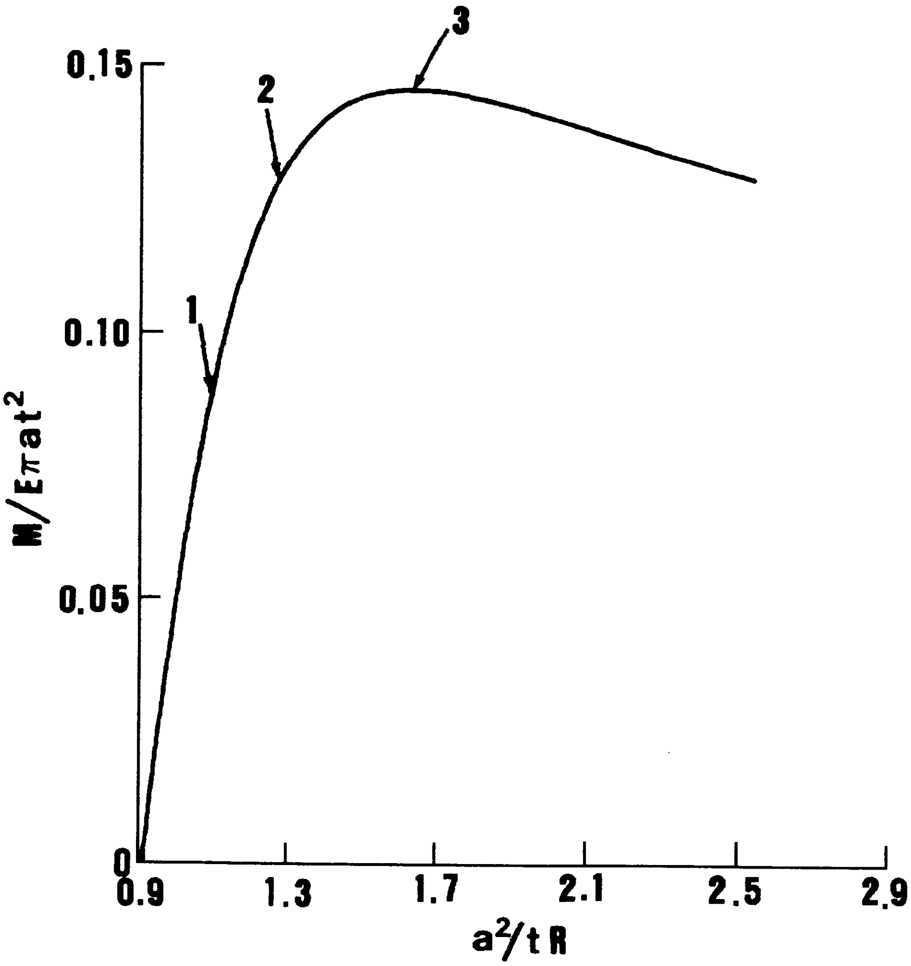


図6-5　円管の曲げモーメントと曲率の関係（$1/R_0=0.01$）

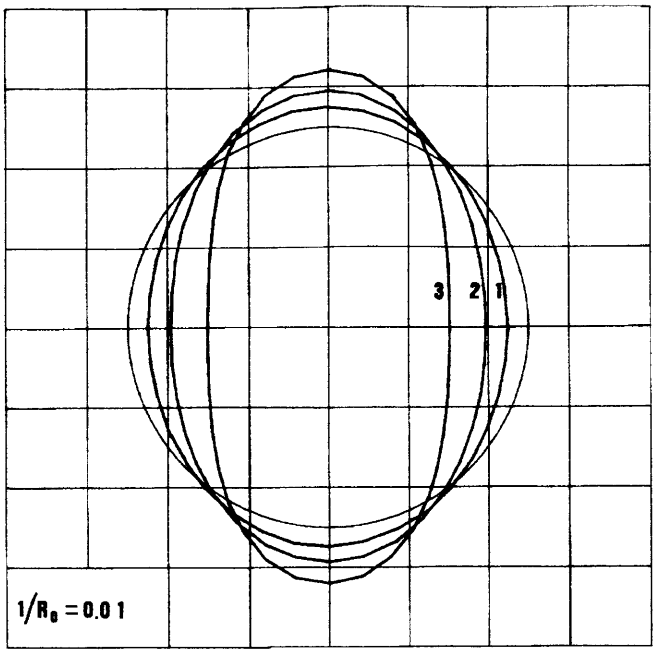


図6-6　円管の断面変形図（1/R_0=0.01）

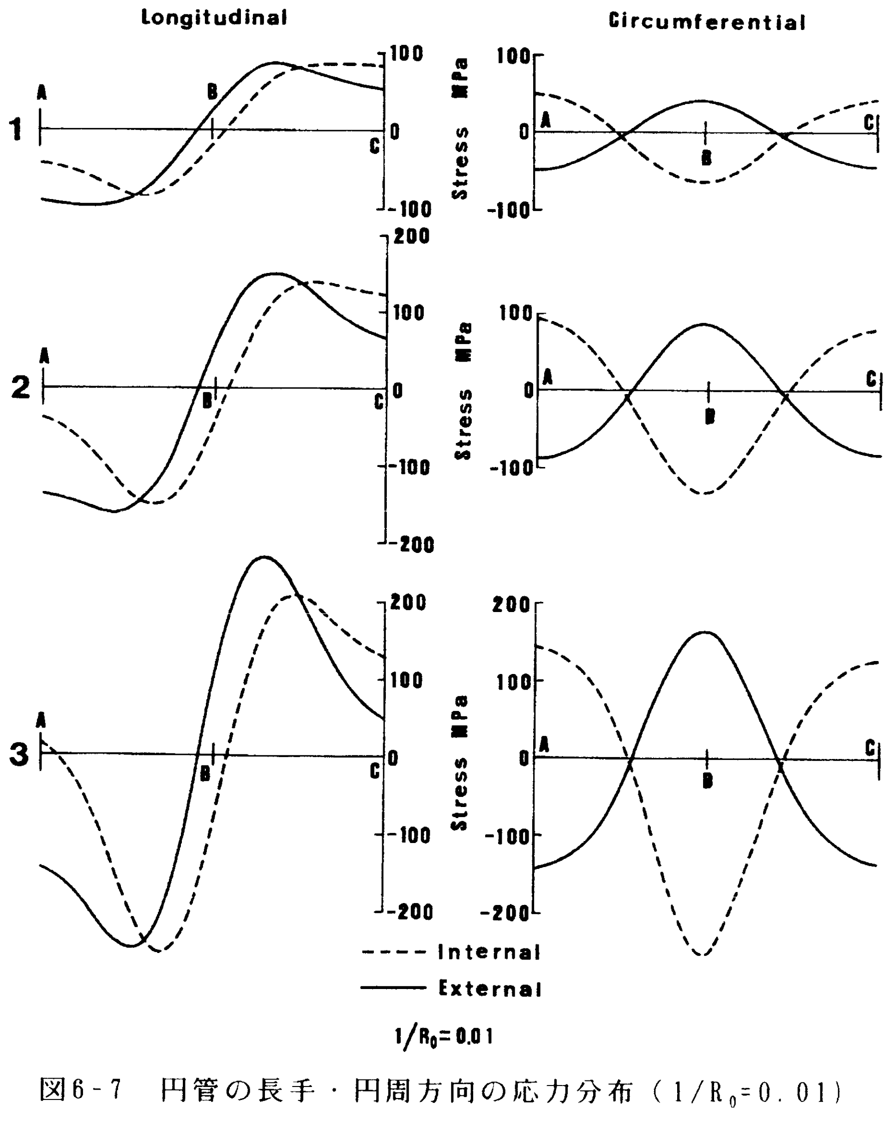


図6-7　円管の長手・円周方向の応力分布（1/R_0=0.01）

が示されている。図6-8～6-10には、初曲率$1/R_0=-0.01$の曲りはりの解析結果を示す。ここで興味あることは、図6-9の断面変形状態において、はじめは面内に偏平化が進むが、曲率$1/R=0$の近傍で偏平化の傾向が面外へと変化する。また、図6-10の応力分布図において、周方向応力は壁面の曲げによるものが支配的である。

