

三次元弾性理論の厚肉円筒シェルへの
応用に関する研究

山 田 耕 司

三次元弾性理論の厚肉円筒シェルへの応用に関する研究

山田耕司

目次

1	序	5
1.1	研究の意義と目的	5
1.2	論文の概要	5
1.3	記号	6
I	線形解析	9
2	三次元線形弾性理論の基礎式	11
2.1	はじめに	11
2.2	三次元等方弾性体の基礎式	11
2.3	解析手法の分類	12
2.3.1	ポテンシャル解法の欠点	12
2.3.2	変位ポテンシャルを用いた方法	12
2.3.3	ガラーキネクトルを用いた方法	13
2.3.4	体積歪を補助パラメータとする方法	14
2.4	各解析手法の比較	16
2.4.1	波の伝播問題	16
2.4.2	静的問題(物体力の働かない場合)	17
2.4.3	静的問題(物体力が作用する場合)	19
2.5	円筒シェルへの適用	20
2.5.1	円筒座標系における諸式	20
2.5.2	任意表面力に対する解	21
2.5.3	せん断力と曲げモーメントが作用する場合	25
2.6	本章のまとめ	27
3	円筒シェルの一般解	29
3.1	はじめに	29
3.2	既往の研究	29
3.3	一般解の定義と基礎式	30
3.3.1	一般解の定義	30
3.3.2	円筒座標系における諸式	31
3.3.3	変数分離	31
3.4	周方向にフーリエ展開した場合の一般解	35
3.4.1	変位が軸方向にべき級数で表される解	35
3.4.2	変位が軸方向に指数関数で表される解	39

3.4.3	まとめ	58
3.5	軸方向にフーリエ展開した場合の一般解	60
3.5.1	変位が周方向にべき級数で表される解	60
3.5.2	変位が周方向に三角関数で表される解	61
3.5.3	変位が周方向に指数関数で表される解	63
3.5.4	まとめ	75
3.6	本章のまとめ	75
4	シェル理論との比較	77
4.1	はじめに	77
4.2	周方向フーリエ展開した場合の一般解の比較	77
4.2.1	変位が軸方向にべき級数で表される解の比較	77
4.2.2	変位が軸方向に指数関数で表される解の比較	79
4.2.3	一般解の構成	86
4.3	軸方向フーリエ展開した場合の一般解の比較	88
4.3.1	変位が周方向にべき級数で表される解の比較	88
4.3.2	変位が周方向に三角関数で表される解の比較	89
4.3.3	変位が周方向に指数関数で表される解の比較	90
4.3.4	一般解の構成	100
4.4	有限長の円筒シェルの解析	101
4.4.1	端部境界条件	101
4.4.2	用いる解	101
4.4.3	解析例	101
4.5	本章のまとめ	110
5	有限長の円筒シェルの三次元理論解	111
5.1	はじめに	111
5.2	三次元理論解を用いた解析方法	111
5.2.1	解析レベルの設定	111
5.2.2	選点法による解析	112
5.2.3	ガラーキン法による解析	117
5.2.4	両解法の比較	120
5.3	有限要素法で得られる解との比較	121
5.3.1	解析対象と解析条件	121
5.3.2	有限要素法の解析モデル	121
5.3.3	解析結果	122
5.4	シェル支持端における拘束条件の特性解の重みへの影響	126
5.5	本章のまとめ	128
6	線形解析のまとめ	129
II	幾何学的非線形解析	131

7	幾何学的非線形理論の基礎	133
7.1	はじめに	133
7.2	解析のための諸式	134
7.2.1	記号	134
7.2.2	基本量の関係	134
7.2.3	微小ベクトルと微小面積	135
7.3	釣り合い式の導入	136
7.3.1	釣合式、歪、構成式	136
7.3.2	第二 Piola-Kirchhoff 応力テンソル	136
7.3.3	理論解析のための釣合式	137
7.4	歪エネルギーを変分した式との対応	137
7.5	本章のまとめ	138
8	円筒シェルの幾何学的非線形解析	139
8.1	円筒座標系における基礎式	139
8.1.1	解析対象	139
8.1.2	基本関係式の物理成分表示	140
8.1.3	解の精度と近似解	141
8.2	純曲げの働く円筒シェルの幾何学的非線形解析	143
8.2.1	はじめに	143
8.2.2	解析対象	143
8.2.3	解析	144
8.2.4	シェル理論に基づく解析との比較	154
8.2.5	今回の解析で得られた解の特徴	156
8.2.6	塑性座屈と局部座屈	158
8.3	横せん断力の働く円筒シェルの幾何学的非線形解析	160
8.3.1	はじめに	160
8.3.2	解析対象	160
8.3.3	解析	161
8.3.4	楕円化について	171
8.3.5	楕円化を考慮した局部座屈の発生予測	172
8.4	本章のまとめ	180
9	幾何学的非線形解析のまとめ	181
10	結論	183
	参考文献	185
	発表論文リスト	187
	謝辞	189
	付録	190
A	周方向フーリエ展開次数 $n \geq 2$ の膜応力解	191

B	せん断力が作用する円弧の解析	195
C	軸方向フーリエ展開 $\omega_0 = 0$ の場合の特性値	201
D	シェル理論による一般解	203
D.1	法線保持を仮定したシェル理論	203
D.1.1	仮定	203
D.1.2	円周座標系におけるシェルの基本式	203
D.1.3	膜応力解	205
D.1.4	曲げ応力解	208
D.2	せん断変形を考慮したシェル理論(曲げ応力解)	210
E	幾何学的非線形性を考慮した三次元理論解析における円筒の楕円化の種類	215

第 1 章

序

1.1 研究の意義と目的

近年、原子力発電用の圧力容器、深海作業艇の耐圧壁、大深度地下構造物の外壁など、非常に大きな強度と高い安全性を求められる構造物の需要が増加してきている。これらの構造物は強度上の要求からシェル状構造物となることが多く、その厚さも今まで用いられているシェルに比べかなり厚肉のものとなっている。このような厚肉シェル状構造物の解析に用いることのできる方法には、古典的なシェル理論に基づく理論解析法のほか、有限要素法などに代表される離散化数値解析法がある。後者の場合、要素データの作成の労力や計算時間の増大を厭わなければ、三次元物体としての解析も可能であり、幾何学のおよび材料的非線形性を考慮した解析も困難ではない。

しかし、有限要素法などの数値解析法により得られた解は、要素内の仮定関数の次数と解析領域の要素分割数の影響を受けやすい。当然解析を行う個々の場合に対応して適正な要素分割を行い、適正な仮定関数を用いれば良いわけではあるが、それらを行うには経験が必要となる。一方、シェル理論による近似理論解析においては、厚さ方向の断面内応力分布に近似仮定を導入するので、その仮定の範囲内の精度でしか解の保証はできない。また、座屈挙動の解析には幾何学的非線形性を考慮した増分解析が必要になるが、この場合、逐次解析を進めるにつれて計算誤差が累積することも予想される。

数値解析法で避けられない離散化誤差、計算誤差や近似解析理論の近似誤差を把握し、三次元物体としての挙動を定性的に理解するためには、その規範となる解が必要である。そのためには、三次元弾性論に基づく厳正解の導出が不可欠である。

三次元弾性問題の解析手法としては、ポテンシャル関数を用いる方法、ガラーキネクトルを用いる方法、体積歪を用いる方法などが提案されているが、主に地盤などの半無限弾性体の解析に用いられており、厚肉シェルの解析に用いられることは少ない。また、三次元弾性論に基づいてシェルの曲げ応力状態の線形一般解や幾何学的非線形解を導出し、それを基準にシェル理論の精度や適用限界を検討した研究は、著者の知る限りでは見受けられない。

以上のような背景から、本論文では、線形等方弾性体で構成されるシェル状の三次元物体に対して、シェル理論や離散化解析法の精度の検証のための指標となりうる理論解の提示を目的とし、三次元弾性論に基づく線形および幾何学的非線形解の導出およびその解の性状の考察を行う。

1.2 論文の概要

本論文は 2 部 10 章から構成されている。

第1章では、序として、厚肉シェルの三次元弾性論に基づく理論解析の必要性と本研究の目的及び各章の概要を述べる。

第1部(第2章~第6章)では、円筒シェルの曲げ応力状態の一般解を三次元線形弾性論に基づいて導出し、シェル理論解との比較を行う。

第2章では三次元線形弾性論の基礎式を示すとともに、既往の解析法を比較し、本研究で用いる体積歪をパラメータとして導入する解析法の利点を述べている。

第3章では、円筒シェルの曲げ応力状態の一般解として、周方向にフーリエ展開した場合および軸方向にフーリエ展開した場合について、べき級数型および指数関数型の解を導出し、それぞれの解の特性および未定定数の総数について考察する。

第4章では、前章で得られた三次元理論解をシェル理論解と比較することにより、シェル理論の近似精度と適用限界を検討する。

第5章では、第3章で得られた解の未定定数の総数とシェル断面の拘束条件の数との対応について考察した後、高次の曲げ応力解を用いて有限長円筒シェルの解析を行う。高次の解を用いた解析法として選点法とガラーキソ法を採用し、有限要素解との比較によりその精度を検討する。

第6章では、第1部で得られた成果をまとめを行う。

第II部(第7章~第9章)では、幾何学的非線形性を考慮した三次元解析法を提案し、応用例として、純曲げおよび曲げ・せん断力の作用する円筒シェルの理論解を導出する。

第7章では幾何学的非線形性を考慮した三次元弾性論の基礎式を示す。

第8章では、円筒シェルの幾何学的非線形解析を行うための基礎式を誘導し、その一般的な解法を提案する。応用例として、純曲げおよび曲げ・せん断力の作用する場合の理論解を導出し、シェル理論解と比較する。さらに、曲げ・せん断力が作用する場合について、断面の楕円化を考慮した局部座屈の予測法を提案し、実験結果との比較を行う。

第9章では、第II部で得られた成果をまとめを行う。

第10章では、結論として、本研究で得られた成果を総括するとともに、今後の課題について言及する。

1.3 記号

本論で主に用いる記号を以下に示す。なお、変形後の量は $\bar{\quad}$ を付けて表すとする。また、太文字はベクトル、 C_1, C_2 など大文字は未定定数を表し、線形解析においては反変、共変ベクトルの区別はしない。

•材料定数など

- E ヤング係数
- G せん断弾性係数
- ν ポアソン比
- $\rho, \bar{\rho}$ 変形前、変形後における質量密度
- ε 体積歪

•ベクトル

- r 位置ベクトル
- u 変位ベクトル
- X 物体力ベクトル
- θ^i 一般曲線座標
- a_i, a^i i 方向共変・反変基底ベクトル
- T 応力ベクトル
- n 法線ベクトル

•テンソル及びその他

a_{ij}, a^{pq}	共変・反変計量テンソル
ε_{ij}	グリーンの歪テンソル
$\bar{\sigma}^{ij}$	変形後の面積を基準とする変形後の基底ベクトル方向の応力、真応力 (以後、変形後の応力と呼ぶ)
σ^{ij}	変形前の面積を基準とする変形前の基底ベクトル方向の応力 (以後、変形前の応力と呼ぶ)
$\frac{\partial}{\partial z^i}$	偏微分 ($\frac{\partial X}{\partial z^i} = X_{,i}$)
$\frac{D}{ds}$	共変微分
Γ_{qi}^b	Christoffel の 3 字記号
δ_j^i	クロネッカ のデルタ
e_{ijk}	Eddington の e 記号 (配列 ijk が 偶順列の場合 1、奇順列の場合 -1、その他は零)
$[a_1 a_2 a_3]$	スカラー三重積

第 I 部
線形解析

第 2 章

三次元線形弾性理論の基礎式

本章では、本論文で使用する線形解析手法を導入する。また、円筒シェルに関する基本的な解を示す。

2.1 はじめに

現在一般に知られている三次元理論解析法は変位ポテンシャルもしくはガラーキネクトルを用いるものであり、簡便な方法であるとは言えなかった。そこで本章においては、本論文で使用する 体積歪を用いた三次元線形弾性問題の解析法 を示し、従来提案されてきた三次元解析法と比較し、その有用性を示す。

また、本手法の解析応用例として、本論文の解析対象である閉断面円筒シェルについてフーリエ展開された荷重に対する解と、純曲げと横せん断力の働く場合の円筒梁についてそれぞれ解析を行う。

2.2 三次元等方弾性体の基礎式

弾性体の微小部分釣合式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \text{釣合式} \quad \sigma^{ji} |_{,j} + X^i &= \rho u_{i,tt} & (2.1) \\ \text{ただし} \quad \sigma^{ij} &: \text{応力} \\ X &= X^j a_j = X_i a^i : \text{物体力ベクトル} \\ a^\alpha \text{ or } a_\beta &: \text{基本計量ベクトル} \end{aligned}$$

線形な歪－変位関係・応力－歪関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & (2.2) \\ \sigma^{ij} &= 2G(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{\alpha\alpha}) - \beta\delta_{ij}\theta \\ \varepsilon &: \text{体積歪} \quad (\varepsilon = \text{div } \mathbf{u}) \\ \mathbf{u} &= u^i a_i = u_i a^i : \text{変位ベクトル} \\ G, \nu &: \text{せん断弾性係数, ポアソン比} \\ \beta &= 2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \quad \alpha : \text{熱線膨張係数} \\ \theta &: \text{温度差} \end{aligned}$$

式(2.1)に式(2.2)の関係を代入すると釣合式は以下ようになる。

$$G(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{G}{1-2\nu}\text{grad}(\text{div } \mathbf{u}) + \mathbf{X} - \beta\text{grad } \theta = \rho\mathbf{u},_{tt}$$

この式をカルテシアン座標系に表すと次のようになる。なお、以降は熱応力項($\beta\text{grad } \theta$)は、物体力項 \mathbf{X} に含めるものとする。

$$\begin{aligned} \Delta u_x + \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,x} + X_x &= \rho u_{x,tt} \\ \Delta u_y + \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,y} + X_y &= \rho u_{y,tt} \\ \Delta u_z + \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,z} + X_z &= \rho u_{z,tt} \\ \varepsilon &= u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z} \\ \Delta &= \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

上記の式を直接解析するのは困難である。よって、現在までに次のような解析法が提案されている。

2.3 解析手法の分類

2.3.1 ポテンシャル解法の欠点

現在まで、均質等方な物体の線形問題を三次元解析する方法として、変位に関する スカラーポテンシャル および ベクトルポテンシャル を用いる方法、又それらを発展させた ガラーキンプクトル を用いる方法などがあった。これらの方法を用いた場合、均質等方な線形弾性体に対する静的平衡な基礎式の解は、物体力が作用しない場合、それぞれ調和関数、重調和関数で表記される。そのため解析過程において応力などを得る場合各解関数が複雑に絡み合い、応力を得るのに経験が必要なものであった。また解ベクトルがポテンシャル関数であるため、実際の変位が一目瞭然に示されず、解析過程でその解が妥当なものか判別し難かった。このように変位成分を積分したポテンシャル関数が採用されたは、変位成分で表した微小部分線形釣合式がそれぞれの式で各変位成分を含み、解析が困難であるためである。

一方、体積歪を用いた解析方法は、ガラーキンプクトル法の考え方を更に進め、未知量として、新たに体積歪を加えることにより、体積歪との関係を持ちつつも各変位成分の独立化を行い、変位成分による直接的な解析を可能にしたものである。このため、従来の方法に比べると、解析過程が明瞭で一般解が得られ易く、解析途中での解の妥当性の判別が簡便である。

2.3.2 変位ポテンシャルを用いた方法

参考文献[1]によると、スカラーポテンシャル(ϕ)、ベクトルポテンシャル(ψ_i , $\psi_{i,i} = 0$)を用いて弾性解析を行う場合、次の式が成立する。

変位との関係

$$u_i = \phi_{,i} + e_{ijk} \psi_{k,j} \quad \psi_{i,i} = 0 \quad (2.4)$$

釣合式

$$C_L^2 \Delta \phi_{,i} + C_T^2 e_{ijk} \Delta \psi_{k,j} + \frac{1}{\rho} X_i = \phi_{,i,tt} + e_{ijk} \psi_{k,j,tt} \quad (2.5)$$

$$C_L^2 = \frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)} \quad C_L: \text{膨張波速度} \quad C_T^2 = \frac{G}{\rho} \quad C_T: \text{せん断波速度}$$

ここで更に次のようにおくと一般解が解析できる

$$\begin{aligned} \Phi &= \Delta\phi_{,i} - \frac{1}{C_L^2}\phi_{,tt} & \Psi_k &= \Delta\psi_k - \frac{1}{C_T^2}\psi_{k,tt} \\ \text{釣合式} \quad C_L^2\Phi_{,i} + C_T^2e_{ijk}\Psi_{k,j} + \frac{1}{\rho}X_i &= 0 \\ \Delta\Phi &= 0 & \Delta\Psi_k &= 0 \end{aligned}$$

この方法を用いると一般解は解析が困難であるが、物体力項等がない場合の振動問題解は、簡単に解析可能である。

$$\begin{aligned} \text{変位との関係} \quad u_i &= \phi_{,i} + e_{ijk}\psi_{k,j} & \psi_{i,i} &= 0 \\ \text{釣合式} \quad C_L^2\Delta\phi_{,i} + C_T^2e_{ijk}\Delta\psi_{k,j} &= \phi_{,itt} + e_{ijk}\psi_{k,jtt} \end{aligned}$$

ただし次のようであると仮定する

$$\Delta\phi - \frac{1}{C_L^2}\phi_{,tt} = 0 \quad \text{膨張波} \quad \Delta\psi_k - \frac{1}{C_T^2}\psi_{k,tt} = 0 \quad \text{せん断波}$$

上式をカルテシアン座標系で書き表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ u_x &= \phi_{,x} + \psi_{z,y} - \psi_{y,z} & u_y &= \phi_{,y} + \psi_{x,z} - \psi_{z,x} & u_z &= \phi_{,z} + \psi_{y,x} - \psi_{x,y} \\ \Delta\phi - \frac{1}{C_L^2}\phi_{,tt} &= 0 \\ \Delta\psi_x - \frac{1}{C_T^2}\psi_{x,tt} &= 0 & \Delta\psi_y - \frac{1}{C_T^2}\psi_{y,tt} &= 0 & \Delta\psi_z - \frac{1}{C_T^2}\psi_{z,tt} &= 0 \end{aligned}$$

以上のように、変位ポテンシャルを用いれば、振動問題に関して各振動成分に分離して解析可能である。

2.3.3 ガラーキンベクトル を用いた方法

また参考文献 [2] によると、ガラーキンベクトル F_i を用いて弾性解析を行う場合は、次の式が成立する。

$$\text{変位とガラーキンベクトルの関係} \quad 2Gu_i = 2(1-\nu)\Delta_1 F_i - F_{j,ji} \quad (2.6)$$

$$\text{釣合式} \quad 2G\Delta_1\Delta_2 F_i = \frac{X_i - \beta\theta_{,i}}{1-\nu} \quad (2.7)$$

$$\Delta_1 = \Delta - \frac{1}{C_L^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \Delta_2 = \Delta - \frac{1}{C_T^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

ガラーキンベクトルの場合は、上記の様に動問題においては構成式が複雑である。しかし、静的問題では下記のように釣合式を重調和関数で記述可能であり、多少分かりやすくなる。

$$\text{変位とガラーキンベクトルの関係} \quad 2Gu_i = 2(1-\nu)\Delta F_i - F_{j,ji}$$

$$\text{釣合式} \quad 2G\Delta\Delta F_i = \frac{X_i}{1-\nu}$$

この時、ガラーキンベクトルは次の特質がある。

- ・ 物体力 $X_i = 0$ の時には、任意のガラーキンベクトルは z 方向の成分が 0 の等価ガラーキンベクトル

を持つ。

・軸対称の場合には、更にもう 1 つの成分を 0 に置ける。

ここで、式 (2.6)(2.7) をカルテシアン座標系で書き表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \text{式 (2.6) は } \quad 2Gu_x &= 2(1-\nu)\Delta F_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\
 2Gu_y &= 2(1-\nu)\Delta F_y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\
 2Gu_z &= 2(1-\nu)\Delta F_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\
 \text{式 (2.7) は } \quad \nabla^4 F_x &= -\frac{X_x}{1-\nu} & \nabla^4 F_y &= -\frac{X_y}{1-\nu} \\
 \nabla^4 F_z &= -\frac{X_z}{1-\nu}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

このように、ガラーキネクトルを用いた解析は、動問題に関しての一般解が求め難い事が分かる。

2.3.4 体積歪を補助パラメータとする方法

本論で用いる体積歪を用いた方法を以下に示す

2.3.4.1 導入

以下に一般化された系統的三次元解析法を導く。

三次元微小部分釣合式は、応力テンソル、変位ベクトルを用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 \text{釣合式 } \quad \sigma^{ji} |_{,j} + X^i &= \rho u_{i,tt} \\
 \Delta \mathbf{u} &= \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} = g^{rs} u_{p,rs} \mathbf{a}^p \\
 \Delta \varepsilon &= a^{rs} \varepsilon |_{,rs} \\
 a^{\alpha\beta} &= \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta \quad a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad a = \det(g_{\alpha\beta})
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで応力テンソルを変位成分で表し、整理すると次のようになる。

$$\text{釣合式 } \quad G(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{G}{1-2\nu} \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}) + \mathbf{X} = \rho \mathbf{u}_{,tt}$$

さらに、この式に発散演算子 (div) を作用させると、体積歪を用いた次の式が得られる。

$$\text{体積歪式 } \quad \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} (\nabla \cdot \nabla) \varepsilon + \text{div } \mathbf{X} = \rho \varepsilon_{,tt}$$

よって変位と体積歪を変数とした次の式が得られる。

$$\text{釣合式 } \quad G g^{rs} u_{p,rs} |_{,rs} + \frac{G}{1-2\nu} \varepsilon_{,p} + X_p = \rho u_{p,tt} \tag{2.10}$$

$$\text{体積歪式 } \quad G \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} g^{rs} \varepsilon |_{,rs} + X^q |_{,q} = \rho \varepsilon_{,tt} \tag{2.11}$$

ただし、変位と体積歪の適合条件として

$$\varepsilon = \text{div } \mathbf{u} \tag{2.12}$$

を満足しなければならない。よって三次元解析を行う際には、釣合式 (2.10) と体積歪式 (2.11) の 4 つの偏微分方程式を解き、それらの解が適合条件式 (2.12) を満たす様に未定定数を決めれば、それが一般解である。

また、体積歪を陽に表さないで定式化を行うと、

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^a + u_i^b \\ Gg^{rs} u_p^a|_{rs} + X_p &= \rho u_{p,tt} \\ Gg^{rs} u_p^b|_{rs} + \frac{G}{1-2\nu} u_q^a|_{qp} &= \rho u_{p,tt} \quad (u_p^b \text{ は } u_p^a \text{ に関する特殊解のみを取り扱う}) \\ u_p^b|_p &= \text{一定} \end{aligned}$$

となる。この式による解法は体積歪を陽に表示した場合に比べ、計算がやや煩雑である。

ここで、カルテシアン座標系で体積歪を陽に表現した形で書き表すと以下ようになる。

$$\begin{aligned} \text{釣合式} \quad \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{として} \\ G\Delta u_x + G\frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,x} + X_x &= \rho u_{x,tt} \\ G\Delta u_y + G\frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,y} + X_y &= \rho u_{y,tt} \\ G\Delta u_z + G\frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,z} + X_z &= \rho u_{z,tt} \\ \text{体積歪式} \quad G\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\Delta\varepsilon + (X_{x,x} + X_{y,y} + X_{z,z}) &= \rho\varepsilon_{,tt} \\ \text{適合条件式} \quad \varepsilon &= u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z} \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.3.4.2 体積歪を用いた解法の手順

先にも概略を述べたが、実際に釣合式を解析する方法を述べる。まず最初に、解析対象の変形性状を考察して、体積歪の分布関数の各方向の最大次数を決定する。

$$\begin{aligned} \text{釣合式} \quad \sigma_{,j}^{ij} + X^i &= \rho u_{i,tt} \\ G\Delta u_i + G\frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,i} + X_i &= \rho u_{i,tt} \\ G\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\Delta\varepsilon + X_{i,i} &= \rho\varepsilon_{,tt} \\ \text{ただし} \quad \varepsilon &= u_{i,i} \end{aligned}$$

上記の式から考察して、

- ・ 体積歪 (ε) は、 x_i に関して $X_{j,j}(\sigma_{j,k}^{j,k})$ より、2次高い関数
- ・ 変位 (u_i) は、 x_i に関して $\varepsilon_{,i}$ より、2次高い関数

となる。これらから、体積歪関数 (ε) と、変位関数 (u_i) の x_i に関しての最高次数が決定される。

次に、体積歪式に関して、変数分離などにより体積歪関数 (ε) の一般解と特殊解を求める。そして、この体積歪関数 (ε) を変位関数の釣合式に代入し、変位関数 (u_i) の一般解と特殊解を求める。こうして求められた体積歪関数と変位関数には、 $\varepsilon = u_{i,i}$ の関係があるので、この式を満足するように体積歪関数と変位関数の未定定数を定める。この段階において、基本となる解は導かれたことになる。あとは、解析対象の表面力・変位の拘束条件などを満たすように残りの各未定定数を決めてやれば良い。

この解法は、各変位関数の調和関数を得た後し、体積歪の調和関数に付随して発生する特殊解を求めれば良いので、解析手順が明瞭で、解析が容易である。

加えて、本解法によると体積歪が変位の重要なパラメーターとなっている事が容易に識別できる。

2.4 各解析手法の比較

2.4.1 波の伝播問題

変位ポテンシャルの構成式(2.4)を見ると、この手法は波の伝播問題に最適である。ここでは、 x 方向にのみ波が伝播していく問題について考察する。

2.4.1.1 変位ポテンシャルを用いたとき

変位ポテンシャルの構成式を以下に示す。

$$\begin{aligned}
 \text{変位との関係} \quad & u_x = \phi_{,x} + \psi_{z,y} - \psi_{y,z} & u_y = \phi_{,y} + \psi_{x,z} - \psi_{z,x} \\
 & u_z = \phi_{,z} + \psi_{y,x} - \psi_{x,y} \\
 \text{釣合式} \quad & \Delta\phi - \frac{1}{C_L^2}\phi_{,tt} = 0 \\
 & \Delta\psi_x - \frac{1}{C_T^2}\psi_{x,tt} = 0 & \Delta\psi_y - \frac{1}{C_T^2}\psi_{y,tt} = 0 \\
 & \Delta\psi_z - \frac{1}{C_T^2}\psi_{z,tt} = 0
 \end{aligned}$$

$\phi = \phi_0 e^{i\alpha x} e^{i\omega t}$ とすると、 $\alpha = \frac{1}{C_L}\omega$ となる。同様にして $\psi_k = \psi_{k0} e^{i\beta_k x} e^{i\omega_k t}$ とすると、 $\beta_k = \frac{1}{C_T}\omega_k$ となる。よって

$$\begin{aligned}
 u_x &= i\alpha\phi_0 e^{i\alpha x} e^{i\omega t} & \alpha &= \frac{1}{C_L}\omega \\
 u_y &= -i\beta_z\psi_{z0} e^{i\beta_z x} e^{i\omega_z t} & \beta_z &= \frac{1}{C_T}\omega_z \\
 u_z &= i\beta_y\psi_{y0} e^{i\beta_y x} e^{i\omega_y t} & \beta_y &= \frac{1}{C_T}\omega_y
 \end{aligned}$$

2.4.1.2 体積歪を用いたとき

構成式を以下に示す。

$$\begin{aligned}
 \text{釣合式} \quad & G\Delta u_x + G\frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,x} = \rho u_{x,tt} \\
 & G\Delta u_y + G\frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,y} = \rho u_{y,tt} \\
 & G\Delta u_z + G\frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,z} = \rho u_{z,tt} \\
 \text{体積歪式} \quad & G\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\Delta\varepsilon = \rho\varepsilon_{,tt} \\
 \text{適合条件式} \quad & \varepsilon = u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z}
 \end{aligned}$$

$\varepsilon = A_0 e^{i\alpha x} e^{i\omega t}$ とおくと、 $\alpha = \frac{1}{C_L}\omega$ となる。また u_i の一般解は、 $u_i = B_i e^{i\beta_i x} e^{i\omega_i t}$ とすると、 $\beta_i = \frac{1}{C_T}\omega_i$ となる。

特殊解は、 ε_i が値を持つのは u_x の釣合式のみであるので、 u_x についてのみ求める。解くべき式は以下のようなになる。

$$G\Delta u_x + \frac{G}{1-2\nu}i\alpha A_0 e^{i\alpha x} e^{i\omega t} = \rho u_{x,tt}$$

この解は、 $u_x = -i\alpha \frac{1}{\omega^2} C_L^2 A_0 e^{i\alpha x} e^{i\omega t}$ となり、次のような結果が得られる。

$$\begin{aligned} u_x &= B_x e^{i\beta_x x} e^{i\omega_x t} - i\alpha \frac{1}{\omega^2} C_L^2 A_0 e^{i\alpha x} e^{i\omega t} & , \beta_x &= \frac{1}{C_T} \omega_x \\ u_y &= B_y e^{i\beta_y y} e^{i\omega_y t} & , \beta_y &= \frac{1}{C_T} \omega_y \\ u_z &= B_z e^{i\beta_z z} e^{i\omega_z t} & , \beta_z &= \frac{1}{C_T} \omega_z \end{aligned}$$

これを適合条件 ($\varepsilon = u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z}$) に代入すると、 $B_x = 0$ となる。よって解は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= A_0 e^{i\alpha x} e^{i\omega t} & , \alpha &= \frac{1}{C_L} \omega \\ u_x &= -i\alpha \frac{1}{\omega^2} C_L^2 A_0 e^{i\alpha x} e^{i\omega t} & , \beta_x &= \frac{1}{C_T} \omega_x \\ u_y &= B_y e^{i\beta_y y} e^{i\omega_y t} & , \beta_y &= \frac{1}{C_T} \omega_y \\ u_z &= B_z e^{i\beta_z z} e^{i\omega_z t} & , \beta_z &= \frac{1}{C_T} \omega_z \end{aligned}$$

こうして比べると、変位ポテンシャルが最も活用できる例を解析した場合であるが、体積歪を用いた方法でも大して解析が煩雑であるとは思われない。また、解析の過程において x 方向のせん断振動の存在が陽に示されている。

2.4.2 静的問題 (物体力の働かない場合)

ガラーキネクトル法の構成式 (2.8) を見ると、動的問題への適用は難しい。しかし、静的問題に対しては構成式が整理されている。特に物体力の作用しない場合には、解は重調和関数で表される。ただし、物体力が作用している場合には重調和方程式の特殊解を求めなければならない。そこで、本節においては物体力の作用しない静的問題について考察してみる。

次のような問題を考える。

解析対象は、 $z \geq 0$ を占める均質等方な半無限弾性体に、

$$\begin{aligned} z = 0 \text{ において} & & \sigma^{zz} &= 2GA_0 \cos \alpha x \cos \beta y \\ & & \sigma^{zx} &= \sigma^{zy} = 0 \\ z = \infty \text{ において} & & \sigma^{ij} &= 0 \end{aligned}$$

という荷重条件を与える。ただし、物体力は働いていない ($X_i = 0$) ものとする。

2.4.2.1 ガラーキネクトルを用いたとき

まずガラーキネクトルを用いたときは次のようになる。

この場合は、静的かつ軸対称問題であるので、1成分が0でないガラーキネクトル F_z のみで解析可能である。また、 F_z は重調和関数で表すことが可能であるので $\sigma^{zz} = 2G \left(u_{z,z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \right)$ 、 $z = \infty$ において $u_z = 0$ になることを考慮して解を表すと

$$\begin{aligned} F_z &= 2G(A + Bz) \cos \alpha x \cos \beta y e^{-\gamma z} & (2.14) \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

A, B : 未定定数

とおける。更に $z = 0$ の境界条件を考慮すると

$$\begin{aligned}
 \sigma^{zz} &= 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 F_z + \left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\
 &= B\gamma^3 (1 + \gamma z) \cos \alpha x \cos \beta y e^{-\gamma z} \\
 \sigma^{zx} &= (1-\nu) \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 F_z + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 F_x \right) - \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\
 &= -(2\nu B\gamma^2 - (A + B\gamma z)\gamma^2 \sin \alpha x \cos \beta y e^{-\gamma z} \\
 \sigma^{zy} &= (1-\nu) \left(\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 F_z + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 F_y \right) - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\
 &= -(2\nu B\gamma^2 - (A + B\gamma z)\gamma^2 \cos \alpha x \sin \beta y e^{-\gamma z}
 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 \sigma^{zz} \text{ より} & \quad 2GB\gamma^3 = A_0 \\
 \sigma^{zx} \text{ より} & \quad A = 2\nu B \\
 \sigma^{zy} \text{ より} & \quad A = 2\nu B
 \end{aligned}$$

となり結局、

$$\begin{aligned}
 F_x &= F_y = 0 \\
 F_z &= 2G \frac{A_0}{\gamma^3} (2\nu + \gamma z) \cos \alpha x \cos \beta y e^{-\gamma z} \\
 u_x &= -\frac{A_0 \alpha}{\gamma^2} (-1 + 2\nu + \gamma z) \sin \alpha x \cos \beta y e^{-\gamma z} \\
 u_y &= -\frac{A_0 \beta}{\gamma^2} (-1 + 2\nu + \gamma z) \cos \alpha x \sin \beta y e^{-\gamma z} \\
 u_z &= -\frac{A_0}{\gamma} (2 - 2\nu + \gamma z) \cos \alpha x \cos \beta y e^{-\gamma z}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

という結果が得られる。

2.4.2.2 体積歪を用いたとき

次に、本解法を試みる。

$\sigma^{zz} = 2G \left(u_{z,z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \right)$ であるので、Laplace の方程式である体積歪式 (2.13) を $z = \infty$ において $\varepsilon = 0$ になることを考慮して解くと

$$\varepsilon = Ae^{-\gamma z} \cos \alpha x \cos \beta y \tag{2.16}$$

とおける。これを参考にして変位ベクトルを求めると以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 u_x &= Be^{-\gamma z} \sin \alpha x \cos \beta y - \frac{A\alpha}{2(1-2\nu)\gamma} ze^{-\gamma z} \sin \alpha x \cos \beta y \\
 u_y &= Ce^{-\gamma z} \cos \alpha x \sin \beta y - \frac{A\beta}{2(1-2\nu)\gamma} ze^{-\gamma z} \cos \alpha x \sin \beta y \\
 u_z &= De^{-\gamma z} \cos \alpha x \cos \beta y + \frac{A}{2(1-2\nu)} ze^{-\gamma z} \cos \alpha x \cos \beta y
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