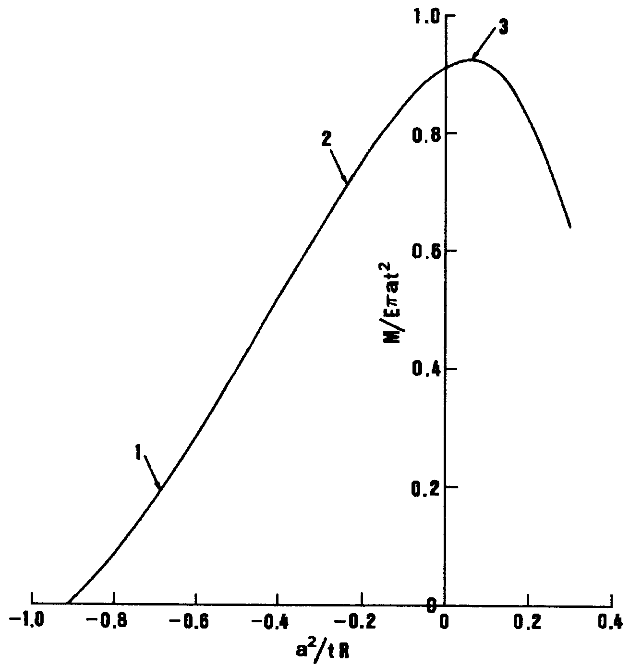


図6-8　円管の曲げモーメントと曲率の関係（$1/R_0=-0.01$）

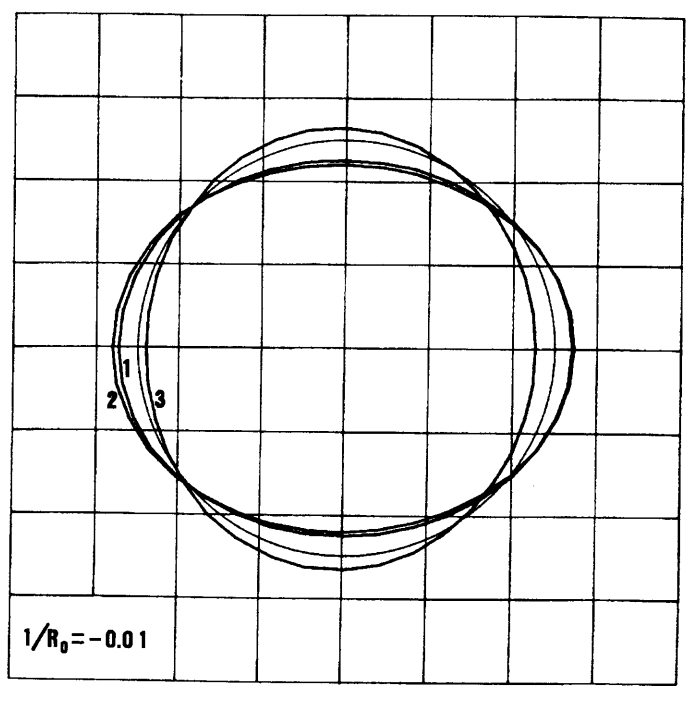


図6-9　円管の断面変形図（$1/R_0=-0.01$）

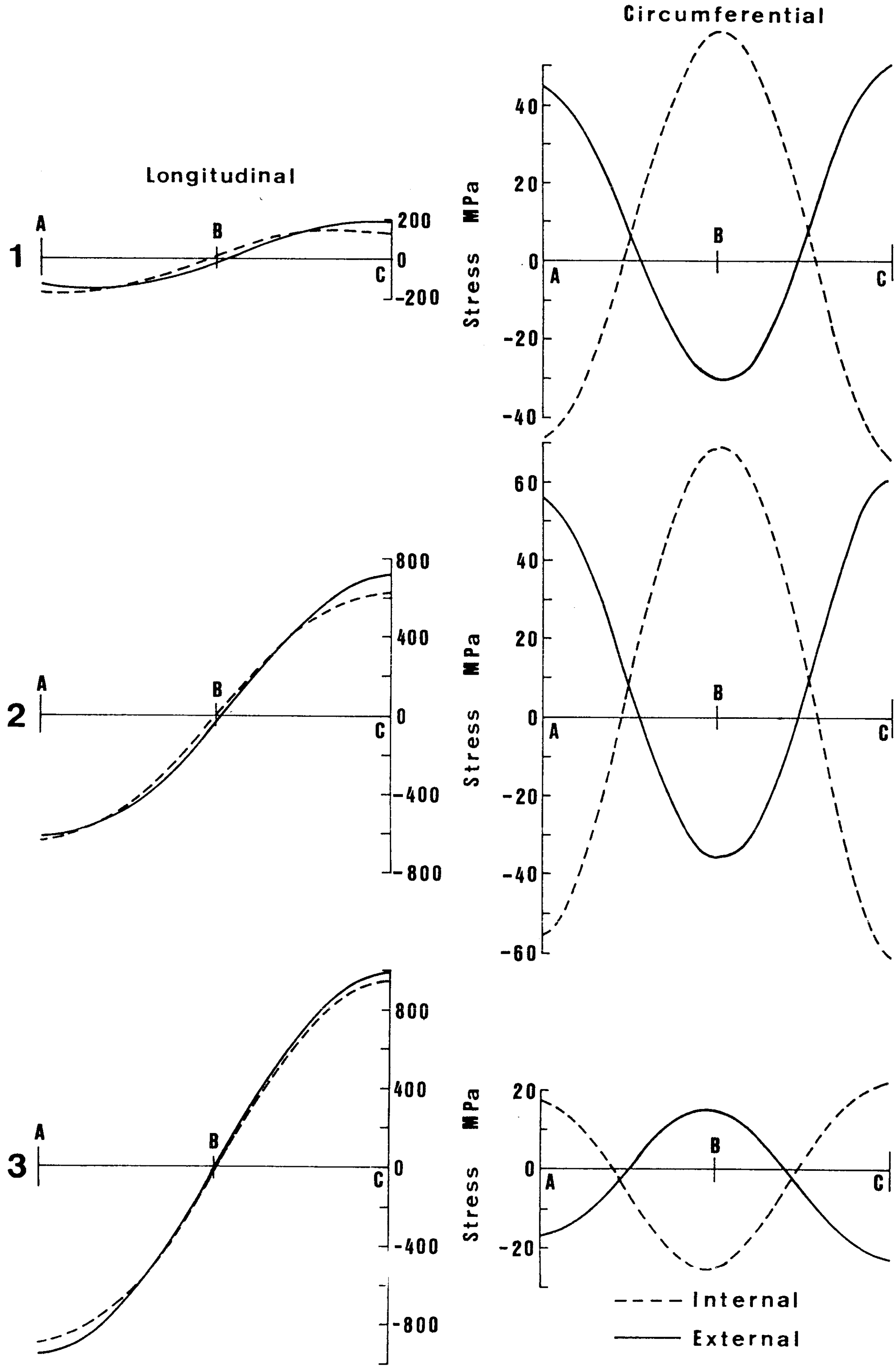


図6-10　円管の長手・円周方向の応力分布（$1/R_0$=-0.01）

長手方向応力は膜応力が支配的であり、直線はりの分布形状に近い。図6-11は、最大曲げモーメントと初曲率の関係を示したものである。正の初曲率を持つ曲りはりは直線はりよりも小さな曲げモーメントで屈服に至り、負の初曲率をもつ曲りはりは直線はりよりも大きな曲げモーメントで屈服に至る。

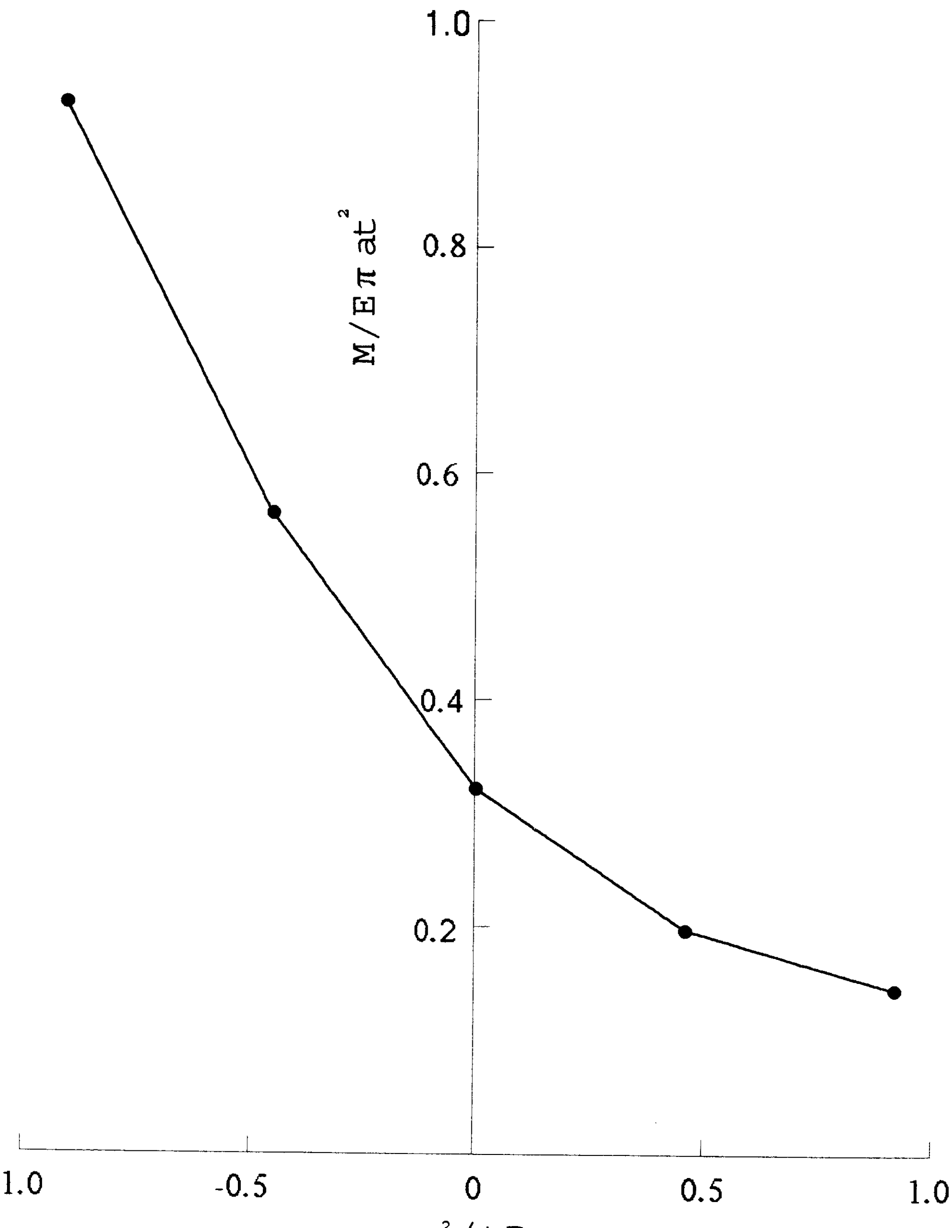


図6-11　円管の屈服モーメントの初曲率に対する変化

6・5・2　薄肉正方形管の曲げ解析

図6-12に示された断面形について数値計算を行なった。要素数は40とした。図6-12に、初曲率$1/R_0$=0.01の薄肉正方形管の曲げモーメントMと曲率1/Rの関係をEIt/a^2とa^2/tで無次元化した量で示してある。図6-13と6-14は、断面の変形状態

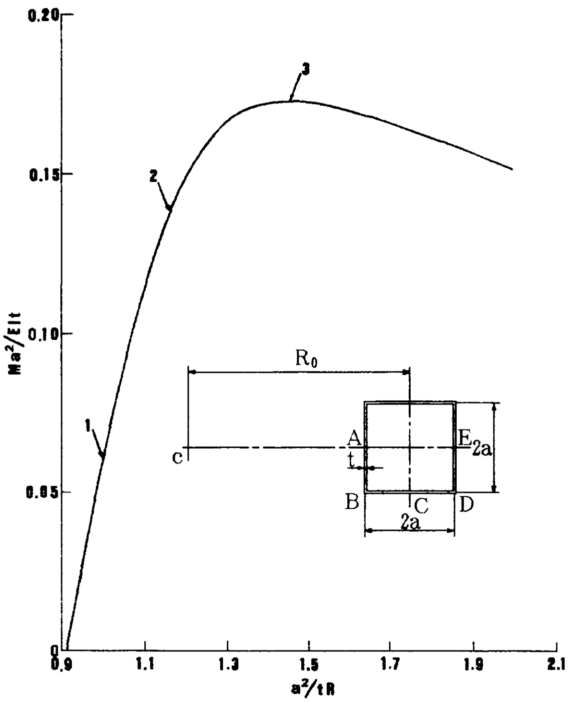


図6-12　正方形管の曲げモーメントと曲率の関係（$1/R_0$=0.01）

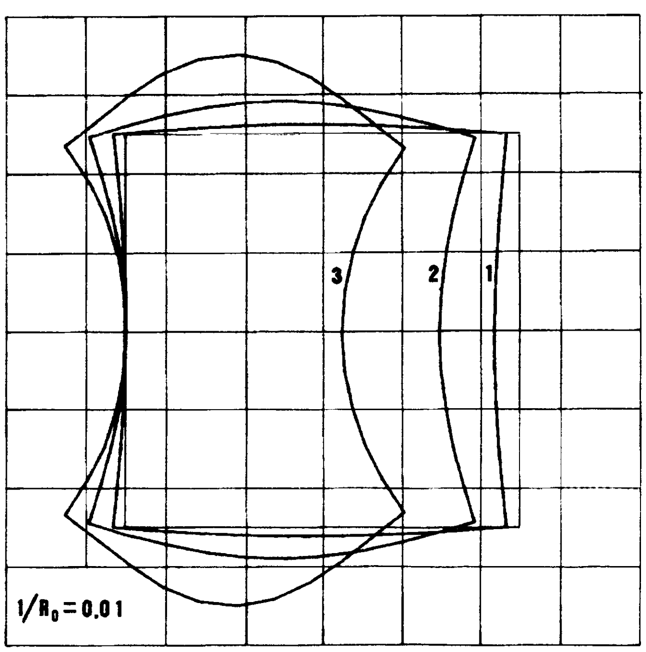


図6-13　正方形管の断面変形図（$1/R_0$=0.01）

図と応力分布図である。長手方向応力は、はじめ膜力が支配的で曲げの効果はわずかであるが、変形が進むにつれ曲げの効果が入ってくる。最大応力は、コーナのところに生ずる。次に、図6-12に示された断面形を30°回転させた断面形の曲りはり

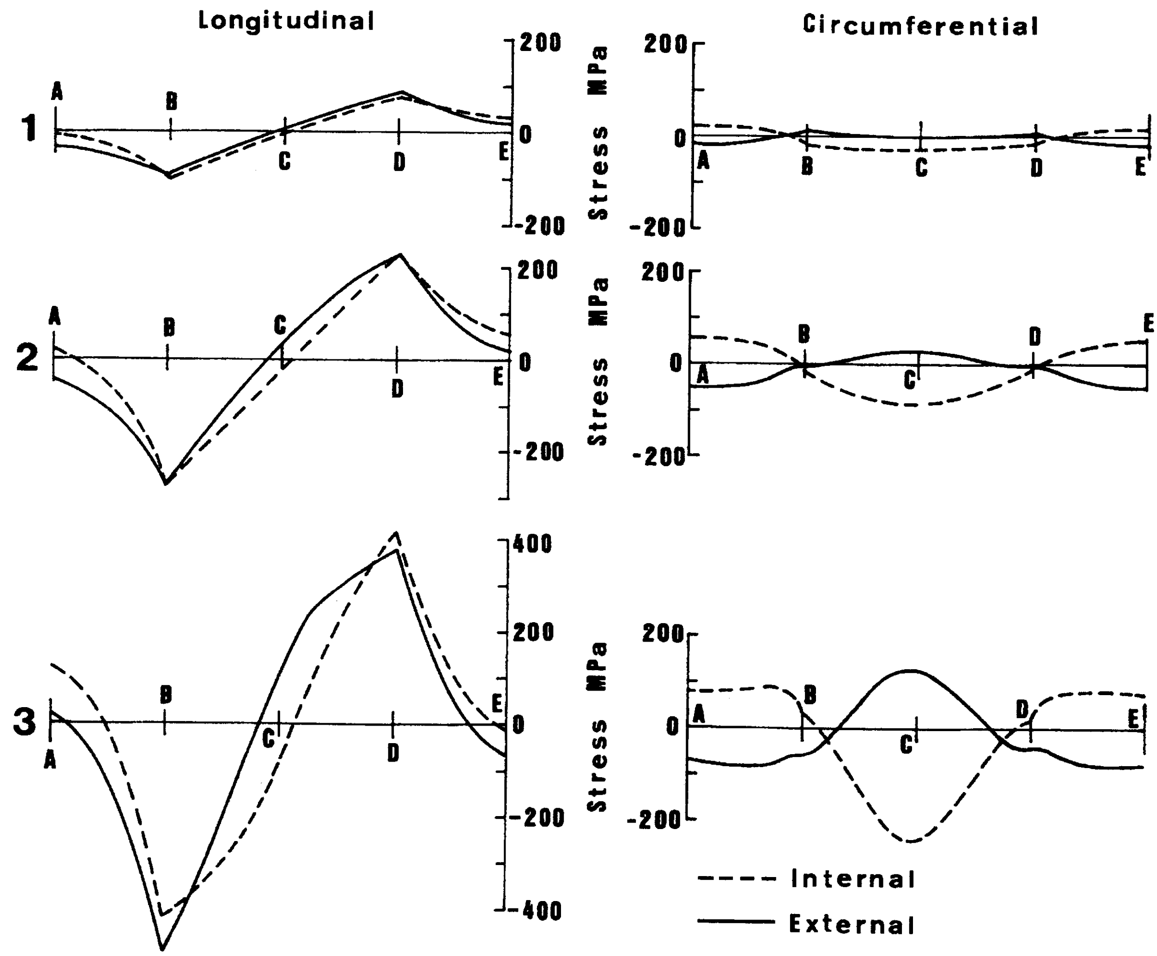


図6-14　正方形管の長手・円周方向の応力分布（$1/R_0$=0.01）

が、初曲率$1/R_0=0.01$をもつ場合について解析を行なった。図6-15は、z軸面内の曲率増分を与えてy軸・z軸まわりの曲げモーメントM、Nを求めた結果である。図6-16は、その断面変形状態を示す。

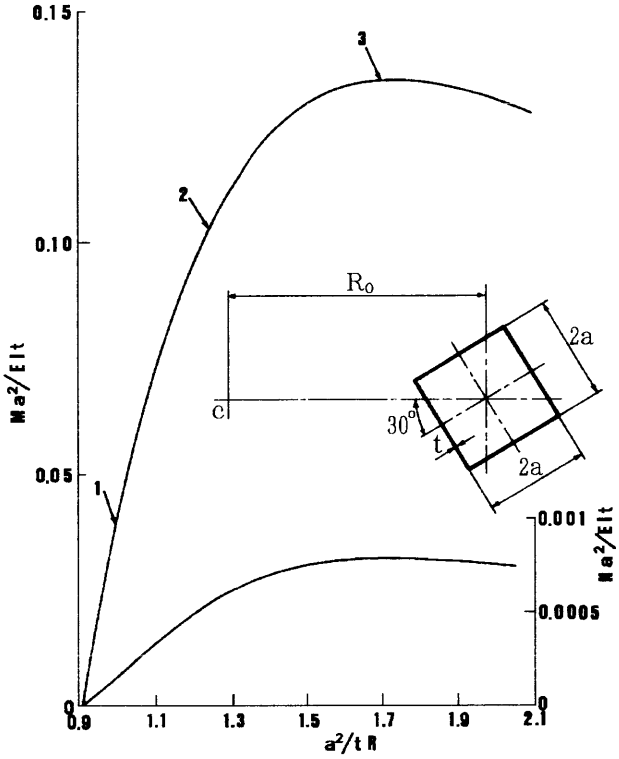


図6-15　正方形管の非対称曲げ（$1/R_0=0.01$）

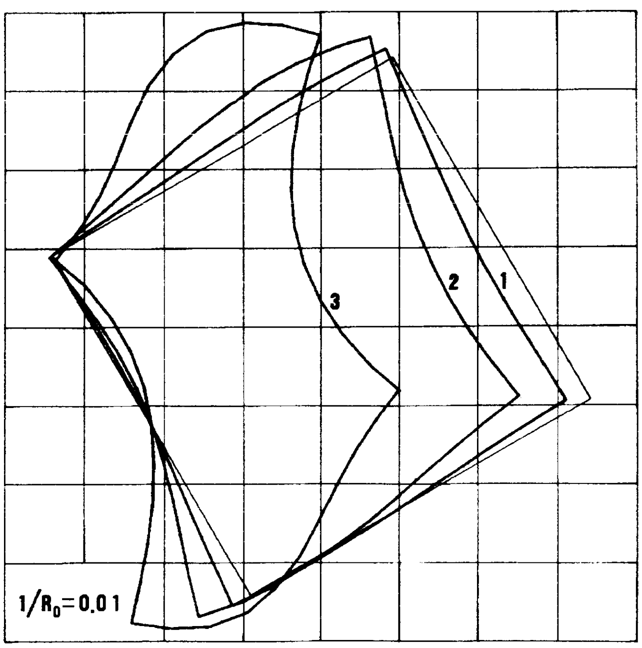


図6-16　正方形管の非対称曲げによる断面の変形（$1/R_0=0.01$）

6・6 まとめ

薄肉任意断面曲りはりの有限曲げの問題を有限要素法によって解析する方法を提案した。本章は次のように要約することができる。

(1) 任意形状断面を有する曲がりはりに対して有限曲げの解析を行なうことを目的として、利用に便利な形で増分剛性行列を導き、少ない計算労力で実用上十分な精度での解析が可能となった。

(2) 面内曲げモーメントを受ける薄肉円管のBrazier効果に対する数値解析を行ない、Brazier、ReissnerとChwallsの解析結果と比較した。その結果、本解析結果はBrazierとReissnerの結果とよく一致しており、本定式化の妥当性を示すことができた。

(3) 薄肉正方形管の主軸を含む面内での有限曲げおよび断面形を回転させ主軸と斜交する軸まわりの有限曲げの問題を解析し、本解析法が有効であることを明らかにすることができた。対称断面でも主軸と斜交する軸まわりの有限曲げや非対称断面における有限曲げについては、ここではじめて明らかにすることができた。

第７章　薄肉曲りはりの弾塑性大変形解析[86､87]

前章では、薄肉曲りはりの断面の偏平化による屈服の現象を、有限要素法を用いた増分の繰り返し手法により解析し検討した。本章では、前章で示めした解析法の拡張として、幾何学的非線形性ばかりでなく、材料非線形性をも考慮して解析する方法について述べる。

前章でも述べたように、薄肉曲りはりが曲げモーメントを受けると断面の偏平化により、同一断面の直線はりよりも小さな曲げモーメントで屈服が起こる。このような非線形挙動に対する研究は、有限要素法を用いた手法により解析されているが、ほとんど円管を対象としたものであり、まだ十分であるとはいえない。また、弾塑性問題の解析における増分形式の応力-ひずみ関係式はPrandtl-Reussの関係式を数値計算に適用しやすい形で示し、広く利用されている[88]。しかし、等方硬化則に基づくものであって、塑性の重要な特性であるBauschinger効果を表現することができない。Prager[89]やZiegler[90]らは、Bauschinger効果を表現できる移動硬化則を提案している。

ここでは、曲げを受ける薄肉曲りはりについて、幾何学的非線形性と材料非線形性の両者を考慮した有限要素法による解析法を示す。解析に用いた材料の構成式は、文献[91]で提案された有限増分塑性理論を用いた。任意の断面形状を有する薄肉曲りはりをはじめ、対称断面でも主軸と斜交する軸まわりの弾塑性大変形問題などに適用する。なお、降伏条件としてはMisesの降伏条件を使用する。

７・１　仮想仕事の原理による増分形剛性方程式

外力$\{R\}$を受けて平衡している場合の仮想仕事の原理は

$$\delta\{r\}^T\{R\}=\sum_e\delta\{s\}^T\{S\}=\sum_e\int_V\delta\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV \tag{7-1}$$

ここに、$\delta\{r\}$は仮想変位、$\delta\{\varepsilon\}$は$\delta\{r\}$による仮想ひずみである。
更に、外力を$\{R'\}=\{R\}+\{R\}$と増分を与えた場合の仮想仕事の原理は

$$\delta\{r\}^T\{R'\}=\sum_e\int_V\delta\{\varepsilon'\}^T\{\sigma'\}dV=\sum_e\int_V\delta\{\{\varepsilon\}+\{\varepsilon\}\}^T\{\{\sigma\}+\{\sigma\}\}dV \tag{7-2}$$

ひずみと変位の関係は、前章の式(6-3)、(6-4)より

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\varepsilon_k=\left(\frac{\partial\varepsilon_k}{\partial r_i}\right)_{r=0}\delta r_i\ ,\qquad \dot{\varepsilon}_k=\left(\frac{\partial\varepsilon_k}{\partial r_i}\right)_{r=0}\dot{r}_i\\
&\delta\varepsilon'_k=\delta\varepsilon_k+\delta\dot{\varepsilon}_k=\left(\frac{\partial\varepsilon_k}{\partial r_i}\right)_{r=r}\delta r_i=\left(\left(\frac{\partial\varepsilon_k}{\partial r_i}\right)_{r=0}+\left(\frac{\partial^2\varepsilon_k}{\partial r_i\,\partial r_j}\right)_{r=0}\dot{r}_j\right)\delta r_i\\
&\delta\{\varepsilon\}=[C]\,\delta\{r\},\qquad \delta\dot{\varepsilon}_k=\left(\frac{\partial^2\varepsilon_k}{\partial r_i\,\partial r_j}\right)_{r=0}\dot{r}_j\,\delta r_i=\delta\{r\}^T[B_k]\{\dot{r}\}
\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}3)$$

いま、全ひずみ増分$\{\dot{\varepsilon}\}$を弾性ひずみ増分$\{\dot{\varepsilon}^e\}$と塑性ひずみ増分$\{\dot{\varepsilon}^p\}$の和として表されるものとする。

$$\{\dot{\varepsilon}\}=\{\dot{\varepsilon}^e\}+\{\dot{\varepsilon}^p\}\qquad(7\text{-}4)$$

また、弾性ひずみ増分$\{\dot{\varepsilon}^e\}$と応力増分$\{\dot{\sigma}\}$にHooke則を仮定すると次のようになる。

$$\{\dot{\sigma}\}=[H]\{\dot{\varepsilon}^e\}=[H]\left\{\{\dot{\varepsilon}\}-\{\dot{\varepsilon}^p\}\right\}\qquad(7\text{-}5)$$

ここに、[H]は弾性係数行列である。

式(7-2)に、式(7-3)(7-5)を代入し整理すると、

$$\delta\{r\}^T\{R'\}=\delta\{r\}^T\Big\{\sum_e\int_V[C]^T\{\sigma\}dV+\sum_e\int_V[C]^T[H][C]dV\{\dot{r}\}+\sum_e\int_V\sigma_k[B_k]dV\{\dot{r}\}$$
$$-\sum_e\int_V[C]^T[H]\{\dot{\varepsilon}^p\}dV\qquad(7\text{-}6)$$

$\delta\{r\}$は任意であることから、次のような増分形の剛性方程式が得られる。

$$\left[[K_E]+[K_G]\right]\{\dot{r}\}=\{\dot{R}\}+\{Q\}+\{P\}\qquad(7\text{-}7)$$

ここに、$[K_E]$は弾性剛性行列、$[K_G]$は幾何剛性行列、$\{\dot{R}\}$は荷重増分ベクトル、{Q}は残差荷重ベクトル、{P}は塑性による見かけの荷重増分ベクトルである。これらは、それぞれ次のように書くことができる。

$$\left.\begin{aligned}
&[K_E]=\sum_e\int_V[C]^T[H][C]dV\\
&[K_G]=\sum_e\int_V\sigma_k[B_k]dV\\
&\{Q\}=\{R\}-\sum_e\int_V[C]^T\{\sigma\}dV\\
&\{P\}=\sum_e\int_V[C]^T[H]\{\dot{\varepsilon}^p\}dV
\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}8)$$

ここで、残差荷重ベクトル{Q}は、前増分ステップまでの計算結果が平衡方程式(剛性方程式)を完全に満たしていれば0になるはずであるが、一般には、各増分

ステップで高次項を省略して線形化を行なっているため0とはならない。このような{Q}を導入することによって解の精度の向上をはかることができる。また、{P}は、塑性を考慮したときに出てくる荷重項である。

計算手順は、図7-1に示すように増分段階の始めに塑性による見かけの荷重増分ベクトル{P}を仮定し、式(7-7)から節点変位を計算する。 次に、各要素について$\{\dot{S}\}$, $\{\dot{\sigma}\}$ を求め、さらに各要素内の観測点について$\{\sigma'\}=\{\sigma\}+\{\dot{\sigma}\}$を計算し降伏判定を行なう。もし塑性領域に入っていたら$\{\dot{\varepsilon}^p\}$を計算し、さらに{P}を求める。一般に、この{P}は始めに仮定した値とは一致しないので、{P}が十分収束するまで上述の手順を繰り返す。その後、次段に進む。この操作を所望の段階まで続ければよい。次段に進んだとき、連立方程式の係数行列を3角化しておけば、繰り返し計算に時間はほとんどかからない。

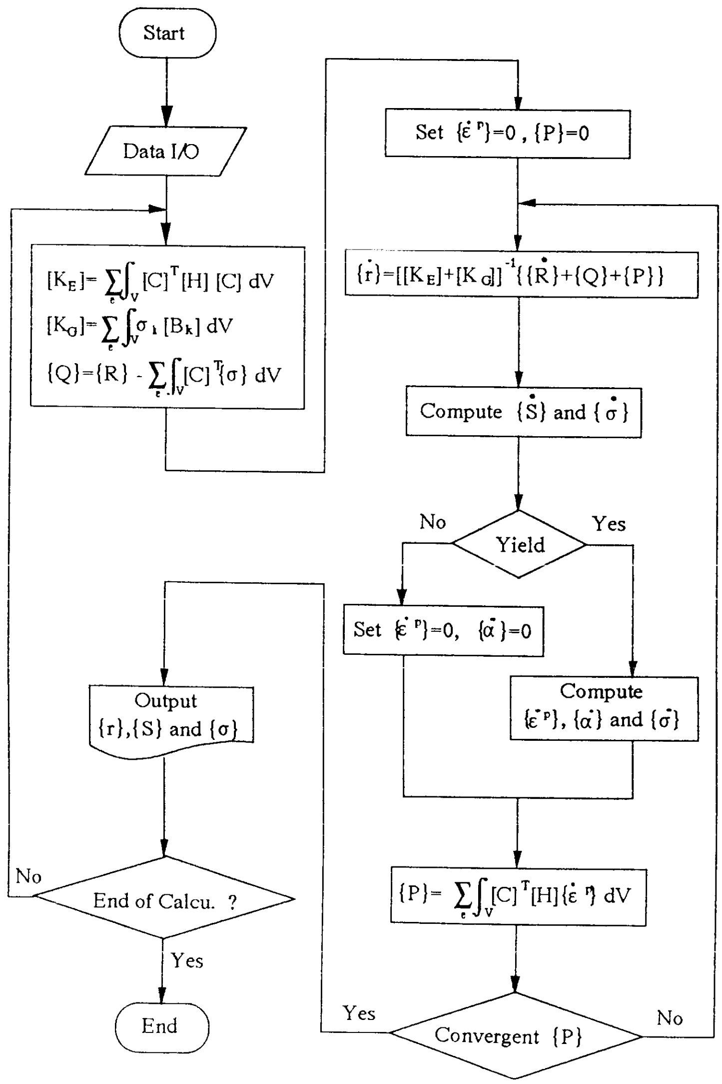


図7-1　フローチャート

7・2　塑性域での応力増分-ひずみ増分関係

降伏曲面の形が塑性変形の進行に伴ってどのように変化するかを規定する硬化則には、等方硬化則や移動硬化則があるが、PragerおよびZieglerの移動硬化則は簡単な方法でバウシンガ効果を表現できる。