A, B, C, D : 未定定数

ここで、適合条件 ($\varepsilon = u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z}$) を考慮すると、

$$\frac{3-4\nu}{2(1-2\nu)}A + 2(B\alpha + C\beta - D\gamma) = 0$$

更に $z=0$ での境界条件を考慮すると

$$\begin{aligned}\sigma^{zz} &= 2G \left(u_{z,z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \right) \\ &= \left(-\gamma D - \frac{A}{2} \right) \cos \alpha x \cos \beta y e^{-\gamma z} \\ \sigma^{zx} &= G(u_{z,x} + u_{x,z}) \\ &= \left(-\gamma B - \frac{A\alpha}{2(1-2\nu)\gamma} - \alpha D \right) \sin \alpha x \cos \beta y e^{-\gamma z} \\ \sigma^{zy} &= G(u_{z,y} + u_{y,z}) \\ &= \left(-\gamma C - \frac{A\beta}{2(1-2\nu)\gamma} - \beta D \right) \cos \alpha x \sin \beta y e^{-\gamma z}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\sigma^{zz} \text{ より} \quad & -\gamma D - \frac{A}{2} = A_0 \\ \sigma^{zx} \text{ より} \quad & -\gamma B - A \frac{\alpha}{2(1-2\nu)\gamma} - \alpha D = 0 \\ \sigma^{zy} \text{ より} \quad & -\gamma C - A \frac{\beta}{2(1-2\nu)\gamma} - \beta D = 0\end{aligned}$$

となる。結局、以下のように解を得る。

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 2(1-2\nu)A_0 \cos \alpha x \cos \beta y e^{-\gamma z} \\ u_x &= -\frac{A_0\alpha}{\gamma^2}(-1+2\nu+\gamma z) \sin \alpha x \cos \beta y e^{-\gamma z} \\ u_y &= -\frac{A_0\beta}{\gamma^2}(-1+2\nu+\gamma z) \cos \alpha x \sin \beta y e^{-\gamma z} \\ u_z &= -\frac{A_0}{\gamma}(2-2\nu+\gamma z) \cos \alpha x \cos \beta y e^{-\gamma z}\end{aligned} \tag{2.18}$$

このようにして比べると、ガラーキネクトルを用いた方法より、体積歪を用いた解法は先にも述べたように解の関数を合理的に推測でき、境界条件を考慮していく上で、等式の数と未定常数の数が等しく、非軸対称問題への拡張が容易である。また解析途中において同じ様な計算手順が繰り返されるので機械的に解析を進めることが可能である。

2.4.3 静的問題 (物体力が作用する場合)

物体力が作用する場合は、変位ポテンシャル法の構成式(2.4)・ガラーキネクトル法の構成式(2.8)は、解析が困難である。物体力が静的な場合、ガラーキネクトルを用いれば解析可能に思えるが、実際には、重調和方程式の特殊解を求める作業を行う必要性があり難解である。

そこで、体積歪を用いた解析法のみを示す。

物体力 $X_x = e^{\alpha x} e^{i\omega t}$ が作用している問題を考える。解くべき式は以下ようになる。

$$\text{釣合式} \quad G\Delta u_x + G\frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,x} + e^{\alpha x} e^{i\omega t} = \rho u_{x,tt}$$

$$\begin{aligned}
G\Delta u_y + G\frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,y} &= \rho u_{y,tt} & (2.19) \\
G\Delta u_z + G\frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,z} &= \rho u_{z,tt} \\
\text{体積歪式} \quad G\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\Delta\varepsilon + \alpha e^{\alpha x} e^{i\omega t} &= \rho\varepsilon_{,tt} \\
\text{適合条件式} \quad \varepsilon &= u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z}
\end{aligned}$$

一般解は前節に示されているので、ここでは特殊解のみに注目して解いていく。まず体積歪を次のようにおく。

$$\varepsilon = A_0 e^{\alpha x} e^{i\omega t}$$

A_0 は次のようになる。

$$A_0 = -\frac{\alpha}{G\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha^2 + \rho\omega^2}$$

$\varepsilon_{,i}$ が値を持つのは、 u_x の釣合式のみである。物体力も u_x の釣合式のみ関係するので、 u_x の特殊解を求める。解くべき式は次のようになる。

$$G\Delta u_x + e^{\alpha x} e^{i\omega t} + \frac{G}{1-2\nu} A_0 e^{\alpha x} e^{i\omega t} = \rho u_{x,tt}$$

この解は、

$$u_x = B_0 e^{\alpha x} e^{i\omega t}$$

と置くと

$$B_0 = -\frac{1 + \frac{G\alpha}{1-2\nu}}{G\alpha^2 + \rho\omega^2}$$

となる。またこの解は適合条件式を満足していることから、上式は正解である。

このように従来の方法では解析が困難であった問題を体積歪を用いると容易に解析可能である。

2.5 円筒シェルへの適用

本節では体積歪を用いた方法による応用解析例として、閉断面の円筒シェルについて任意表面力の働く場合と、円筒シェルに対してせん断力と曲げモーメントの働く場合の変位を示す。ただし、物体力は働いていないものとする。なお、図 2.1 に示すようにシェルの中立面半径を r_0 、シェル厚を t_0 、シェルの内面半径を $r_1 = r_0 - t_0/2$ 、外面半径を $r_2 = r_0 + t_0/2$ とする。

2.5.1 円筒座標系における諸式

円筒座標系に対して各式を物理成分で表示すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\text{微小部分釣合式} \quad \sigma_{,r}^r + \frac{1}{r}(\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}) + \frac{1}{r}\sigma_{,\theta}^{\theta r} + \sigma_{,z}^{zr} + X^r &= 0 \\
\sigma_{,r}^{\theta} + \frac{1}{r}(2\sigma^{r\theta} + \sigma_{,\theta}^{\theta\theta}) + \sigma_{,z}^{z\theta} + X^\theta &= 0 & (2.20) \\
\sigma_{,r}^z + \frac{1}{r}(\sigma^{rz} + \sigma_{,\theta}^{\theta z}) + \sigma_{,z}^{zz} + X^z &= 0
\end{aligned}$$

$$\text{応力-歪関係式} \quad \sigma^{ij} = 2G\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon\delta_{ij}\right) \quad (2.21)$$

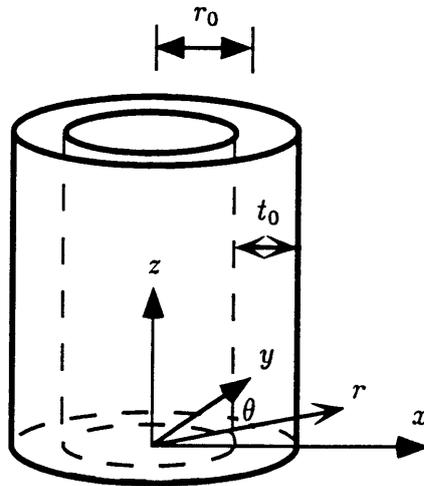


図 2.1: 解析対象及び円筒座標系

$$\begin{aligned}
 \text{歪-変位関係式} \quad \varepsilon &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} \\
 \varepsilon_{rr} &= u_{r,r} & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}(u_r + u_{\theta,\theta}) \\
 \varepsilon_{zz} &= u_{z,z} & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r}u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{1}{r}u_{\theta} \right) \\
 \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(u_{\theta,z} + \frac{1}{r}u_{z,\theta} \right) & \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2}(u_{z,r} + u_{r,z})
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

また、円筒座標系の釣合式は

$$\begin{aligned}
 \text{体積歪式} \quad \varepsilon_{,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{,r} + \frac{1}{r^2}\varepsilon_{,\theta\theta} + \varepsilon_{,zz} &= -\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \left(X_{r,r} + \frac{1}{r}X_r + \frac{1}{r}X_{\theta,\theta} + X_{z,z} \right) \\
 \text{釣合式} \quad u_{r,rr} + \frac{1}{r}u_{r,r} - \frac{1}{r^2}u_r + \frac{1}{r^2}u_{r,\theta\theta} + u_{r,zz} - \frac{2}{r^2}u_{\theta,\theta} + \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,r} &= -\frac{1}{G}X_r \\
 u_{\theta,rr} + \frac{1}{r}u_{\theta,r} - \frac{1}{r^2}u_{\theta} + \frac{1}{r^2}u_{\theta,\theta\theta} + u_{\theta,zz} + \frac{2}{r^2}u_{r,\theta} + \frac{1}{(1-2\nu)r}\varepsilon_{,\theta} &= -\frac{1}{G}X_{\theta} \\
 u_{z,rr} + \frac{1}{r}u_{z,r} + \frac{1}{r^2}u_{z,\theta\theta} + u_{z,zz} + \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,z} &= -\frac{1}{G}X_z \\
 \text{適合条件式} \quad \varepsilon &= u_{r,r} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r}u_{\theta,\theta} + u_{z,z}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

となる。以降に解析手順を示す。

2.5.2 任意表面力に対する解

本節では任意表面力の作用する円筒を解析する。そこで任意表面力が周方向と軸方向にフーリエ展開されたと仮定し、そのフーリエ展開された表面力に対して解析を行う。まず、物体力 $X_i(r, \theta, z)$ を、 θ 方向に任意次数 n 、 z 方向に任意次数 m のフーリエ展開をする。

ここで、 z 方向の材長を H とし、 $b_m = \frac{2m+1}{H}\pi$ とする。軸方向にフーリエ展開したモードと周方向のフーリエ展開と合わせると次のようになる。

さて、荷重を次のようにフーリエ展開する。

$$X_r(r, \theta, z) = GX_{rmm}(r, z) \sin b_m z \cos n\theta$$

$$\begin{aligned} X_\theta(r, \theta, z) &= GX_{\theta mn}(r, z) \sin b_m z \sin n\theta \\ X_z(r, \theta, z) &= GX_{zmn}(r, z) \cos b_m z \cos n\theta \end{aligned} \quad (2.24)$$

以下、同様にして変位、歪み、応力をフーリエ展開表示していく。

$$\begin{aligned} u_r &= u_{mn} \sin b_m z \cos n\theta & u_\theta &= v_{mn} \sin b_m z \sin n\theta \\ u_z &= w_{mn} \cos b_m z \cos n\theta \\ \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{rrmn} \sin b_m z \cos n\theta & \varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_{r\theta mn} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta mn} \sin b_m z \cos n\theta & \varepsilon_{\theta z} &= \varepsilon_{\theta z mn} \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zzmn} \sin b_m z \cos n\theta & \varepsilon_{zr} &= \varepsilon_{zrmn} \\ \varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_{r\theta mn} \sin b_m z \sin n\theta & \varepsilon_{rz} &= \varepsilon_{rzm} \\ \varepsilon_{\theta z} &= \varepsilon_{\theta z mn} \cos b_m z \sin n\theta & \varepsilon_{\theta r} &= \varepsilon_{\theta r mn} \\ \varepsilon_{zr} &= \varepsilon_{zrmn} \cos b_m z \cos n\theta & \varepsilon_{z\theta} &= \varepsilon_{z\theta mn} \\ \varepsilon &= \varepsilon_{mn} \sin b_m z \cos n\theta \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{mn} = u_{mn,r} + \frac{1}{r}u_{mn} + \frac{n}{r}v_{mn} + b_m w_n$$

$$\begin{aligned} \sigma^{rr} &= GS_{rrmn} \sin b_m z \cos n\theta & S_{rrmn} &= 2 \left(\varepsilon_{rrmn} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{mn} \right) \\ \sigma^{\theta\theta} &= GS_{\theta\theta mn} \sin b_m z \cos n\theta & S_{\theta\theta mn} &= 2 \left(\varepsilon_{\theta\theta mn} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{mn} \right) \\ \sigma^{zz} &= GS_{zzmn} \sin b_m z \cos n\theta & S_{zzmn} &= 2 \left(\varepsilon_{zzmn} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{mn} \right) \\ \sigma^{r\theta} &= GS_{r\theta mn} \sin b_m z \sin n\theta & S_{r\theta mn} &= 2\varepsilon_{r\theta mn} \\ \sigma^{\theta z} &= GS_{\theta z mn} \cos b_m z \sin n\theta & S_{\theta z mn} &= 2\varepsilon_{\theta z mn} \\ \sigma^{zr} &= GS_{zrmn} \cos b_m z \cos n\theta & S_{zrmn} &= 2\varepsilon_{zrmn} \end{aligned}$$

以上のフーリエ展開に倣って、表面力もフーリエ展開する。

$$\begin{aligned} \text{シェル内面} \quad \sigma^{rr}(r_1) &= GS_{rrmn}^1 \sin b_m z \cos n\theta \\ \sigma^{r\theta}(r_1) &= GS_{r\theta mn}^1 \sin b_m z \sin n\theta \\ \sigma^{rz}(r_1) &= GS_{rzm}^1 \cos b_m z \cos n\theta \\ \text{シェル外面} \quad \sigma^{rr}(r_2) &= GS_{rrmn}^2 \sin b_m z \cos n\theta \\ \sigma^{r\theta}(r_2) &= GS_{r\theta mn}^2 \sin b_m z \sin n\theta \\ \sigma^{rz}(r_2) &= GS_{rzm}^2 \cos b_m z \cos n\theta \end{aligned}$$

また、(2.23) 式は、 $f_{mn} = u_{mn} + v_{mn}$, $g_{mn} = u_{mn} - v_{mn}$ とおくと次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{体積歪式} \quad \varepsilon_{mn,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{mn,r} - \frac{n^2}{r^2}\varepsilon_{mn} - b_m^2\varepsilon_{mn} \\ = -\frac{1-2\nu}{2(1-2\nu)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) X_{r mn} + \frac{n}{r}X_{\theta mn} - b_m X_{z mn} \right] \\ \text{釣合式} \quad f_{mn,rr} + \frac{1}{r}f_{mn,r} - \frac{n^2+1}{r^2}f_{mn} - b_m f_{mn,33} - \frac{2n}{r^2}f_{mn} \\ + \frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{mn,r} - \frac{n}{r}\varepsilon_{mn} \right) = -X_{r mn} - X_{\theta mn} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$g_{mn,rr} + \frac{1}{r}g_{mn,r} - \frac{n^2+1}{r^2}g_{mn} - b_m^2g_{mn} + \frac{2n}{r^2}g_{mn} - \frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{mn,r} + \frac{n}{r}\varepsilon_{mn} \right) = -X_{r,mn} + X_{\theta,mn}$$

$$w_{mn,rr} + \frac{1}{r}w_{mn,r} + \frac{n^2}{r^2}w_{mn} - b_m^2w_{mn} + \frac{b_m}{1-2\nu}\varepsilon_{mn} = -X_{z,mn}$$

$$\begin{aligned} \text{適合条件式 } \varepsilon_{mn} &= u_{mn,r} + \frac{1}{r}u_{mn} + \frac{n}{r}v_{mn} + b_m w_n \\ &= \frac{1}{2}f_{mn,r} + \frac{1}{2}g_{mn,r} + \frac{n+1}{2r}f_{mn} - \frac{n-1}{2r}g_{mn} + b_m w_n \end{aligned}$$

よって、上記の4式を解いていけばよい。また、本例題では、物体力 $X_i(r, \theta, z)$ が存在しない場合を扱っている。ここで、体積歪 ε_{mn} に関する式は変形ベッセルの微分方程式になっていることに注目して、変形ベッセル関数 $I_n(r), K_n(r)$ を用いて体積歪 ε_{mn} を求め、 f_{mn}, g_{mn}, w_{mn} の斉次解も同様に求める。また、 f_{mn}, g_{mn}, w_{mn} の非斉次解については、釣合式に変形ベッセル関数で表わされた体積歪 ε_{mn} を代入することにより、釣合式に含まれている非斉次項を変形ベッセル関数で表わした釣合式を導くことができる。ここで非斉次解の求解法は、非斉次項が $I_n(b_m r)$ の場合、次の方程式を考えればよい。

$$y_{,rr} + \frac{y_{,r}}{r} - \left(b_m^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) y = I_n(b_m r) \quad (2.26)$$

この方程式を解いて得られる非斉次解は次の解の内2つを選べば良い。

$$\frac{r}{2b_m} I_{n+1}(b_m r), \quad \frac{r}{2b_m} I_{n-1}(b_m r), \quad \frac{r}{2b_m^2} \frac{\partial}{\partial r} I_{n+1}(b_m r) \quad (2.27)$$

また、非斉次項が $K_n(b_m r)$ の場合は、

$$y_{,rr} + \frac{y_{,r}}{r} - \left(b_m^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) y = K_n(b_m r) \quad (2.28)$$

を解いて、

$$-\frac{r}{2b_m} K_{n+1}(b_m r), \quad -\frac{r}{2b_m} K_{n-1}(b_m r), \quad \frac{r}{2b_m^2} \frac{\partial}{\partial r} K_{n+1}(b_m r) \quad (2.29)$$

となる。こうして得られた偏微分方程式の解を、適合条件

$$\varepsilon_{mn} = u_{mn,r} + \frac{1}{r}u_{mn} + \frac{n}{r}v_{mn} + b_m w_n$$

を考慮して整理する。

解析結果は変形されたベッセル関数により次のようになる。

$n = 0$ の場合

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mn} &= [C_1 \{I_0\} + C_2 \{K_0\}] \sin b_m z \\ u_{mn} &= \left[C_1 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r I_0 \right\} + C_3 \{I_1\} + C_2 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r K_0 \right\} + C_4 \{K_1\} \right] \sin b_m z \\ v_{mn} &= [C_5 \{I_1\} + C_6 \{K_1\}] \sin b_m z \\ w_{mn} &= \left[C_1 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r I_1 - \frac{2-2\nu}{(1-2\nu)b_m} I_0 \right\} + C_3 \{I_0\} \right. \\ &\quad \left. + C_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r K_1 - \frac{2-2\nu}{(1-2\nu)b_m} K_0 \right\} + C_4 \{-K_0\} \right] \cos b_m z \\ S_{r,rmn}/2 &= \left[C_1 \left\{ -\frac{b_m r}{2} \frac{1}{1-2\nu} I_1 - \frac{1}{2} I_0 \right\} + C_3 \left\{ b_m I_0 - \frac{1}{r} I_1 \right\} \right. \\ &\quad \left. + C_2 \left\{ \frac{b_m r}{2(1-2\nu)} K_1 - \frac{1}{2} K_0 \right\} + C_4 \left\{ -b_m K_0 - \frac{1}{r} K_1 \right\} \right] \sin b_m z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\theta\theta mn}/2 &= \left[C_1 \left\{ -\frac{1}{2} I_0 \right\} + C_3 \left\{ \frac{1}{r} I_1 \right\} + C_2 \left\{ -\frac{1}{2} K_0 \right\} + C_4 \left\{ \frac{1}{r} K_1 \right\} \right] \sin b_m z \\
S_{zz mn}/2 &= \left[C_1 \left\{ \frac{b_m r}{2(1-2\nu)} I_1 + \frac{2-2\nu}{1-2\nu} I_0 + \frac{\nu}{1-2\nu} I_0 \right\} + C_3 \left\{ -b_m I_0 \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{b_m r}{2(1-2\nu)} K_1 + \frac{2-2\nu}{1-2\nu} K_0 + \frac{\nu}{1-2\nu} K_0 \right\} + C_4 \left\{ b_m K_0 \right\} \right] \sin b_m z \\
S_{r\theta mn} &= \left[C_5 \left\{ b_m I_0 - \frac{2}{r} I_1 \right\} + C_6 \left\{ b_m K_0 - \frac{2}{r} K_1 \right\} \right] \sin b_m z \\
S_{\theta z mn} &= [C_5 \{ b_m I_1 \} + C_6 \{ b_m K_1 \}] \cos b_m z \\
S_{zr mn} &= \left[C_1 \left\{ -b_m r \frac{1}{1-2\nu} I_0 - \frac{2-2\nu}{1-2\nu} I_1 \right\} + C_3 \left\{ 2b_m I_1 \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -b_m r \frac{1}{1-2\nu} K_0 + \frac{2-2\nu}{1-2\nu} K_1 \right\} + C_4 \left\{ 2b_m K_1 \right\} \right] \cos b_m z
\end{aligned}$$

$n \geq 1$ の場合

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{mn} &= [C_1 \{ I_n \} + C_2 \{ K_n \}] \sin b_m z \\
u_{mn} &= \left[C_1 \left\{ -\frac{1}{2(1-2\nu)} r I_n \right\} + C_3 \left\{ \frac{1}{2} I_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ \frac{1}{2} I_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{1}{2(1-2\nu)} r K_n \right\} + C_4 \left\{ \frac{1}{2} K_{n+1} \right\} + C_6 \left\{ \frac{1}{2} K_{n-1} \right\} \right] \sin b_m z \\
v_{mn} &= \left[C_3 \left\{ \frac{1}{2} I_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ -\frac{1}{2} I_{n-1} \right\} + C_4 \left\{ \frac{1}{2} K_{n+1} \right\} + C_6 \left\{ -\frac{1}{2} K_{n-1} \right\} \right] \sin b_m z \\
w_{mn} &= \left[C_1 \left\{ -\frac{1}{2(1-2\nu)} r I_{n+1} - \frac{(n+4-4\nu)}{2(1-2\nu)b_m} I_n \right\} + C_3 \left\{ \frac{1}{2} I_n \right\} + C_5 \left\{ \frac{1}{2} I_n \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r K_{n+1} - \frac{(n+4-4\nu)}{2(1-2\nu)b_m} K_n \right\} + C_4 \left\{ -\frac{1}{2} K_n \right\} + C_6 \left\{ -\frac{1}{2} K_n \right\} \right] \cos b_m z \\
S_{rr mn}/2 &= \left[C_1 \left\{ -\frac{n+2-4\nu}{2(1-2\nu)} I_n - \frac{b_m r}{2(1-2\nu)} I_{n+1} \right\} + C_3 \left\{ \frac{b_m}{2} I_n - \frac{n+1}{2r} I_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ \frac{b_m}{2} I_n + \frac{n-1}{2r} I_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{n+2-4\nu}{2(1-2\nu)} K_n + \frac{b_m r}{2(1-2\nu)} K_{n+1} \right\} + C_4 \left\{ -\frac{b_m}{2} K_n - \frac{n+1}{2r} K_{n+1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_6 \left\{ -\frac{b_m}{2} K_n + \frac{n-1}{2r} K_{n-1} \right\} \right] \sin b_m z \\
S_{\theta\theta mn}/2 &= \left[C_1 \left\{ -\frac{1}{2} I_n \right\} + C_3 \left\{ \frac{n+1}{2r} I_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ \frac{1-n}{2r} I_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{1}{2} K_n \right\} + C_4 \left\{ \frac{n+1}{2r} K_{n+1} \right\} + C_6 \left\{ \frac{1-n}{2r} K_{n-1} \right\} \right] \sin b_m z \\
S_{zz mn}/2 &= \left[C_1 \left\{ \frac{b_m r}{2(1-2\nu)} I_{n+1} + \frac{(n+4-4\nu)}{2(1-2\nu)} I_n + \frac{\nu}{1-2\nu} I_n \right\} + C_3 \left\{ -\frac{b_m}{2} I_n \right\} + C_5 \left\{ -\frac{b_m}{2} I_n \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{b_m r}{2(1-2\nu)} K_{n+1} + \frac{(n+4-4\nu)}{2(1-2\nu)} K_n + \frac{\nu}{1-2\nu} K_n \right\} + C_4 \left\{ \frac{b_m}{2} K_n \right\} + C_6 \left\{ \frac{b_m}{2} K_n \right\} \right] \sin b_m z \\
S_{r\theta mn} &= \left[C_1 \left\{ \frac{n}{2(1-2\nu)} I_n \right\} + C_3 \left\{ \frac{b_m}{2} I_n - \frac{n+1}{r} I_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ -\frac{b_m}{2} I_n - \frac{n-1}{r} I_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ \frac{n}{2(1-2\nu)} K_n \right\} + C_4 \left\{ -\frac{b_m}{2} K_n - \frac{n+1}{r} K_{n+1} \right\} + C_6 \left\{ \frac{b_m}{2} K_n - \frac{n-1}{r} K_{n-1} \right\} \right] \sin b_m z \\
S_{\theta z mn} &= \left[C_1 \left\{ \frac{n}{2(1-2\nu)} r I_{n+1} + \frac{(n+4-4\nu)n}{2(1-2\nu)b_m} I_n \right\} + C_3 \left\{ -\frac{n}{2} I_n + \frac{b_m}{2} I_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ -\frac{n}{2} I_n - \frac{b_m}{2} I_{n-1} \right\} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +C_2 \left\{ -\frac{n}{2(1-2\nu)} r K_{n+1} + \frac{(n+4-4\nu)n}{2(1-2\nu)b_m} K_n \right\} + C_4 \left\{ \frac{n}{2} K_n + \frac{b_m}{2} K_{n+1} \right\} \\
& + C_6 \left\{ \frac{n}{2} K_n - \frac{b_m}{2} K_{n-1} \right\} \cos b_m z \\
S_{zrmn} = & \left[C_1 \left\{ -\frac{b_m}{1-2\nu} r I_n + \frac{n}{2(1-2\nu)} I_{n+1} - \frac{(n+4-4\nu)}{4b_m} (I_{n-1} + I_{n+1}) \right\} \right. \\
& + C_3 \left\{ b_m I_{n+1} + \frac{n}{2r} I_n \right\} + C_5 \left\{ b_m I_{n-1} - \frac{n}{2r} I_n \right\} \\
& + C_2 \left\{ -\frac{b_m}{1-2\nu} r K_n - \frac{n}{2(1-2\nu)} K_{n+1} + \frac{(n+4-4\nu)}{4b_m} (K_{n-1} + K_{n+1}) \right\} \\
& \left. + C_4 \left\{ b_m K_{n+1} - \frac{n}{2r} K_n \right\} + C_6 \left\{ b_m K_{n-1} + \frac{n}{2r} K_n \right\} \right] \cos b_m z
\end{aligned}$$

ただし

$I_n = I_n(b_m r)$ n 次 第一種変形ベッセル関数 $K_n = K_n(b_m r)$ n 次 第二種変形ベッセル関数

以上が一般解である。ここでシェル内外面の表面力の条件を満足するように次の条件を用いて、係数 $C_1 \sim C_6$ を決定する。

$$\begin{aligned}
S_{rrmn}(r_1) &= S_{rrmn}^1, \quad S_{rrmn}(r_2) = S_{rrmn}^2 \\
S_{r\theta mn}(r_1) &= S_{r\theta mn}^1, \quad S_{r\theta mn}(r_2) = S_{r\theta mn}^2 \\
S_{rzmn}(r_1) &= S_{rzmn}^1, \quad S_{rzmn}(r_2) = S_{rzmn}^2
\end{aligned}$$

以上の操作によりフーリエ展開された表面力 $S_{rrmn}^1, S_{r\theta mn}^1, S_{rzmn}^1, S_{rrmn}^2, S_{r\theta mn}^2, S_{rzmn}^2$ に対しての解が得られる。従って種々の応力状態にはフーリエ展開された表面力に対するこの解を重ね合わせて対応する。

2.5.3 せん断力と曲げモーメントが作用する場合

閉断面の円筒シェルの端部にせん断力と曲げモーメントが作用した場合を解析する。この荷重状態は、円筒の梁に曲げモーメントまたはせん断力が作用した場合と酷似するので周方向に1次のフーリエ展開し、軸方向にべき級数展開をして解析する。まず、座標 r, θ, z に作用する線荷重 $X_i(r, \theta, z)$ を、次のように円周方向の分布を仮定する。

$$\begin{aligned}
X_r(r, \theta, z) &= GX_{r,n} \cos \theta & X_\theta(r, \theta, z) &= GX_{\theta,n} \sin \theta \\
X_z(r, \theta, z) &= GX_{z,n} \cos \theta
\end{aligned} \tag{2.30}$$

(2.30) に対応して、変位・歪・応力も次のように表記する。

$$\begin{aligned}
u_r &= u \cos \theta & u_\theta &= v \sin \theta \\
u_z &= w \cos \theta \\
\varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{rr0} \cos \theta & \varepsilon_{r\theta} &= u_{,r} \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta0} \cos \theta & \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{r}(u + v) \\
\varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz0} \cos \theta & \varepsilon_{z\theta} &= w_{,z} \\
\varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_{r\theta0} \sin \theta & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r}u + v_{,r} - \frac{1}{r}v \right) \\
\varepsilon_{\theta z} &= \varepsilon_{\theta z0} \sin \theta & \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(v_{,z} - \frac{1}{r}w \right) \\
\varepsilon_{zr} &= \varepsilon_{zr0} \cos \theta & \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} (w_{,r} + u_{,z})
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \varepsilon_0 \cos \theta & \varepsilon_0 &= u_{,r} + \frac{1}{r}u + \frac{1}{r}v + w_{,z} \\
\sigma^{rr} &= GS_{,rr} \cos \theta & S_{,rr} &= 2 \left(\varepsilon_{,rr0} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_0 \right) \\
\sigma^{\theta\theta} &= GS_{,\theta\theta} \cos \theta & S_{,\theta\theta} &= 2 \left(\varepsilon_{,\theta\theta 0} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_0 \right) \\
\sigma^{zz} &= GS_{,zz} \cos \theta & S_{,zz} &= 2 \left(\varepsilon_{,zz 0} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_0 \right) \\
\sigma^{r\theta} &= GS_{,r\theta} \sin \theta & S_{,r\theta n} &= 2\varepsilon_{,r\theta 0} \\
\sigma^{\theta z} &= GS_{,\theta z} \sin \theta & S_{,\theta z} &= 2\varepsilon_{,\theta z 0} \\
\sigma^{rz} &= GS_{,rz} \cos \theta & S_{,rz} &= 2\varepsilon_{,rz 0}
\end{aligned}$$

以上のことを用いて (2.23) 式をは次のようになる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{0,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{0,r} + \frac{1}{r^2}\varepsilon_0 + \varepsilon_{0,zz} &= -\frac{1-2\nu}{2(1-2\nu)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) X_{,rn} + \frac{1}{r}X_{,\theta n} + \frac{\partial}{\partial z} X_{,zn} \right] \\
u_{,rr} + \frac{1}{r}u_{,r} - \frac{2}{r^2}u + u_{,zz} - \frac{2}{r^2}v + \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{0,r} &= -X_{,rn} \\
v_{,rr} + \frac{1}{r}v_{,r} - \frac{2}{r^2}v + v_{,zz} - \frac{2}{r^2}v - \frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{r}\varepsilon_0 &= -X_{,\theta n} \\
w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r} + \frac{1}{r^2}w + w_{,zz} + \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{0,z} &= -X_{,zn}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

また、 $f = u + v, g = u - v$ とおくと、式 (2.32) を 1 変数の方程式に変換することができる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{0,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{0,r} - \frac{1}{r^2}\varepsilon_0 + \varepsilon_{0,zz} &= -\frac{1-2\nu}{2(1-2\nu)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) X_{,rn} + \frac{1}{r}X_{,\theta n} + \frac{\partial}{\partial z} X_{,zn} \right] \\
f_{,rr} + \frac{1}{r}f_{,r} - \frac{4}{r^2}f + f_{,zz} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{0,r} - \frac{1}{r}\varepsilon_0 \right) &= -X_{,rn} - X_{,\theta n} \\
g_{,rr} + \frac{1}{r}g_{,r} + g_{,zz} - \frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{0,r} + \frac{1}{r}\varepsilon_0 \right) &= -X_{,rn} + X_{,\theta n} \\
w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r} + \frac{1}{r^2}w + w_{,zz} + \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{0,z} &= -X_{,zn}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

次に、式 (2.34) に示すように変数を z 方向にべき級数展開して、解を求める。この時、物体力 $X_i(r, \theta, z) = 0$ と仮定する。

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{l=1}^{\infty} u^l(r) \cdot z^l & f &= \sum_{l=1}^{\infty} f^l(r) \cdot z^l \\
v &= \sum_{l=1}^{\infty} v^l(r) \cdot z^l & g &= \sum_{l=1}^{\infty} g^l(r) \cdot z^l \\
w &= \sum_{l=1}^{\infty} w^l(r) \cdot z^l & \varepsilon_0 &= \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_0^l(r) \cdot z^l
\end{aligned} \tag{2.34}$$

ここで、せん断力の作用した片持ち梁の変形曲線から推測して u, v の軸方向の最高次数を 3 次と仮定し、式 (2.33) を満足する解を求める。その後、体積歪と変位の適合条件、およびシェル内外面 ($r = r_1, r_2$) において表面力が 0 である ($\sigma^{rr} = \sigma^{r\theta} = \sigma^{rz} = 0$) 境界条件を考慮する。こうして得られた解に対して、 z が一定である断面においてせん断力 (Q)、曲げモーメント (Mo) を次のように計算する。

$$Q = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} (\sigma^{rz} \cos \theta - \sigma^{z\theta} \sin \theta) r d\theta dr$$

$$M_o = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} (\sigma^{zz} r \cos \theta) r d\theta dr$$

解析結果は $I = \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{4}$ として次のようになる。これを見ると、体積歪 ε は z について 2 次関数となっている。