移動硬化則の場合の降伏関数は次式で与えられる。

$$f\left(\{\sigma\}-\{\alpha\}\right)=k \tag{7-9}$$

ここで、kは降伏応力の大きさを表す。

この理論では、降伏曲面は硬化による形状の変化がなく、その位置の移動のみを生ずるとしている。その移動量を$\{\alpha\}$で表す。よって$\{\alpha\}$は降伏曲面の中心座標である。

降伏曲面中心の移動量$\{\dot{\alpha}\}$はZieglerの移動硬化則にしたがって図7-2に示すように、降伏曲面中心$\{\alpha\}$と降伏曲面上の応力点$\{\sigma\}$を結ぶ方向に移動させるものとする。

$$\{\dot{\alpha}\}=\mu\left\{\{\sigma\}-\{\alpha\}\right\},\qquad \mu>0 \tag{7-10}$$

いま、応力点が降伏曲面内にあり弾性状態のときには、f<kである。応力点が、降伏点に達していれば、f=kとなる。この状態において、df>0である場合、荷重負荷状態にあり、塑性ひずみ、ひずみ硬化が引き起こされる。df=0であれば中立状態にあり、同一降伏曲面上に応力点が存在し、df<0であれば除荷状態であり、ひずみ硬化は生じない。

塑性ひずみ増分は、流れ則によって降伏関数fを塑性ポテンシャルとすることにより

$$\{\dot{\varepsilon}^p\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}\lambda,\qquad \lambda\geq 0 \tag{7-11}$$

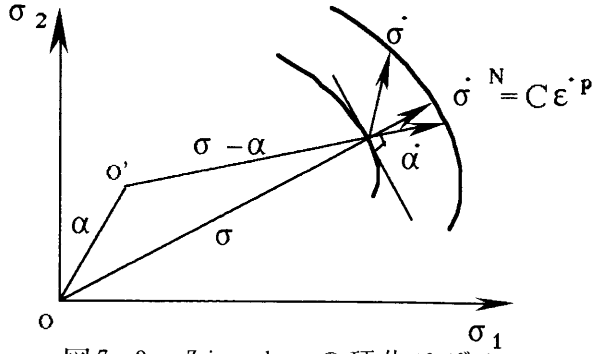


図7-2　Zieglerの硬化モデル

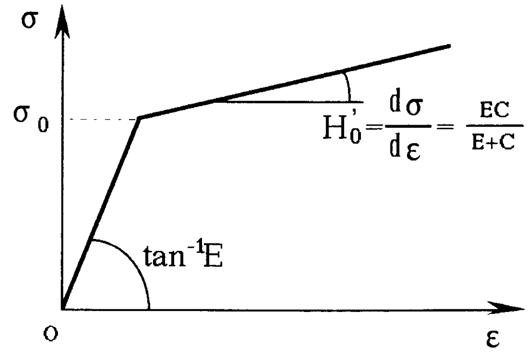


図7-3　線形硬化モデル

硬化則としては、応力増分$\{\dot{\sigma}\}$の降伏曲面に垂直な方向成分を$\{\dot{\sigma}^N\}$とし、硬化係数をCとして、次のように与えられる。

$$\{\dot{\sigma}^N\} = C\{\dot{\varepsilon}^p\} \tag{7-12}$$

ここでは、図7-3に示すような硬化モデルを考え塑性変形中Cは一定であるとする。また、$\{\dot{\sigma}\} - \{\dot{\sigma}^N\}$は降伏曲面の応力点$\{\sigma\}$での接平面上になければならないから$\partial f/\partial\{\sigma\}$と直交するので、次式が与えられる。

$$\left\{\{\dot{\sigma}\} - \{\dot{\sigma}^N\}\right\}^T \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\} = 0 \tag{7-13}$$

これらの関係式から塑性ひずみ増分$\{\dot{\varepsilon}^p\}$、降伏曲面中心の移動量$\{\dot{\alpha}\}$などを求める。

いま、弾性領域内のある応力点$\{\sigma^*\}$から塑性域の点$\{\sigma'\}$まで変化する場合を考える。そのとき、図7-4に示すように$\{\sigma^*\}$から降伏曲面上の応力点$\{\sigma\}$までは弾性変形し、$\{\sigma\}$から$\{\sigma'\}$間ではZieglerの移動硬化則により曲面を移動させながら塑性変形をすることとする。したがって、降伏曲面の中心の移動量$\{\dot{\alpha}\}$は、次のように表される。

$$\{\dot{\alpha}\} = \{\sigma'\} - \{\sigma\} = \mu\left\{\{\sigma\} - \{\alpha\}\right\} \tag{7-14}$$

一方、弾性領域内の応力点$\{\sigma^*\}$から$\{\dot{\varepsilon}\}$だけ弾性変形した場合の応力を$\{\sigma''\}$とし、それから塑性変形分を減じた応力を$\{\sigma'''\}$とする。すなわち

$$\{\sigma'''\} = \{\sigma''\} - [H]\{\dot{\varepsilon}^p\}, \qquad \{\sigma''\} = \{\sigma^*\} + [H]\{\dot{\varepsilon}\} \tag{7-15}$$

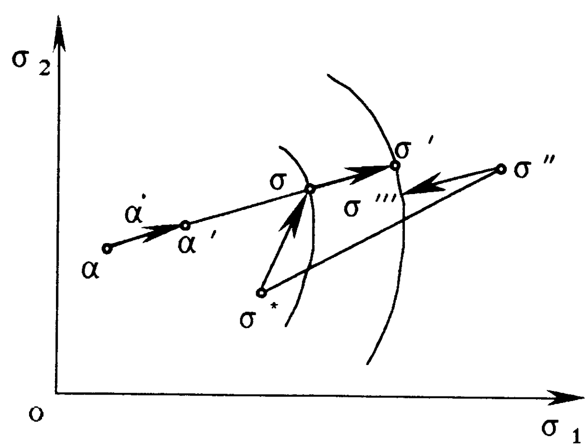


図7-4　移動硬化論

式(7-14)から得られる$\{\sigma'\}$と式(7-15)で得られる$\{\sigma'''\}$が同一面上にあるという条条によって$\{\sigma'\}=\{\sigma'''\}$となるまで反復計算を行ない$\{\sigma'\}$, $\{\dot{\varepsilon}^{p}\}$, $\{\dot{\alpha}\}$を求める。

式(7-14)におけるμは、応力増分$\{\dot{\sigma}\}$を生じた応力点が引き続き降伏曲面上にとどまっていることを考え、式(7-11)～(7-14)を整理するすることにより得られる。

$$\mu=\frac{\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{T} C \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}\lambda}{\left\{\{\sigma\}-\{\alpha\}\right\}^{T}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}} \tag{7-16}$$

また、式(7-11)におけるλは、式(7-13)に式(7-12)と式(7-4)を代入し、さらに式(7-11)と式(7-15)を代入し整理すると、次のように得られる。

$$\lambda=\frac{\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{T}\left\{\{\sigma''\}-\{\sigma^{*}\}\right\}}{\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{T}[H]\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}+\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{T} C \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}} \tag{7-17}$$

$\{\sigma^{*}\}$, $\{\dot{\varepsilon}\}$が与えられれば式(7-15)より$\{\sigma''\}$を求め、$\{\sigma\}$を仮定して式(7-17)と式(7-16)よりλ, μを求め、$\{\sigma'\}$を求める。次に$\{\sigma'\}$を通るf上の$\{\sigma\}$を求め、仮定した$\{\sigma\}$と比較して収束するまで繰り返す(図7-5)。$\{\sigma\}$を仮定する場合、$\{\sigma''\}$と$\{\alpha\}$を結ぶ線上でとる。また、式(7-17)から分かるように硬化係数Cが小さくなってもλが発散することなく安定な値が得られる。

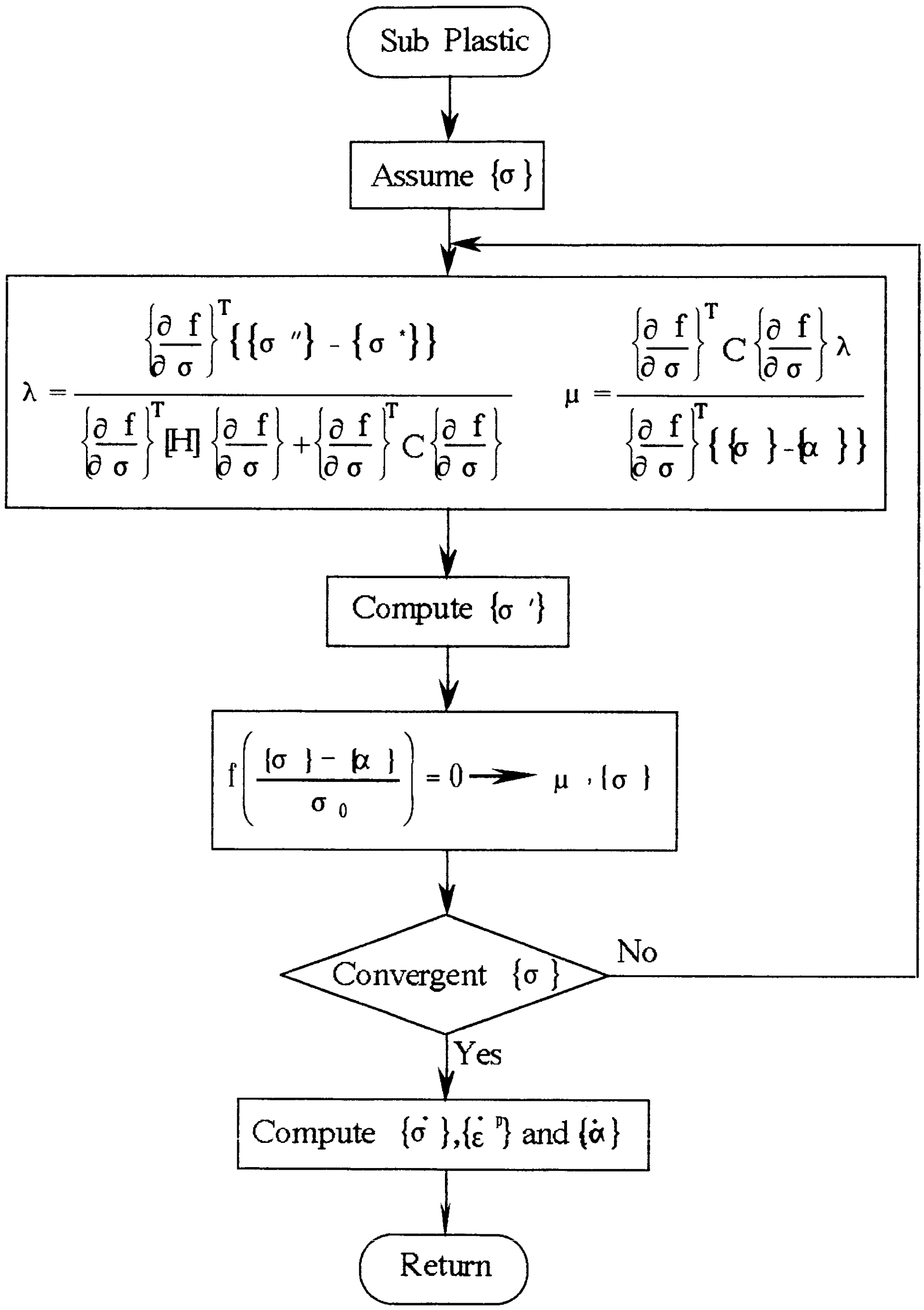


図7-5　解法アルゴリズム

7・3　数値解析例

前節までに述べた手法を用いて、曲げを受ける薄肉曲がりはりの弾塑性大変形問題の解析を行なった。計算に使用した材料定数は、次のとおりである。

ヤング率E＝68.6GPa，ポアソン比 ν ＝0.3，　降伏応力 σ_0＝245MPa

7・3・1　薄肉円管の弾塑性曲げ解析

半径a＝10mm，板厚t＝1mmの円形断面の円管を対象とし、対称性より下半分を30要素に分割して解析した。降伏判定は、各要素を板厚方向に10層に分割し各層の中央点で行ない、塑性ひずみは各層内で一定とした。図7-6は、初曲率 $1/R_0$=0.01の曲りはりにおいて硬化係数を変化させたときの曲げモーメントと曲率の関係を示

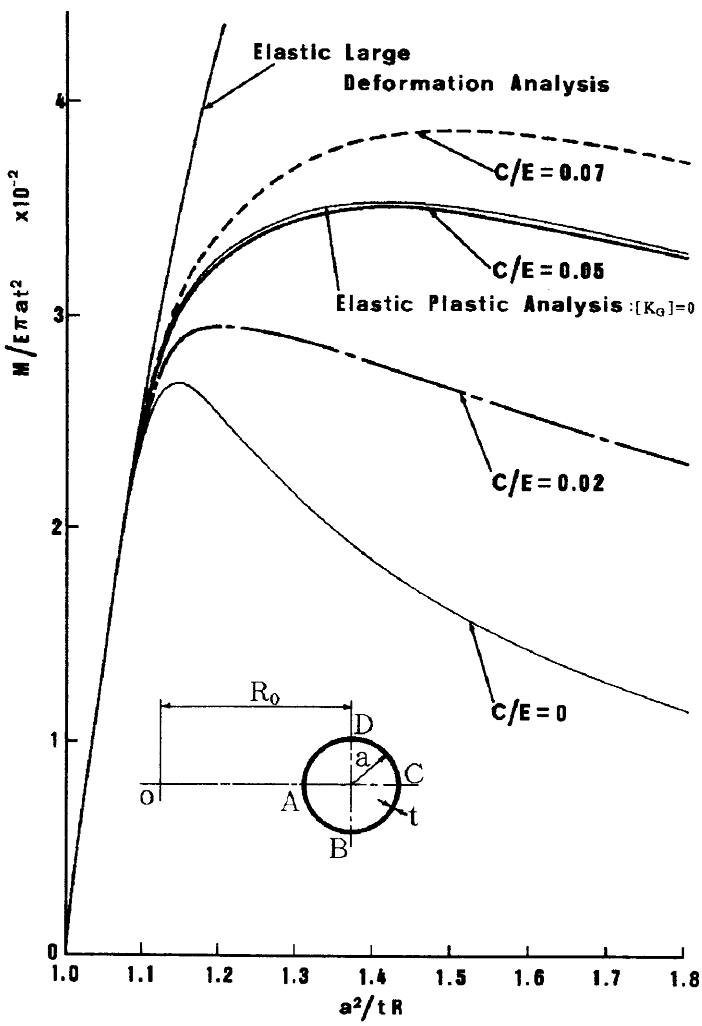
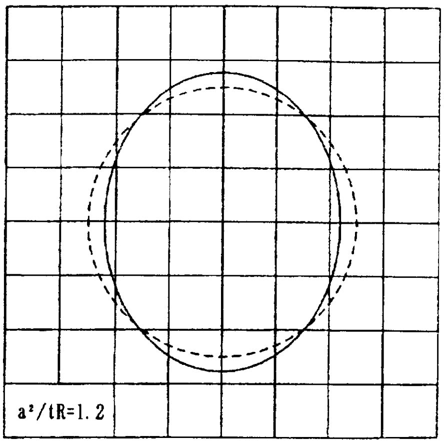
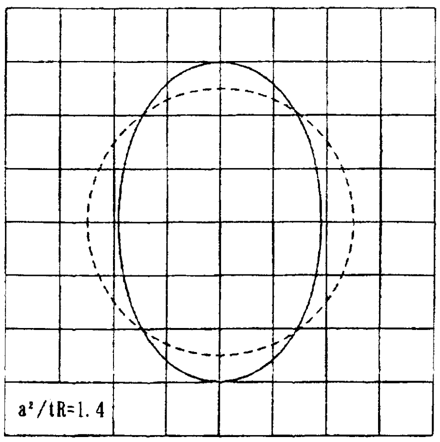


図7-6　硬化係数の影響

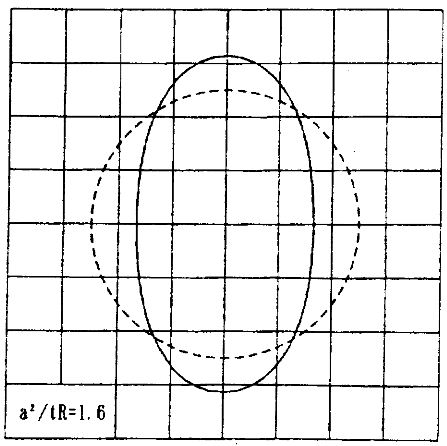
したものである。それぞれ、$E\pi at^2$とa^2/tで無次元化している。C/E=0はC/E=0.05に対して最大曲げモーメントで約24%減少している。また、C/E=0.05で大変形を考慮しない場合の弾塑性解析（$[K_G]=0$）の結果も細線で示してあるが、



（a）

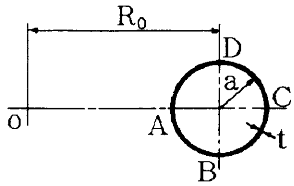


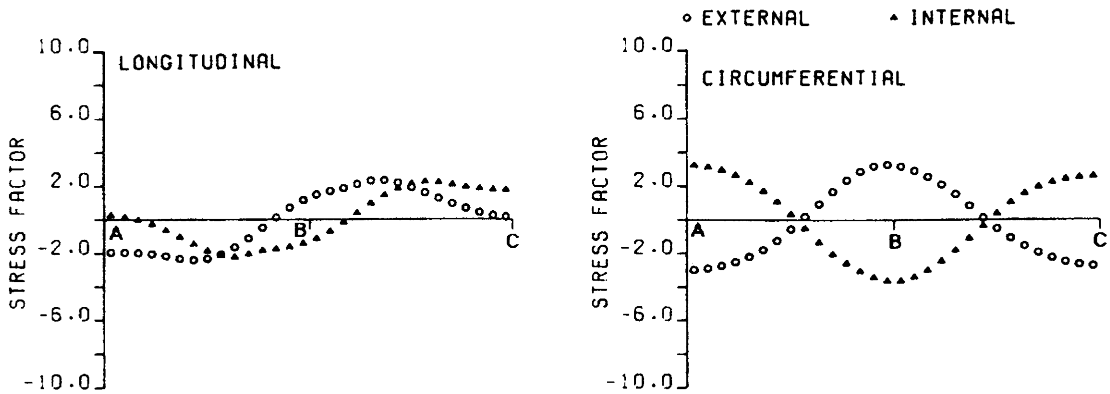
（b）



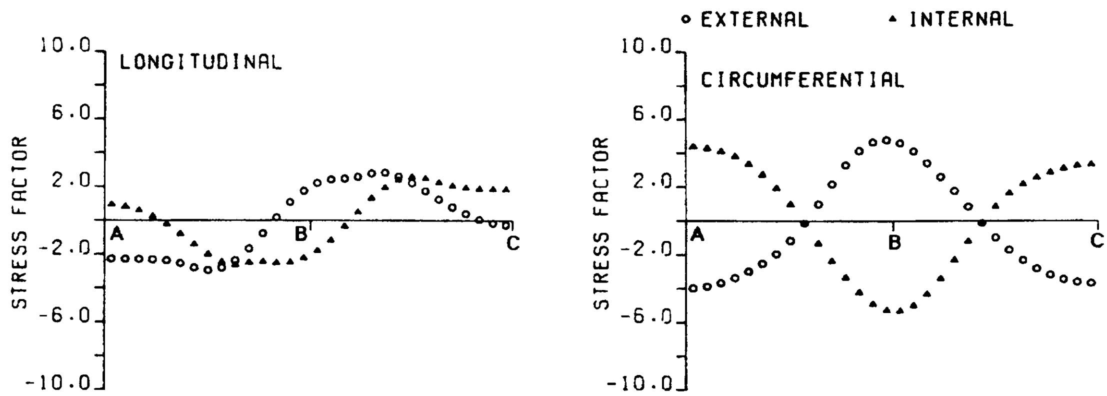
（c）

図7-7　円管の断面変形図($1/R_0=0.01$)

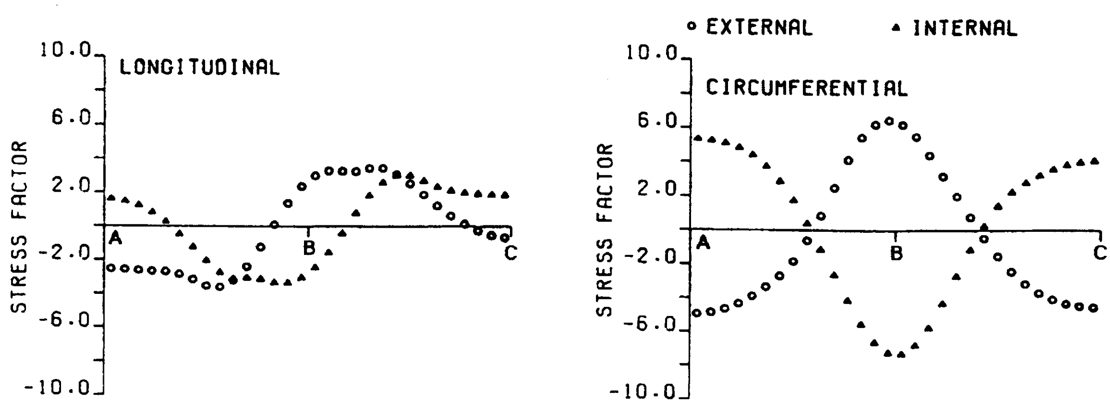




(a) $a^2/tR=1.2$



(b) $a^2/tR=1.4$



(c) $a^2/tR=1.6$

図7-8 円管の長手および円周方向の応力係数(σ/σ_n)の分布($1/R_0=0.01$)

$\sigma_n=(M/I)a$, I：断面二次モーメント

最大曲げモーメントで約1%弾塑性解析結果の方が大きくなっている。図7-7と7-8は、硬化係数C/E＝0.05の場合の断面の変形状態と長手・円周方向の応力分布を示したものである。応力分布の状態を表すために応力係数という同一断面形の直線は

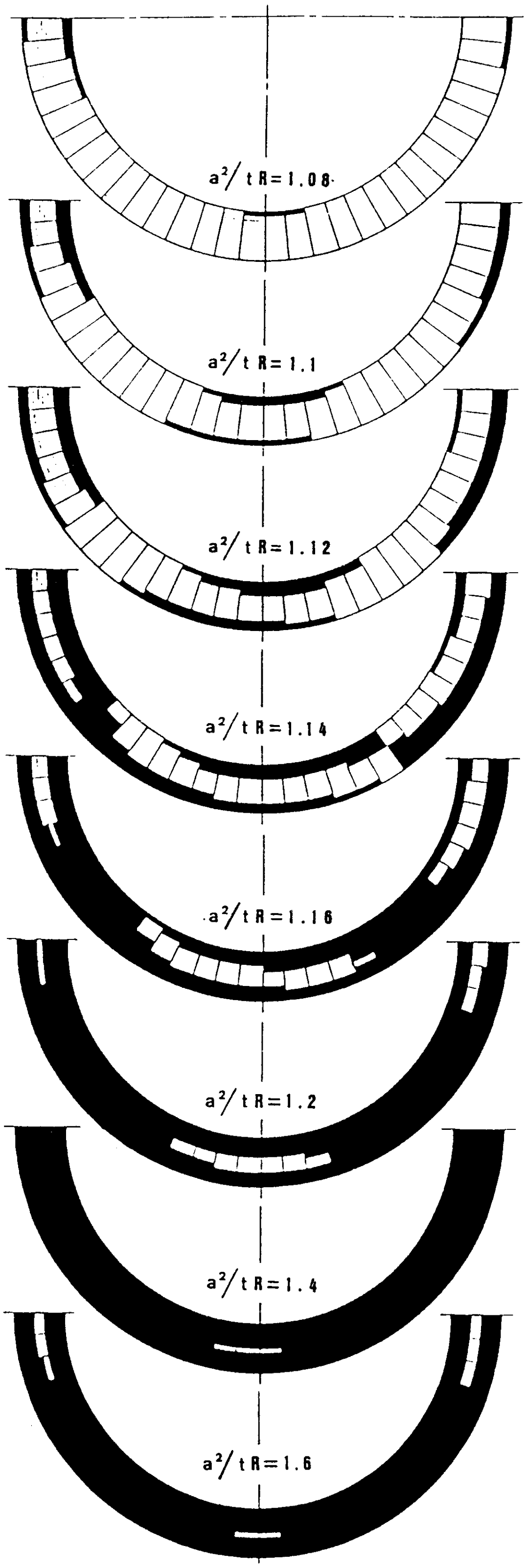


図7-9　塑性域の進展状況（$1/R_0$=0.01）

りに生ずる最大応力で無次元化した量を用いる。最大応力はB点の近傍で生じ、塑性化につれて応力係数は増加していく。この傾向は円周方向で特に顕著である。図7-9は、塑性域の進展の様子を示したものである。内外表面より進んできた塑性域が、垂直軸と約45°の近傍で合流し周方向に広がっていく。図7-10は、最大曲げモーメントと初曲率の関係を示したものである。負の初曲率をもった曲りはりは、正の初曲率をもった曲りはりより大きな曲げモーメントで屈服に至る。前章の図6-11には、塑性を考慮しない場合の最大曲げモーメントと初曲率の関係を示してあるが、塑性の効果を入れた場合には、いずれの初曲率においても約1/4の最大曲げモーメントで屈服に至ることがわかる。