三次元解析解

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left[\frac{Q}{EI}(1-2\nu)rz + \frac{M_o}{EI}(1-2\nu)r \right] \cos \theta \\ u_r &= \left[-\frac{1}{6} \frac{Q}{EI} z^3 - \frac{1}{2} \frac{M_o}{EI} z^2 - \frac{\nu}{2} \frac{Q}{EI} r^2 z + \left\{ \frac{3+2\nu}{4} (r_1^2 + r_2^2) \frac{Q}{EI} - C_2 \right\} z - \frac{\nu}{2} \frac{M_o}{EI} r^2 + \frac{1}{2} C_1 \right] \cos \theta \\ u_\theta &= \left[\frac{1}{6} \frac{Q}{EI} z^3 + \frac{1}{2} \frac{M_o}{EI} z^2 - \frac{\nu}{2} \frac{Q}{EI} r^2 z - \left\{ \frac{3+2\nu}{4} (r_1^2 + r_2^2) \frac{Q}{EI} - C_2 \right\} z - \frac{\nu}{2} \frac{M_o}{EI} r^2 - \frac{1}{2} C_1 \right] \sin \theta \\ u_z &= \left[\frac{1}{2} \frac{Q}{EI} r z^2 + \frac{M_o}{EI} r z + C_2 r - \frac{1}{4} \frac{Q}{EI} r^3 + \frac{3+2\nu}{4} r_1^2 r_2^2 \frac{Q}{EI} \frac{1}{r} \right] \cos \theta \\ \sigma^{rr} &= 0 \\ \sigma^{\theta\theta} &= 0 \\ \sigma^{zz} &= 2G \left[(1+\nu) \frac{Q}{EI} r z + (1+\nu) \frac{M_o}{EI} r \right] \cos \theta \\ \sigma^{r\theta} &= 0 \\ \sigma^{\theta z} &= G \left[\frac{1}{4} \frac{Q}{EI} (1-2\nu) r^2 - \frac{3+2\nu}{4} (r_1^2 + r_2^2) \frac{Q}{EI} - \frac{3+2\nu}{4} r_1^2 r_2^2 \frac{Q}{EI} \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta \\ \sigma^{zr} &= G \left[\frac{3+2\nu}{4} \left\{ r_1^2 + r_2^2 - r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right\} \frac{Q}{EI} \right] \cos \theta \\ \frac{1}{2} C_1 &: \text{剛体変位} \quad C_2 : \text{剛体回転} \end{aligned}$$

2.6 本章のまとめ

本章においては三次元線形理論解析手法を比較した。その結果は次のように要約される。

体積歪による構成式 (2.3) と変位ポテンシャル法の構成式 (2.4)・ガラーキンベクトル法の構成式 (2.8) を比べると、体積歪を用いた解法は体積歪を新たに未知量に加え変位ポテンシャルを媒介していないため、従来の方法に比べ、式の構成が簡便になり、書き表されている釣合式の内容が明確になっている。その反面、特定の条件下の解析に対しては多少煩雑になる。ただしそのような場合においても変位成分の内容が明確であるという特徴は変わらない。各解析法の得意とする分野をまとめると

変位ポテンシャル	: 振動問題の解析
ガラーキンベクトル	: 一般静的問題 (物体力は作用しない)
体積歪	: 一般問題

となる。

以上のことから、体積歪を補助パラメータとして採用した解析法を用いれば、三次元線形解析が容易になることを示した。これより、形状の簡単な物体の挙動を三次元的に、有限要素法を用いず普遍的に示すことが可能となった。又、熱応力問題に対してもこの解析手法では熱応力を物体力項に含めれば解析可能である。

第 3 章

円筒シェルの一般解

本章では、本論文における円筒シェルの一般解の定義とその定義を満足する解を求める。

3.1 はじめに

シェルはその曲面の効果により面内応力によって面外方向の分布荷重に抵抗している。このため、小さい断面で大荷重に抵抗でき、大空間構造物の屋根、圧力容器、地下埋設構造物の外壁などに多用される。

通常、シェルの解析にはシェル理論が用いられる。シェル理論では、薄肉のシェルを対象として、次の2つの仮定を採用している [4]。すなわち

- ・Kirchhoff の仮定：変形前のシェル中央面に対する法線は変形後も直線を保ち、変形後の中央面に対しても法線となる。またシェルの厚さは変形後も変わらない。
- ・Love の仮定：シェルの法線方向の垂直応力は、厚さが薄いため、他の応力と比べ微小になり、従ってこれを無視する。

これらの仮定により三次元の釣合式を二次元のそれに単純化して解析を容易にしている。なお、本論文ではこれら2つの仮定を総称して”法線保持の仮定”と呼ぶことにする。

通常“シェル”と呼ばれるものは薄肉の構造物である。しかし、現在、原子炉の圧力容器、地下 LNG タンクなどに厚肉のシェルの需要がある。これらの厚肉シェルにおいても、膜応力状態は面内応力しか作用しないので、法線保持を仮定したシェル理論で十分な解析が可能と考えられる [5]。それに対し、曲げ応力状態で発生する面外応力はシェル断面が大きくなれば法線保持の仮定から予想される応力分布と違ってくると思われるので、詳しい解析が必要である。又、薄肉のシェルにおいても、曲げ応力状態が発生するシェルの支持断面の断面内変位の拘束の違いにより、法線保持理論では、表現不可能な応力分布が生ずる可能性がある。

3.2 既往の研究

曲げ応力状態は、法線保持の仮定を用いたシェル理論では、その釣合式より導かれた Dischinger[6] の特性方程式から得られる特性値の関数の和として表される。この特性方程式は正確な理論解を得難く、

Zerna[7], Finsterwalder[8], Schorer[9] 等により種々の近似解が与えられ、今日に至っている。またこれらの近似解の精度は日置 [37] によりシェル理論の厳正解である Dischinger の特性方程式を基準に比較されている。この他、厚肉シェルでの面外方向せん断変形を考慮するため、断面内平均せん断歪を仮定して面外のせん断変形を考慮したシェル理論 [11] も提案されている。しかし、その特性方程式は Dischinger の

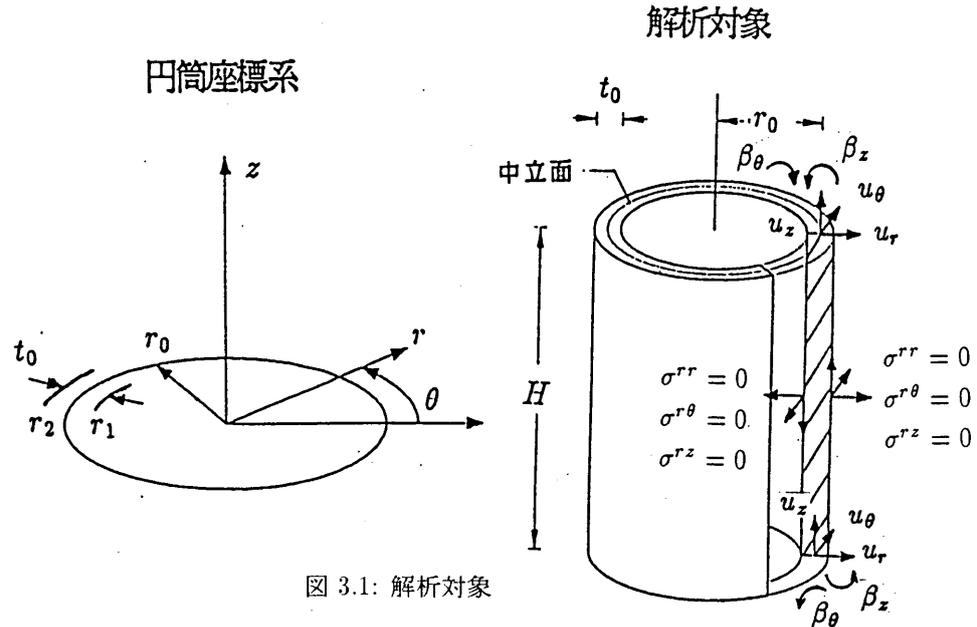


図 3.1: 解析対象

ものより難解なものになっている。また、松永ら [12] [13] はシェルの変位成分を厚さ方向座標の無限べき級数に展開し、変分原理を用いて高次断面力成分を導入する方法を提案している。

以上のような断面変位を仮定した理論解析から曲げ応力状態の特性を把握する方法に対し、有限要素法などの数値解析法は曲げ応力状態を含めて実際のシェルの断面内の応力分布を詳しく知るための非常に有効な手段である。しかし、曲げ応力状態はシェルが他の物体により拘束を受けた場合に生ずるものであり、シェルの変位と応力の分布は拘束物体の剛性に強い影響を受ける。この為、有限要素法ではシェル本来の基本的な特性を定性的に把握し難い。従って、様々な境界条件に対する変位や応力分布を予想し、シェル理論を補完し、その適用限界を知るためにも、シェルを三次元理論解析し、シェル断面における応力の分布などの特性を明らかにする必要がある。そこで本論文では曲げ応力状態を含む円筒シェル的一般解を三次元線形理論解析により求め、厚肉円筒シェルにおける曲げ応力解を検証する。

3.3 一般解の定義と基礎式

本節では、本論文における一般解の定義を行い、解析に必要な諸式を示す。

3.3.1 一般解の定義

本論文の解析対象は、“有限長の円筒シェル”とし、シェル理論で示される一般解(シェルの支持端以外においては外力が作用しない場合に対する解)に倣って“一般解”の定義を次のようにする。

1. 三次元微小部分釣合式を満たす
2. シェルの内外面において表面力が作用しない

また、解析対象は中立面半径 r_0 、シェル厚さ t_0 である円筒シェルとし、内面半径を $r_1 = r_0 - \frac{1}{2}t_0$ 、外面半径を $r_2 = r_0 + \frac{1}{2}t_0$ とする。なお本章では、煙突のような閉断面円筒シェルに適用される周方向にフーリエ展開した場合の一般解と、円筒の屋根のような開断面円筒シェルに適用される軸方向にフーリエ展開した場合の一般解を求める。

3.3.2 円筒座標系における諸式

ここで、円筒座標系に対して各式を物理成分で表示すると次のようになる。

微小部分釣合式

$$\begin{aligned}\sigma_{,r}^{rr} + \frac{1}{r}(\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}) + \frac{1}{r}\sigma_{,\theta}^{\theta r} + \sigma_{,z}^{rz} + X_r &= 0 \\ \sigma_{,r}^{r\theta} + \frac{1}{r}(2\sigma^{r\theta} + \sigma_{,\theta}^{\theta\theta}) + \sigma_{,z}^{z\theta} + X_\theta &= 0 \\ \sigma_{,r}^{rz} + \frac{1}{r}(\sigma^{rz} + \sigma_{,\theta}^{\theta z}) + \sigma_{,z}^{zz} + X_z &= 0\end{aligned}\quad (3.1)$$

応力-歪関係式

$$\sigma^{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \delta_{ij} \right) \quad (3.2)$$

歪-変位関係式

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rr} &= u_{r,r} & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}(u_r + u_{\theta,\theta}) \\ \varepsilon_{zz} &= u_{z,z} & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r}u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{1}{r}u_\theta \right) \\ \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(u_{\theta,z} + \frac{1}{r}u_{z,\theta} \right) & \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2}(u_{z,r} + u_{r,z})\end{aligned}\quad (3.3)$$

ただし、 $x_{,r}$ は、 x を r で偏微分したことを示す。

次に上記の釣合式を、変位成分を用いて書き直すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}\text{釣合式} \quad u_{r,rr} + \frac{1}{r}u_{r,r} + \frac{1}{r^2}u_{r,\theta\theta} + u_{r,zz} + \frac{2}{r^2}u_{\theta,\theta} + \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,r} + \frac{X_r}{G} &= 0 \\ u_{\theta,rr} + \frac{1}{r}u_{\theta,r} + \frac{1}{r^2}u_{\theta,\theta\theta} + u_{\theta,zz} + \frac{2}{r^2}u_{r,\theta} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{r}\varepsilon_{,\theta} + \frac{X_\theta}{G} &= 0 \\ u_{z,rr} + \frac{1}{r}u_{z,r} + \frac{1}{r^2}u_{z,\theta\theta} + u_{z,zz} + \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,z} + \frac{X_z}{G} &= 0 \\ \varepsilon_{,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{,r} + \frac{1}{r^2}\varepsilon_{,\theta\theta} + \varepsilon_{,zz} + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \left(X_{r,r} + \frac{1}{r}X_r + \frac{1}{r}X_{\theta,\theta} + X_{z,z} \right) &= 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$\text{適合条件式} \quad \varepsilon = u_{r,r} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r}u_{\theta,\theta} + u_{z,z}$$

特に周方向に一様な変位を発生する軸対称 ($\frac{\partial(\quad)}{\partial\theta} = 0$) の場合には次のような釣合式になる。

$$\begin{aligned}\text{釣合式} \quad u_{r,rr} + \frac{1}{r}u_{r,r} + u_{r,zz} + \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,r} + \frac{X_r}{G} &= 0 \\ u_{\theta,rr} + \frac{1}{r}u_{\theta,r} + u_{\theta,zz} + \frac{X_\theta}{G} &= 0 \\ u_{z,rr} + \frac{1}{r}u_{z,r} + u_{z,zz} + \frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,z} + \frac{X_z}{G} &= 0 \\ \varepsilon_{,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{,r} + \varepsilon_{,zz} + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \left(X_{r,r} + \frac{1}{r}X_r + X_{z,z} \right) &= 0\end{aligned}\quad (3.5)$$

$$\text{適合条件式} \quad \varepsilon = u_{r,r} + \frac{1}{r}u_r + u_{z,z}$$

3.3.3 変数分離

一般解を表す変位関数は変数分離可能な複素関数とし、 θ 方向および z 方向に指数関数で展開可能であるとする。

次のように、変位と物体力を仮定する。

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 e^{in\theta} e^{\omega z} \\ u_r &= u e^{in\theta} e^{\omega z} & u_\theta &= -i v e^{in\theta} e^{\omega z} & u_z &= w e^{in\theta} e^{\omega z} \\ X_r &= X_{rn} e^{in\theta} e^{\omega z} & X_\theta &= -i X_{\theta n} e^{in\theta} e^{\omega z} & X_z &= X_{zn} e^{in\theta} e^{\omega z}\end{aligned}$$

$f = u + v$, $g = u - v$ とし、釣合式 (3.4) を書き直すと次のようになる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{0,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{0,r} - \frac{n^2}{r^2}\varepsilon_0 + \omega^2\varepsilon_0 + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\left(X_{rn,r} + \frac{1}{r}X_r + \frac{n}{r}X_{\theta n} + \omega X_{zn}\right) &= 0 \\ f_{,rr} + \frac{1}{r}f_{,r} - \frac{(n+1)^2}{r^2}f + \omega^2f + \frac{1}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{0,r} - \frac{n}{r}\varepsilon_0\right) + \frac{X_{rn} + X_{\theta n}}{G} &= 0 \\ g_{,rr} + \frac{1}{r}g_{,r} - \frac{(n-1)^2}{r^2}g + \omega^2g + \frac{1}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{0,r} + \frac{n}{r}\varepsilon_0\right) + \frac{X_{rn} - X_{\theta n}}{G} &= 0 \\ w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r} - \frac{n^2}{r^2}w_{,\theta\theta} + \omega^2w_{,zz} + \frac{\omega}{1-2\nu}\varepsilon_{0,z} + \frac{X_{zn}}{G} &= 0 \\ \varepsilon_0 &= u_{,r} + \frac{1}{r}u + \frac{n}{r}v + \omega w\end{aligned}$$

ただし本論文においては物体力が作用しないとする。よって釣合式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{0,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{0,r} - \frac{n^2}{r^2}\varepsilon_0 + \omega^2\varepsilon_0 &= 0 \\ f_{,rr} + \frac{1}{r}f_{,r} - \frac{(n+1)^2}{r^2}f + \omega^2f + \frac{1}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{0,r} - \frac{n}{r}\varepsilon_0\right) &= 0 \\ g_{,rr} + \frac{1}{r}g_{,r} - \frac{(n-1)^2}{r^2}g + \omega^2g + \frac{1}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{0,r} + \frac{n}{r}\varepsilon_0\right) &= 0 \\ w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r} - \frac{n^2}{r^2}w_{,\theta\theta} + \omega^2w_{,zz} + \frac{\omega}{1-2\nu}\varepsilon_{0,z} &= 0 \\ \varepsilon_0 &= u_{,r} + \frac{1}{r}u + \frac{n}{r}v + \omega w\end{aligned}\tag{3.6}$$

3.3.3.1 周方向フーリエ展開

今、 n を整数であるとする。この場合、周方向にフーリエ展開されたことになる。ただし、 z 方向には、変位場の仮定は設けなくて表記する。

変位・体積歪・応力

$$\begin{aligned}u_r &= u_n \cos n\theta & u_\theta &= v_n \sin n\theta \\ u_z &= w_n \cos n\theta \\ \varepsilon &= \varepsilon_n \cos n\theta & \varepsilon_n &= u_{n,r} + \frac{1}{r}u_n + \frac{n}{r}v_n + w_{n,z} \\ \sigma^{rr} &= G S_{rr} \cos n\theta & S_{rr} &= 2\left(u_{n,r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_n\right) \\ \sigma^{\theta\theta} &= G S_{\theta\theta} \cos n\theta & S_{\theta\theta} &= 2\left(\frac{1}{r}u_n + \frac{n}{r}v_n + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_n\right) \\ \sigma^{zz} &= G S_{zz} \cos n\theta & S_{zz} &= 2\left(w_{n,z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_n\right) \\ \sigma^{r\theta} &= G S_{r\theta} \sin n\theta & S_{r\theta} &= -\frac{n}{r}u_n + v_{n,r} - \frac{1}{r}v_n \\ \sigma^{\theta z} &= G S_{\theta z} \sin n\theta & S_{\theta z} &= v_{n,z} - \frac{n}{r}w_n \\ \sigma^{zr} &= G S_{zr} \cos n\theta & S_{zr} &= u_{n,z} + w_{n,r}\end{aligned}$$

ここで f, g を次のように定義し、物体力が働いていないものとする。

$$f_n = u_n + v_n, \quad g_n = u_n - v_n, \quad X_r = X_\theta = X_z = 0$$

n 次の釣合式

$$\begin{aligned} f_{n,rr} + \frac{1}{r}f_{n,r} - \frac{(n+1)^2}{r^2}f_n + f_{n,zz} &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{n,r} - \frac{n}{r}\varepsilon_n \right) \\ g_{n,rr} + \frac{1}{r}g_{n,r} - \frac{(n-1)^2}{r^2}g_n + g_{n,zz} &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{n,r} + \frac{n}{r}\varepsilon_n \right) \\ w_{n,rr} + \frac{1}{r}w_{n,r} - \frac{n^2}{r^2}w_n + w_{n,zz} &= -\frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{n,z} \\ \varepsilon_{n,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{n,r} - \frac{n^2}{r^2}\varepsilon_n + \varepsilon_{n,zz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

特に軸対称 ($n=0$) の場合の変位と応力の関係、釣合式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= u_{r,r} + \frac{1}{r}u_r + u_{z,z} \\ \sigma^{rr} &= 2G \left(u_{r,r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon \right) & \sigma^{\theta\theta} &= 2G \left(\frac{1}{r}u_r + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon \right) \\ \sigma^{zz} &= 2G \left(u_{z,z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon \right) \\ \sigma^{r\theta} &= G \left(u_{\theta,r} - \frac{1}{r}u_\theta \right) & \sigma^{\theta z} &= Gu_{\theta,z} \\ \sigma^{zr} &= G(u_{r,z} + u_{z,r}) \end{aligned}$$

釣合式

$$\begin{aligned} u_{r,rr} + \frac{1}{r}u_{r,r} + u_{r,zz} &= -\frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,r} \\ u_{\theta,rr} + \frac{1}{r}u_{\theta,r} + u_{\theta,zz} &= 0 \\ u_{z,rr} + \frac{1}{r}u_{z,r} + u_{z,zz} &= -\frac{1}{1-2\nu}\varepsilon_{,z} \\ \varepsilon_{,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{,r} + \varepsilon_{,zz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3.3.2 軸方向フーリエ展開

今、 $\omega = \omega_0 i$ (ω_0 :実数) とする。この場合、軸方向にフーリエ展開されたことになる。

変位・体積歪・応力

$$\begin{aligned} u_r &= ue^{in\theta} \sin \omega_0 z & u_\theta &= -ive^{in\theta} \sin \omega_0 z \\ u_z &= we^{in\theta} \cos \omega_0 z \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 e^{in\theta} \sin \omega_0 z & \varepsilon_0 &= u_{,r} + \frac{1}{r}u + \frac{n}{r}v + \omega_0 w \\ \sigma^{rr} &= GS_{rr} e^{in\theta} \cos \omega_0 z & S_{rr} &= 2 \left(u_{,r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_0 \right) \\ \sigma^{\theta\theta} &= GS_{\theta\theta} e^{in\theta} \sin \omega_0 z & S_{\theta\theta} &= 2 \left(\frac{1}{r}u + \frac{n}{r}v + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_0 \right) \\ \sigma^{zz} &= GS_{zz} e^{in\theta} \sin \omega_0 z & S_{zz} &= 2 \left(-\omega_0 w + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_0 \right) \\ \sigma^{r\theta} &= -iGS_{r\theta} e^{in\theta} \sin \omega_0 z & S_{r\theta} &= -\frac{n}{r}u + v_{,r} - \frac{1}{r}v \\ \sigma^{\theta z} &= -iGS_{\theta z} e^{in\theta} \cos \omega_0 z & S_{\theta z} &= \omega_0 v - \frac{n}{r}w \\ \sigma^{zr} &= GS_{zr} e^{in\theta} \cos \omega_0 z & S_{zr} &= \omega_0 u + w_{,r} \end{aligned}$$

ここで f, g を次のように定義し、物体力が働いていないものとする。

$$f = u + v, \quad g = u - v, \quad X_r = X_\theta = X_z = 0$$

釣合式

$$\begin{aligned} f_{,rr} + \frac{1}{r}f_{,r} - \frac{(n+1)^2}{r^2}f - \omega_0^2 f &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{0,r} - \frac{n}{r}\varepsilon_0 \right) \\ g_{,rr} + \frac{1}{r}g_{,r} - \frac{(n-1)^2}{r^2}g - \omega_0^2 g &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{0,r} + \frac{n}{r}\varepsilon_0 \right) \\ w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r} - \frac{n^2}{r^2}w - \omega_0^2 w &= -\frac{\omega_0}{1-2\nu}\varepsilon_0 \\ \varepsilon_{0,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{0,r} - \frac{n^2}{r^2}\varepsilon_0 - \omega_0^2 \varepsilon_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

特に変位分布が軸方向に変化しない ($\frac{\partial(\quad)}{\partial z} = 0$) の場合、変位と応力の関係、釣合式は次のようになる。

$$\begin{aligned} u_r &= ue^{in\theta} & u_\theta &= -ive^{in\theta} \\ u_z &= we^{in\theta} \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 e^{in\theta} & \varepsilon_0 &= u_{,r} + \frac{1}{r}u + \frac{n}{r}v \\ \sigma^{rr} &= GS_{rr}e^{in\theta} & S_{rr} &= 2 \left(u_{,r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_0 \right) \\ \sigma^{\theta\theta} &= GS_{\theta\theta}e^{in\theta} & S_{\theta\theta} &= 2 \left(\frac{1}{r}u + \frac{n}{r}v + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_0 \right) \\ \sigma^{zz} &= GS_{zz}e^{in\theta} & S_{zz} &= 2 \left(\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_0 \right) \\ \sigma^{r\theta} &= -iGS_{r\theta}e^{in\theta} & S_{r\theta} &= -\frac{n}{r}u + v_{,r} - \frac{1}{r}v \\ \sigma^{\theta z} &= -iGS_{\theta z}e^{in\theta} & S_{\theta z} &= -\frac{n}{r}w \\ \sigma^{zr} &= GS_{zr}e^{in\theta} & S_{zr} &= w_{,r} \end{aligned}$$

釣合式

$$\begin{aligned} f_{,rr} + \frac{1}{r}f_{,r} - \frac{(n+1)^2}{r^2}f &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{0,r} - \frac{n}{r}\varepsilon_0 \right) \\ g_{,rr} + \frac{1}{r}g_{,r} - \frac{(n-1)^2}{r^2}g &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{0,r} + \frac{n}{r}\varepsilon_0 \right) \\ w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r} - \frac{n^2}{r^2}w &= 0 \\ \varepsilon_{0,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{0,r} - \frac{n^2}{r^2}\varepsilon_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.4 周方向にフーリエ展開した場合の一般解

本節では、周方向にフーリエ展開された場合の一般解を求める。本節で得られる解は閉断面円筒シェルの一般解に相当する。

周方向にフーリエ展開した場合の釣合式は式 (3.7) であり、次のようになっていた。

$$\begin{aligned}
 u_r &= u_n \cos n\theta & u_\theta &= v_n \sin n\theta \\
 u_z &= w_n \cos n\theta & \varepsilon &= \varepsilon_n \cos n\theta \\
 f_n &= u_n + v_n & g_n &= u_n - v_n \\
 f_{n,rr} + \frac{1}{r}f_{n,r} - \frac{(n+1)^2}{r^2}f_n + f_{n,zz} &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(e_{n,r} - \frac{n}{r}e_n \right) \\
 g_{n,rr} + \frac{1}{r}g_{n,r} - \frac{(n-1)^2}{r^2}g_n + g_{n,zz} &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(e_{n,r} + \frac{n}{r}e_n \right) \\
 w_{n,rr} + \frac{1}{r}w_{n,r} - \frac{n^2}{r^2}w_n + w_{n,zz} &= -\frac{1}{1-2\nu} e_{n,z} \\
 \varepsilon_{n,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{n,r} - \frac{n^2}{r^2}\varepsilon_n + \varepsilon_{n,zz} &= 0
 \end{aligned}$$

3.4.1 変位が軸方向にべき級数で表される解

周方向にフーリエ展開された場合の釣合式 (3.7) を満足する解の内、変位が軸方向にべき級数で表されるものを示す。これらの解は、法線保持を仮定したシェル理論では膜応力解に含まれる。また、解析方法として 2.5.3 節で用いられている方法を用いる。

解析結果より、軸方向の変位分布がべき級数で表される解は、周方向フーリエ展開次数 $n = 0, 1$ のみ存在し、 $n \geq 2$ では存在しない (証明は付録 A を参照)。これは、これらの解が $n = 0$ が軸引張り状態と円筒のねじり、 $n = 1$ が端部にせん断力又はモーメントが作用した状態を示し、変形が解析領域全体に及ぶのに対し、 $n \geq 2$ の解では、“ $z = \text{一定断面}$ ” で応力を積分するとせん断力もモーメントも 0 になり、解析対象の全体に及ぶ変形が考えられないためである。

以下に $n = 0, 1$ の場合の解を示す。

$n = 0$ の場合

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= C_1 \\
 u_r &= -\frac{\nu}{1-2\nu} C_1 r \\
 u_\theta &= C_3 r z + C_4 r \\
 u_z &= \frac{1}{1-2\nu} C_1 z + C_2 \\
 \sigma^{rr} &= 0 \\
 \sigma^{\theta\theta} &= 0 \\
 \sigma^{zz} &= 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} C_1 \\
 \sigma^{r\theta} &= 0 \\
 \sigma^{\theta z} &= G C_3 r \\
 \sigma^{zr} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$n = 1$ の場合

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= [C_1 r z + C_2 r] \cos \theta \\
u_r &= \left[-\frac{1}{6(1-2\nu)} C_1 z^3 - \frac{1}{2(1-2\nu)} C_2 z^2 - \frac{\nu}{2(1-2\nu)} C_1 r^2 z \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{3+2\nu}{4(1-2\nu)} (r_1^2 + r_2^2) C_1 - C_4 \right\} z - \frac{\nu}{2(1-2\nu)} C_2 r^2 + \frac{1}{2} C_3 \right] \cos \theta \\
u_\theta &= \left[\frac{1}{6(1-2\nu)} C_1 z^3 + \frac{1}{2(1-2\nu)} C_2 z^2 - \frac{\nu}{2(1-2\nu)} C_1 r^2 z \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \frac{3+2\nu}{4(1-2\nu)} (r_1^2 + r_2^2) C_1 - C_4 \right\} z - \frac{\nu}{2(1-2\nu)} C_2 r^2 - \frac{1}{2} C_3 \right] \sin \theta \\
u_z &= \left[\frac{1}{2(1-2\nu)} C_1 r z^2 + \frac{1}{1-2\nu} C_2 r z + C_4 r - \frac{1}{4(1-2\nu)} C_1 r^3 + \frac{3+2\nu}{4(1-2\nu)} r_1^2 r_2^2 C_1 \frac{1}{r} \right] \cos \theta \\
\sigma^{rr} &= 0 \\
\sigma^{\theta\theta} &= 0 \\
\sigma^{zz} &= 2G \left[\frac{1+\nu}{1-2\nu} C_1 r z + \frac{1+\nu}{1-2\nu} C_2 r \right] \cos \theta \\
\sigma^{r\theta} &= 0 \\
\sigma^{\theta z} &= G \left[\frac{1}{4} r^2 - \frac{3+2\nu}{4(1-2\nu)} (r_1^2 + r_2^2) - \frac{3+2\nu}{4(1-2\nu)} r_1^2 r_2^2 \frac{1}{r^2} \right] C_1 \sin \theta \\
\sigma^{zr} &= G \left[\frac{3+2\nu}{4(1-2\nu)} \left(r_1^2 + r_2^2 - r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) C_1 \right] \cos \theta \tag{3.12}
\end{aligned}$$

ただし r_1 : 内半径 r_2 : 外半径

以上に示した解はそれぞれ端部に軸引張り力、ねじり、せん断力・モーメントの働く棒材の解であるので個々に詳しく述べる。

閉断面円筒シェルに軸引張り力を与えた場合 ($n=0$) 軸引張り力を N とすると、

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \sigma^{zz} r d\theta dr = N \tag{3.13}$$

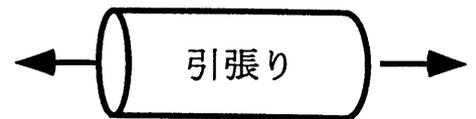
の関係がある。よって先の $n=0$ の解を代入すると次のようになる。

$$\frac{2\pi G(1+\nu)}{1-2\nu} (r_2^2 - r_1^2) C_1 = N \tag{3.14}$$

$E = 2G(1+\nu)$ 断面積 $A = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ であるから、

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1-2\nu}{EA} N \\
u_r &= -\frac{\nu}{EA} N r \\
u_z &= \frac{1}{EA} N z + C_2 \\
\sigma^{zz} &= \frac{N}{A} \tag{3.15}
\end{aligned}$$

ここで C_2 の項は軸方向の剛体変位を表す。



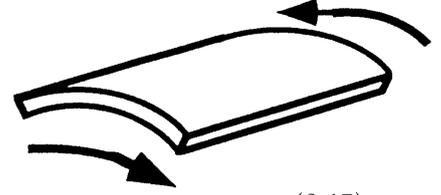
ねじりと剛体回転 ($n=0$) この解は釣合式 (3.8) の u_θ に関する釣合式の最も簡単な解であり、ねじりを受ける円筒シェルを表す。

円筒の軸回りのねじりモーメントを M_N とすると、

$$\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \sigma^{z\theta} r d\theta dr = M_N \tag{3.16}$$

の関係がある。よって先の $n = 0$ の解を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} u_\theta &= \frac{3}{2\pi G(r_2^3 - r_1^3)} M_N r z + C_4 r \\ \sigma^{\theta z} &= \frac{3}{2\pi(r_2^3 - r_1^3)} M_N r \end{aligned} \tag{3.17}$$



ここで、 C_4 は円筒の軸回りの剛体回転を表す。

閉断面円筒シェルに端部曲げモーメントと端部せん断力を与えた場合 ($n = 1$) 閉断面円筒シェルの両端にモーメント M_0 、横せん断力 Q を別個に作用させた場合、それぞれの場合で純曲げ状態ではモーメント M_0 、純せん断力状態では横せん断力 Q が、 z に関して一定である。

ここで、 M_0 と C_2 の関係は次のようになっている。

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (\sigma^{zz} r \cos \theta) r d\theta dr \\ &= G\pi \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)} (r_2^4 - r_1^4) C_2 + G\pi \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)} (r_2^4 - r_1^4) C_1 z \end{aligned} \tag{3.18}$$

よって

$$C_2 = \frac{2(1-2\nu)}{G\pi(1+\nu)} \frac{M_0}{r_2^4 - r_1^4} = \frac{M_0}{EI} (1-2\nu), \quad C_1 = 0 \tag{3.19}$$

また、 C_1 はせん断力 Q と次の関係がある。

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (\sigma^{zr} \cos \theta - \sigma^{z\theta} \sin \theta) r d\theta dr \\ &= G\pi \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)} (r_2^4 - r_1^4) C_1 \end{aligned}$$

よって

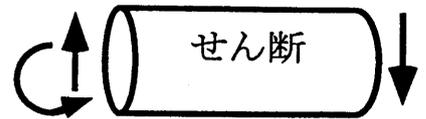
$$C_1 = \frac{2(1-2\nu)}{\pi G(1+\nu)} \frac{Q}{r_2^4 - r_1^4} = \frac{Q}{EI} (1-2\nu) \tag{3.20}$$

また、 C_1 とシェルに作用する曲げモーメント (M_0) との関係は式 (3.18) より次のようになる。

$$\begin{aligned} M &= G\pi \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{1}{2} (r_2^4 - r_1^4) C_1 z \\ &= Qz \end{aligned}$$



最終的に得られる状態での変位、応力を以下に示す。



$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left[\frac{Q}{EI} (1-2\nu) r z + \frac{M_0}{EI} (1-2\nu) r \right] \cos \theta \\ u_r &= \left[-\frac{1}{6} \frac{Q}{EI} z^3 - \frac{1}{2} \frac{M_0}{EI} z^2 - \frac{\nu}{2} \frac{Q}{EI} r^2 z + \left\{ \frac{3+2\nu}{4} (r_1^2 + r_2^2) \frac{Q}{EI} - C_4 \right\} z - \frac{\nu}{2} \frac{M_0}{EI} r^2 + \frac{1}{2} C_3 \right] \cos \theta \\ u_\theta &= \left[\frac{1}{6} \frac{Q}{EI} z^3 + \frac{1}{2} \frac{M_0}{EI} z^2 - \frac{\nu}{2} \frac{Q}{EI} r^2 z - \left\{ \frac{3+2\nu}{4} (r_1^2 + r_2^2) \frac{Q}{EI} - C_4 \right\} z - \frac{\nu}{2} \frac{M_0}{EI} r^2 - \frac{1}{2} C_3 \right] \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_z &= \left[\frac{1}{2} \frac{Q}{EI} r z^2 + \frac{M_o}{EI} r z + C_4 r - \frac{1}{4} \frac{Q}{EI} r^3 + \frac{3+2\nu}{4} r_1^2 r_2^2 \frac{Q}{EI} \frac{1}{r} \right] \cos \theta \\
\sigma^{rr} &= 0 \\
\sigma^{\theta\theta} &= 0 \\
\sigma^{zz} &= 2G \left[(1+\nu) \frac{Q}{EI} r z + (1+\nu) \frac{M_o}{EI} r \right] \cos \theta \\
\sigma^{r\theta} &= 0 \\
\sigma^{\theta z} &= G \left[\frac{1}{4} \frac{Q}{EI} (1-2\nu) r^2 - \frac{3+2\nu}{4} (r_1^2 + r_2^2) \frac{Q}{EI} - \frac{3+2\nu}{4} r_1^2 r_2^2 \frac{Q}{EI} \frac{1}{r^2} \right] \sin \theta \\
\sigma^{zr} &= G \left[\frac{3+2\nu}{4} \left(r_1^2 + r_2^2 - r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) \frac{Q}{EI} \right] \cos \theta
\end{aligned} \tag{3.21}$$

上記の解の各項について、検討していく。

変位の未知数としてまだ、 C_3 (剛体回転) C_4 (剛体変位) が残っている。これは、剛体変位を意味し支持端での変位・回転の拘束条件を満たすのに必要である。

変位の各項を一つずつ見ていくと、 u_r, u_θ において r^2 の項があることがわかる。これは、付加変位と呼ばれる、 r の2乗の項が作用して厚さ方向に伸縮を起こしている変位である。軸方向応力 σ^{zz} との比較から、引張側は薄く、圧縮側は厚く、またポアソン比 ν が含まれていることから、ポアソン比による影響であることがよくわかる。

なお上記の解のうち変位を見ると、梁理論でも得られる主要変位、三次元解析でのみ得られる付加変位、そして剛体変位に分けることができる。

主要変位

$$\begin{aligned}
u_r &= \left[-\frac{1}{6} \frac{Q}{EI} z^3 - \frac{1}{2} \frac{M_o}{EI} z^2 + \frac{3+2\nu}{4} (r_1^2 + r_2^2) \frac{Q}{EI} z \right] \cos \theta \\
u_\theta &= \left[\frac{1}{6} \frac{Q}{EI} z^3 + \frac{1}{2} \frac{M_o}{EI} z^2 - \frac{3+2\nu}{4} (r_1^2 + r_2^2) \frac{Q}{EI} z \right] \sin \theta \\
u_z &= \left[\frac{1}{2} \frac{Q}{EI} r z^2 + \frac{M_o}{EI} r z \right] \cos \theta
\end{aligned}$$

付加変位

$$\begin{aligned}
u_r &= \left[-\frac{\nu}{2} \frac{Q}{EI} r^2 z - \frac{\nu}{2} \frac{M_o}{EI} r^2 \right] \cos \theta \\
u_\theta &= \left[-\frac{\nu}{2} \frac{Q}{EI} r^2 z - \frac{\nu}{2} \frac{M_o}{EI} r^2 \right] \sin \theta \\
u_z &= \left[-\frac{1}{4} \frac{Q}{EI} r^3 + \frac{3+2\nu}{4} r_1^2 r_2^2 \frac{Q}{EI} \frac{1}{r} \right] \cos \theta
\end{aligned}$$

剛体変位

$$\begin{aligned}
u_r &= \left[-C_4 z + \frac{1}{2} C_3 \right] \cos \theta \\
u_\theta &= \left[-C_4 z - \frac{1}{2} C_3 \right] \sin \theta \\
u_z &= [C_4 r] \cos \theta
\end{aligned}$$

ここでせん断力 Q が働いた場合、面外応力成分 σ^{zr} が出ている。せん断力の面外応力成分 $Q_{\sigma^{zr}}$ のせん断

力 Q に対する割合を表すと、

$$Q_{\sigma:r}/Q = \frac{3+2\nu}{2(1+2\nu)} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{(1-\frac{t_0^2}{4r_o^2})^2}{4\frac{t_0}{r_o}(1+\frac{t_0^2}{4r_o^2})} \log \frac{1+\frac{t_0}{2r_o}}{1-\frac{t_0}{2r_o}} \right\} - 0 \quad (t_0/r_o - 0)$$

これは具体的には、 $r_0/t_0 = 1$ では 12.64%、 $r_0/t_0 = 10$ では 0.16%、 $r_0/t_0 \rightarrow \infty$ では 0% となっている。

3.4.2 変位が軸方向に指数関数で表される解

3.4.2.1 解

フーリエ変換、ベッセル変換 偏微分方程式 (3.7) を解析する。試みとして体積歪の偏微分方程式を解析する。

式 (3.7) は次のようになっていた。

$$\begin{aligned} f_{n,rr} + \frac{1}{r}f_{n,r} - \frac{(n+1)^2}{r^2}f_n + f_{n,zz} &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(e_{n,r} - \frac{n}{r}e_n \right) \\ g_{n,rr} + \frac{1}{r}g_{n,r} - \frac{(n-1)^2}{r^2}g_n + g_{n,zz} &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(e_{n,r} + \frac{n}{r}e_n \right) \\ w_{n,rr} + \frac{1}{r}w_{n,r} - \frac{n^2}{r^2}w_n + w_{n,zz} &= -\frac{1}{1-2\nu}e_{n,3} \\ \varepsilon_{n,rr} + \frac{1}{r}\varepsilon_{n,r} - \frac{n^2}{r^2}\varepsilon_n + \varepsilon_{n,zz} &= 0 \end{aligned}$$

体積歪の分布関数を $\varepsilon_n = e_r(r)e_z(z)$ と変数分離し、 z に関してフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} \bar{e}_z(\omega)(e_{r,rr} + \frac{1}{r}e_{r,r} - \frac{n^2}{r^2}e_r - \xi^2e_r) &= 0 \\ \text{ただし } \bar{e}_z &= \int_{-\infty}^{\infty} e_z e^{i\omega z} dz \end{aligned}$$

よって

$$e_r = A_1^r J_n(i\xi r) + A_2^r N_n(i\xi r)$$

またハンケル変換をすると

$$\begin{aligned} \bar{e}_r(\zeta)(-\omega^2 e_z + e_{z,zz}) &= 0 \\ \text{ただし } \bar{e}_r &= \int_0^{\infty} e_r r J_n(\xi r) dr \end{aligned}$$

よって

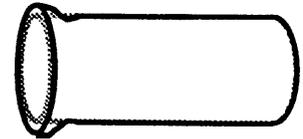
$$e_z = A_1^z e^{\omega z} + A_2^z e^{-\omega z}$$

ここで $e = e_r e_z$ を元の方程式に代入すると次のようになる。

$$\omega^2 = -\xi^2$$

ただし ω は複素数とする。よって、

$$\varepsilon_n = \{A_1^r J_n(i\omega r) + A_2^r N_n(i\omega r)\} e^{\omega z}$$



となる。同様にして、 f_n, g_n, w_n を求める。

$$\begin{aligned}
 f_n &= \{B_1 J_{n+1}(\omega r) + B_2 N_{n+1}(\omega r)\} e^{\omega z} \\
 &\quad + \frac{1}{2(1-2\nu)} A_1 \left\{ -(\alpha_3 + \beta_3) r J_n(\omega r) + \beta_3 \frac{2(n+1)}{\omega} J_{n+1}(\omega r) + \gamma_3 J_{n+1}(\omega r) \right\} e^{\omega z} \\
 &\quad + \frac{1}{2(1-2\nu)} A_2 \left\{ -(\alpha_4 + \beta_4) r N_n(\omega r) + \beta_4 \frac{2(n+1)}{\omega} N_{n+1}(\omega r) + \gamma_4 N_{n+1}(\omega r) \right\} e^{\omega z} \\
 g_n &= \{C_1 J_{n-1}(\omega r) + C_2 N_{n-1}(\omega r)\} e^{\omega z} \\
 &\quad - \frac{1}{2(1-2\nu)} A_1 \left\{ (\alpha_5 + \beta_5) r J_n(\omega r) - \beta_5 \frac{2(n-1)}{\omega} J_{n-1}(\omega r) + \gamma_5 J_{n-1}(\omega r) \right\} e^{\omega z} \\
 &\quad - \frac{1}{2(1-2\nu)} A_2 \left\{ (\alpha_6 + \beta_6) r N_n(\omega r) - \beta_6 \frac{2(n-1)}{\omega} N_{n-1}(\omega r) + \gamma_6 N_{n-1}(\omega r) \right\} e^{\omega z} \\
 w_n &= \{D_1 J_n(\omega r) + D_2 N_n(\omega r)\} e^{\omega z} \\
 &\quad - \frac{1}{2(1-2\nu)} A_1 \{-\alpha_1 r J_{n-1}(\omega r) + \beta_1 r J_{n+1}(\omega r) + \gamma_1 J_n(\omega r) z\} e^{\omega z} \\
 &\quad - \frac{1}{2(1-2\nu)} A_2 \{-\alpha_2 r N_{n-1}(\omega r) + \beta_2 r N_{n+1}(\omega r) + \gamma_2 N_n(\omega r) z\} e^{\omega z}
 \end{aligned}$$

$$\text{ただし } \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1 \quad (i = 1 \sim 6)$$

解 ここで、体積歪と変位に関する適合条件 ($\varepsilon_n = u_{n,r} + \frac{1}{r} u_n + \frac{n}{r} v_n + \omega w_n$) を満足する解を求める。適合条件を満足する解は $C_1 \sim C_6$ を未定定数として次のようになる。

$n = 0$ の場合

$$\varepsilon = [C_1 \{J_0\} + C_2 \{N_0\}] e^{\omega z} \quad (3.22)$$

$$u_r = \left[C_1 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r J_0 \right\} + C_3 \{J_1\} + C_2 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r N_0 \right\} + C_4 \{N_1\} \right] e^{\omega z}$$

$$\begin{aligned}
 u_z &= \left[C_1 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r J_1 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{2-2\nu}{\omega} J_0 \right\} + C_3 \{-J_0\} \right. \\
 &\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r N_1 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{2-2\nu}{\omega} N_0 \right\} + C_4 \{-N_0\} \right] e^{\omega z}
 \end{aligned}$$

$$\sigma^{rr} = G \left[C_1 \left\{ \frac{\omega r}{1-2\nu} J_1 - J_0 \right\} + C_3 \left\{ 2\omega J_0 - \frac{2}{r} J_1 \right\} + C_2 \left\{ \frac{\omega r}{1-2\nu} N_1 - N_0 \right\} + C_4 \left\{ 2\omega N_0 - \frac{2}{r} N_1 \right\} \right] e^{\omega z}$$

$$\sigma^{\theta\theta} = G \left[C_1 \{-J_0\} + C_3 \left\{ \frac{2}{r} J_1 \right\} + C_2 \{-N_0\} + C_4 \left\{ \frac{2}{r} N_1 \right\} \right] e^{\omega z} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^{zz} &= G \left[C_1 \left\{ -\frac{\omega r}{1-2\nu} J_1 + \frac{4(1-\nu)}{1-2\nu} J_0 + \frac{2\nu}{1-2\nu} J_0 \right\} + C_3 \{-2\omega J_0\} \right. \\
 &\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{\omega r}{1-2\nu} N_1 + \frac{4(1-\nu)}{1-2\nu} N_0 + \frac{2\nu}{1-2\nu} N_0 \right\} + C_4 \{-2\omega N_0\} \right] e^{\omega z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^{zr} &= G \left[C_1 \left\{ -\omega r \frac{1}{1-2\nu} J_0 - (2-2\nu) \frac{1}{1-2\nu} J_1 \right\} + C_3 \{2\omega J_1\} \right. \\
 &\quad \left. + C_2 \left\{ -\omega r \frac{1}{1-2\nu} N_0 - (2-2\nu) \frac{1}{1-2\nu} N_1 \right\} + C_4 \{2\omega N_1\} \right] e^{\omega z} \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

$$u_\theta = [C_5 \{J_1\} + C_6 \{N_1\}] e^{\omega z}$$

$$\sigma^{r\theta} = G \left[C_5 \left\{ \omega J_0 - \frac{2}{r} J_1 \right\} + C_6 \left\{ \omega N_0 - \frac{2}{r} N_1 \right\} \right] e^{\omega z}$$

$$\sigma^{\theta z} = G [C_5 \{\omega J_1\} + C_6 \{\omega N_1\}] e^{\omega z}$$

$n \geq 1$ の場合

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= [C_1 \{J_n\} + C_2 \{N_n\}] \cos n\theta e^{\omega z} \\
u_r &= \left[C_1 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r J_n \right\} + C_3 \left\{ \frac{1}{2} J_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ \frac{1}{2} J_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r N_n \right\} + C_4 \left\{ \frac{1}{2} N_{n+1} \right\} + C_6 \left\{ \frac{1}{2} N_{n-1} \right\} \right] \cos n\theta e^{\omega z} \\
u_\theta &= \left[C_3 \left\{ \frac{1}{2} J_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ -\frac{1}{2} J_{n-1} \right\} + C_4 \left\{ \frac{1}{2} N_{n+1} \right\} + C_6 \left\{ -\frac{1}{2} N_{n-1} \right\} \right] \sin n\theta e^{\omega z} \\
u_z &= \left[C_1 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r J_{n+1} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{(n+4-4\nu)}{2\omega} J_n \right\} + C_3 \left\{ -\frac{1}{2} J_n \right\} + C_5 \left\{ \frac{1}{2} J_n \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r N_{n+1} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{(n+4-4\nu)}{2\omega} N_n \right\} + C_4 \left\{ -\frac{1}{2} N_n \right\} + C_6 \left\{ \frac{1}{2} N_n \right\} \right] \cos n\theta e^{\omega z} \\
\sigma^{rr} &= G \left[C_1 \left\{ -\left(\frac{n}{1-2\nu} + 1 \right) J_n + \frac{\omega r}{1-2\nu} J_{n+1} \right\} + C_3 \left\{ \omega J_n - \frac{n+1}{r} J_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ -\omega J_n + \frac{n-1}{r} J_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\left(\frac{n}{1-2\nu} + 1 \right) N_n + \frac{\omega r}{1-2\nu} N_{n+1} \right\} + C_4 \left\{ \omega N_n - \frac{n+1}{r} N_{n+1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_6 \left\{ -\omega N_n + \frac{n-1}{r} N_{n-1} \right\} \right] \cos n\theta e^{\omega z} \\
\sigma^{\theta\theta} &= G \left[C_1 \{ -J_n \} + C_3 \left\{ \frac{n+1}{r} J_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ \frac{1-n}{r} J_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \{ -N_n \} + C_4 \left\{ \frac{n+1}{r} N_{n+1} \right\} + C_6 \left\{ \frac{1-n}{r} N_{n-1} \right\} \right] \cos n\theta e^{\omega z} \\
\sigma^{zz} &= G \left[C_1 \left\{ -\frac{\omega r}{1-2\nu} J_{n+1} + \frac{n+4-4\nu}{1-2\nu} J_n + \frac{\nu}{1-2\nu} J_n \right\} + C_3 \{ -\omega J_n \} + C_5 \{ \omega J_n \} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{\omega r}{1-2\nu} N_{n+1} + \frac{n+4-4\nu}{1-2\nu} N_n + \frac{\nu}{1-2\nu} N_n \right\} + C_4 \{ -\omega N_n \} + C_6 \{ \omega N_n \} \right] \cos n\theta e^{\omega z} \\
\sigma^{r\theta} &= G \left[C_1 \left\{ \frac{n}{2(1-2\nu)} J_n \right\} + C_3 \left\{ \frac{\omega}{2} J_n - \frac{n+1}{r} J_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ \frac{\omega}{2} J_n - \frac{n-1}{r} J_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ \frac{n}{2(1-2\nu)} N_n \right\} + C_4 \left\{ \frac{\omega}{2} N_n - \frac{n+1}{r} N_{n+1} \right\} + C_6 \left\{ \frac{\omega}{2} N_n - \frac{n-1}{r} N_{n-1} \right\} \right] \sin n\theta e^{\omega z} \\
\sigma^{\theta z} &= G \left[C_1 \left\{ \frac{n}{2(1-2\nu)} J_{n+1} - \frac{(n+4-4\nu)n}{2(1-2\nu)\omega r} J_n \right\} + C_3 \left\{ \frac{n}{2r} J_n + \frac{\omega}{2} J_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ -\frac{n}{2r} J_n - \frac{\omega}{2} J_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ \frac{n}{2(1-2\nu)} N_{n+1} - \frac{(n+4-4\nu)n}{2(1-2\nu)\omega r} N_n \right\} + C_4 \left\{ \frac{n}{2r} N_n + \frac{\omega}{2} N_{n+1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_6 \left\{ -\frac{n}{2r} N_n - \frac{\omega}{2} N_{n-1} \right\} \right] \sin n\theta e^{\omega z} \\
\sigma^{zr} &= G \left[C_1 \left\{ -\frac{\omega r}{1-2\nu} J_n + \frac{n}{2(1-2\nu)} J_{n+1} + \frac{(n+4-4\nu)}{2(1-2\nu)} \left\{ \frac{n}{\omega r} J_n - J_{n+1} \right\} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_3 \left\{ \omega J_{n+1} - \frac{n}{2r} J_n \right\} + C_5 \left\{ \omega J_{n-1} - \frac{n}{2r} J_n \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{\omega r}{1-2\nu} N_n + \frac{n}{2(1-2\nu)} N_{n+1} + \frac{(n+4-4\nu)}{2(1-2\nu)} \left\{ \frac{n}{\omega r} N_n - N_{n+1} \right\} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_4 \left\{ \omega N_{n+1} - \frac{n}{2r} N_n \right\} + C_6 \left\{ \omega N_{n-1} - \frac{n}{2r} N_n \right\} \right] \cos n\theta e^{\omega z} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

ただし

$J_n = J_n(\omega r)$ 第一種ベッセル関数 $N_n = N_n(\omega r)$ 第二種ベッセル関数

特性値問題 ω 及び、未定定数 $C_1 \sim C_6$ は $r = r_1, r_2$ における境界条件を満たすように定められる特別な値である。そこで、以降においては ω を特性値と呼ぶことにする。

次に境界条件として自由表面条件、すなわちシェルの内外面において表面応力が作用しないという条件を考慮する。

$$r = r_1, r_2 \text{ において } \sigma^{rr} = \sigma^{r\theta} = \sigma^{rz} = 0 \quad (3.26)$$

式(3.24),(3.25)を式(3.26)に代入すると、 ω と $C_1 \sim C_6$ を定める方程式が次式のように得られる。

軸対称 ($n = 0$) の場合

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_2 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.27)$$

ここに

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\omega r_1}{1-2\nu} J_1(\omega r_1) - J_0(\omega r_1) & , a_{12} &= 2\omega J_0(\omega r_1) - \frac{2}{r_1} J_1(\omega r_1) \\ a_{13} &= \frac{\omega r_1}{1-2\nu} N_1(\omega r_1) - N_0(\omega r_1) & , a_{14} &= 2\omega N_0(\omega r_1) - \frac{2}{r_1} N_1(\omega r_1) \\ a_{21} &= -\frac{\omega r_1}{1-2\nu} J_0(\omega r_1) - \frac{2-2\nu}{1-2\nu} J_1(\omega r_1) & , a_{22} &= 2\omega J_1(\omega r_1) \\ a_{23} &= -\frac{\omega r_1}{1-2\nu} N_0(\omega r_1) - \frac{2-2\nu}{1-2\nu} N_1(\omega r_1) & , a_{24} &= 2\omega N_1(\omega r_1) \\ a_{31} &= \frac{\omega r_2}{1-2\nu} J_1(\omega r_2) - J_0(\omega r_2) & , a_{32} &= 2\omega J_0(\omega r_2) - \frac{2}{r_2} J_1(\omega r_2) \\ a_{33} &= \frac{\omega r_2}{1-2\nu} N_1(\omega r_2) - N_0(\omega r_2) & , a_{34} &= 2\omega N_0(\omega r_2) - \frac{2}{r_2} N_1(\omega r_2) \\ a_{41} &= -\frac{\omega r_2}{1-2\nu} J_0(\omega r_2) - \frac{2-2\nu}{1-2\nu} J_1(\omega r_2) & , a_{42} &= 2\omega J_1(\omega r_2) \\ a_{43} &= -\frac{\omega r_2}{1-2\nu} N_0(\omega r_2) - \frac{2-2\nu}{1-2\nu} N_1(\omega r_2) & , a_{44} &= 2\omega N_1(\omega r_2) \\ a_{55} &= \omega J_0(\omega r_1) - \frac{2}{r_1} J_1(\omega r_1) & , a_{56} &= \omega N_0(\omega r_1) - \frac{2}{r_1} N_1(\omega r_1) \\ a_{65} &= \omega J_0(\omega r_2) - \frac{2}{r_2} J_1(\omega r_2) & , a_{66} &= \omega N_0(\omega r_2) - \frac{2}{r_2} N_1(\omega r_2) \end{aligned}$$

ここで $C_1 \sim C_4$ に関する条件式を満足する特性値は u_r, u_z に関する特性値であり、 C_5, C_6 に関する条件式を満足する特性値は u_θ に関する特性値である。

$n \geq 1$ の場合

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \\ C_2 \\ C_4 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.28)$$

ここに

$$a_{11} = -\frac{n+1-2\nu}{1-2\nu} J_n(\omega r_1) + \frac{\omega r}{1-2\nu} J_{n+1}(\omega r_1)$$

$$\begin{aligned}
a_{12} &= \omega J_n(\omega r_1) - \frac{n+1}{r} J_{n+1}(\omega r_1) \\
a_{13} &= -\omega J_n(\omega r_1) + \frac{n-1}{r} J_{n-1}(\omega r_1) \\
a_{14} &= -\frac{n+1-2\nu}{1-2\nu} N_n(\omega r_1) + \frac{\omega r}{1-2\nu} N_{n+1}(\omega r_1) \\
a_{15} &= \omega N_n(\omega r_1) - \frac{n+1}{r} N_{n+1}(\omega r_1) \\
a_{16} &= -\omega N_n(\omega r_1) + \frac{n-1}{r} N_{n-1}(\omega r_1) \\
a_{21} &= \frac{n}{2(1-2\nu)} J_n(\omega r_1) \\
a_{22} &= \frac{\omega}{2} J_n(\omega r_1) - \frac{n+1}{r} J_{n+1}(\omega r_1) \\
a_{23} &= \frac{\omega}{2} J_n(\omega r_1) - \frac{n-1}{r} J_{n-1}(\omega r_1) \\
a_{24} &= \frac{n}{2(1-2\nu)} N_n(\omega r_1) \\
a_{25} &= \frac{\omega}{2} N_n(\omega r_1) - \frac{n+1}{r} N_{n+1}(\omega r_1) \\
a_{26} &= \frac{\omega}{2} N_n(\omega r_1) - \frac{n-1}{r} N_{n-1}(\omega r_1) \\
a_{31} &= -\frac{\omega r}{1-2\nu} J_n(\omega r_1) + \frac{n}{2(1-2\nu)} J_{n+1}(\omega r_1) + \frac{n+4-4\nu}{2(1-2\nu)\omega} \left\{ \frac{n}{\omega r_1} J_n(\omega r_1) - J_{n+1}(\omega r_1) \right\} \\
a_{32} &= \omega J_{n+1}(\omega r_1) - \frac{n}{2r} J_n(\omega r_1) \\
a_{33} &= \omega J_{n-1}(\omega r_1) - \frac{n}{2r} J_n(\omega r_1) \\
a_{34} &= -\frac{\omega r}{1-2\nu} N_n(\omega r_1) + \frac{n}{2(1-2\nu)} N_{n+1}(\omega r_1) + \frac{n+4-4\nu}{2(1-2\nu)\omega} \left\{ \frac{n}{\omega r_1} N_n(\omega r_1) - N_{n+1}(\omega r_1) \right\} \\
a_{35} &= \omega N_{n+1}(\omega r_1) - \frac{n}{2r} N_n(\omega r_1) \\
a_{36} &= \omega N_{n-1}(\omega r_1) - \frac{n}{2r} N_n(\omega r_1) \\
a_{41} &= -\frac{n+1-2\nu}{1-2\nu} J_n(\omega r_2) + \frac{\omega r}{1-2\nu} J_{n+1}(\omega r_2) \\
a_{42} &= \omega J_n(\omega r_2) - \frac{n+1}{r} J_{n+1}(\omega r_2) \\
a_{43} &= -\omega J_n(\omega r_2) + \frac{n-1}{r} J_{n-1}(\omega r_2) \\
a_{44} &= -\frac{n+1-2\nu}{1-2\nu} N_n(\omega r_2) + \frac{\omega r}{1-2\nu} N_{n+1}(\omega r_2) \\
a_{45} &= \omega N_n(\omega r_2) - \frac{n+1}{r} N_{n+1}(\omega r_2) \\
a_{46} &= -\omega N_n(\omega r_2) + \frac{n-1}{r} N_{n-1}(\omega r_2) \\
a_{51} &= \frac{n}{2(1-2\nu)} J_n(\omega r_2) \\
a_{52} &= \frac{\omega}{2} J_n(\omega r_2) - \frac{n+1}{r} J_{n+1}(\omega r_2) \\
a_{53} &= \frac{\omega}{2} J_n(\omega r_2) - \frac{n-1}{r} J_{n-1}(\omega r_2) \\
a_{54} &= \frac{n}{2(1-2\nu)} N_n(\omega r_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{55} &= \frac{\omega}{2} N_n(\omega r_2) - \frac{n+1}{r} N_{n+1}(\omega r_2) \\
a_{56} &= \frac{\omega}{2} N_n(\omega r_2) - \frac{n-1}{r} N_{n-1}(\omega r_2) \\
a_{61} &= -\frac{\omega r}{1-2\nu} J_n(\omega r_2) + \frac{n}{2(1-2\nu)} J_{n+1}(\omega r_2) + \frac{n+4-4\nu}{2(1-2\nu)\omega} \left\{ \frac{n}{\omega r_2} J_n(\omega r_2) - J_{n+1}(\omega r_2) \right\} \\
a_{62} &= \omega J_{n+1}(\omega r_2) - \frac{n}{2r} J_n(\omega r_2) \\
a_{63} &= \omega J_{n-1}(\omega r_2) - \frac{n}{2r} J_n(\omega r_2) \\
a_{64} &= -\frac{\omega r}{1-2\nu} N_n(\omega r_2) + \frac{n}{2(1-2\nu)} N_{n+1}(\omega r_2) + \frac{n+4-4\nu}{2(1-2\nu)\omega} \left\{ \frac{n}{\omega r_2} N_n(\omega r_2) - N_{n+1}(\omega r_2) \right\} \\
a_{65} &= \omega N_{n+1}(\omega r_2) - \frac{n}{2r} N_n(\omega r_2) \\
a_{66} &= \omega N_{n-1}(\omega r_2) - \frac{n}{2r} N_n(\omega r_2)
\end{aligned}$$

この結果、曲げ応力解を求める問題は式(3.27)(3.28)の左辺の行列の行列式が0となる複素数である特性値 ω を求める問題に帰着される。

3.4.2.2 数値解析

式(3.27),(3.28)を満足する特性値 ω を得るために、特定の $r_0/t_0, \nu$ に対して、 ω の値を複素平面上で変化させながら、式(3.27),(3.28)に示される行列の行列式の実部と虚部がともに0になる値を探索した。この際、行列式の値を精度良く得るために、行列の各行を最大値が1のオーダーになるように2のべき乗で除して規格化し、計算には倍精度演算を用いた。

特性値の探索は次のようにして行った。まず、複素平面を図3.2に示すような長方形格子に分割し、各格子点で行列式の値を計算し、実部と虚部の符号がともに反転する領域 $a+bi$, $(a+\Delta a)+bi$, $a+(b+\Delta b)i$, $(a+\Delta a)+(b+\Delta b)i$ を探した。次に、この領域をさらに細かい格子に分割し、同様の計算を行って符号が反転する領域を狭め、 $\Delta a/\sqrt{a^2+b^2}, \Delta b/\sqrt{a^2+b^2}$ が 10^{-4} 以下になった時点で探索を打ち切り、 $(a+\Delta a/2)+(b+\Delta b/2)i$ を特性値とした。

図3.3に $n=2, \nu=0.3, r_0/t_0=5.0$ の場合の解析例を示す。ここで式(3.27),(3.28)に示される行列の行列式の虚部が0であると推測される位置を太線で示し、行列式の実部が0であると推測される位置を細線で示す。つまり、太線と細線の交点が特性値の存在する位置である。

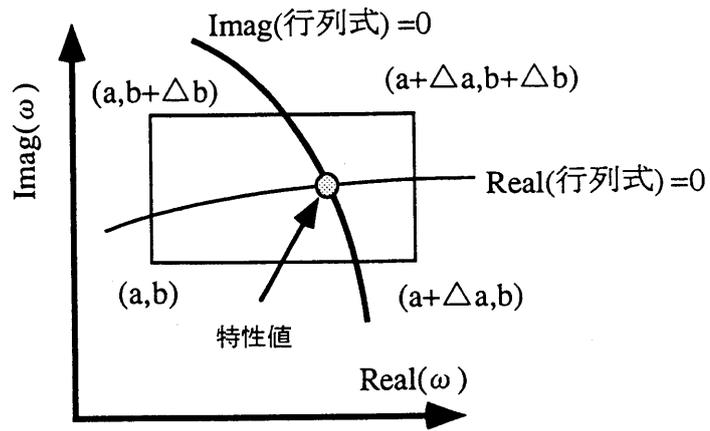


図 3.2: 特性値の探索法

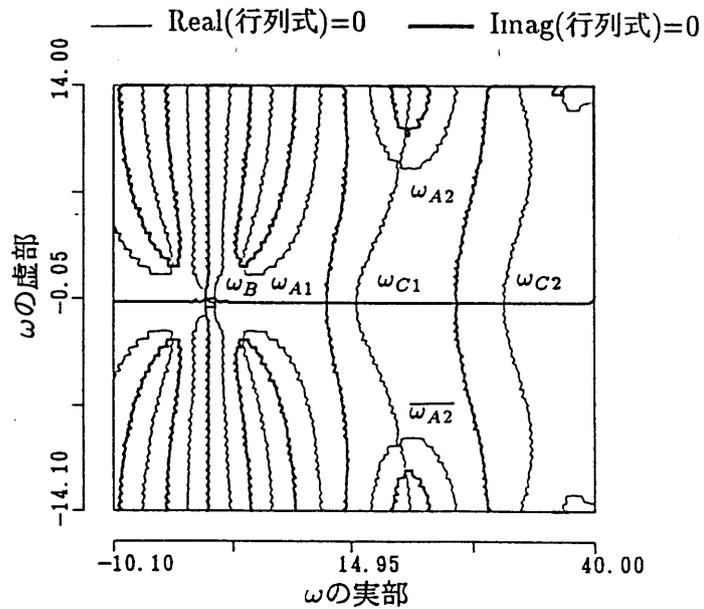


図 3.3: 特性値の存在箇所 ($n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$)

3.4.2.3 解の分類と特性

特性値は、図 3.3 に示されるように複素平面上に複数個得られた。これらの特性値は工学的な考察により、実軸と虚数軸について対称に存在すると考えられる。つまり、第一象限にある特性値を ω とすれば、その共役な複素数 $\bar{\omega}$ も特性値になる。また、特性値 $\omega, \bar{\omega}$ を用いた場合、変位関数の軸方向分布は $e^{\omega z}, e^{\bar{\omega} z}$ で表され、これは特性値の実部が正であるから z の増加とともに増加する。逆に z の増加とともに減衰する解に対応する特性値 $-\omega, -\bar{\omega}$ が存在すると考えられる。これらの特性値 ($\omega, \bar{\omega}, -\omega, -\bar{\omega}$) は同じ性質を示すから、第一象限の特性値 ω で代表させることにする。また、これらを絶対値の小さいものから、順次 $\omega_{A1}, \omega_{A2}, \dots$ と記すことにする。

また、特性値の値および断面内変位、応力分布モードの違いより、特性値を 3 種類に分類することができ、それぞれを $\omega_{A1}, \omega_{A2}, \dots, \omega_B, \omega_{C1}, \omega_{C2}, \dots$ とおく。

これらの特性値は実数軸と虚数軸に対して軸対称に分布しているのは力学的考察から明らかであるので、以後、第一象限にのみ注目する。

特性値の種類とその数をまとめると表 3.1 のようになる。なお、フーリエ展開次数 $n = 0$ の場合の C 種の解は、変位 u_θ のみの円筒のねじりに関する解である。

表 3.1: 三次元解析解の未定定数の数

フーリエ展開次数 n	数		
	A 種	B 種	C 種
0	4m	なし	2m
1	4m	なし	2m
2 以上	4m	4	2m

(A・C 種は無限に解がある ($m \geq 1$))

特性値および特性モードの例 $n = 0, 1, 2$ とした場合の代表的な特性値の値を示す。

表 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 は $r_0/t_0 = 5.0, \nu = 0.3$ の場合のそれぞれ $n = 0, 1, 2, 3$ に対する特性値の計算結果である。

また、これらの特性値 ω を特性値の複素平面上に表すと、図 3.4, 3.10, 3.16, 3.23, のようになる。

ここで式 (3.27), (3.28) に示される行列の行列式の虚部が 0 であると推測される位置を太線で示し、行列式の実部が 0 であると推測される位置を細線で示す。つまり、太線と細線の交点が特性値の存在する位置である。

なお、変位及び座標は中立面半径 r_0 で、応力はせん断弾性係数でそれぞれ除して無次元化しており、以後掲載される変位、応力の分布モードは全て無次元化されたものである。

なお、Bessel 関数の計算には名古屋大学大型計算機センターのライブラリー・プログラム (NUMPAC) の BESJNB, BESYNB を用いた。

表 3.2: 特性値の値 ($n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) の例

特性値の	実部	虚部
ω_{A1}	2.9752	$+2.7845i$
$\bar{\omega}_{A1}$	2.9752	$-2.7845i$
$-\bar{\omega}_{A1}$	-2.9752	$+2.7845i$
$-\omega_{A1}$	-2.9752	$-2.7845i$
ω_{A2}	21.0962	$+11.2534i$
$\bar{\omega}_{A2}$	21.0962	$-11.2534i$
ω_{A3}	37.5015	$+13.8471i$
$\bar{\omega}_{A3}$	37.5015	$-13.8471i$
ω_{C1}	15.8272	$+00.0000i$
ω_{C2}	31.4757	$+00.0000i$