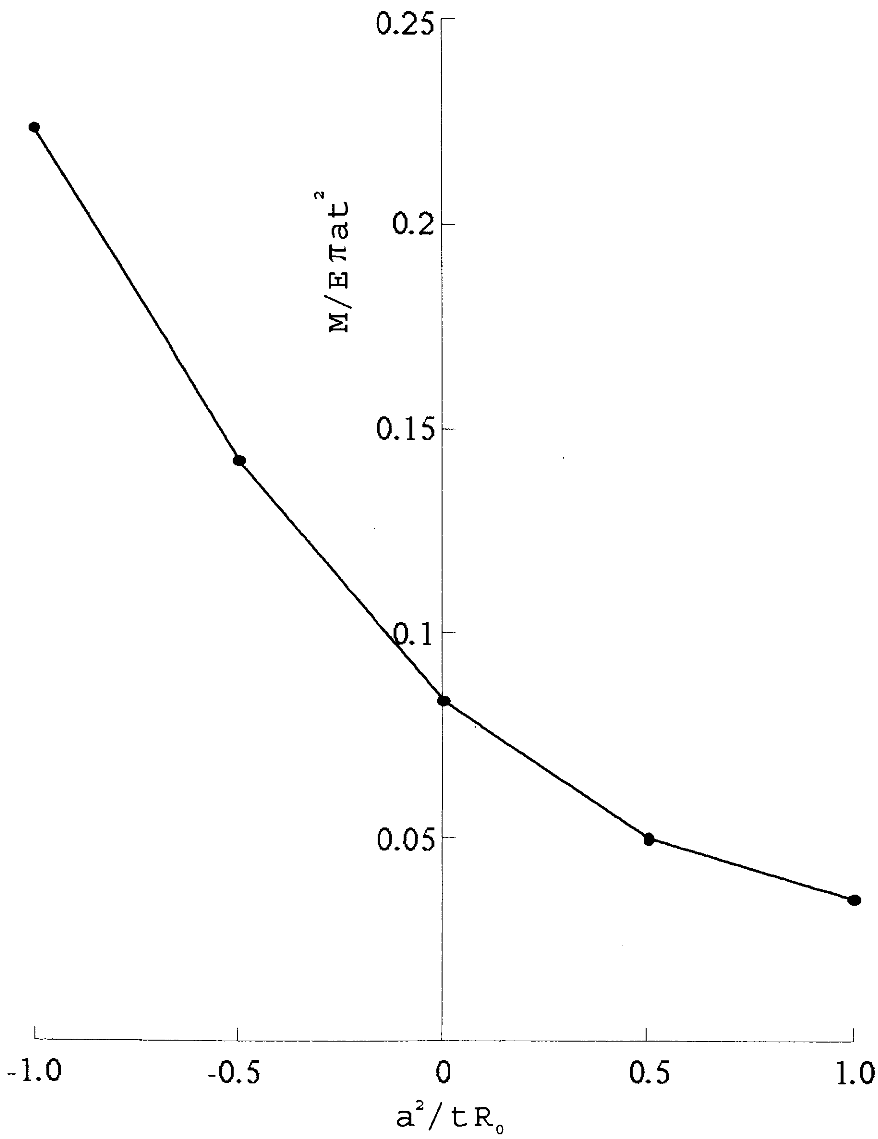


図7-10　円管の屈服モーメントの初曲率に対する変化

7・3・2　薄肉正方形管の弾塑性曲げ解析

一辺の長さ2a＝20mm、板厚t＝1mmの正方形管について解析を行なった。要素数は40とした。図7-11に、初曲率$1/R_0=0.01$の場合の曲げモーメントと曲率の関係をEIt/a^2とa^2/tで無次元化した量で示したものである。図7-12と図7-13に、断面の変形状態と応力分布図を示す。応力分布は円管の場合と同様、同一断面形の直

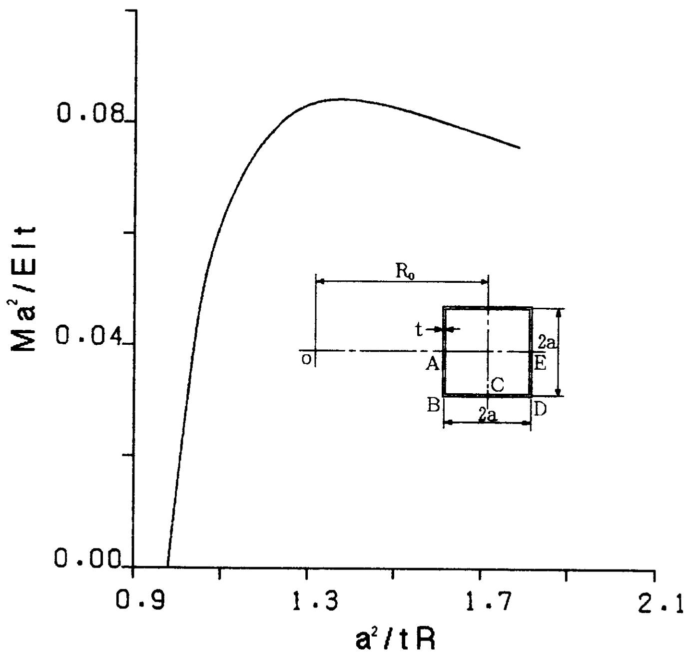


図7-11正方形管の曲げモーメントと曲率

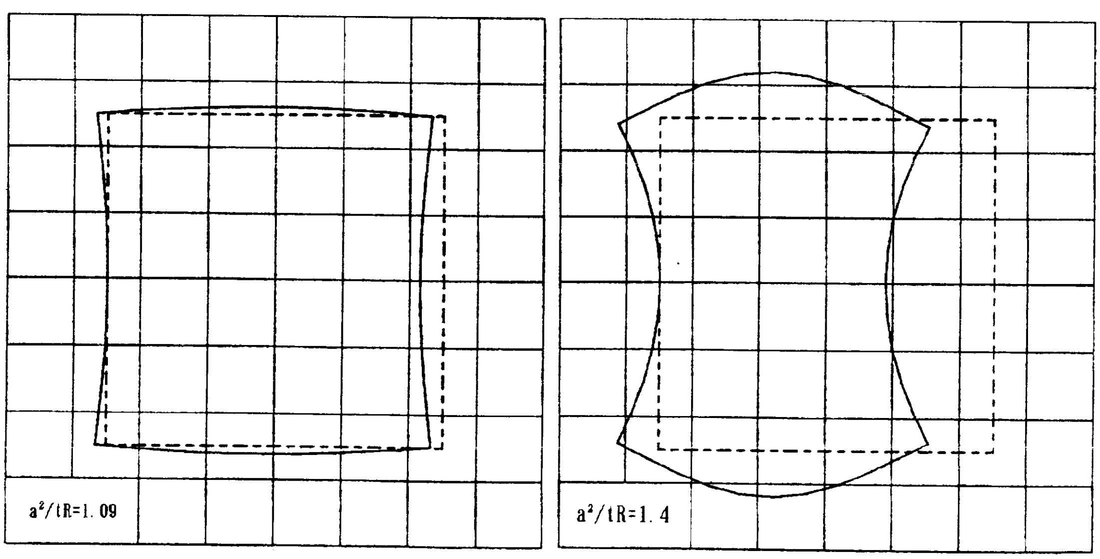
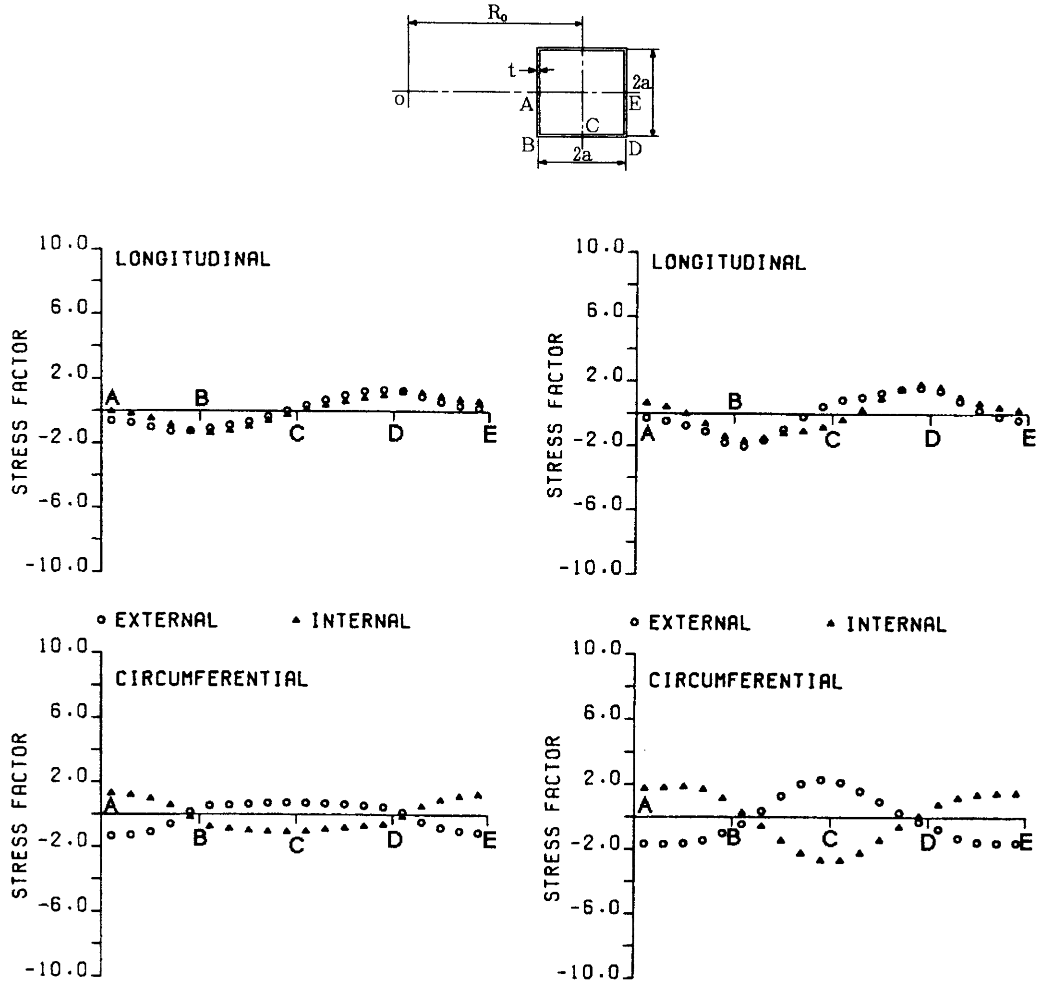


図7-12　正方形管の断面変形図$(1/R_0=0.01)$

線はりの最大応力（σ_n）で無次元化した応力係数で示してある。長手方向応力は、膜力が支配的で変形が進むにつれて曲げの効果が入ってくる。図7-14と7-15には、断面形を30°回転させた曲がりはりが初曲率$1/R_0=0.01$をもつ場合の曲げモーメントと曲率の関係および断面の変形状態を示す。



（a） $a^2/tR=1.09$　　　　（b） $a^2/tR=1.4$

図7-13　正方形管の長手・円周方向の応力係数（σ/σ_n）の分布（$1/R_0=0.01$）

$\sigma_n=(M/I)a$,　　I：断面二次モーメント

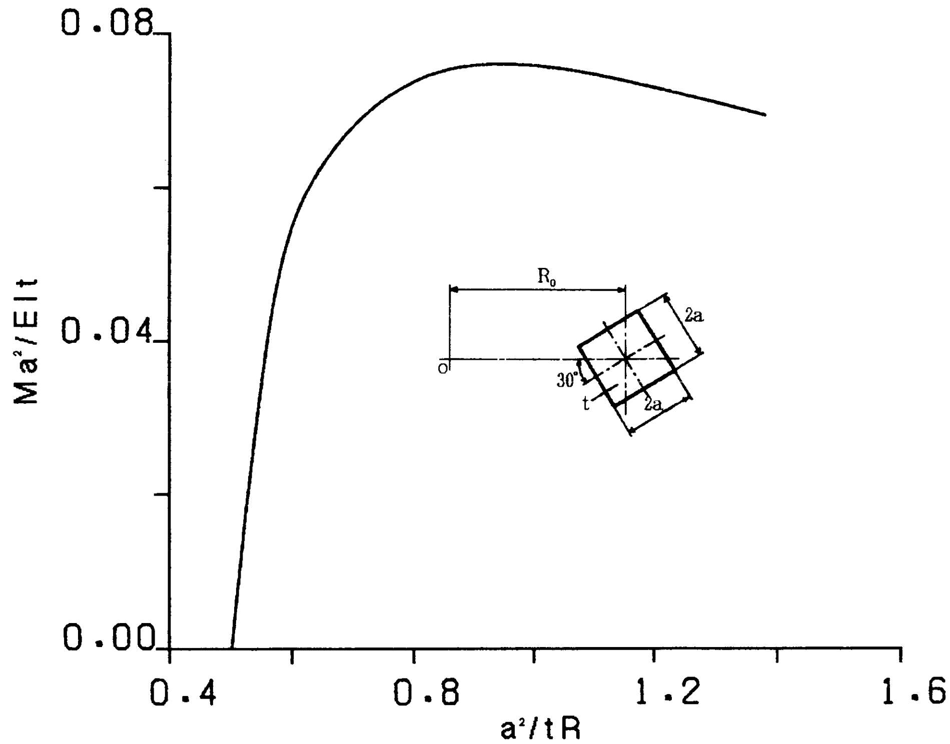
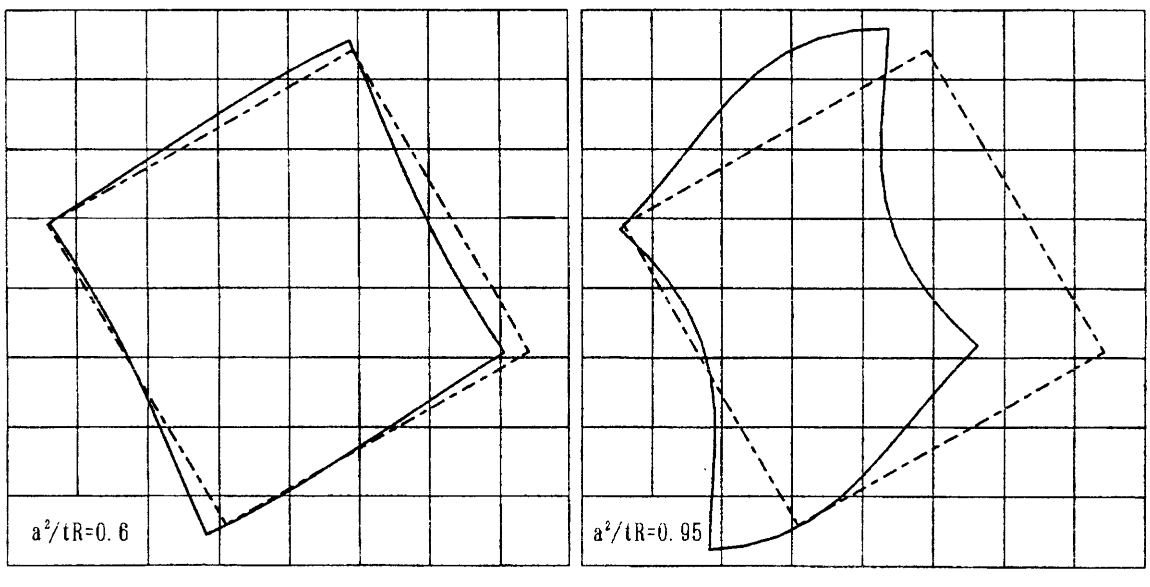