(探索範囲 $-10 < \text{実部} < 40, -14 < \text{虚部} < 14$)

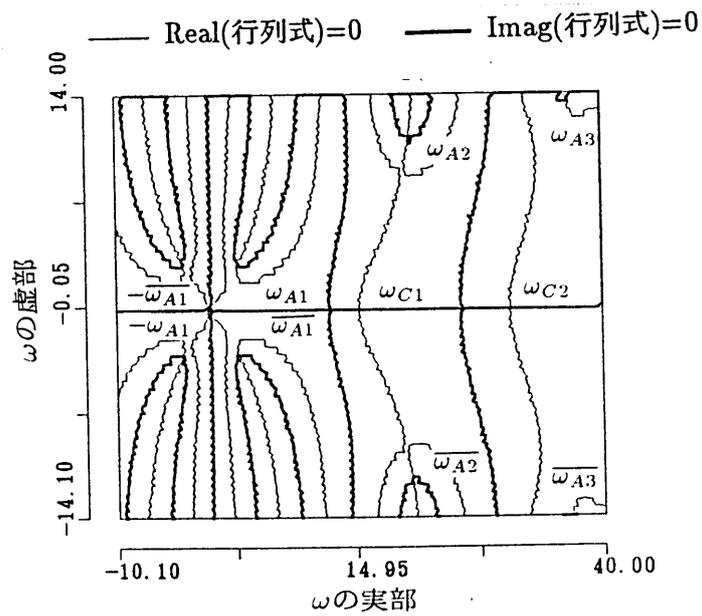


図 3.4: 特性値の値 ($n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) の例

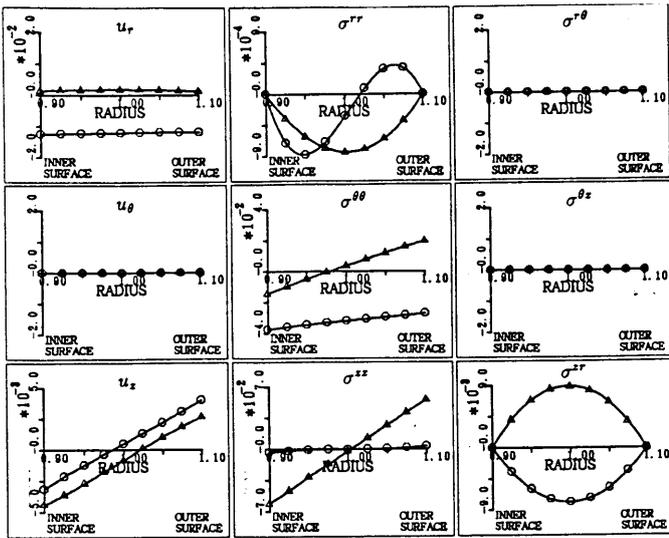


図 3.5: ω_{A1} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 2.9752 + 2.7845i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

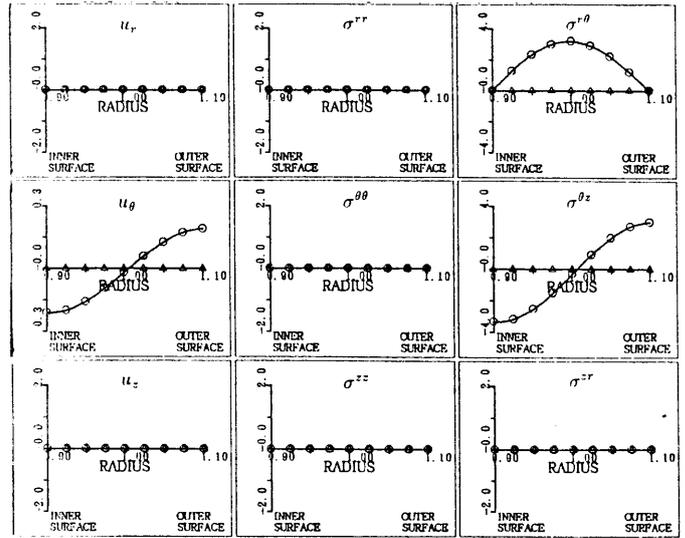


図 3.8: ω_{C1} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 15.8272 + 0.0i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

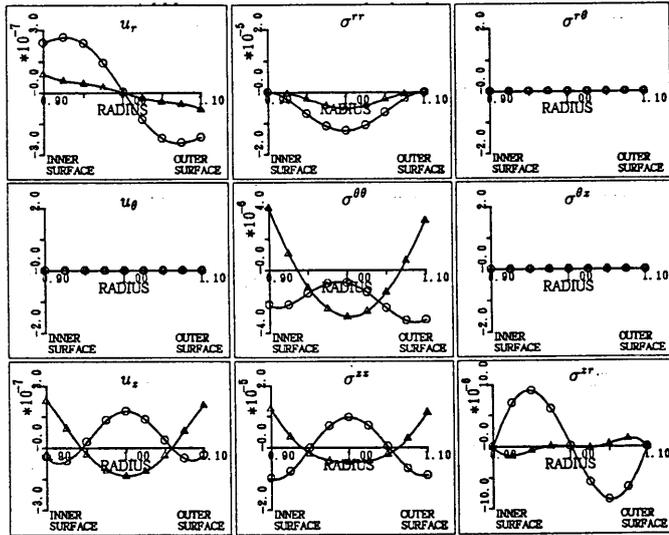


図 3.6: ω_{A2} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 21.0962 + 11.2534i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

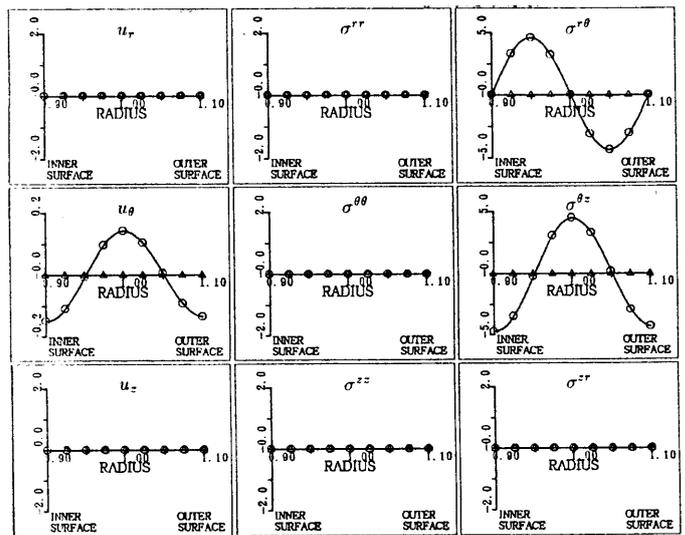


図 3.9: ω_{C2} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 31.4757 + 0.0i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

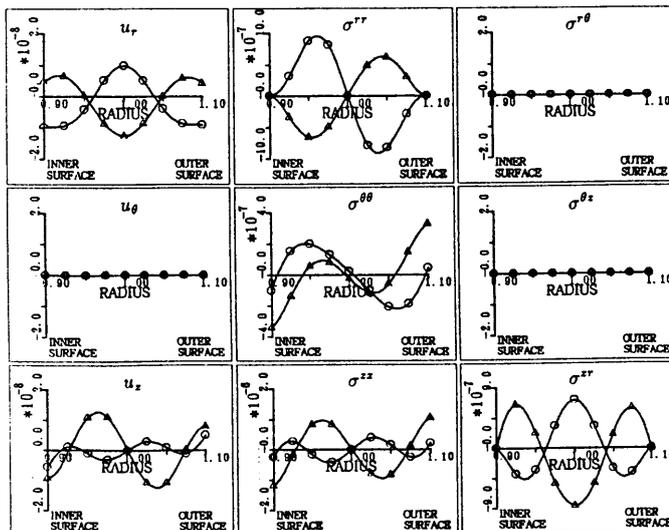


図 3.7: ω_{A3} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 37.5015 + 13.8471i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

表 3.3: 特性値の値 ($n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) の例

特性値	実部	虚部
ω_{A1}	3.1438	+2.6049 <i>i</i>
$\bar{\omega}_{A1}$	3.1438	-2.6049 <i>i</i>
$-\bar{\omega}_{A1}$	-3.1438	+2.6049 <i>i</i>
$-\omega_{A1}$	-3.1438	-2.6049 <i>i</i>
ω_{A2}	21.1137	+11.2425 <i>i</i>
$\bar{\omega}_{A2}$	21.1137	-11.2425 <i>i</i>
ω_{A3}	37.5157	+13.8244 <i>i</i>
$\bar{\omega}_{A3}$	37.5157	-13.8244 <i>i</i>
ω_{C1}	15.8604	+00.0000 <i>i</i>
ω_{C2}	31.4923	+00.0000 <i>i</i>

(探索範囲 $-10 < \text{実部} < 40, -14 < \text{虚部} < 14$)

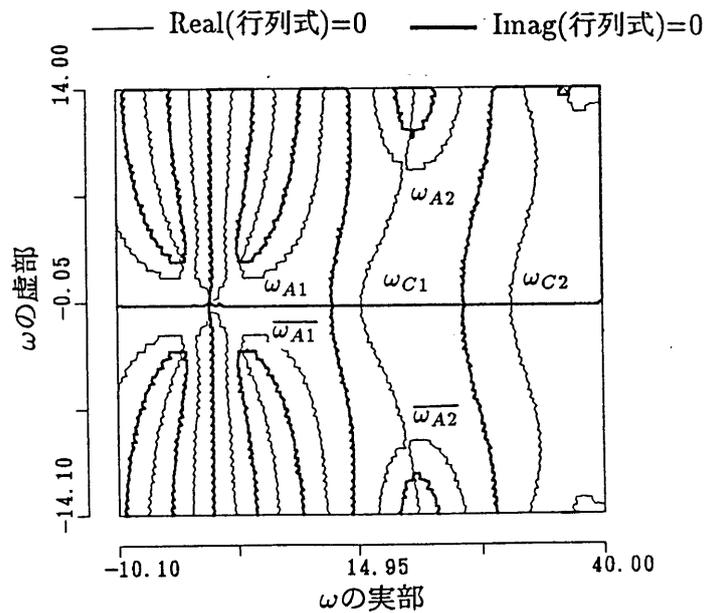


図 3.10: 特性値の値 ($n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) の例

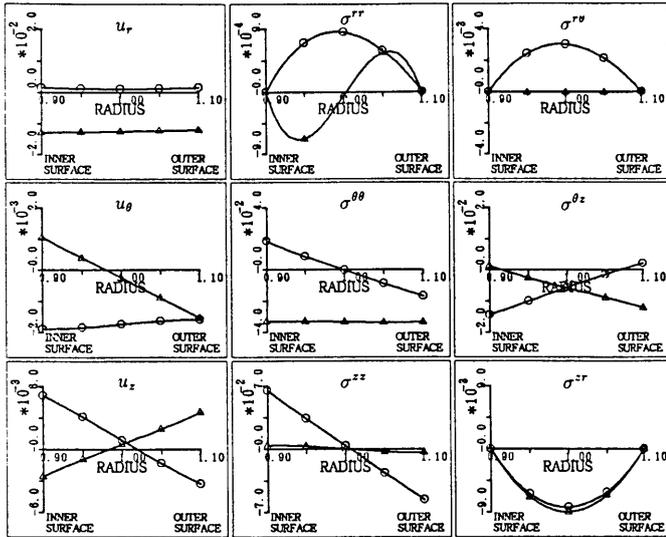


図 3.11: ω_{A1} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 3.1438 + 2.6049i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

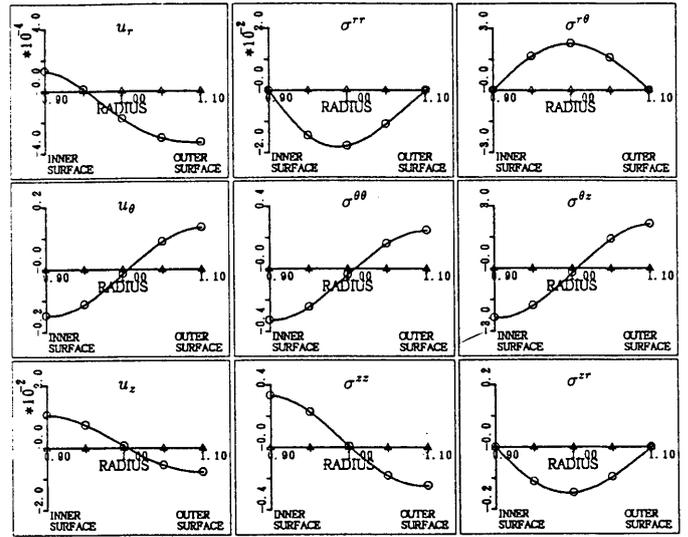


図 3.14: ω_{C1} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 15.8604 + 0.0i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

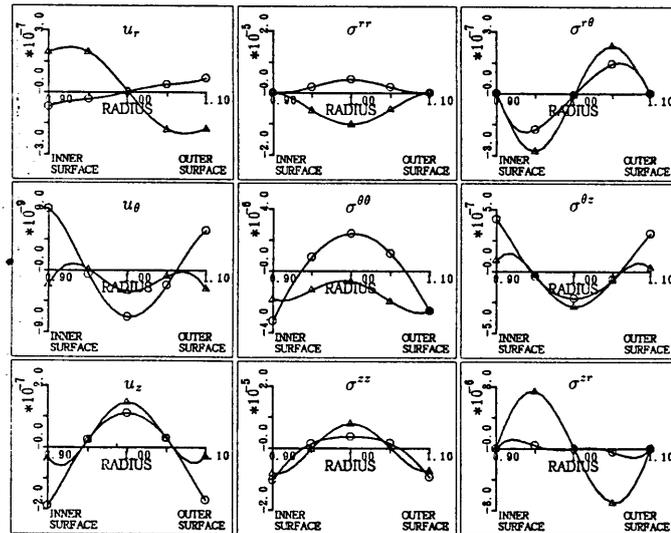


図 3.12: ω_{A2} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 21.1137 + 11.2425i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

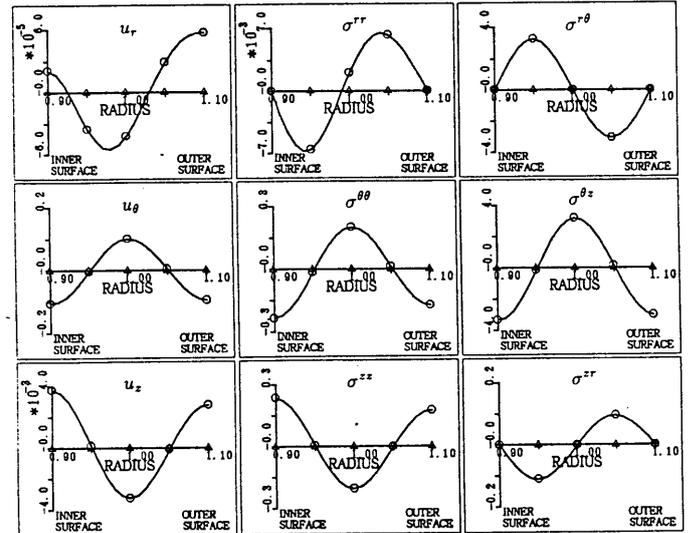


図 3.15: ω_{C2} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 31.4923 + 0.0i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

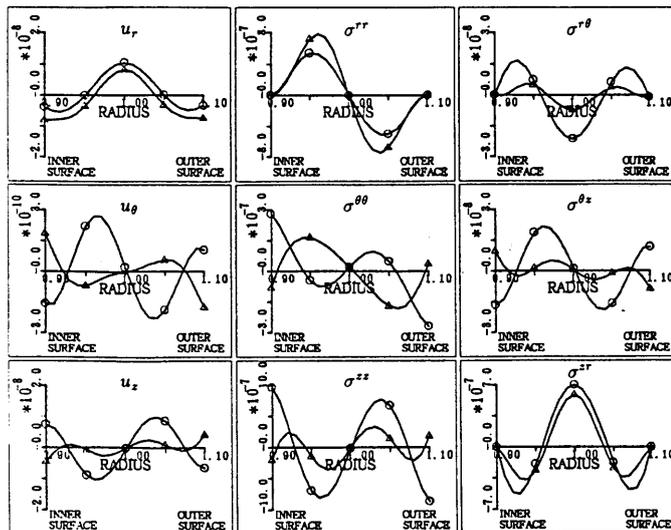


図 3.13: ω_{A3} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 37.5157 + 13.8244i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

表 3.4: 特性値の値 ($n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) の例

特性値	実部	虚部
ω_{A1}	3.7137	+2.2121 <i>i</i>
$\bar{\omega}_{A1}$	3.7137	-2.2121 <i>i</i>
$-\bar{\omega}_{A1}$	-3.7137	+2.2121 <i>i</i>
$-\omega_{A1}$	-3.7137	-2.2121 <i>i</i>
ω_{A2}	21.1701	+11.2145 <i>i</i>
$\bar{\omega}_{A2}$	21.1701	-11.2145 <i>i</i>
ω_{A3}	37.5456	+13.8314 <i>i</i>
$\bar{\omega}_{A3}$	37.5456	-13.8314 <i>i</i>
ω_B	0.6457	+0.4728 <i>i</i>
$\bar{\omega}_B$	0.6457	-0.4728 <i>i</i>
$-\bar{\omega}_B$	-0.6457	+0.4728 <i>i</i>
$-\omega_B$	-0.6457	-0.4728 <i>i</i>
ω_{C1}	15.9589	+00.0000 <i>i</i>
ω_{C2}	31.5409	+00.0000 <i>i</i>

(探索範囲 $-10 < \text{実部} < 40, -14 < \text{虚部} < 14$)

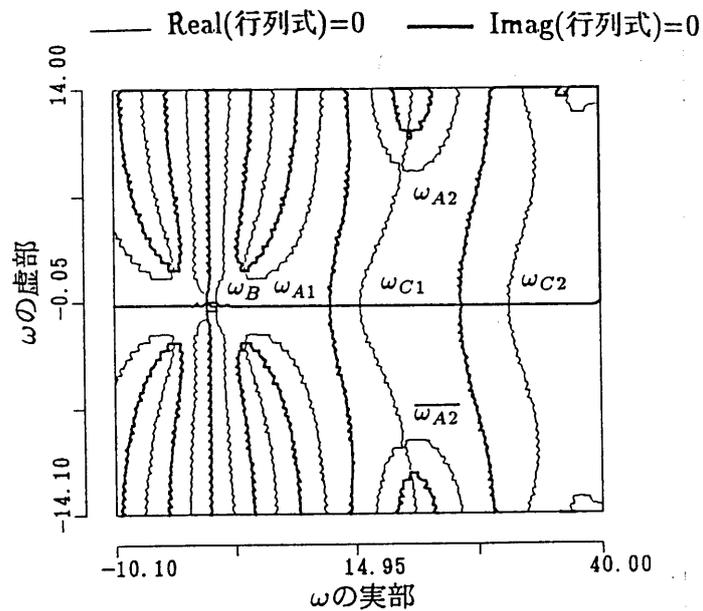


図 3.16: 特性値の値 ($n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) の例

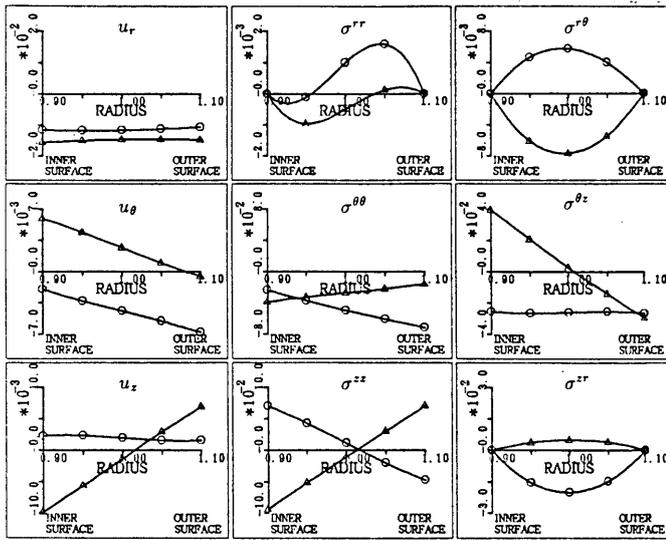


図 3.17: ω_{A1} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 3.7137 + 2.2121i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

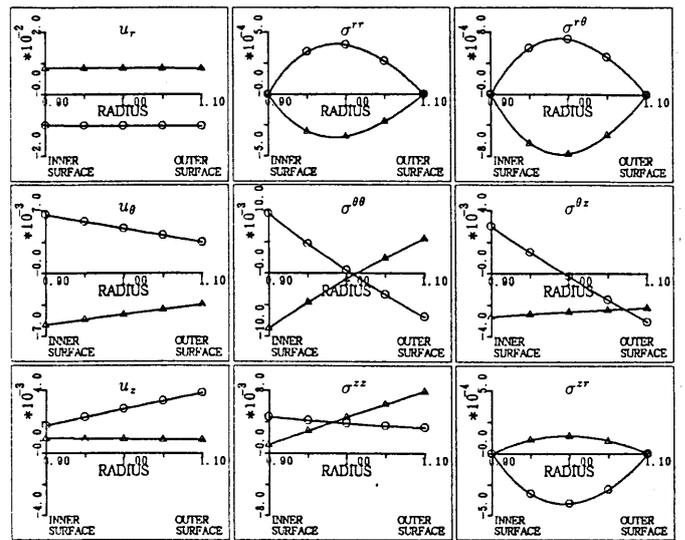


図 3.20: ω_B の断面内変位・応力分布モード
 $n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 0.6457 + 0.4728i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

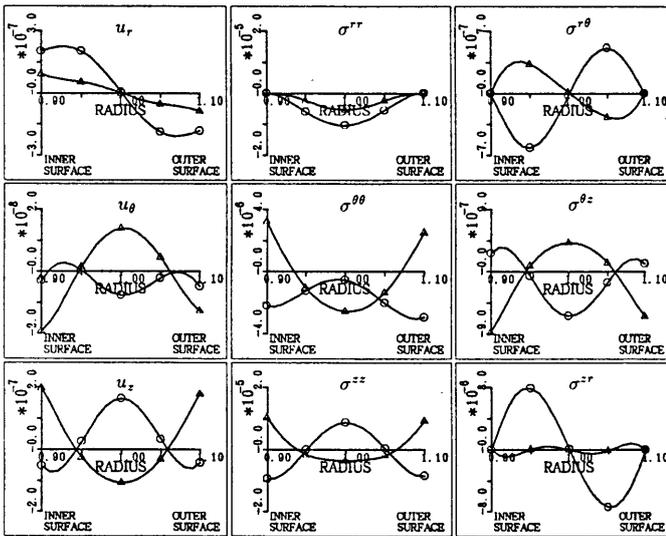


図 3.18: ω_{A2} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 21.1701 + 11.2145i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

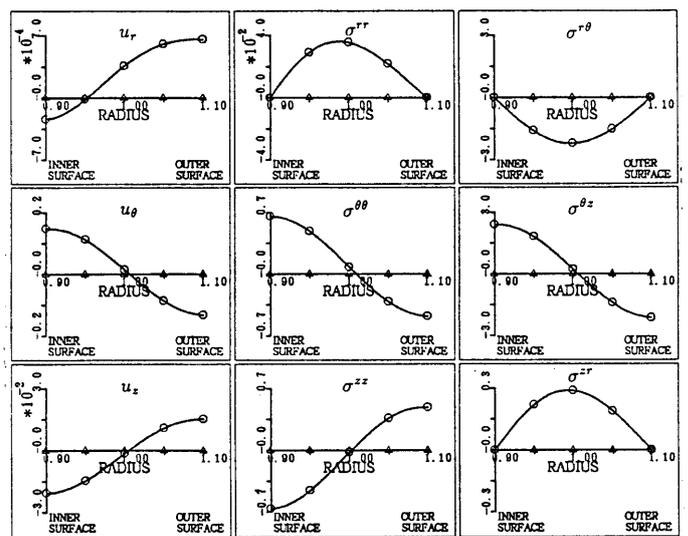


図 3.21: ω_{C1} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 15.9589 + 0.0i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

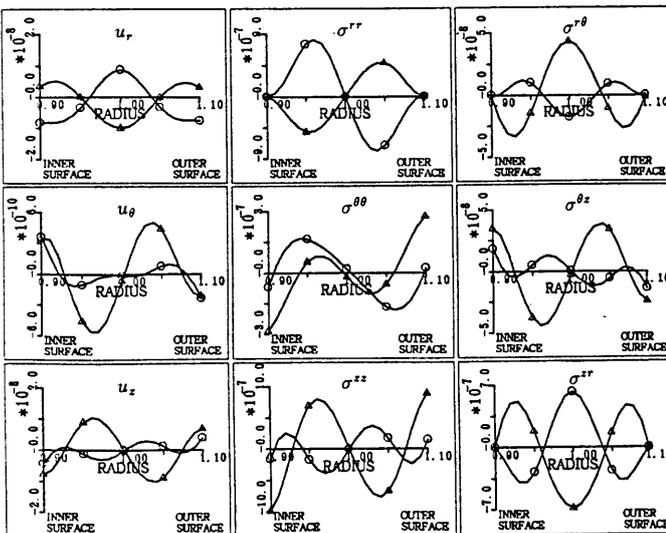


図 3.19: ω_{A3} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 37.5456 + 13.8314i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

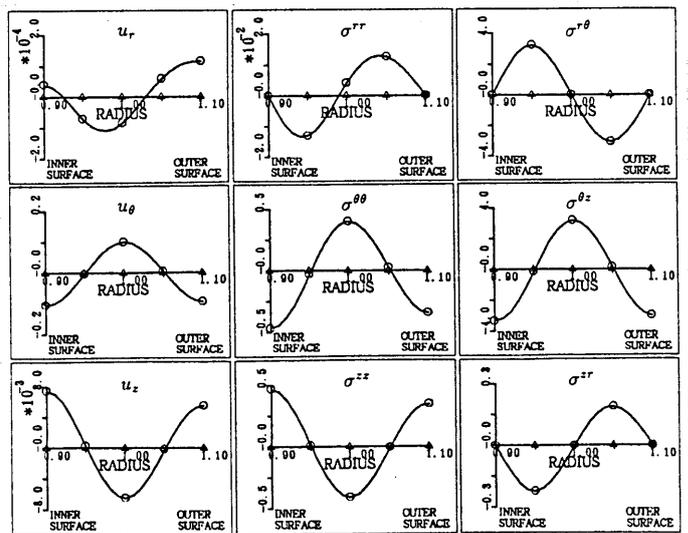


図 3.22: ω_{C2} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 31.5409 + 0.0i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

表 3.5: 特性値の値 ($n = 3, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) の例

特性値	実部	虚部
ω_{A1}	4.5809	+1.8870 <i>i</i>
$\bar{\omega}_{A1}$	4.5809	-1.8870 <i>i</i>
$-\bar{\omega}_{A1}$	-4.5809	+1.8870 <i>i</i>
$-\omega_{A1}$	-4.5809	-1.8870 <i>i</i>
ω_{A2}	21.2628	+11.1613 <i>i</i>
$\bar{\omega}_{A2}$	21.2628	-11.1613 <i>i</i>
ω_{A3}	37.6110	+13.7985 <i>i</i>
$\bar{\omega}_{A3}$	37.6110	-13.7985 <i>i</i>
ω_B	1.5161	+0.7977 <i>i</i>
$\bar{\omega}_B$	1.5161	-0.7977 <i>i</i>
$-\bar{\omega}_B$	-1.5161	+0.7977 <i>i</i>
$-\omega_B$	-1.5161	-0.7977 <i>i</i>
ω_{C1}	16.1225	+00.0000 <i>i</i>
ω_{C2}	31.6213	+00.0000 <i>i</i>

(探索範囲 $-10 < \text{実部} < 40, -14 < \text{虚部} < 14$)

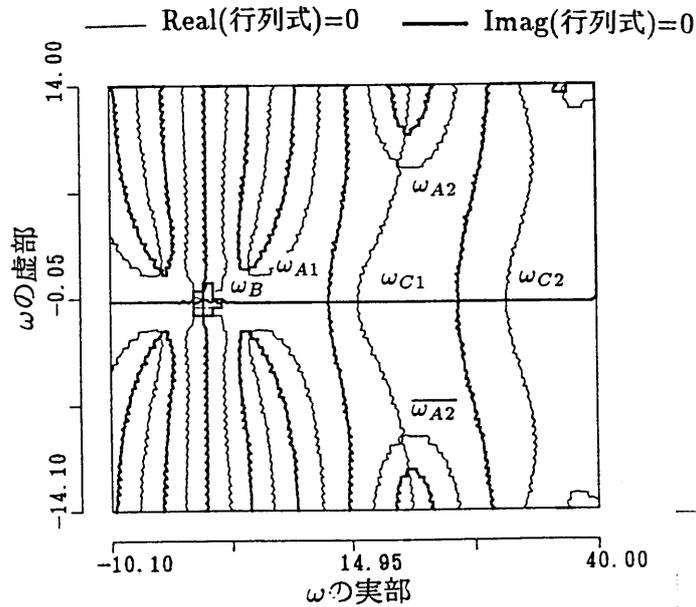


図 3.23: 特性値の値 ($n = 3, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) の例

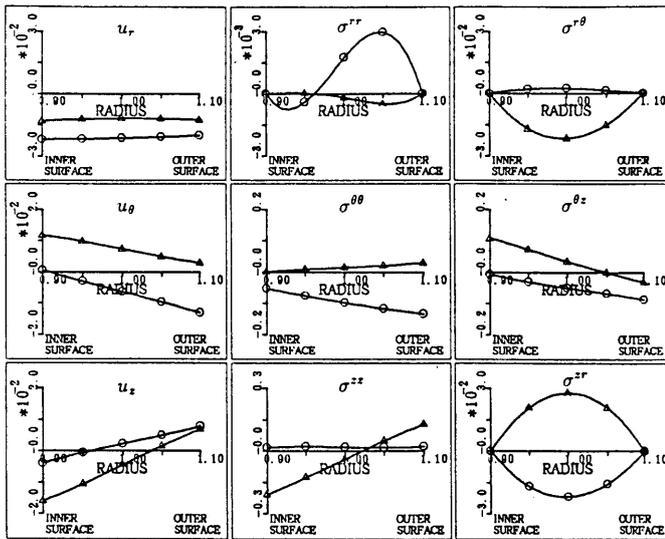


図 3.24: ω_{A1} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 3, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 4.5809 + 1.8870i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

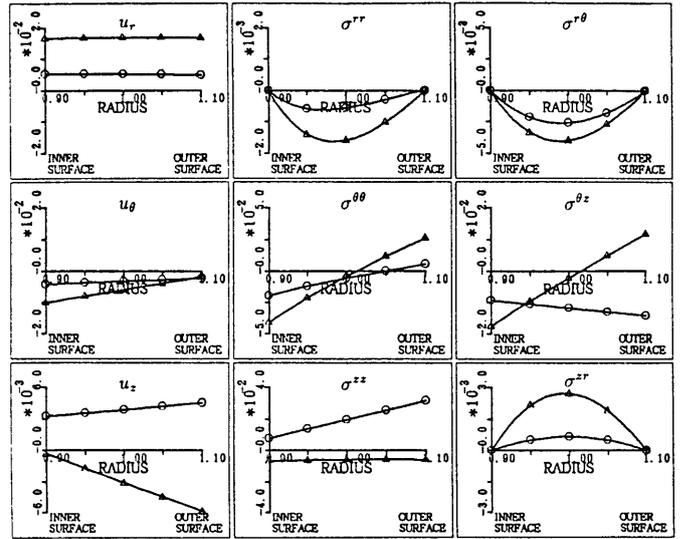


図 3.27: ω_B の断面内変位・応力分布モード
 $n = 3, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 1.5161 + 0.7977i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

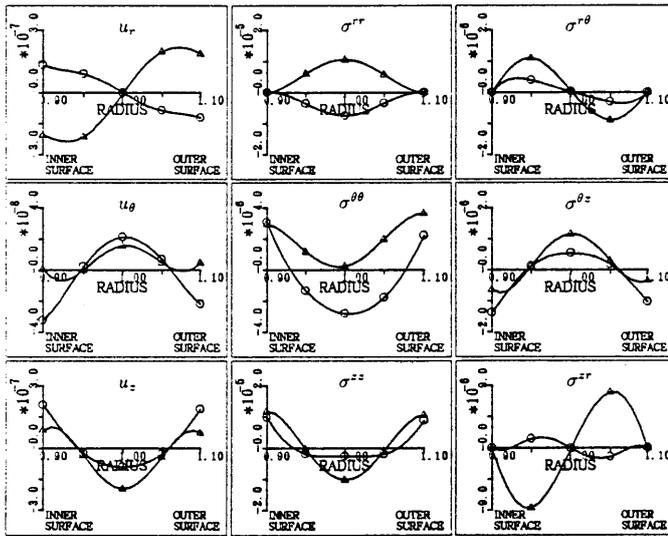


図 3.25: ω_{A2} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 3, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 21.2628 + 11.1613i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

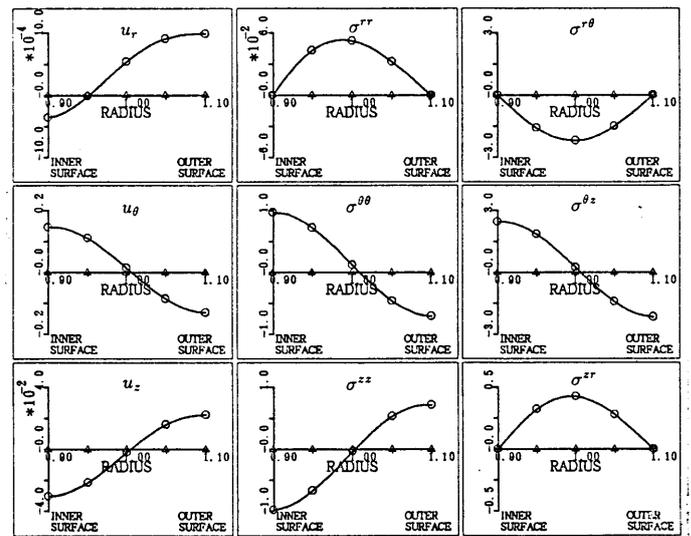


図 3.28: ω_{C1} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 3, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 16.1225 + 0.0i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

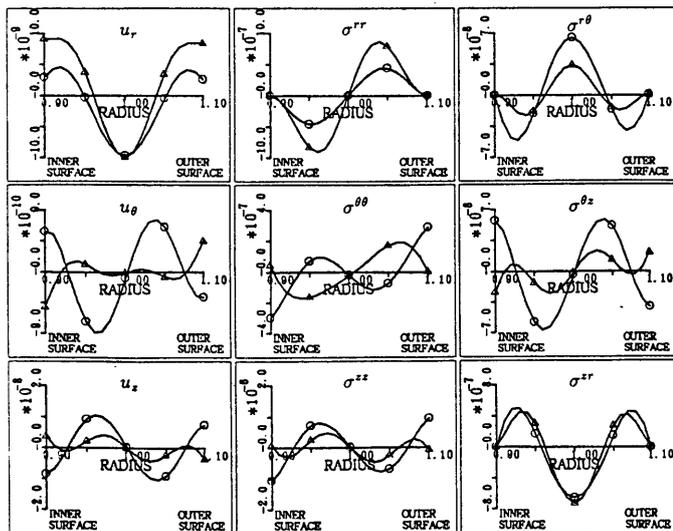


図 3.26: ω_{A3} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 3, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 37.6110 + 13.7985i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

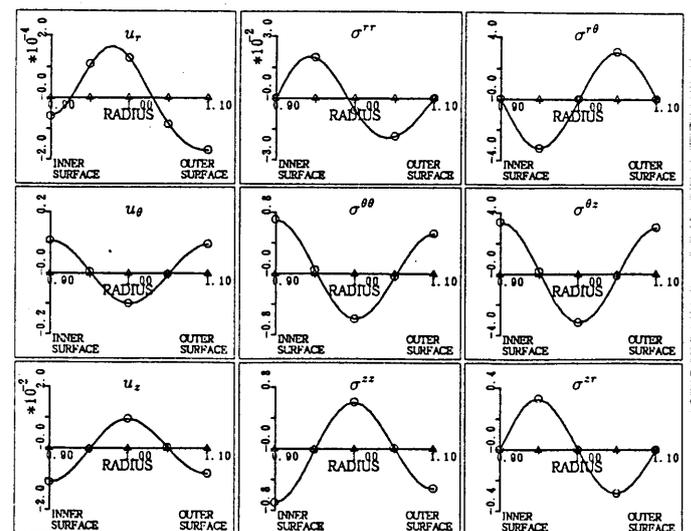


図 3.29: ω_{C2} の断面内変位・応力分布モード
 $n = 3, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, \omega = 31.6213 + 0.0i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

解の特徴 曲げ応力解を得る過程ではポアソン比 ν 、半径-シェル厚比 r_0/t_0 、周方向フーリエ展開次数 n がパラメーターとなる。

これらのパラメーターの特性値への影響は、 r_0/t_0 の影響が顕著である。他にも、フーリエ展開次数 n により大きく変化するが、 r_0/t_0 ほどではない。ポアソン比の影響は、前二者に比べ非常に小さい。

- A 種 (減衰の大きい複素数解)

シェル理論の曲げ応力解により得られる減衰の大きな解を含む複素数解。

変位の特性モード (図 3.17, 3.18) を見ると、 r 方向・ z 方向変位に対して θ 方向変位が小さい。 r 方向・ z 方向変位の境界条件の細かい違いを合わせる解と考えられる。

絶対値の小さいものから、 $\omega_{A1}, \omega_{A2}, \dots$ と呼ぶことにする。 $\omega_{A1}, \omega_{A2}, \dots$ と解が大きくなるほど、断面内モードが複雑になる。 ω_{A1} は、シェル理論による特性値 $\omega = \sqrt[3]{3(1-\nu^2)}\sqrt{r_0/t_0}(1+i)$ に近い値となる。

A 種について $r_0/t_0, n, \nu$ の影響を把握するため、 $r_0/t_0, n, \nu$ をパラメトリックに変化させて ω_{A1} を求めた。図 3.30 に、“ $\nu = 0.3$ の場合の r_0/t_0 と n による特性値の変化” と “ $r_0/t_0 = 4$ の場合の ν と n による特性値の変化” を示す。特性値に対して、 r_0/t_0 が小さいほど n の影響が強いことが解る。また、ポアソン比 ν の影響は、ほとんど見られない

- B 種 (減衰の小さい複素数解)

シェル理論の曲げ応力解より得られる減衰の小さい解もしくは、膜応力解に相当する複素数解。

変位の特性モード (図 3.20) を見ると、特定の变位の優越性はみられない。変位の境界条件を全体的に合わせる解と考えられる。

$n = 0, 1$ の場合には存在しない。

B 種について $r_0/t_0, n, \nu$ の影響を把握するため、 $r_0/t_0, n, \nu$ をパラメトリックに変化させて ω_B を求めた。図 3.31 に、“ $\nu = 0.3$ の場合の r_0/t_0 と n による特性値の変化” と “ $r_0/t_0 = 4$ の場合の ν と n による特性値の変化” を示す。特性値に対して、 r_0/t_0 が小さいほど n の影響が強く、特に特性値の実部において r_0/t_0 より影響を与えることが解る。また、ポアソン比 ν の影響は、ほとんど見られない

- C 種 (実数解)

法線保持の仮定を用いたシェル理論では求められない実数解。ただし、せん断変形を考慮したシェル理論では 1 組 (ω_{C1}) 得られる。

変位の特性モード (図 3.21, 3.22) を見ると、 r 方向・ z 方向変位に対して θ 方向変位が大きい。 θ 方向変位の境界条件の細かい違いを合わせる解と考えられる。

ほぼ $m\pi r_0/t_0$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) 近辺に存在している。絶対値の小さいものから、 $\omega_{C1}, \omega_{C2}, \dots$ と呼ぶことにする。 $\omega_{C1}, \omega_{C2}, \dots$ と解が大きくなるほど、断面内モードが複雑になる。

C 種について $r_0/t_0, n, \nu$ の影響を把握するため、 $r_0/t_0, n, \nu$ をパラメトリックに変化させて ω_{C1} を求めた。図 3.32 に、“ $\nu = 0.3$ の場合の r_0/t_0 と n による特性値の変化” と “ $r_0/t_0 = 4$ の場合の ν と n による特性値の変化” を示す。特性値の絶対値に関して、 n とポアソン比 ν の影響は、ほとんど見られない。

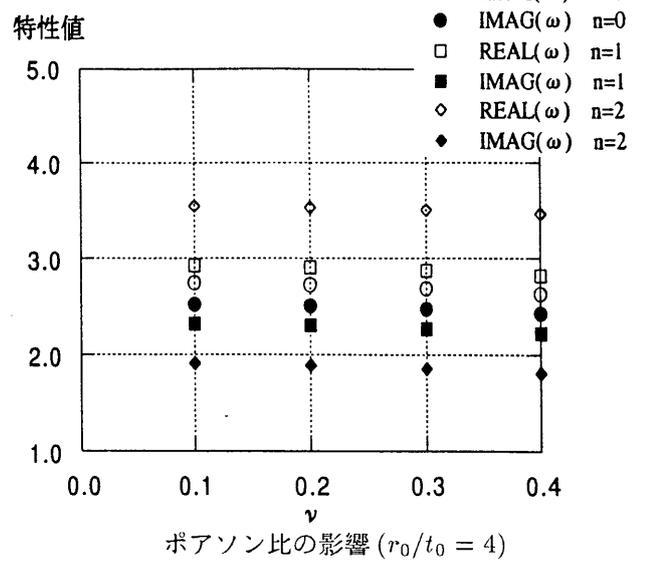
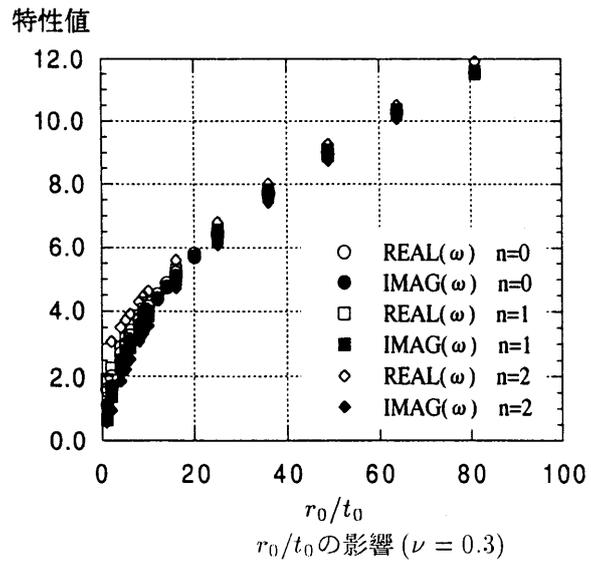


図 3.30: ω_{A1} の値の変化

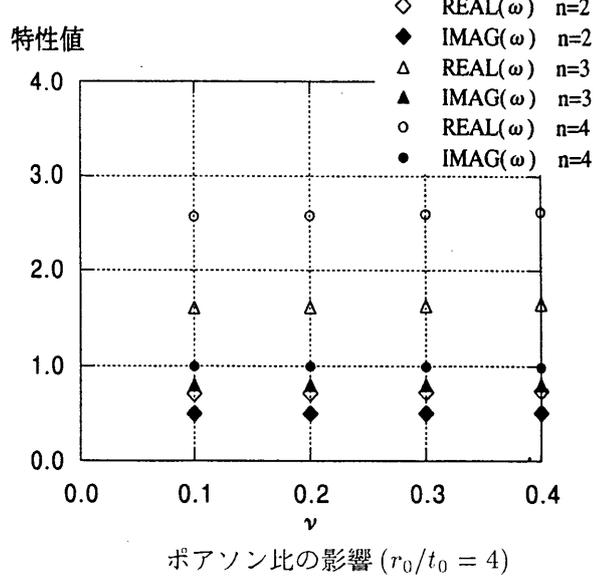
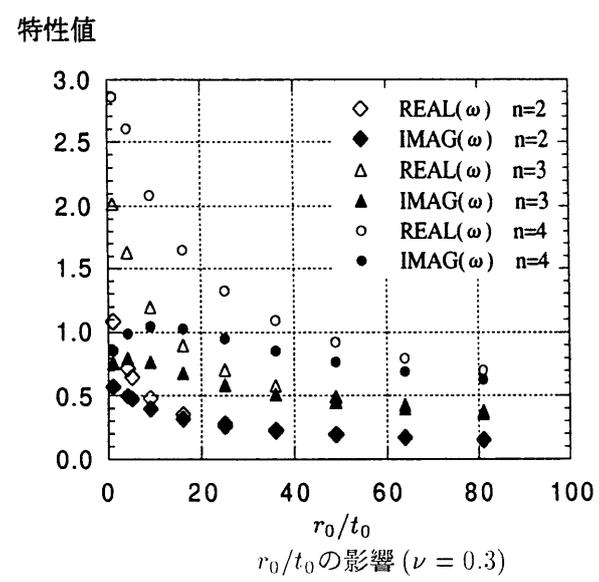


図 3.31: ω_B の値の変化

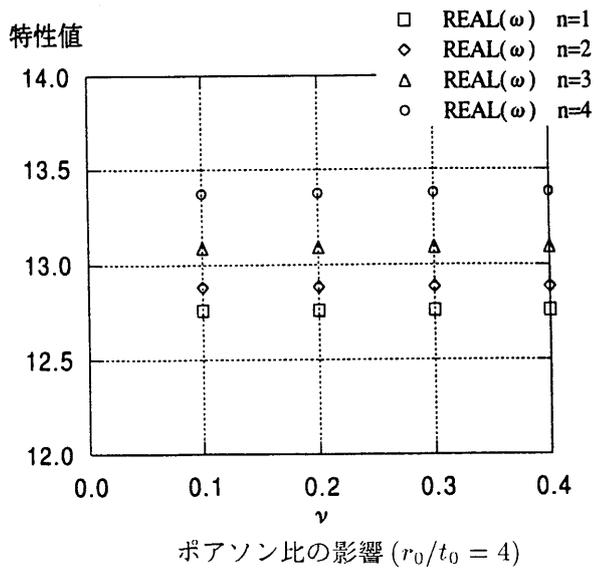
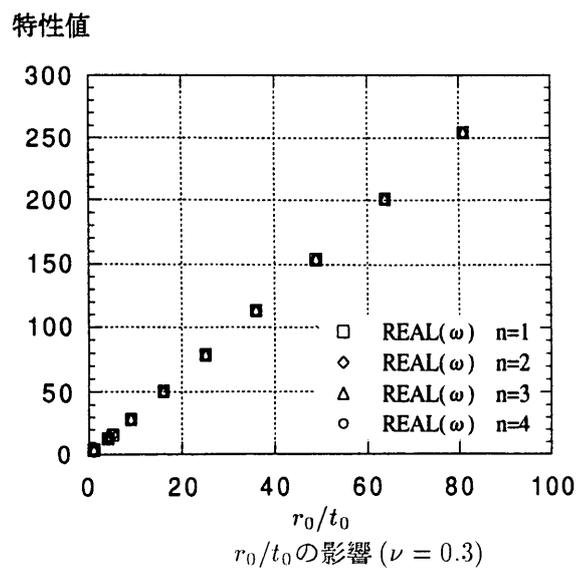


図 3.32: ω_{C1} の値の変化

3.4.2.4 特性値の変化

シェルが薄肉の場合、特性値の値は3.4.2.3節述べたような性質を示す。しかし、極度に厚肉のシェル ($r_0/t_0 = 2.0$ 程度) になった場合図 3.16 に示されるような特性値の分布を保たなくなる。

周方向フーリエ展開次数 $n = 2$ の場合を例に上げると、 $r_0/t_0 = 10$ であれば、十分に減衰の大きい特性値を含む基準状態 (図 3.16 の状態) である。しかし $r_0/t_0 = 1.1$ ぐらいになると図 3.3.3 のように変化が ω_{A11} の虚部が小さくなり、解が振動しなくなる。

これは、シェルが極度に厚くなり、シェルのせん断剛性が無視できなくなり、単に減衰するモードが増えたためと考えられる。

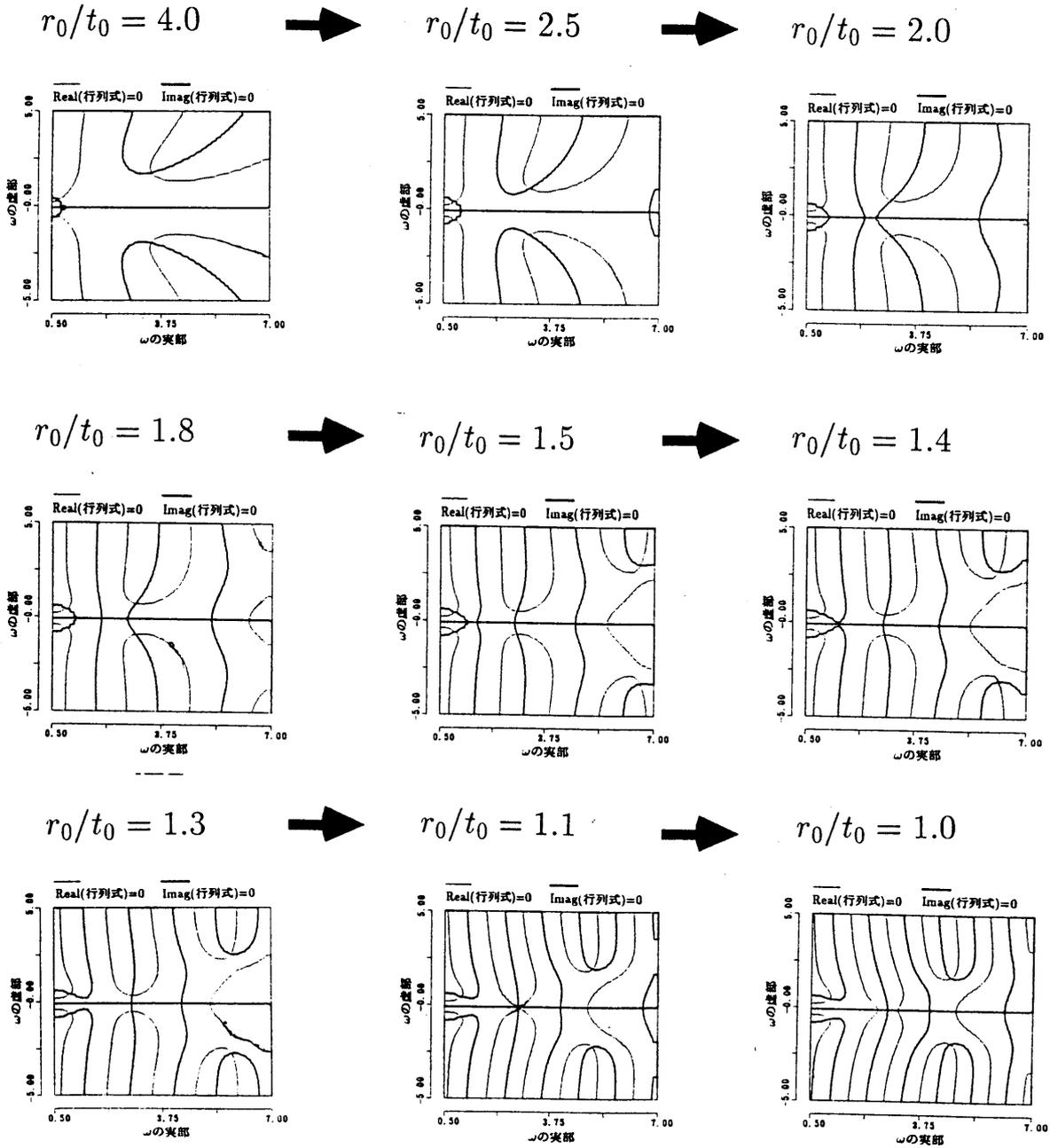


図 3.3.3: 特性地図の変化 ($n = 2, \nu = 0.3$)

3.4.3 まとめ

本節においては、周方向にフーリエ展開された閉断面円筒シェルの一般解を示した。

変位の軸方向分布がべき級数で示される解は、円筒の柱に軸引張りが作用する場合、ねじりが作用する場合、円筒の梁に純曲げが作用する場合、円筒の梁にせん断力が作用する場合、剛体変位、剛体回転のみである。

また、シェル理論で”曲げ応力解”と称せられる変位の軸方向分布が指数で表される解の特性値を三次元弾性論上で求める方法を示し、解析例を示した。その結果、シェル理論では得られない断面内に高次の分布モードを持つ特性値および特性モードを発見した。また、特性値の変化と分類を、特性値が満足すべき行列式の値をマッピングした図上で示した。

解析の結果、円筒シェルの周方向にフーリエ展開された場合の特性値及び特性モードは3種類に分類できた。A, C種は断面の分布モードの違いにより多数の特性値および特性モードが存在し、シェル理論より得られる解は、それらの解の内最も単純なものであることが判明した。

また、各種の特性値の特徴は次のようになる。

- A種 (減衰の大きい複素数解)

シェル理論の曲げ応力解によりもとまる減衰の大きな解を含む複素解。

変位の特性モードより、 r 方向・ z 方向変位に対して θ 方向変位が小さい。 r 方向・ z 方向変位の境界条件の細かい違いを合わせる解と考えられる。

絶対値の小さいものから、 $\omega_{A1}, \omega_{A2}, \dots$ と呼ぶことにする。 $\omega_{A1}, \omega_{A2}, \dots$ と解が大きくなるほど、断面内モードが複雑になる。 ω_{A1} は、シェル理論による特性値 $\omega = \sqrt[3]{3(1-\nu^2)}\sqrt{r_0/t_0}(1+i)$ に近い値となる。

A種について $r_0/t_0, n, \nu$ の影響は、特性値に対して、 r_0/t_0 が小さいほど n の影響が強いことが解る。また、ポアソン比 ν の影響は、ほとんど見られない

- B種 (減衰の小さい複素数解)

シェル理論の曲げ応力解からもとまる減衰の小さい解もしくは、膜応力解に相当する複素解。

変位の特性モードによれば、特定の変位の優越性はみられない。変位の境界条件を全体的に合わせる解と考えられる。 $n = 0, 1$ の場合には存在しない。

B種について $r_0/t_0, n, \nu$ の影響は、特性値に対して、 r_0/t_0 が小さいほど n の影響が強く、特に特性値の実部において r_0/t_0 より影響を与えることが解る。また、ポアソン比 ν の影響は、ほとんど見られない

- C種 (実数解)

法線保持の仮定を用いたシェル理論では求められない実数解。ただし、せん断変形を考慮したシェル理論では1組得られる。

変位の特性モードより、 r 方向・ z 方向変位に対して θ 方向変位が大きい。 θ 方向変位の境界条件の細かい違いを合わせる解と考えられる。

ほぼ $m\pi r_0/t_0$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) 近辺に存在している。絶対値の小さいものから、 $\omega_{C1}, \omega_{C2}, \dots$ と呼ぶことにする。 $\omega_{C1}, \omega_{C2}, \dots$ と解が大きくなるほど、断面内モードが複雑になる。

C種について $r_0/t_0, n, \nu$ の影響は、特性値の絶対値に関して、 n とポアソン比 ν の影響は、ほとんど見られない。

以上の結果より周方向フーリエ展開の一般解の種類とその未定定数の総数をまとめると次のようになる。

一般解を構成する解とその未定定数の数 (A・C種は無限に解がある)

フーリエ展開次数 n	軸方向にべき級 数で表される解	軸方向に A種	指数関数で B種	表される解 C種
0	4	4m	なし	2m
1	4	4m	なし	2m
2以上	なし	4m	4	2m

($m \geq 1$)

この表から、フーリエ展開次数 $n = 0, 1$ の場合の軸方向にべき級数で表される解は、B種の解の特性値が0になり減衰しなくなった場合とも考えられる。

なお、軸対称の場合の”ねじり”に関する解を除くと次のようになる。

一般解を構成する解とその未定定数の数 (ねじりモードを省く)

フーリエ展開次数 n	軸方向にべき級 数で表される解	軸方向に A種	指数関数で B種	表される解 C種
0	2	4m	なし	なし
1	4	4m	なし	2m
2以上	なし	4m	4	2m

($m \geq 1$)

3.5 軸方向にフーリエ展開した場合の一般解

本節では、軸方向にフーリエ展開された場合の一般解を求める。本節で得られた解は開断面円筒シェル的一般解の内、変位分布が周方向に変化する解である。

軸方向にフーリエ展開した場合の釣合式は式(3.9)であり、次のようになっていた。

$$\begin{aligned}
 u_r &= ue^{in\theta} \sin \omega_0 z & u_\theta &= -ive^{in\theta} \sin \omega_0 z \\
 u_z &= we^{in\theta} \cos \omega_0 z & \varepsilon &= \varepsilon e^{in\theta} \sin \omega_0 z \\
 f &= u + v & g &= u - v \\
 f_{,rr} + \frac{1}{r} f_{,r} - \frac{(n+1)^2}{r^2} f - \omega_0^2 f &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{0,r} - \frac{n}{r} \varepsilon_0 \right) \\
 g_{,rr} + \frac{1}{r} g_{,r} - \frac{(n-1)^2}{r^2} g - \omega_0^2 g &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{0,r} + \frac{n}{r} \varepsilon_0 \right) \\
 w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} - \frac{n^2}{r^2} w - \omega_0^2 w &= -\frac{\omega_0}{1-2\nu} \varepsilon_0 \\
 \varepsilon_{0,rr} + \frac{1}{r} \varepsilon_{0,r} - \frac{n^2}{r^2} \varepsilon_0 - \omega_0^2 \varepsilon_0 &= 0
 \end{aligned}$$

ただし、 ω_0 を実数として軸方向にフーリエ展開している。

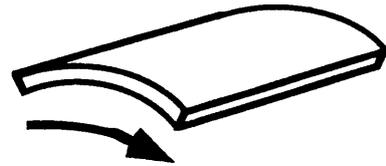
3.5.1 変位が周方向にべき級数で表される解

変位がべき級数で表される解は、剛体回転、円筒シェルに面内せん断力が作用する場合、円弧に純曲げモーメントが作用する場合である。

3.5.1.1 剛体回転

円筒シェルの剛体回転の解は次のようになる。

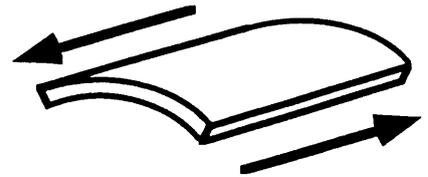
$$\begin{aligned}
 u_r &= \varepsilon = u_z = 0 \\
 u_\theta &= C_1 r \\
 \sigma^{rr} = \sigma^{\theta\theta} = \sigma^{zz} = \sigma^{r\theta} = \sigma^{\theta z} = \sigma^{rz} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.29}$$



3.5.1.2 面内せん断変形

軸方向にせん断変形を発生する三次元理論解は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 u_r &= \varepsilon = u_\theta = 0 \\
 u_z &= C_1 \theta + C_2 \\
 \sigma^{rr} = \sigma^{\theta\theta} = \sigma^{zz} = \sigma^{r\theta} = \sigma^{rz} &= 0 \\
 \sigma^{\theta z} &= G \left[\frac{1}{r} C_1 \right]
 \end{aligned} \tag{3.30}$$



ここで、 C_1 はせん断力に関する未定定数であり、 C_2 は軸方向への剛体変位である。

3.5.1.3 純曲げモーメントが作用する円弧 (2次元問題)

2次元平面歪問題 ($u_z = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0$) において、円弧に純曲げが作用した場合の解は、応力関数法により既に得られている。

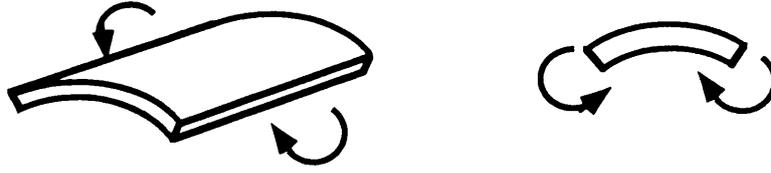


図 3.34: 曲げモーメントが作用する円弧

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= C_1 + C_2 \log r \\
 u_r &= \left(\frac{1}{2} C_1 - \frac{3-4\nu}{4(1-2\nu)} C_2 \right) r + \frac{1}{2} C_2 r \log r + C_3 \frac{1}{r} \\
 u_\theta &= C_4 r + \frac{1-\nu}{1-2\nu} C_2 r \theta \\
 u_z &= 0 \\
 \sigma^{rr} &= 2G \left[\frac{1}{2(1-2\nu)} C_1 - \frac{1}{4(1-2\nu)} C_2 + \frac{1}{2(1-2\nu)} C_2 \log r - C_3 \frac{1}{r^2} \right] \\
 \sigma^{\theta\theta} &= 2G \left[\frac{1}{2(1-2\nu)} C_1 + \frac{1}{4(1-2\nu)} C_2 + \frac{1}{2(1-2\nu)} C_2 \log r + C_3 \frac{1}{r^2} \right] \\
 \sigma^{zz} &= 2G \frac{\nu}{1-2\nu} [C_1 + C_2 \log r] \\
 \sigma^{r\theta} &= \sigma^{\theta z} = \sigma^{rz} = 0
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{(2 \log r_2 - 1)r_2^2 - (2 \log r_1 - 1)r_1^2}{2(r_2^2 - r_1^2)} C_2 \\
 C_3 &= -\frac{(\log r_2 - \log r_1)r_2^2 r_1^2}{2(r_2^2 - r_1^2)(1-2\nu)} C_2
 \end{aligned}$$

なお、 C_4 は剛体回転項である。

3.5.2 変位が周方向に三角関数で表される解

変位が周方向に三角関数で表される解は、剛体変位、円弧にせん断力が作用する場合である。

3.5.2.1 剛体変位

剛体変位は次のように示される。

$$\begin{aligned}
 u_r &= C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta \\
 u_\theta &= -C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta \\
 u_z &= \varepsilon = 0 \\
 \sigma^{rr} &= \sigma^{\theta\theta} = \sigma^{zz} = \sigma^{r\theta} = \sigma^{rz} = \sigma^{\theta z} = 0
 \end{aligned}$$

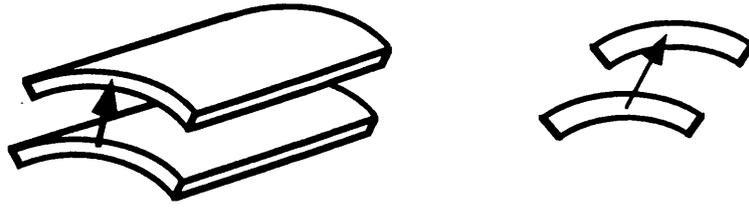


図 3.35: 剛体変位

3.5.2.2 セン断力が作用する円弧 (2次元問題)



図 3.36: セン断力が作用する円弧

2次元平面歪問題 ($u_z = 0, \frac{\partial(\quad)}{\partial z} = 0$) において、円弧にせん断力が作用した場合の解は、Airy の応力関数 Φ を用いて次のように得られている [2]。

$$\begin{aligned}\Phi &= C \left\{ r^3 - r_1^2 r_2^2 \frac{1}{r} - 2(r_1^2 + r_2^2)r \log r \right\} \sin \theta \\ \sigma^{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ &= 2C \left(r + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} \right) \sin \theta \\ \sigma^{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ &= 2C \left(3r - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} \right) \sin \theta \\ \sigma^{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \\ &= -2C \left(r + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} \right) \cos \theta\end{aligned}\tag{3.32}$$

なお、 C は任意の定数である。

しかし、この Airy の応力関数により得られた応力より変位を導き、その変位を釣合式に代入すると釣合を満足しない。そこで、体積歪を用いた解析法を用いると次の解が得られる (解析過程は付録 B を参照)。

$$\begin{aligned}\varepsilon &= C_1 \left[2r - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} \right] \cos \theta - C_2 \left[2r - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} \right] \sin \theta \\ u_r &= C_1 \left[-\frac{1}{4} \frac{r_2^2 r_1^2}{(1-2\nu)r^2} + \frac{1}{4} \frac{(3-4\nu)r^2}{1-2\nu} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)}{1-2\nu} - \frac{r^2}{2(1-2\nu)} - \frac{r_2^2 + r_1^2}{2} \log(r) \right] \cos \theta \\ &\quad - C_2 \left[-\frac{1}{4} \frac{r_2^2 r_1^2}{(1-2\nu)r^2} + \frac{1}{4} \frac{(3-4\nu)r^2}{1-2\nu} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)}{1-2\nu} - \frac{r^2}{2(1-2\nu)} - \frac{r_2^2 + r_1^2}{2} \log(r) \right] \sin \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_\theta &= C_1 \left[-\frac{1}{4} \frac{r_2^2 r_1^2}{(1-2\nu)r^2} + \frac{1}{4} \frac{(3-4\nu)r^2}{1-2\nu} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)}{1-2\nu} + \frac{r^2}{2(1-2\nu)} + \frac{r_2^2 + r_1^2}{2} \log(r) \right] \sin \theta \\
&\quad + C_2 \left[-\frac{1}{4} \frac{r_2^2 r_1^2}{(1-2\nu)r^2} + \frac{1}{4} \frac{(3-4\nu)r^2}{1-2\nu} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)}{1-2\nu} + \frac{r^2}{2(1-2\nu)} + \frac{r_2^2 + r_1^2}{2} \log(r) \right] \sin \theta \\
u_z &= 0 \\
\sigma^{rr} &= C_1 \frac{1}{1-2\nu} G \left[\frac{r_1^2 r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} + r \right] \cos \theta - C_2 \frac{1}{1-2\nu} G \left[\frac{r_1^2 r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} + r \right] \sin \theta \\
\sigma^{\theta\theta} &= C_1 \frac{1}{1-2\nu} G \left[-\frac{r_1^2 r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} + 3r \right] \cos \theta - C_2 \frac{1}{1-2\nu} G \left[-\frac{r_1^2 r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} + 3r \right] \sin \theta \\
\sigma^{zz} &= C_1 \frac{2}{1-2\nu} G \nu \left[-\frac{r_1^2 + r_2^2}{r} + 2r \right] \cos \theta - C_2 \frac{2}{1-2\nu} G \nu \left[-\frac{r_1^2 + r_2^2}{r} + 2r \right] \sin \theta \\
\sigma^{r\theta} &= C_1 \frac{1}{1-2\nu} G \left[\frac{r_1^2 r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} + r \right] \sin \theta + C_2 \frac{1}{1-2\nu} G \left[\frac{r_1^2 r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} + r \right] \cos \theta \\
\sigma^{\theta z} &= 0 \\
\sigma^{zr} &= 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

上記の解の応力は Airy の応力関数で得られる解 (3.32) と同一である。

3.5.3 変位が周方向に指数関数で表される解

3.5.3.1 理論解

偏微分方程式 (3.10) を解析する。

式 (3.10) は次のようであった。

$$\begin{aligned}
f_{,rr} + \frac{1}{r} f_{,r} - \frac{(n+1)^2}{r^2} f - \omega_0^2 f &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{0,r} - \frac{n}{r} \varepsilon_0 \right) \\
g_{,rr} + \frac{1}{r} g_{,r} - \frac{(n-1)^2}{r^2} g - \omega_0^2 g &= -\frac{1}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{0,r} + \frac{n}{r} \varepsilon_0 \right) \\
w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} - \frac{n^2}{r^2} w - \omega_0^2 w &= -\frac{\omega_0}{1-2\nu} \varepsilon_0 \\
\varepsilon_{0,rr} + \frac{1}{r} \varepsilon_{0,r} - \frac{n^2}{r^2} \varepsilon_0 - \omega_0^2 \varepsilon_0 &= 0
\end{aligned}$$

ω_0 を実数として軸方向にフーリエ展開する。3.4.1節で行った操作と同様の操作を行い、特性値 n を複素数であるとし、体積歪と変位に関する適合条件 ($\varepsilon = u_{r,r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} u_{\theta,\theta} + u_{z,z}$) を満足する解は次のようになる。ただし、 $C_1 \sim C_6$ は未定定数である。