図7-14　正方形管の非対称曲げ $(1/R_0=0.01)$



（a）　　　（b）

図7-15 正方形管の非対称曲げにおける断面変形図 $(1/R_0=0.01)$

7・4　まとめ

前章において示した薄肉曲りはりの有限曲げの拡張として、幾何学的非線形性と材料非線形性の両者を考慮した有限要素法による解析法を示した。本章の内容は以下のようにまとめることができる。

（１）　任意断面形を有する薄肉曲りはりが曲げを受ける場合の弾塑性大変形問題を有限要素法を用いて解析する方法を示した。少ない計算労力で実用上十分な精度で解析を行なうことができた。

（２）　数値解析例として、曲げを受ける薄肉円管および正方形管の弾塑性解析を行なった。薄肉円管の曲げについては、内部に生ずる応力の分布および塑性域の進展の様子を明らかにすることができた。また、硬化係数の影響についても明らかにすることができた。正方形管についても、内部の応力分布などを明らかにすることができた。

（３）　材料構成式として、Prager-Zieglerモデルを採用して数値解析を行ない、実用性、有用性を明らかにすることができた。

第8章　結　　論

構造物の設計に際して考慮される主な条件は、構造物の2つの特性、いわゆる、構造の強度と構造の剛性に関するものである。今日、これら2つの特性は詳細な構造解析によって求められている。有限要素法や境界要素法による構造解析法は、はり理論や平板理論に基づいて定式化されている。しかし、Bernoulli-Eulerの仮定に基づくはり理論やKirchhoffの仮定に基づく薄板理論では、せん断変形の効果が含まれておらず、構造解析に適用する場合問題となることがある。そこで、本研究では、せん断変形を考慮したはり理論および平板理論に基づく有限要素法の定式化を行ない、これを各種問題に応用した。さらに、Brazier効果として知られている、断面の変形による剛性の低下の問題についても考え、任意の断面形をもつ曲りはりの有限曲げを解析するための実用的な手法を示した。以下に、本研究において明かとなった点をまとめ、本論文の結論とする。

第1章では、はりおよび平板理論の歴史的背景について触れ、その問題点について考えた。さらに、構造解析において盛んに行なわれている離散化モデルを対象とした数値解析法の中でも特に広く利用されている有限要素法と境界要素法について概観し、最後に本研究の内容について述べた。

第2章では、せん断変形を考慮したはり理論を、断面不変の基本的仮定を出発点として理論を展開した。第2章の内容は以下のように要約することができる。

(1)　はり理論の最大の特徴は、いわゆる一次元の棒理論であり簡単にその解が得られることである。しかるに第2章で提案したせん断変形理論では、その意味においてはり理論の特徴を損なうことなく、理論の展開ができた。

(2)　本理論の適用にあたって断面の幾何学量を有限要素法、境界要素法によって簡単に計算できる。特に境界要素法による解法では、断面の境界のみで扱うことができ合理的な解析ができる。また、せん断中心の定義が明確になった。半円断面はりを対象としてそのせん断中心を解析的に求めたが、断面内無応力の仮定に基づいて求める場合のような補正が不必要であり、簡単な計算でせん断中心を求めることができた。

（3） せん断変形を考慮した立体骨組要素の剛性行列を求めることができた。これは、曲げ変形のみを考える通常の表現を補正する形で与えられるが、これまでは平面骨組要素の場合だけが得られていた。例題として、薄肉箱形断面はりおよび矩形断面はりの曲げ問題を解析し、TimoshenkoやCowperらの結果と比較して、その精度を検討し、この定式化の妥当性を示すことができた。

（4） ポアソン方程式を境界要素法によって解く場合、一般には面積積分の項が含まれてくる。そのため、解析領域を有限要素に分割しなければならないが、ここで示したように、ポアソン方程式を満足する特解を見い出すことができれば、面積積分をすることなくラプラス方程式の解析プログラムを用いて容易に解くことができる。

（5） 動的問題への応用例として片持ちはりの自由振動問題を解析し、せん断変形の影響を明らかにすることができた。ここで用いた集中質量行列の有用性を示すことができた。

第３章では、せん断変形を考慮した曲げねじり理論について述べた。第３章はつぎのようにまとめることができる。

（6） 第３章の前半において、せん断変形をほぼ完全に取り入れたはり理論を得ることができた。これは一応、曲げ変形とせん断変形を分離した形で次のように書かれた。

$$[I]\begin{Bmatrix}\dfrac{d^2\eta^*}{dx^2}\\ \dfrac{d^2\zeta^*}{dx^2}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{Bmatrix}M_x\\ -M_y\end{Bmatrix}\quad \text{および}\quad [L]\frac{d^4\{\eta\}}{dx^4}-[G]\frac{d^2\{\eta\}}{dx^2}=\{p\}$$

{ p } は分布荷重およびモーメント

（7） 第３章の後半において、せん断変形を考慮した曲げねじり要素の剛性行列を提案し、数値解析例により、その有効性を検証した。

（8） ここでは限られた問題への適用例を示したにすぎないが、薄肉箱形断面はりおよび矩形断面はりの最大たわみはCowperの理論解とよく一致した値を示してい

る。また、直応力分布図に於ては三次元せん断変形解析結果ともよく一致している。さらに、片持ちはりの固定端付近などの直応力分布に顕著にShear-lag効果が現われている。本解析法は、はり理論を保持したうえでShear-lag解析が可能であることを示すことができた。

第４章では、非適合要素を基礎として、Mindlinの平板理論を用いた三角形板曲げ要素モデルを提案し、いくつかの解析例を示した。第４章はつぎのように要約することができる。

(9)　これまでに提案されているせん断変形を考慮した板曲げ要素においては、節点変位パラメータのほかに、内部節点をとり対応する形状関数を考えて剛性行列において消去するということがなされているが、ここで提案したせん断変形を考慮した三角形板曲げ要素の定式化は、これまでに提案された要素に比べ労力的な面などで効率的である。また、少ない要素分割数でも、実用上十分な精度の解が得られた。

(10)　これまでに提案されているMindlin理論に基づく板曲げ要素は厚板は十分に扱えるが、板厚が次第に小さくなるにつれて板の剛性を過大に評価する傾向がある。本論文で提案したMindlinの理論に基づく三角形板曲げ要素においては、等方性平板の数値解析例からも分かるように、薄板、厚板の別を問わずせん断剛性の広い範囲にわたって、剛性を過大に評価することなく良好な結果が得られた。

(11)　異方性平板および異方性表面板と異方性芯材を持つサンドイッチ平板の曲げ問題に、Mindlin理論に基づく三角形板曲げ要素を適用して解析を行ない、本解析法がこのような問題にも有効であることを数値計算例により示すことができた。

第５章では、せん断変形を考慮した平板の三角形板曲げ要素を用いて、等方性および異方性平板の自由振動特性とフラッタ特性について解析した。その内容をまとめると以下のようである。

(12)　等方性平板の固有振動数を求め、これを三次元弾性理論によって求められた厳密解と比較し、精度の良い結果を得ることができた。また、片持ち異方性平板

の固有振動解析を行い、hybrid応力法に基づく有限要素解析の結果と比較した。両者はよく一致し、本方法の有効性を示すことができた。

(13)　フラッタ解析においてモード解析法に基づく定式化を行い、等方性および異方性平板のパネルフラッタ問題を考えた。等方性平板におけるフラッタ限界値を求め、正規モード数が解に及ぼす影響を調べた。その結果、少ない正規モード数で実用上十分な精度の解が得られることがわかった。異方性平板の弾性主軸方向の変化によるフラッタ動圧パラメータの変化を、hybrid応力法に基づく有限要素モデルによる解と比較した。その結果、一部を除き両者はよく一致し、定式化の妥当性を示すことができた。

第6章では、薄肉任意断面曲りはりの有限曲げの問題を有限要素法によって解析する方法を提案した。第6章は次のように要約することができる。

(14)　任意形状断面を有する曲がりはりに対して有限曲げの解析を行なうことを目的として、利用に便利な形で増分剛性行列を導き、少ない計算労力で実用上十分な精度での解析が可能となった。

(15)　面内曲げモーメントを受ける薄肉円管のBrazier効果に対する数値解析を行ない、Brazier、ReissnerとChwallsの解析結果と比較した。その結果、本解析結果はBrazierとReissnerの結果とよく一致しており、本解析法の有効性を明らかにすることができた。

(16)　薄肉正方形管の主軸を含む面内での有限曲げおよび断面形を回転させ主軸と斜交する軸まわりの有限曲げの問題を解析し、本解析法が有効であることを明らかにすることができた。対称断面でも主軸と斜交する軸まわりの有限曲げや非対称断面における有限曲げについては、ここではじめて明らかにすることができた。

第7章では、前章において示した薄肉曲りはりの有限曲げの拡張として、幾何学的非線形性と材料非線形性の両者を考慮した有限要素法による解析法を示した。第7章の内容は以下のようにまとめることができる。

（17）　任意断面形を有する薄肉曲りはりが曲げを受ける場合の弾塑性大変形問題を有限要素法を用いて解析する方法を示した。少ない計算労力で実用上十分な精度で解析を行なうことができた。

（18）　数値解析例として、曲げを受ける薄肉円管および正方形管の弾塑性解析を行なった。薄肉円管の曲げについては、内部に生ずる応力の分布および塑性域の進展の様子を明らかにすることができた。また、硬化係数の影響についても明らかにすることができた。正方形管についても、内部の応力分布などを明らかにすることができた。

（19）　材料構成式として、Prager-Zieglerモデルを採用し数値解析を行ない、その有用性を明らかにすることができた。

謝　　辞

本論文は、名古屋大学　神谷紀生教授の懇切丁寧なるご指導を受けてまとめたものであり、また本論文の作成に際しては、名古屋大学　村上澄男教授、同　田中啓介教授から貴重なご示唆を賜わりました。ここに心から感謝の意を表します。

本研究は名古屋大学工学部航空学科構造学講座において西村　融先生（現、名古屋大学名誉教授、名城大学客員教授）のご指導のもとに手掛け、その後、これまで引き続き行なってきたものである。その間、西村　融先生からは終始懇切丁寧なるご指導を頂きました。ここに謹んで深い感謝の意を表します。

また、元名城大学教授　土井武夫先生（川崎重工業株式会社技術顧問）、同　宮入武夫先生（信州大学名誉教授）からは、終始暖かい助言と励ましを賜わったことに深く感謝申し上げます。

さらに、本研究を進めるにあたり、ご援助、ご協力を頂きました名城大学　石原荘一教授、村瀬勝彦助教授、瀧　佳弘講師に厚くお礼申し上げます。

参 考 文 献

[1] Timoshenko, S. P., "History of Strength of Materials", McGraw-Hill, 1953.

[2] Timoshenko, S. P., Young, D. H. and Weaver, W. Jr., "Vibration Problems in Engineering", 4th Ed., John Wiely & Sons, 1974.

[3] Cowper, G. R., "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 33, 1966, pp. 335-340.

[4] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., "Theory of Elasticity", 3rd Ed., McGraw-Hill, 1970.

[5] Wagner, H. und Pretschner, W., "Verdrehung und Knickung von Offenen Profilen", Luftfahrtforschung, Vol. 11, 1934, pp. 174-180.

[6] Timoshenko, S. P., "Strength of Materials:Part I & II", Van Nostrand, 1963.