$\omega_0 = 0$ の場合

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= [C_1 \{r^n\} + C_2 \{r^{-n}\}] e^{in\theta} \\
u_r &= \left[C_1 \left\{ -\frac{1}{4(1-2\nu)} r^{n+1} + \frac{3-4\nu}{4(n+1)(1-2\nu)} r^{n+1} \right\} + C_3 \left\{ \frac{1}{2} r^{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{1}{4(1-2\nu)} r^{-n+1} - \frac{3-4\nu}{4(n-1)(1-2\nu)} r^{-n+1} \right\} + C_4 \left\{ \frac{1}{2} r^{-n-1} \right\} \right] e^{in\theta} \\
u_\theta &= -i \left[C_1 \left\{ \frac{1}{4(1-2\nu)} r^{n+1} + \frac{3-4\nu}{4(n+1)(1-2\nu)} r^{n+1} \right\} + C_3 \left\{ -\frac{1}{2} r^{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{1}{4(1-2\nu)} r^{-n+1} + \frac{3-4\nu}{4(n-1)(1-2\nu)} r^{-n+1} \right\} + C_4 \left\{ \frac{1}{2} r^{-n-1} \right\} \right] e^{in\theta}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sigma^{rr} &= G \left[C_1 \left\{ \frac{2-n}{2(1-2\nu)} r^n \right\} + C_4 \{(-n-1)r^{-n-2}\} + C_2 \left\{ \frac{n+2}{2(1-2\nu)} r^{-n} \right\} + C_3 \{(n-1)r^{n-2}\} \right] e^{in\theta} \\
\sigma^{\theta\theta} &= G \left[C_1 \left\{ \frac{n+2}{2(1-2\nu)} r^n \right\} + C_4 \{(n+1)r^{-n-2}\} + C_2 \left\{ \frac{-n+2}{2(1-2\nu)} r^{-n} \right\} + C_3 \{(-n+1)r^{n-2}\} \right] e^{in\theta} \\
\sigma^{zz} &= G \left[C_1 \left\{ \frac{2\nu}{1-2\nu} r^n \right\} + C_2 \left\{ \frac{2\nu}{1-2\nu} r^{-n} \right\} \right] e^{in\theta} \\
\sigma^{r\theta} &= G \left[C_1 \left\{ \frac{n}{2(1-2\nu)} r^n \right\} + C_4 \{(-n-1)r^{-n-2}\} + C_2 \left\{ \frac{n}{2(1-2\nu)} r^{-n} \right\} + C_3 \{(-n+1)r^{n-2}\} \right] e^{in\theta} \\
u_z &= [C_5 \{r^n\} + C_6 \{r^{-n}\}] e^{in\theta} \\
\sigma^{\theta z} &= -iG [C_5 \{-nr^{n-1}\} + C_6 \{-nr^{-n-1}\}] e^{in\theta} \\
\sigma^{zr} &= -iG [C_5 \{nr^{n-1}\} + C_6 \{-nr^{-n-1}\}] e^{in\theta} \tag{3.34}
\end{aligned}$$

$\omega_0 \neq 0$ の場合

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= [C_1 \{I_n\} + C_2 \{K_n\}] e^{in\theta} \sin \omega_0 z \\
u_r &= \left[C_1 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r I_n \right\} + C_3 \left\{ \frac{1}{2} I_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ \frac{1}{2} I_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r K_n \right\} + C_4 \left\{ \frac{1}{2} K_{n+1} \right\} + C_6 \left\{ \frac{1}{2} K_{n-1} \right\} \right] e^{in\theta} \sin \omega_0 z \\
u_\theta &= \left[C_3 \left\{ \frac{1}{2} I_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ -\frac{1}{2} I_{n-1} \right\} + C_4 \left\{ \frac{1}{2} K_{n+1} \right\} + C_6 \left\{ -\frac{1}{2} K_{n-1} \right\} \right] e^{in\theta} \sin \omega_0 z \\
u_z &= \left[C_1 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r I_{n+1} - \frac{(n+4-4\nu)}{2(1-2\nu)\omega_0} I_n \right\} + C_3 \left\{ \frac{1}{2} I_n \right\} + C_5 \left\{ \frac{1}{2} I_n \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{1-2\nu} r K_{n+1} - \frac{(n+4-4\nu)}{2(1-2\nu)\omega_0} K_n \right\} + C_4 \left\{ -\frac{1}{2} K_n \right\} + C_6 \left\{ -\frac{1}{2} K_n \right\} \right] e^{in\theta} \cos \omega_0 z \\
\sigma^{rr} &= G \left[C_1 \left\{ -\left(\frac{n}{1-2\nu} + 1\right) I_n - \frac{\omega_0 r}{1-2\nu} I_{n+1} \right\} + C_3 \left\{ \omega_0 I_n - \frac{n+1}{r} I_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ \omega_0 I_n + \frac{n-1}{r} I_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\left(\frac{n}{1-2\nu} + 1\right) K_n + \frac{\omega_0 r}{1-2\nu} K_{n+1} \right\} + C_4 \left\{ -\omega_0 K_n - \frac{n+1}{r} K_{n+1} \right\} + C_6 \left\{ -\omega_0 K_n + \frac{n-1}{r} K_{n-1} \right\} \right] \\
&\quad] e^{in\theta} \sin \omega_0 z \\
\sigma^{\theta\theta} &= G \left[C_1 \{-I_n\} + C_3 \left\{ \frac{n+1}{r} I_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ \frac{1-n}{r} I_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \{-K_n\} + C_4 \left\{ \frac{n+1}{r} K_{n+1} \right\} + C_6 \left\{ \frac{1-n}{r} K_{n-1} \right\} \right] e^{in\theta} \sin \omega_0 z \\
\sigma^{zz} &= G \left[C_1 \left\{ \frac{\omega_0 r}{1-2\nu} I_{n+1} + \frac{n+4-4\nu}{1-2\nu} I_n + \frac{2\nu}{1-2\nu} I_n \right\} + C_3 \{-\omega_0 I_n\} + C_5 \{-\omega_0 I_n\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{\omega_0 r}{1-2\nu} K_{n+1} + \frac{n+4-4\nu}{1-2\nu} K_n + \frac{2\nu}{1-2\nu} K_n \right\} + C_4 \{\omega_0 K_n\} + C_6 \{\omega_0 K_n\} \right] e^{in\theta} \sin \omega_0 z \\
\sigma^{r\theta} &= G \left[C_1 \left\{ \frac{n}{2(1-2\nu)} I_n \right\} + C_3 \left\{ \frac{\omega_0}{2} I_n - \frac{n+1}{r} I_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ -\frac{\omega_0}{2} I_n - \frac{n-1}{r} I_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ \frac{n}{2(1-2\nu)} K_n \right\} + C_4 \left\{ -\frac{\omega_0}{2} K_n - \frac{n+1}{r} K_{n+1} \right\} + C_6 \left\{ \frac{\omega_0}{2} K_n - \frac{n-1}{r} K_{n-1} \right\} \right] e^{in\theta} \sin \omega_0 z \\
\sigma^{\theta z} &= -iG \left[C_1 \left\{ \frac{n}{2(1-2\nu)} I_{n+1} + \frac{(n+4-4\nu)n}{2(1-2\nu)\omega_0 r} I_n \right\} + C_3 \left\{ -\frac{n}{2r} I_n + \frac{\omega_0}{2} I_{n+1} \right\} + C_5 \left\{ -\frac{n}{2r} I_n - \frac{\omega_0}{2} I_{n-1} \right\} \right. \\
&\quad \left. + C_2 \left\{ -\frac{n}{2(1-2\nu)} K_{n+1} + \frac{(n+4-4\nu)n}{2(1-2\nu)\omega_0 r} K_n \right\} + C_4 \left\{ \frac{n}{2r} K_n + \frac{\omega_0}{2} K_{n+1} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +C_6 \left\{ \frac{n}{2r} K_n - \frac{\omega_0}{2} K_{n-1} \right\} e^{in\theta} \cos \omega_0 z \\
\sigma^{zr} = & \left[C_1 \left\{ -\frac{\omega_0 r}{1-2\nu} I_n + \frac{n}{2(1-2\nu)} I_{n+1} - \frac{(n+4-4\nu)}{4(1-2\nu)} (I_{n-1} + I_{n+1}) \right\} \right. \\
& + C_3 \left\{ \omega_0 I_{n+1} + \frac{n}{2r} I_n \right\} + C_5 \left\{ \omega_0 I_{n-1} - \frac{n}{2r} I_n \right\} \\
& + C_2 \left\{ -\frac{\omega_0 r}{1-2\nu} K_n - \frac{n}{2(1-2\nu)} K_{n+1} + \frac{(n+4-4\nu)}{4(1-2\nu)} (K_{n-1} + K_{n+1}) \right\} \\
& \left. + C_4 \left\{ \omega_0 K_{n+1} - \frac{n}{2r} K_n \right\} + C_6 \left\{ \omega_0 K_{n-1} + \frac{n}{2r} K_n \right\} \right] e^{in\theta} \cos \omega_0 z \quad (3.35)
\end{aligned}$$

ただし

$I_n = I_n(\omega_0 r)$ n 次 第一種変形ベッセル関数 $K_n = K_n(\omega_0 r)$ n 次 第二種変形ベッセル関数

3.5.3.2 特性値問題

n 、未定定数 $C_1 \sim C_6$ は $r = r_1, r_2$ における境界条件を満たすように定められる。以後、 n を特性値と呼ぶ。

次に、境界条件として自由表面条件、すなわちシェルの内外面において表面応力が作用しないという条件(式3.26)を考慮する。

$$r = r_1, r_2 \text{ において } \sigma^{rr} = \sigma^{r\theta} = \sigma^{rz} = 0$$

式(3.34),(3.35)を式(3.26)に代入すると、 $C_1 \sim C_6$ を定める方程式が次式のように得られる。

$\omega_0 = 0$ の場合

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_2 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.36)$$

ここに

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{2-n}{2(1-2\nu)} r_1^n, & a_{12} &= (n-1)r_1^{n-2}, & a_{13} &= \frac{n+2}{2(1-2\nu)} r_1^{-n}, & a_{14} &= (-n-1)r_1^{-n-2} \\
a_{21} &= \frac{n}{2(1-2\nu)} r_1^n, & a_{22} &= (-n+1)r_1^{n-2}, & a_{23} &= \frac{n}{2(1-2\nu)} r_1^{-n}, & a_{24} &= (-n-1)r_1^{-n-2} \\
a_{31} &= \frac{2-n}{2(1-2\nu)} r_2^n, & a_{32} &= (n-1)r_2^{n-2}, & a_{33} &= \frac{n+2}{2(1-2\nu)} r_2^{-n}, & a_{34} &= (-n-1)r_2^{-n-2} \\
a_{41} &= \frac{n}{2(1-2\nu)} r_2^n, & a_{42} &= (-n+1)r_2^{n-2}, & a_{43} &= \frac{n}{2(1-2\nu)} r_2^{-n}, & a_{44} &= (-n-1)r_2^{-n-2} \\
a_{55} &= nr_1^{n-1}, & a_{56} &= -nr_1^{-n-1}, & a_{65} &= nr_2^{n-1}, & a_{66} &= -nr_2^{-n-1}
\end{aligned} \quad (3.37)$$

ここで $C_1 \sim C_4$ に関する条件式を満たす特性値は u_r, u_θ に関する特性値であり、 C_5, C_6 に関する条件式を満たす特性値は u_z に関する特性値である。また、 C_5, C_6 に関する特性値は理論計算可能である(付録C参照)。

$\omega_0 \neq 0$ の場合

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \\ C_2 \\ C_4 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.38)$$

ここに

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\left\{ \frac{n}{1-2\nu} + 1 \right\} I_n(\omega_0 r_1) - \frac{\omega_0 r_1}{1-2\nu} I_{n+1}(\omega_0 r_1) \\ a_{12} &= \omega_0 I_n(\omega_0 r_1) - \frac{n+1}{r_1} I_{n+1}(\omega_0 r_1) \\ a_{13} &= \omega_0 I_n(\omega_0 r_1) + \frac{n-1}{r_1} I_{n-1}(\omega_0 r_1) \\ a_{14} &= -\left\{ \frac{n}{1-2\nu} + 1 \right\} K_n(\omega_0 r_1) + \frac{\omega_0 r_1}{1-2\nu} K_{n+1}(\omega_0 r_1) \\ a_{15} &= -\omega_0 K_n(\omega_0 r_1) - \frac{n+1}{r_1} K_{n+1}(\omega_0 r_1) \\ a_{16} &= -\omega_0 K_n(\omega_0 r_1) + \frac{n-1}{r_1} K_{n-1}(\omega_0 r_1) \\ a_{21} &= \frac{n}{2(1-2\nu)} I_n(\omega_0 r_1) \\ a_{22} &= \frac{\omega_0}{2} I_n(\omega_0 r_1) - \frac{n+1}{r_1} I_{n+1}(\omega_0 r_1) \\ a_{23} &= -\frac{\omega_0}{2} I_n(\omega_0 r_1) - \frac{n-1}{r_1} I_{n-1}(\omega_0 r_1) \\ a_{24} &= \frac{n}{2(1-2\nu)} K_n(\omega_0 r_1) \\ a_{25} &= -\frac{\omega_0}{2} K_n(\omega_0 r_1) - \frac{n+1}{r_1} K_{n+1}(\omega_0 r_1) \\ a_{26} &= \frac{\omega_0}{2} K_n(\omega_0 r_1) - \frac{n-1}{r_1} K_{n-1}(\omega_0 r_1) \\ a_{31} &= -\frac{\omega_0 r_1}{1-2\nu} I_n(\omega_0 r_1) + \frac{n}{2(1-2\nu)} I_{n+1}(\omega_0 r_1) - \frac{(n+4-4\nu)}{4(1-2\nu)} \{I_{n-1}(\omega_0 r_1) + I_{n+1}(\omega_0 r_1)\} \\ a_{32} &= \omega_0 I_{n+1}(\omega_0 r_1) + \frac{n}{2r_1} I_n(\omega_0 r_1) \\ a_{33} &= \omega_0 I_{n-1}(\omega_0 r_1) - \frac{n}{2r_1} I_n(\omega_0 r_1) \\ a_{34} &= -\frac{\omega_0 r_1}{1-2\nu} K_n(\omega_0 r_1) - \frac{n}{2(1-2\nu)} K_{n+1}(\omega_0 r_1) + \frac{(n+4-4\nu)}{4(1-2\nu)} \{K_{n-1}(\omega_0 r_1) + K_{n+1}(\omega_0 r_1)\} \\ a_{35} &= \omega_0 K_{n+1}(\omega_0 r_1) - \frac{n}{2r_1} K_n(\omega_0 r_1) \\ a_{36} &= \omega_0 K_{n-1}(\omega_0 r_1) + \frac{n}{2r_1} K_n(\omega_0 r_1) \\ a_{41} &= -\left\{ \frac{n}{1-2\nu} + 1 \right\} I_n(\omega_0 r_2) - \frac{\omega_0 r_2}{1-2\nu} I_{n+1}(\omega_0 r_2) \\ a_{42} &= \omega_0 I_n(\omega_0 r_2) - \frac{n+1}{r_2} I_{n+1}(\omega_0 r_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{43} &= \omega_0 I_n(\omega_0 r_2) + \frac{n-1}{r_2} I_{n-1}(\omega_0 r_2) \\
a_{44} &= - \left\{ \frac{n}{1-2\nu} + 1 \right\} K_n(\omega_0 r_2) + \frac{\omega_0 r_2}{1-2\nu} K_{n+1}(\omega_0 r_2) \\
a_{45} &= -\omega_0 K_n(\omega_0 r_2) - \frac{n+1}{r_2} K_{n+1}(\omega_0 r_2) \\
a_{46} &= -\omega_0 K_n(\omega_0 r_2) + \frac{n-1}{r_2} K_{n-1}(\omega_0 r_2) \\
a_{51} &= \frac{n}{2(1-2\nu)} I_n(\omega_0 r_2) \\
a_{52} &= \frac{\omega_0}{2} I_n(\omega_0 r_2) - \frac{n+1}{r_2} I_{n+1}(\omega_0 r_2) \\
a_{53} &= -\frac{\omega_0}{2} I_n(\omega_0 r_2) - \frac{n-1}{r_2} I_{n-1}(\omega_0 r_2) \\
a_{54} &= \frac{n}{2(1-2\nu)} K_n(\omega_0 r_2) \\
a_{55} &= -\frac{\omega_0}{2} K_n(\omega_0 r_2) - \frac{n+1}{r_2} K_{n+1}(\omega_0 r_2) \\
a_{56} &= \frac{\omega_0}{2} K_n(\omega_0 r_2) - \frac{n-1}{r_2} K_{n-1}(\omega_0 r_2) \\
a_{61} &= -\frac{\omega_0 r_2}{1-2\nu} I_n(\omega_0 r_2) + \frac{n}{2(1-2\nu)} I_{n+1}(\omega_0 r_2) - \frac{(n+4-4\nu)}{4(1-2\nu)} \{I_{n-1}(\omega_0 r_2) + I_{n+1}(\omega_0 r_2)\} \\
a_{62} &= \omega_0 I_{n+1}(\omega_0 r_2) + \frac{n}{2r_2} I_n(\omega_0 r_2) \\
a_{63} &= \omega_0 I_{n-1}(\omega_0 r_2) - \frac{n}{2r_2} I_n(\omega_0 r_2) \\
a_{64} &= -\frac{\omega_0 r_2}{1-2\nu} K_n(\omega_0 r_2) - \frac{n}{2(1-2\nu)} K_{n+1}(\omega_0 r_2) + \frac{(n+4-4\nu)}{4(1-2\nu)} \{K_{n-1}(\omega_0 r_2) + K_{n+1}(\omega_0 r_2)\} \\
a_{65} &= \omega_0 K_{n+1}(\omega_0 r_2) - \frac{n}{2r_2} K_n(\omega_0 r_2) \\
a_{66} &= \omega_0 K_{n-1}(\omega_0 r_2) + \frac{n}{2r_2} K_n(\omega_0 r_2)
\end{aligned}$$

この結果、曲げ応力解を求める問題は式(3.36)(3.38)の左辺の行列の行列式を0とする複素数である特性値 n を求める問題に帰着される。

3.5.3.3 数値解析

3.4.2.2節に示される方法を用いて特性値 n を解析した。

その結果、 $\omega_0 = 0$ の場合には解析可能であった。しかし、それ以外は複素ベッセル関数の計算をべき級数展開で示される式により計算を行ったため、原点から離れたところで精度落ちが発生した。そのため原点 ($n = 0 + 0i$) 近傍でしか解析できなかった。

3.5.3.4 解の分類と特性

特性値は、表 3.7に示されるように複素平面上に複数個得られた。これらの特性値は工学的な考察により、実軸と虚数軸について対称に存在すると考えられる。つまり、第一象限にある特性値を n とすれば、その共役な複素数 \bar{n} も特性値になる。また、特性値 n, \bar{n} を用いた場合、変位関数の周方向分布は $e^{in\theta}, e^{i\bar{n}\theta}$ で表され、これは特性値の実部が正であるから θ の増加とともに増加する。逆に θ の増加とともに減衰する解に対応する特性値 $-\bar{n}, -n$ も存在すると考えられる。これらの特性値 ($n, \bar{n}, -\bar{n}, -n$) は同じ性質を示すから、第一象限の特性値 n で代表させることにする。

また、特性値の性質から、特性値を2種類に分類することができ、それぞれを $n_{A1a}, n_{A1b}, n_{A2}, \dots, n_{C1}, n_{C2}, \dots$ とおく。

これらの特性値は実数軸と虚数軸に対して軸対称に分布しているのは力学的考察から明らかであるので、以後、第一象限にのみ注目する。また、これらを絶対値の小さいものから、順次 n_{A1}, n_{A2}, \dots と記すことにする。なお、原点に近いもの2つについては実数部の小さいものを n_{A1a} 、実数部の大きいものを n_{A1b} とし、 $\omega_0 = 0$ の場合には、 n_{A1a}, n_{A1b} は指数関数で表されない解に含まれると解析結果より考えられるので、 n_{A2} から番号を付ける。

特性値の種類とその数を推測すると表3.6のようになる。

表 3.6: 三次元解析解の未定定数の数

フーリエ展開次数 ω_0	数	
	A 種	C 種
0	4m	2m
$\neq 0$	8+ 4m	2+2m

(A・C 種は無限に解がある ($m \geq 0$))

特性値と特性モードの例 $\omega_0 = 0, 1$ の場合について、特性値の値を示す。

表 3.7 は $r_0/t_0 = 5.0, \nu = 0.3, \omega_0 = 0.0$ の場合の特性値の計算結果である。また、表 3.7 に示した特性値 n を特性値の複素平面上に表すと、図 3.37 のようになる。図 3.37 は周方向にフーリエ展開した場合 (図 3.3) と同様な傾向が見られる。この場合、周方向フーリエ展開した場合と同じように、減衰のみの性質を持つ解 (n が純虚数で表される特性値) が得られている。

また、 $\omega_0 \neq 0$ の場合の例として、 $\omega_0 = 1.0$ として、特性値を求めると表 3.8、図 3.42 のようになる。数値計算誤差により計算不可能な区域を除けば、この場合にも、周方向フーリエ展開の場合 (図 3.3) と同様な傾向が見られる。

表 3.7: 特性値の値 ($\omega_0 = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) の例

特性値の	実部	虚部
n_{A2}	11.2517	$+20.9857i$
$\overline{n_{A2}}$	11.2517	$-20.9857i$
n_{A3}	13.8295	$+37.3566i$
$\overline{n_{A3}}$	13.8295	$-37.3566i$
n_{C1}	0.0	$+15.6550i$
$\overline{n_{C1}}$	0.0	$-15.6550i$
n_{C2}	0.0	$+31.3154i$
$\overline{n_{C2}}$	0.0	$-31.3154i$

(探索範囲 $-30 < \text{実部} < 30, -40 < \text{虚部} < 40$)

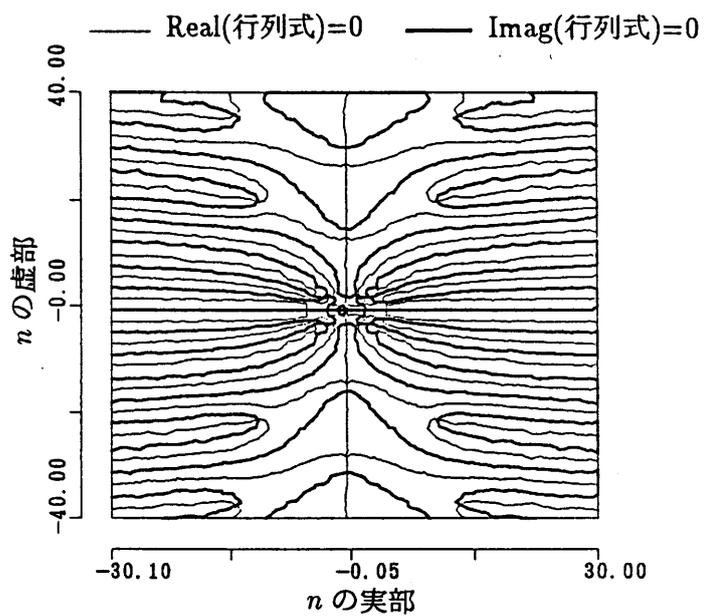


図 3.37: 特性値の値 ($\omega_0 = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) の例

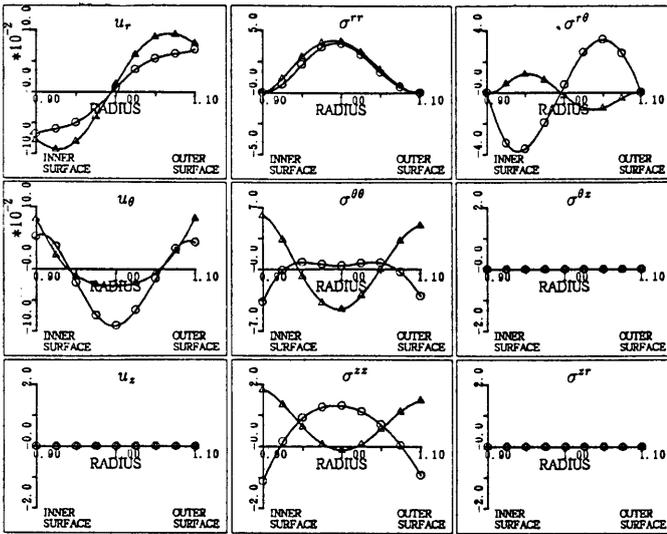


図 3.38: n_{A2} の断面内変位・応力分布モード
 $\omega_0 = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, n = 11.2517 + 20.9857i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

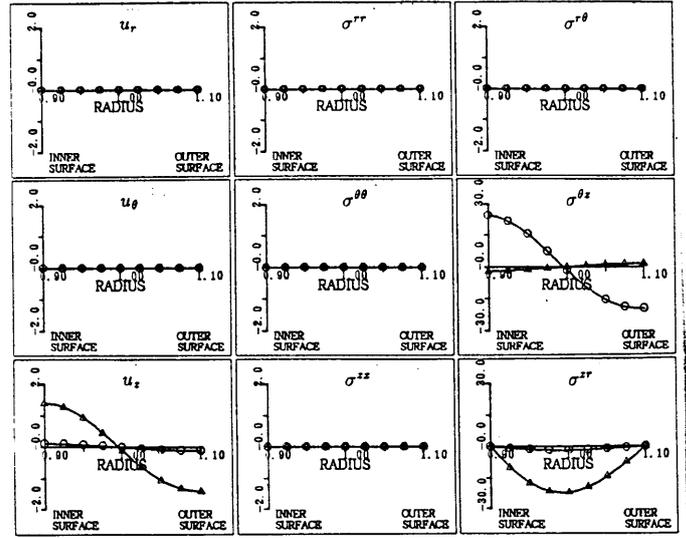


図 3.40: n_{C1} の断面内変位・応力分布モード
 $\omega_0 = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, n = 0.0 + 15.6550i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

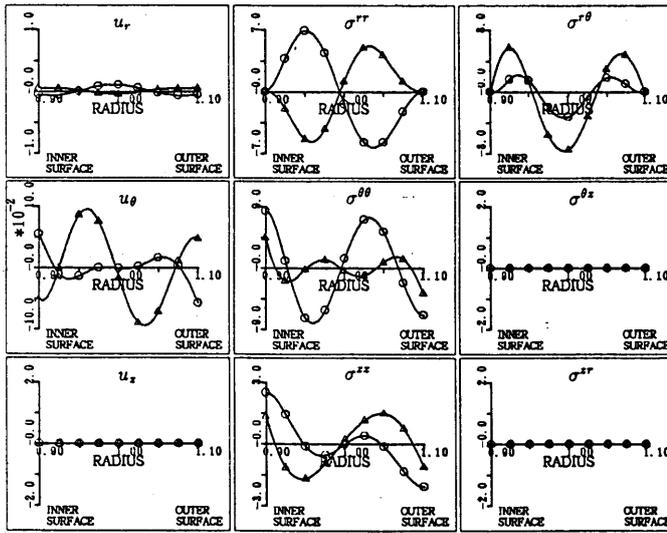


図 3.39: n_{A3} の断面内変位・応力分布モード
 $\omega_0 = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, n = 13.8295 + 37.3566i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

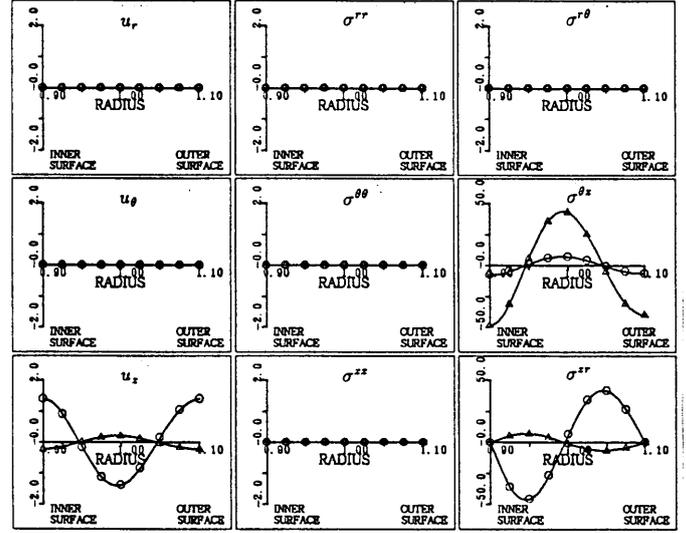


図 3.41: n_{C2} の断面内変位・応力分布モード
 $\omega_0 = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, n = 0.0 + 31.3154i$
 ○ : 実数部 △ : 虚数部

表 3.8: 特性値の値 ($\omega_0 = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) の例

特性値の	実部	虚部
n_{A1a}	0.6742	+1.9855 <i>i</i>
$\overline{n_{A1a}}$	0.6742	-1.9855 <i>i</i>
$-n_{A1a}$	-0.6742	+1.9855 <i>i</i>
$-n_{A1a}$	-0.6742	-1.9855 <i>i</i>
n_{A1b}	1.7727	+0.8077 <i>i</i>
$\overline{n_{A1b}}$	1.7727	-0.8077 <i>i</i>
$-n_{A1b}$	-1.7727	+0.8077 <i>i</i>
$-n_{A1b}$	-1.7727	-0.8077 <i>i</i>
n_{C1}	0.0	+15.6874 <i>i</i>
$\overline{n_{C1}}$	0.0	-15.6874 <i>i</i>

(探索範囲 $-10 < \text{実部} < 10, -20 < \text{虚部} < 20$)

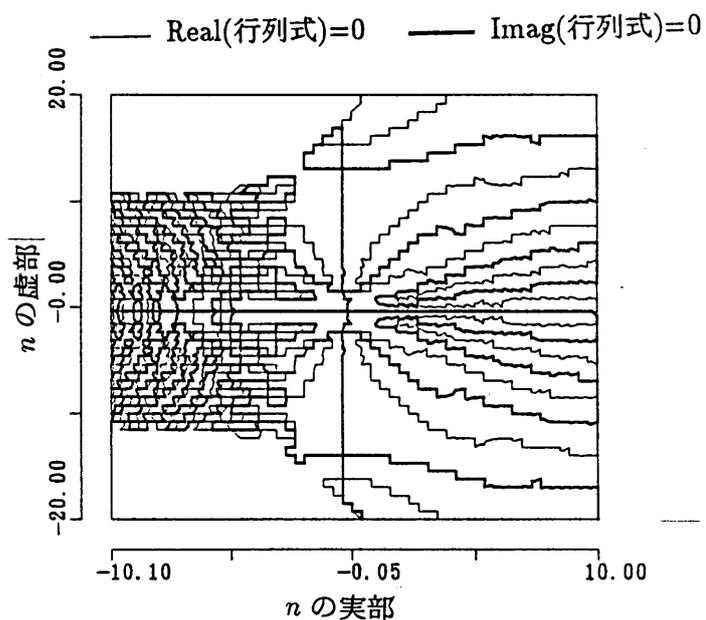


図 3.42: 特性値の値 ($\omega_0 = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) の例

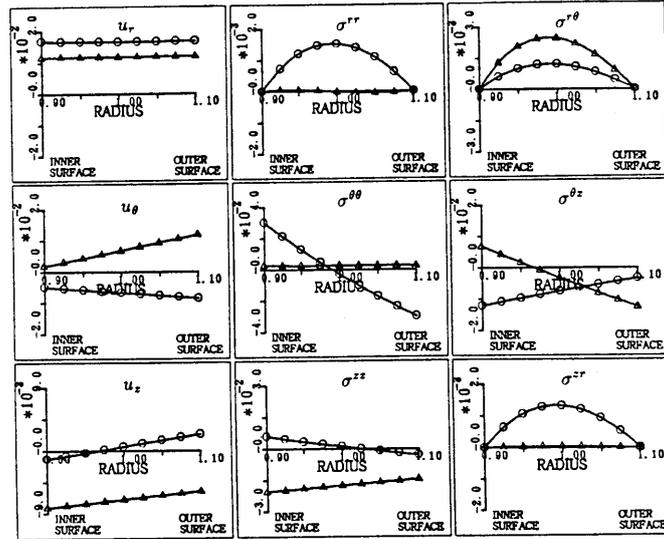


図 3.43: n_{A1a} の断面内変位・応力分布モード
 $\omega_0 = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, n = 0.6742 + 1.9855i$
 ○: 実数部 △: 虚数部

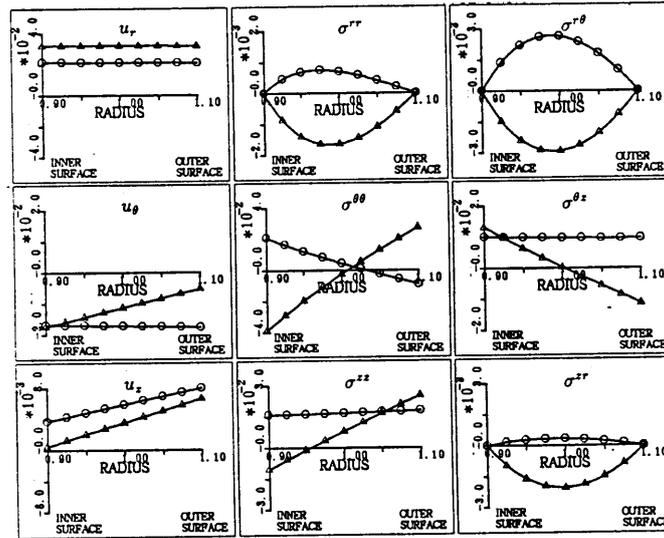


図 3.44: n_{A1b} の断面内変位・応力分布モード
 $\omega_0 = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, n = 1.7727 + 0.8077i$
 ○: 実数部 △: 虚数部