[7] Vlasov, V. Z.、"Thin Walled Elastic Beams", OTS61-11400 National Science Foundation, 1961;奥村・秋山・鈴木・落合・佐伯・堀川共訳、"薄肉弾性ばりの理論"、技報堂、1967.

[8] Benscoter, S. U., "A Theory of Torsion Bending for Multicell Beam", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 21, 1954, pp. 25-34.

[9] 佐伯、"二次せん断変形を考慮した曲げねじり理論と数値計算"、土木学会論文報告集、No. 209、1973、pp. 27-36.

[10] Reissner, E., "Least Work Solutions of Shear Lag Problems", J. Aeronaut. Sci., Vol. 18, 1941, pp. 284-291.

[11] Reissner, E., "Analysis of Shear Lag in Box Beam by the Principle of Minimum Potential Energy", Q. Appl. Math., Vol. 4, 1946, pp. 268-278.

[12] 川井・藤谷、"梁理論の精密化に関する二、三の試み（その１）"、生産研究、Vol. 25, 1973, pp. 211-220.

[13] 川井・藤谷、"梁理論の精密化に関する二、三の試み（その２）"、生産研究、Vol. 25, 1973, pp. 265-277.

[14] 川井・藤谷、"梁理論の精密化に関する二、三の試み（その３）"、生産研究、Vol. 25, 1973, pp. 361-372.

[15] 川井・藤谷、"梁理論の精密化に関する二、三の試み（その４）"、生産研究、

Vol.25, 1973, pp.479-490.

[16] 川井・藤谷、"梁理論の精密化に関する二、三の試み（その５）"、生産研究、Vol.26, 1974, pp.202-216.

[17] Brazier,L.G., "On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and Other 'Thin' Sections", Proc. Roy. Soc., Vol.116, 1927, pp.104-114.

[18] Bijlaard,P.P. and Fisher,G.P., "Interaction of Column and Local Buckling in Compression Members", NACA Tech. Note 2640, Mar., 1952.

[19] 尾崎、"折板構造解析による単一箱桁の曲げねじりについて"、土木学会論文報告集、No.179、1970, pp.1-12.

[20] 奥村・坂井、"薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析に関する一方法とその応用"、土木学会論文報告集、No.176、1970, pp.43-59.

[21] Todhunter,I. and Pearson,K., "A History of the Theory of Elasticity 1,2", Dover Publications, 1960.

[22] Huber,M.T., "Die Theorie der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten", Bauingenieur, Vol.4, 1923, pp.354-360.

[23] Reissner,E., "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates",Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol.12, 1945, A69-A77.

[24] Reissner,E., "On Bending of Elastic Plates", Q. Appl. Math., Vol.5, 1947, pp.55-68.

[25] Mindlin,R.D., "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol.18, 1951, pp.31-38.

[26] Nelson,R.B. and Lorch,D.R., "A Refined Theory for Laminated Orthotropic Plates",Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol.41, 1974, pp.177-183.

[27] Reissner,E., "On Transverse Bending of Plates,Including the Effect of Transverse Shear Deformation", Int. J. Solids Struct., Vol.11, 1975, pp.569-573.

[28] Lo,K.H., Christensen,R.M. and Wu,E.M., "A High-Order Theory of Plate Deformation -Part 1:Homogeneous Plates", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol.44, 1977, pp.663-668.

[29] Deshmukh,R.S. and Archer,R.R., "Numerical Solution of Moderately Thick

Plates", Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., Vol.100, EM5, 1974, pp.903-917.

[30] Igarashi,S. and Takizawa,E.I., "On the Equation of Deflection of a Thick Plate", Ing. Arch., Vol.54, 1984, pp.465-475.

[31] 古賀・遠藤、"弾性平板の高次理論への試み"、日本機械学会論文集（Ａ編）、48巻、1982、pp.818-826.

[32] Smith,Ian M., "A Finite Element Analysis for 'Moderately Thick' Rectangular Plates in Bending", Int. J. Mech. Sci., Vol.10, 1968, pp.563-570.

[33] Pryor,Jr,C.W., Barker,R.M. and Frederick,D., "Finite Element Bending Analysis of Reissner Plates", Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., Vol.96, EM6, 1970, pp.967-983.

[34] Clough,R.W. and Felippa,C., "A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending", Proc. 2nd. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio,1968, pp.399-439.

[35] Zienkiewicz,O.C., Taylor,R.L. and Too,J.M., "Reduced Integration Techniques in General Analysis of Plate and Shells", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.3, 1971, pp.275-290.

[36] Pawsey,S.E. and Clough,R.W., "Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements",Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.3, 1971, pp.575-586.

[37] Spilker,R.L. and Munir,N.I., "A Serendipity Cubic-Displacement Hybrid-Stress Element for Thin and Moderately Thick Plates",Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.15, 1980, pp.1261-1278.

[38] Hughes,T.J.R. and Cohen,M., "The Heterosis Finite Element for Plate Bending", Comput. & Struct., Vol.9, 1978, pp.445-450.

[39] Dobyns,A.L., "Analysis of Simply-Supported Orthotropic Plates Subjected to Static and Dynamic Loads", AIAA J., Vol.19, 1981, pp.642-650.

[40] Murthy,M.V.V., "An Improved Transverse Shear Deformation Theory for Laminated Anisotropic Plates", NASA Technical Paper 1903, 1981.

[41] Reddy,J.N., "A Refined Shear Deformation Theory for the Analysis of Laminated Plates", NASA Contractor Report 3955, 1986.

[42] Reddy,J.N. and Liu,C.F., "A High-Order Theory for Geometrically Non-linear Analysis of Composite Laminates", NASA Contractor Report 4056, 1987.

[43] Lo,K.H., Christensen,R.M. and Wu,E.M., "A High-Order Theory of Plate Deformation - Part 2:Laminated Plates", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol.44, 1977, pp.669-676.

[44] Lo,K.H., Christensen,R.M. and Wu,E.M., "Stress Solution Determenation for High Order Plate Theory", Int. J. Solid Struct., Vol.14, 1978, pp.655-662.

[45] Rehfield,L.W. and Valisetty,R.R., "A Simple, Refined Theory for Bending and Stretching of Homogeneous Plates", AIAA J., Vol.22, 1984, pp.90-95.

[46] 加藤・古賀、"直交異方性板の高次理論（第1報）定式化"、日本航空宇宙学会誌、37巻、1989、pp.485-491.

[47] 加藤・古賀、"直交異方性板の高次理論（第2報）応用"、日本航空宇宙学会誌、37巻、1989、pp.535-543.

[48] Hrennikoff,A., "Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol.8, 1941, A169-A175.

[49] Turner,M.J., Clough,R.W., Martin,G.C. and Topp,L.J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", J. Aeron. Sci., Vol.23, 1956, pp.805-823.

[50] Zienkiewicz,O.C. and Cheung,Y.K., "The Finite Element Method for Analysis of Elastic, Isotropic and Orthotropic Slabs", Proc. ICE, Vol.28, 1964, pp.471-488.

[51] Zienkiewicz,O.C., "The Finite Element Method", McGraw-Hill, 1977.

[52] Finlayson,B.A., "The Method of Weighted Residuals and Variational Principles", Academic Press, 1972;鷲津・山本・川井共訳、重みつき残差法と変分原理' 培風館、1974.

[53] Brebbia,C.A., "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, 1978.;神谷・田中・田中共訳、"境界要素法入門"、培風館、1980.

[54] 加島・西村、"はり理論におけるせん断変形について"、日本機械学会論文集（A編）、54巻、1988、pp.1233-1239.

[55] 加鳥・西村、“はりのせん断変形について（サンブナンの問題）”、日本設計工学会会誌、23巻、1988、pp.352-358.

[56] 加鳥・西村、“はりのせん断とねじれ連成変形の境界要素法による解析”、日本機械学会論文集（A編）、55巻、1989、pp.2465-2468.

[57] Katori,H. and Nishimura,T., “A Boundary Element Analysis of Coupled Shearing and Torsional Deformation of Beams", Software for Engineering Workstations, in press.

[58] 加鳥、“質量行列の評価について（棒およびはり要素の場合）”、日本機械学会論文集（A編）、57巻、1991、pp.2134-2139.

[59] 鷲津・宮本・山田・山本・川井共編、“有限要素法ハンドブック I 基礎編”、培風館、1981.

[60] 神谷・佐脇、“St.Venant問題の境界解法システム”、日本機械学会論文集（A編）、51巻、1985、pp.510-513.

[61] 西田、“応力集中”、森北出版、1967.

[62] 山崎・彦坂、“構造解析の基礎”、共立出版、1978.

[63] 川井、“マトリックス法振動および応答；コンピュータによる構造工学講座”、培風館、1970.

[64] 加鳥・西村、“せん断変形を考慮したはりの曲げねじり理論”、日本機械学会論文集（A編）、55巻、1989、pp.2469-2474.

[65] 加鳥・西村、“異方性平板のせん断たわみ”、日本機械学会論文集（A編）、58巻、1992、pp.133-139.

[66] Katori,H. and Nishimura,T., “Non-Conforming Triangular Finite Element Based on Mindlin Plate Theory", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., in press.

[67] 加鳥・西村、“異方性面板を有するサンドイッチ平板の有限要素解析”、日本機械学会中国四国支部第30期総会講演会講演集、1992、pp.37-39.

[68] Salerno,V.L. and Goldberg,M.A., “Effect of Shear Deformations on the Bending of Rectangular Plates", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol.27, 1960, pp.54-58.

[69] Reddy,J.N., “A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation", Int. J. Solids Struct., Vol.20, 1984, pp.881-896.

[70] 浅井・横山、“弾性主軸方向が任意の直交異方性矩形板のたわみ、座屈および固有振動数”、東洋大学工学部研究報告、17号、1981、pp.65-74.

[71] 浅井、“直交異方性楕円板のたわみ、固有振動数および超音速パネルフラッタ”、日本航空宇宙学会誌、25巻、1977、pp. 248-256.

[72] Yen, K. T., Gunturkun, S. and Pohle, F. V, “Deflections of Simply Supported Rectangular Sandwich Plate Subjected to Transverse Loads”, NACA Tech. Note 2581, Dec., 1951.

[73] 加島・西村、“異方性平板の振動および動的安定性　（自由振動およびパネルフラッタ）”、日本機械学会論文集（C編）、58巻、1992、pp. 330-334.

[74] Olson, M. D., “Some Flutter Solutions Using Finite Elements”, AIAA J., Vol. 8, 1970, pp. 747-752.

[75] Sander, G., Bon, C. and Geradin, M., “Finite Element Analysis of Supersonic Panel Flutter”, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 7, 1973, pp. 379-394.

[76] Srinivasan, R. S. and Babu, B. J. C., “Flutter Analysis of Cantilevered Quadrilateral Plates”, J. Sound Vib., Vol. 98, 1985, pp. 45-53.

[77] Srinivasan, R. S., Rao, C. V. J. and Rao, A. K., “An Exact Analysis for Vibration of Simply-Supported Homogeneous and Laminated Thick Rectangular Plates”, J. Sound Vib., Vol. 12, 1970, pp. 187-199.

[78] Rossettos, J. N. and Tong, P., “Finite-Element Analysis of Vibration and Flutter of Cantilever Anisotropic Plates”, Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 41, 1974, pp. 1075-1080.

[79] 加島・西村、“薄肉曲りばりの有限曲げ”、日本機械学会論文集（A編）、51巻、1985、pp. 123-131.

[80] Katori, H. and Nishimura, T., “Finite Bending of Curved Beam with Thin Wall Cross Section”, Bulletin of JSME, Vol. 28, 1985, pp. 1845-1852.

[81] Chwalla, E., “Reine Biegung schlanker, dunnwandiger Rohre mit gerader Achse”, Zeit. Angew. Math. Mech., Vol. 13, 1933, pp. 48-53.

[82] Reissner, E., “On Finite Bending of Pressurized Tubes”, Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 26, 1959, pp. 386-392.

[83] Reissner, E., “On Finite Pure Bending of Curved Tubes”, Int. J. Solids Struct., Vol. 17, 1981, pp. 839-844.

[84] 瀧・西村、“薄肉断面曲線梁の曲げ剛性について”、日本航空宇宙学会誌、26巻、1978、pp. 215-223.

[85] 大坪・渡部、“リング要素による曲管の応力解析”、日本機械学会論文集、40巻、1976、pp. 3037-3050.

[86] 加鳥・西村、“薄肉曲りばりの弾塑性大変形解析”、日本機械学会論文集（Ａ編）、54巻、1988、pp. 163-169.

[87] Katori, H. and Nishimura, T., “Numerical Analysis of Elastic-Plastic Bending of Curved Beams with Thin-Walled Cross Section”, Thin-Walled Struct., in contribution.

[88] 山田、“塑性・粘弾性：コンピュータによる構造工学講座”培風館、1972.

[89] Prager, W., “The Theory of Plasticity:A Survey of Recent Achievements”, Inst. Mech. Eng., Vol. 169, 1955, pp. 41-57.

[90] Ziegler, H., “A Modification of Prager's Hardening Rule”, Q. Appl. Math., Vol. 17, 1959, pp. 55-65.

[91] 西村・瀧、“歪硬化材料の有限増分塑性理論とアルゴリズム”、第17回構造強度に関する講演会講演集、1975、pp. 165-168.