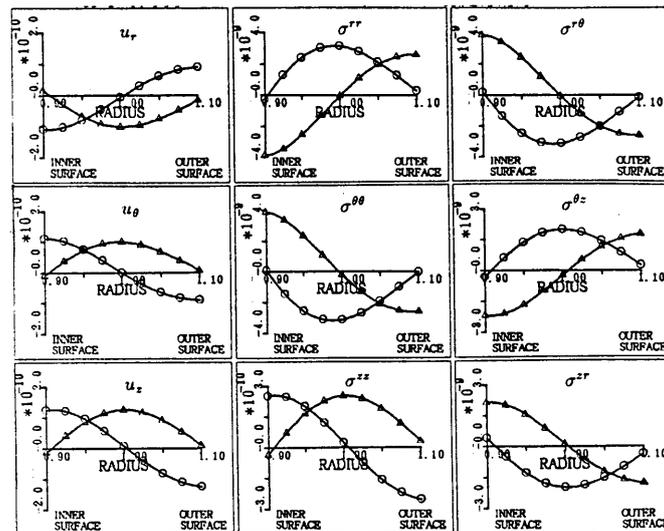


図 3.45: n_{C1} の断面内変位・応力分布モード
 $\omega_0 = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0, n = 0.0 + 15.6874i$
 ○: 実数部 △: 虚数部

解の特徴 曲げ応力解を得る過程ではポアソン比 ν 、半径-シェル厚比 r_0/t_0 、軸方向フーリエ展開次数 ω_0 がパラメーターとなる。

これらのパラメーターの特性値への影響は、ポアソン比の場合ほとんどなく、 r_0/t_0 の影響も ω_0 に比べれば小さい。

- A 種 シェル理論で得られる解 (n_{A1a}, n_{A1b}) を含む解群。変位の優位性は見られず u_r, u_θ, u_z 全ての方向に適度な変位を発生すると思われる。
 ω_0 が0に近づくにつれ、 n_{A1a} は原点へ、 n_{A1b} は1に近づく。A種について $r_0/t_0, \omega_0, \nu$ の影響を把握するため、 $r_0/t_0, \omega_0, \nu$ をパラメトリックに変化させて n_{A1a}, n_{A1b} を求めた。図3.46,3.47に、 $\nu = 0.3$ の場合の r_0/t_0 と ω_0 による特性値の変化と $r_0/t_0 = 4$ の場合の ν と ω_0 による特性値の変化を示す。特性値に対して、 r_0/t_0 が小さいほど n の影響が強いことが解る。また、ポアソン比 ν の影響は、ほとんど見られない
- C 種 せん断変形を考慮したシェル理論で得られる解 (n_{C1}) を含む解群。変位の優位性は見られず u_r, u_θ, u_z 全ての方向に適度な変位を発生すると予測される。

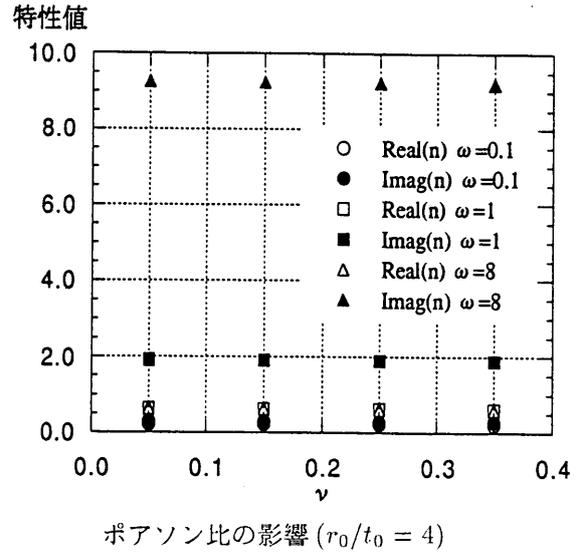
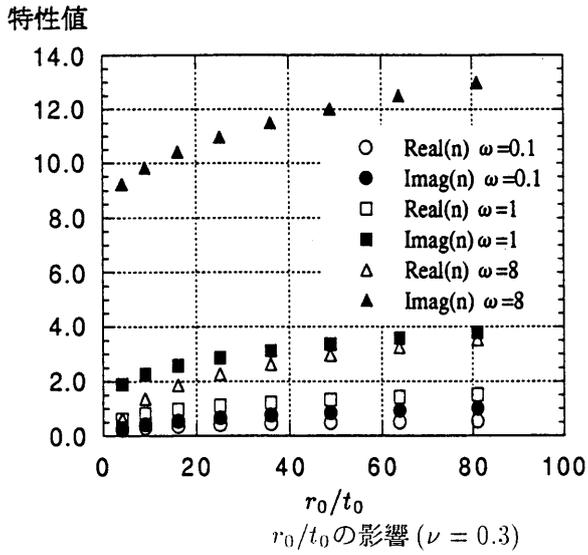


図 3.46: n_{A1a} の値の変化

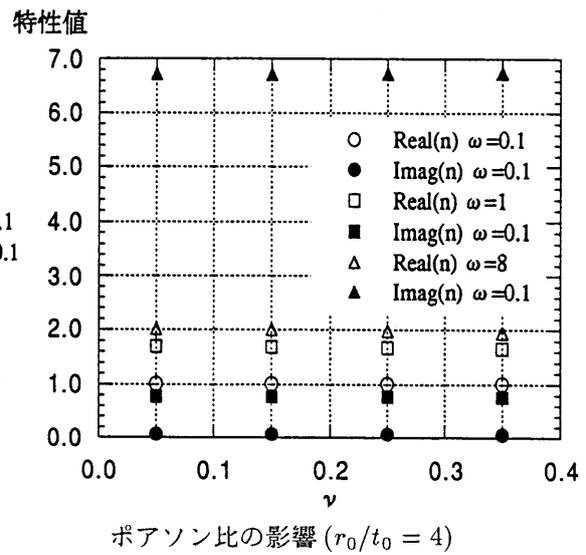
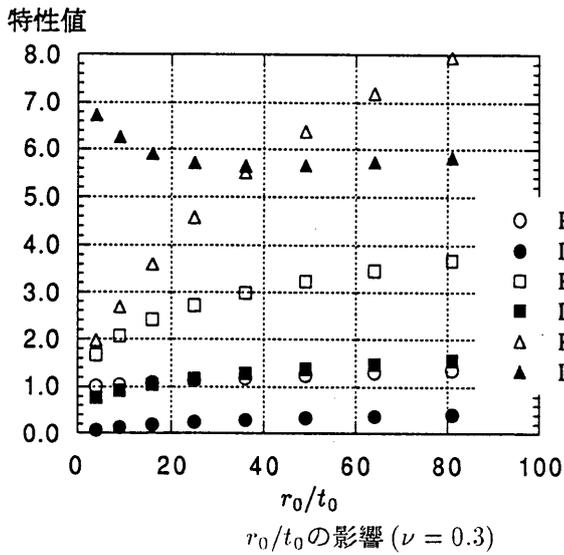


図 3.47: n_{A1b} の値の変化

3.5.4 まとめ

本節においては、軸方向にフーリエ展開された開断面円筒シェル的一般解を示した。

変位がべき級数で表される解は、剛体回転、円筒シェルに面内せん断力が作用する場合、円弧に純曲げモーメントが作用する場合である。一方、変位が周方向に三角関数で表される解は、剛体変位、円弧にせん断力が作用する場合である。

また、シェル理論で”曲げ応力解”と称せられる変位の周方向分布が指数で表される解の特性値を三次元弾性論上で求める方法を示し、解析例を示した。その結果、シェル理論では得られない断面内に高次の分布モードを持つ特性値および特性モードを発見した。特性値及び特性モードは2種類に分類できた。両種とも、断面の分布モードの違いにより多数の特性値および特性モードが存在すると予測され、シェル理論より得られる解は、それらの解の内最も単純なものであることが予測される。

以上の結果より軸方向フーリエ展開の一般解の種類とその未定定数の総数をまとめると次のようになる。

一般解を構成する解とその未定定数の数 (A・C種は無限に解がある)

ω_0	周方向にべき級数 で表される解	周方向に三角関数 で表される解	周方向に指数関数 で表される解	
			A種	C種
0	4	4	4m	2+2m
0以外	なし	なし	8+4m	2+2m

($\omega_0 \neq 0$ の場合は推測, $m \geq 0$)

図3.46,3.47より、 ω_0 が0に近づいた場合 n_{A1a} は0、 n_{A1b} は1に近づくことが解る。その結果 $\omega_0 = 0$ の場合、特性値 n_{A1a} が構成していた解は変位がべき級数で表される解になり、特性値 n_{A1b} が構成していた解は変位が三角関数で表される解になったと考えられる。

また、面内せん断変形に関する解を除くと次のようになる。

一般解を構成する解とその未定定数の数 (面内せん断モードを除く)

ω_0	周方向にべき級数 で表される解	周方向に三角関数 で表される解	周方向に指数関数 で表される解	
			A種	C種
0	2	4	4m	0
0以外	なし	なし	8+4m	2+2m

($\omega_0 \neq 0$ の場合は推測, $m \geq 0$)

3.6 本章のまとめ

本章においては、本論文における円筒シェル的一般解を”シェルの内外面で表面力の作用しない状態を表現する解”と定義し、その定義を満足する解を求めた。本章で得られた知見は次のようにまとめられる。

周方向にフーリエ展開した場合について 変位の軸方向分布がべき級数で示される解は、円筒の柱に軸引張り圧縮が作用する場合、ねじりが作用する場合、円筒の梁に純曲げが作用する場合、円筒の梁にせん断力が作用する場合、剛体変位、剛体回転のみである。

また、シェル理論で”曲げ応力解”と称せられる変位の軸方向分布が指数で表される解の特性値を三次元弾性論上で求める方法を示し、解析例を示した。その結果、シェル理論では得られない断面内に高次の分布モードを持つ特性値および特性モードを発見した。また、特性値の変化と分類を、特性値が満足すべき行列式の値をマッピングした図上で行えることを示した。

特性値及び特性モードは3種類に分類できた。A, C種は断面の分布モードの違いにより多数の特性値および特性モードが存在し、シェル理論より得られる解は、それらの解の内最も単純なものであることが判明した。

一般解を構成する解とその未定定数の数 (A・C族は無限に解がある)

フーリエ展開次数 n	軸方向にべき級 数で表される解	軸方向に A種	指数関数で B種	表される解 C種
0	4	4m	なし	2m
1	4	4m	なし	2m
2以上	なし	4m	4	2m

($m \geq 1$)

軸方向にフーリエ展開した場合について 変位がべき級数で表される解は、剛体回転、円筒シェルに面内せん断力が作用する場合、円弧に純曲げモーメントが作用する場合である。また、変位が周方向に三角関数で表される解は、剛体変位、円弧にせん断力が作用する場合である。

また、シェル理論で”曲げ応力解”と称せられる変位の周方向分布が指数で表される解の特性値を三次元弾性論上で求める方法を示し、解析例を示した。その結果、シェル理論では得られない断面内に高次の分布モードを持つ特性値および特性モードを発見した。

特性値及び特性モードは2種類に分類できた。両種とも、断面の分布モードの違いにより多数の特性値および特性モードが存在すると予測され、シェル理論より得られる解は、それらの解の内最も単純なものであることが予測される。

一般解を構成する解とその未定定数の数 (A・C族は無限に解がある)

ω_0	周方向にべき級数 で表される解	周方向に三角関数 で表される解	周方向に指数関数 A種	で表される解 C種
0	4	4	4m	2+2m
0以外	なし	なし	8+4m	2+2m

($\omega_0 \neq 0$ の場合は推測, $m \geq 0$)

第 4 章

シェル理論との比較

本章では、シェル理論と三次元解析解を比較することによりシェル理論の有効性を検証する。ただし、シェル全体での変形解析は周方向にフーリエ展開された場合についてのみ検証する。なお、本論では付録 D に示される仮定のもとにシェル理論解を求めている。

4.1 はじめに

第 3 章において三次元弾性論に基づく円筒シェルの一般解が得られた。そこで本章においては薄肉の仮定を用いたシェル理論に基づく一般解を三次元理論解と比較する。特にシェル断面に曲げモーメントが作用する曲げ応力解 (指数関数で表される解) については、その特性値と変位、応力の断面内分布モードを比較し、薄肉を仮定したシェル理論の適用可能範囲を示す。

4.2 周方向フーリエ展開した場合の一般解の比較

4.2.1 変位が軸方向にべき級数で表される解の比較

シェル理論により得られるべき級数型の解のうち、 $n \geq 2$ のものは日置により、曲げ応力解の小さい複素数解をべき級数展開したものであると証明されている [37]。また、フーリエ展開次数 $n = 0, 1$ の場合の解は三次元解析のべき級数解にほぼ等しい。

4.2.1.1 軸引張り力が作用する円筒シェル ($n = 0$)

軸引張り力の作用する円筒シェルの法線保持の仮定を用いたシェル理論の膜応力解 (D.1.3 より) を三次元解析と同じ座標系に書き直すと次のようになる。

$$\begin{aligned}u_r &= -\nu r_0 C_1 \\u_z &= C_1 z + C_2 \\\sigma^{zz} &= N_x / t_0 = -E C_1\end{aligned}$$

これは三次元解析解 (式 (3.11)) において $r = r_0$ とおいた場合に等しい。また、応力 σ^{zz} はシェル理論においても正しく計算されている。

4.2.1.2 ねじりが作用する円筒シェル ($n = 0$)

円筒にねじりが働いた場合の法線保持の仮定を用いたシェル理論の膜応力解 (D.1.3より) は次のように示される。

$$\begin{aligned} u_r &= u_z = 0 \\ u_\theta &= C_1 x + C_2 \\ \sigma^{\theta z} &= N_{x\theta}/t_0 = GC_1 \end{aligned}$$

これは、中立面 ($r = r_0$) における三次元解析解 (式 (3.17)) と同一である。ただし、付録 D に示したシェル断面内の変位と応力の分布の計算式では、三次元解析解と同じ応力 $\sigma^{\theta z}$ を計算することはできない。

4.2.1.3 端部曲げモーメントと端部せん断力が作用した場合 ($n = 1$)

シェル端部に曲げモーメントまたはせん断力が作用する円筒シェルの法線保持の仮定を用いたシェル理論の膜応力解 (D.1.3より) を三次元解析と同じ座標系に書き直すと次のようになる。

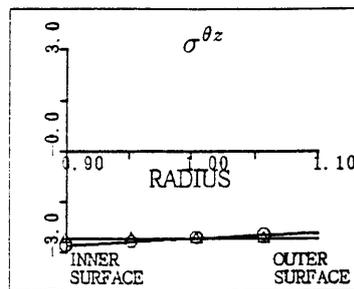
$$\begin{aligned} u_r &= \left[-\frac{1}{6}C_1 z^3 - \frac{1}{2}C_2 z^2 + (2 + \nu)r_0^2 C_1 z - C_3 z - \nu r_0^2 C_2 + C_4 \right] \cos \theta \\ u_\theta &= \left[\frac{1}{6}C_1 z^3 + \frac{1}{2}C_2 z^2 - 2(1 + \nu)r_0^2 C_1 z + C_3 z - C_4 \right] \sin \theta \\ u_z &= \left[\frac{1}{2}C_1 r_0 z^2 + C_2 r_0 z + C_3 r_0 \right] \cos \theta \\ \sigma^{zz} &= N_x/t_0 = E [C_1 r_0 z + C_2 r_0] \cos \theta \\ \sigma^{\theta z} &= N_{x\theta}/t_0 = -E r_0^2 C_1 \sin \theta \end{aligned}$$

また、三次元解析解 (式 (3.12)) において $r = r_0$ とすると次のようになる。

$$\begin{aligned} u_r &= \left[-\frac{1}{6}C_1 z^3 - \frac{1}{2}C_2 z^2 - C_3 z + C_4 - \frac{\nu}{2}C_1 r_0^2 z + \frac{3 + 2\nu}{4}(r_1^2 + r_2^2)C_1 z - \frac{\nu}{2}C_2 r_0^2 \right] \cos \theta \\ u_\theta &= \left[\frac{1}{6}C_1 z^3 + \frac{1}{2}C_2 z^2 - C_3 z - C_4 - \frac{\nu}{2}C_1 r_0^2 z - \frac{3 + 2\nu}{4}(r_1^2 + r_2^2)C_1 z - \frac{\nu}{2}C_2 r_0^2 \right] \sin \theta \\ u_z &= \left[\frac{1}{2}C_1 r_0 z^2 + C_2 r_0 z + C_3 r_0 - \frac{1}{4}C_1 r_0^3 + \frac{3 + 2\nu}{4}r_1^2 r_2^2 C_1 \frac{1}{r_0} \right] \cos \theta \\ \sigma^{zz} &= E [C_1 r_0 z + C_2 r_0] \cos \theta \\ \sigma^{\theta z} &= \frac{G}{4}C_1 \left[(1 - 2\nu)r_0^2 - (3 + 2\nu)(r_1^2 + r_2^2) - (3 + 2\nu)\frac{r_1^2 r_2^2}{r_0^2} \right] \sin \theta \\ \sigma^{zr} &= G \left[\frac{3 + 2\nu}{4} \left(r_1^2 + r_2^2 - r_0^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_0^2} \right) C_1 \right] \cos \theta \end{aligned}$$

以上の式において、変位 u_r, u_θ, u_z はポアソン比による付加的な変位とせん断変形に関する下線部以外は一致している。また、応力 σ^{zz} は完全に一致している。 σ^{zr} は三次元解析結果よりシェルが薄肉の場合 0 と見なせる。

せん断応力 $\sigma^{\theta z}$ は数式上で単純に比較できないため、 $r_0/t_0 = 5.0$ の場合の計算例を図 4.1 に示す。このような厚肉のシェルにおいてもシェル理論が非常によい近似を与えていることが解る。

図 4.1: $\sigma^{\theta z}$ の断面内分布の比較

($\nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) ○ : 三次元解析 △ : シェル理論

4.2.2 変位が軸方向に指数関数で表される解の比較

4.2.2.1 特性値の比較

シェル理論の曲げ応力解の適合性の検討を行うため、特性値を三次元解析による厳正解と比較した。ただし、法線保持を仮定したシェル理論の特性方程式では、三次元解析により得られる解の内、 ω_{A1}, ω_B しか得ることが出来ないなのでこの ω_{A1}, ω_B のみを数値的に求め、比較することとした。また、せん断変形を考慮したシェル理論では、 $\omega_{A1}, \omega_B, \omega_{C1}$ しか得ることが出来ないなのでこの $\omega_{A1}, \omega_B, \omega_{C1}$ のみを数値的に求め、三次元解析解を正解としてその実数部と虚数部を百分比で表し、比較することとした。

シェル理論で得られる特性値と三次元解析で得られる特性値を比較するため、 $\nu = 0.3$ の場合について、三次元解析解を正解として比較し、図 4.2 の結果を得た。法線保持の仮定を用いた解析では、 $r_0/t_0 < 10$ の範囲において n が大きくなるにつれて誤差が大きくなり、実用に適さないと考えられる。しかし、せん断変形を考慮して得られた特性値は、 $\omega_{A1}, \omega_B, \omega_{C1}$ のいずれの場合にも、特性値の誤差は許容範囲内にあると考えられる。

図から明らかなように、せん断変形を考慮した場合の方が特性値の精度がよい。これは、せん断変形を考慮したことにより、より断面変形の仮定が三次元弾性体に近くなったためと考えられる。

A 種の特性値 誤差は、各解法とも、 r_0/t_0 が小さくなるほど誤差は大きくなる。また、フーリエ展開次数 n が大きくなると、誤差が大きくなる傾向があった。三次元解析解においてポアソン比は特性値の変化にあまり寄与していないので、シェル理論の特性値の誤差に対するポアソン比の影響は、余りないと考えられる。誤差への影響度は $r_0/t_0 \gg n \gg \nu$ となる。

特性値の誤差が10%以内を実用範囲とすれば、シェル理論の各解法の特性値を厳密に求めた場合、 $r_0/t_0 = 10$ ぐらいまではどのシェル理論を用いても良いと考えられる。

B 種の特性値 誤差は、 r_0/t_0 が小さくなるほど誤差は大きくなる。また n が大きくなるほど誤差は大きくなる。三次元解析解においてポアソン比は特性値の変化にあまり寄与していないので、シェル理論の特性値の誤差に対するポアソン比の影響は、余りないと考えられる。誤差への影響度は $r_0/t_0 > n \gg \nu$ となる。

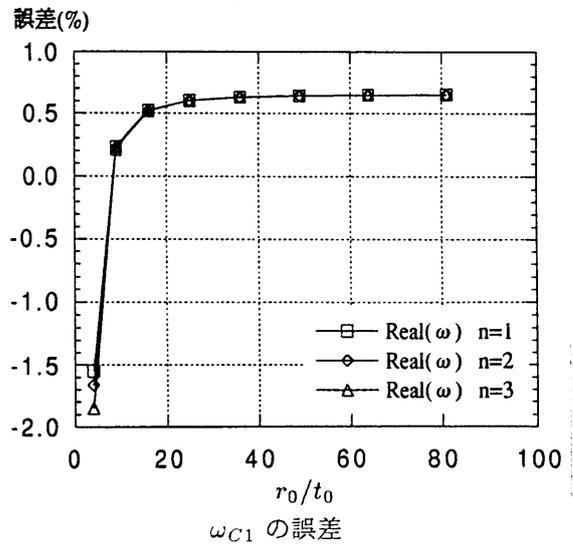
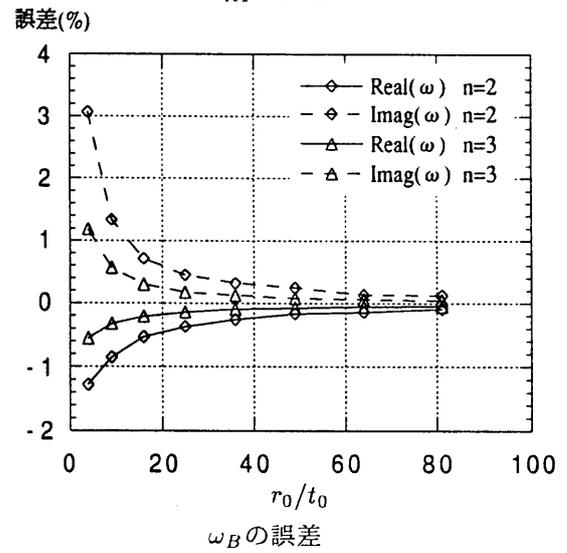
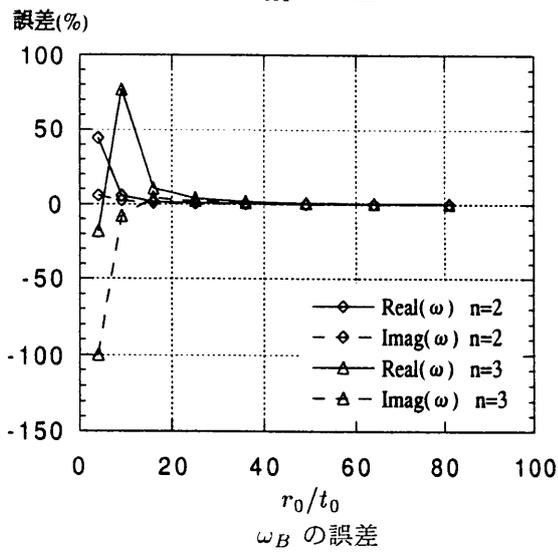
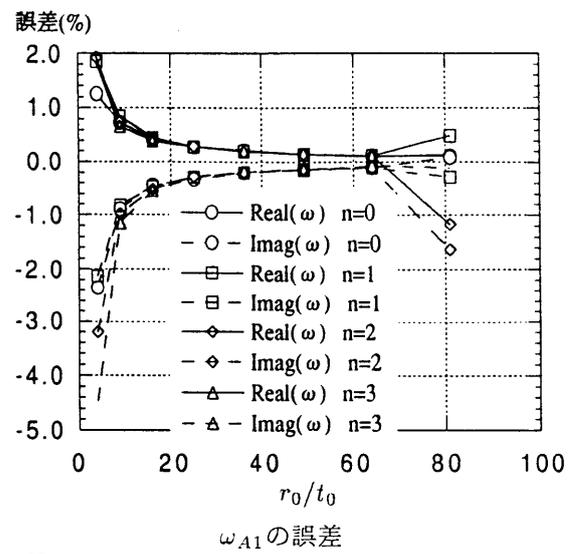
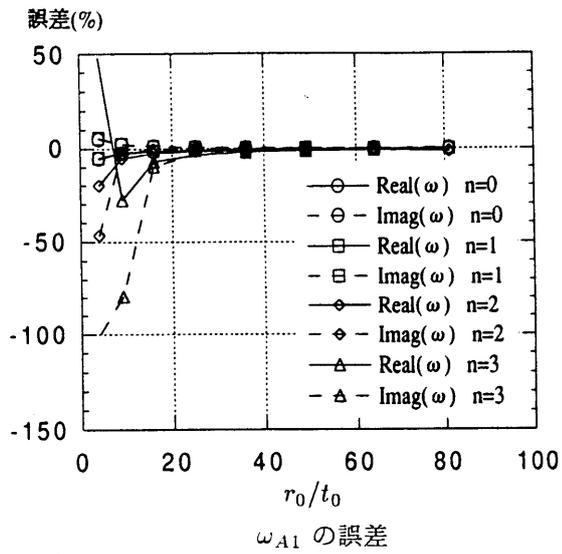
特性値の誤差が10%以内を実用範囲とすれば、法線保持の仮定をしたシェル理論による厳密解なら $r_0/t_0 = 30$ ぐらいまで特性値を採用できる。また、せん断変形を考慮したシェル理論では $r_0/t_0 = 5$ ぐらいまで特性値を採用できる。ただ、 n が大きいほど誤差の低下が起こりにくいので、 n が大きい場合には三次元解析により、特性値を求めたほうがよい。

C種の特値値 せん断変形を考慮したシェル理論のみで解析可能である。誤差は周方向フーリエ展開次数 n に関係ないようである。また、特値値の誤差は非常に小さく $r_0/t_0 = 5$ ぐらいまで特値値を採用できる。

4.2.2.2 断面内分布モードの比較

断面内の変位、応力の分布モードについて、三次元解析解に対する違いを法線保持の仮定を用いたシェル理論とせん断変形を考慮したシェル理論とを用いて比較した。実線が三次元解析解を示し、破線がシェル理論解を表す。ただし、シェル理論による断面内の変位応力分布は付録 D に示したものを使用する。また、三次元解析解とシェル理論の分布性状を比較するため、 ω_{A1}, ω_B については $r = r_0$ における変位 u_r の値を等しくし、比較した。 ω_{C1} については $r = r_0$ における応力 $\sigma_{r\theta}$ の値を等しくした。図 4.3~ 4.8 に $r_0/t_0 = 5.0, 9.0$ の場合についての計算結果を示す。

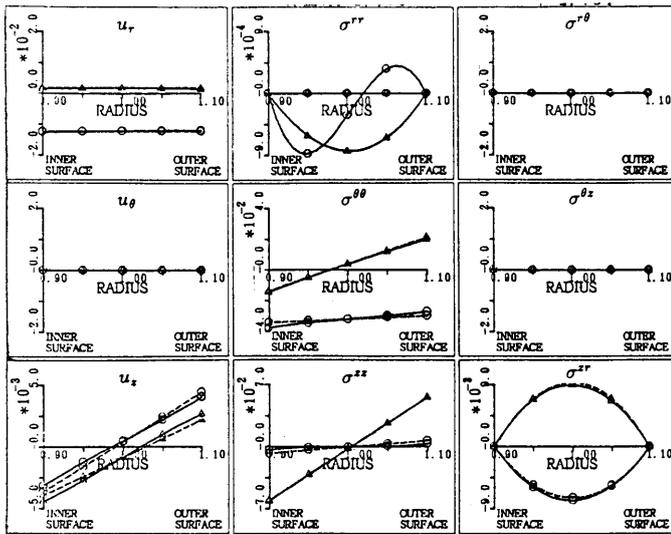
全般的にせん断変形を考慮したシェル理論が良い分布性状を示しているのが解る。また、周方向フーリエ展開次数 n が大きくなるにつれ、誤差が増え、法線保持の仮定を用いた場合の $n = 2$ の解は信頼性が低下する。



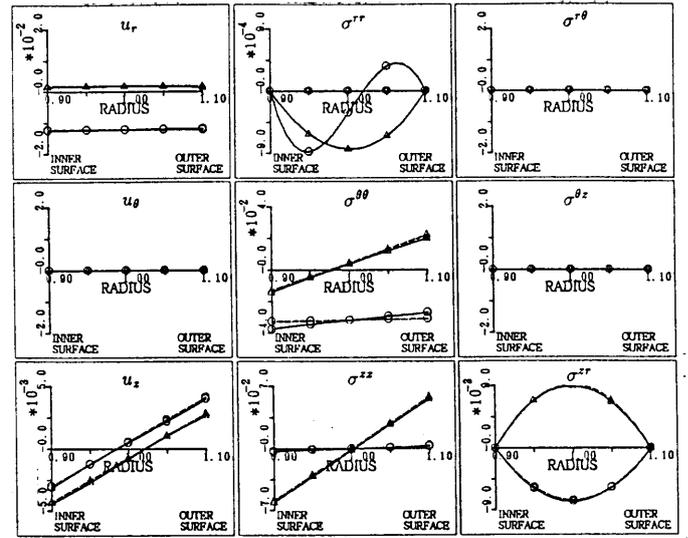
法線保持を仮定した場合

せん断変形を考慮した場合

図 4.2: シェル理論による特性値の誤差 ($\nu = 0.3$)



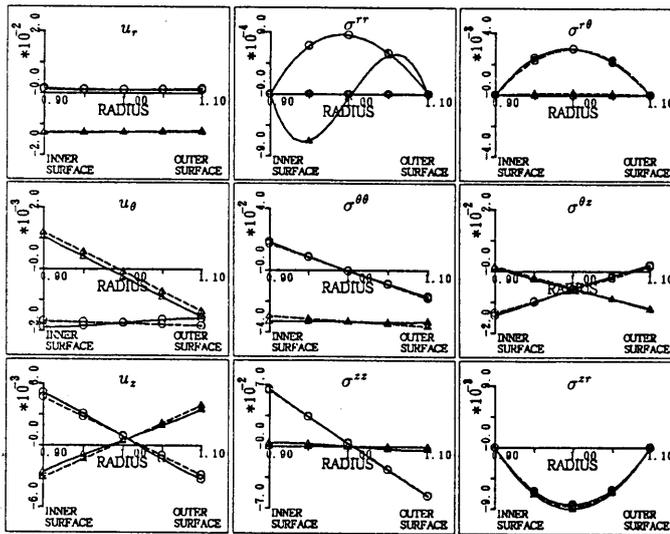
法線保持を仮定した場合 (ω_{A1})



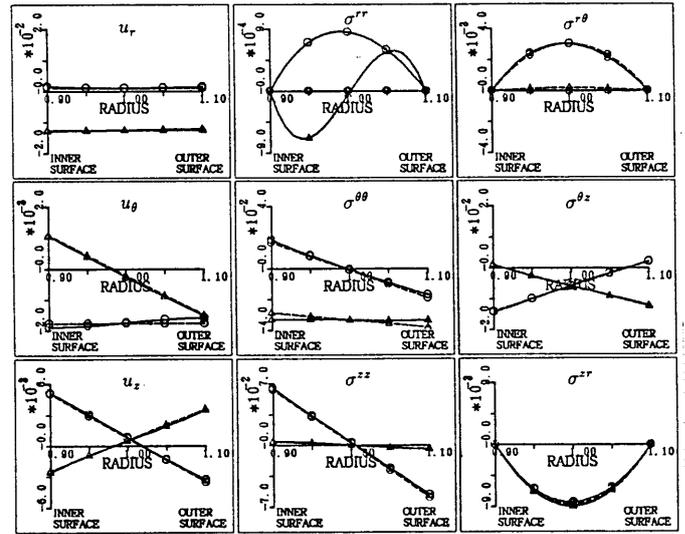
せん断変形を考慮した場合 (ω_{A1})

図 4.3: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較

$n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$, ○:実数部 △:虚数部, 実線:三次元解析 破線:シェル理論



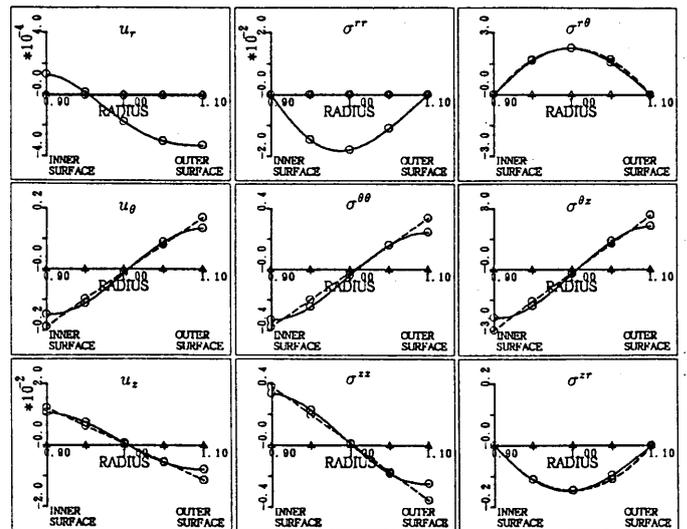
法線保持を仮定した場合 (ω_{A1})



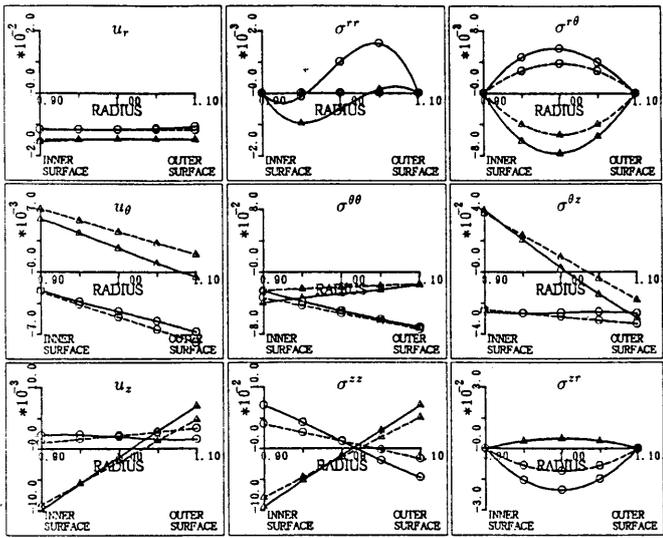
せん断変形を考慮した場合 (ω_{A1})

図 4.4: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較

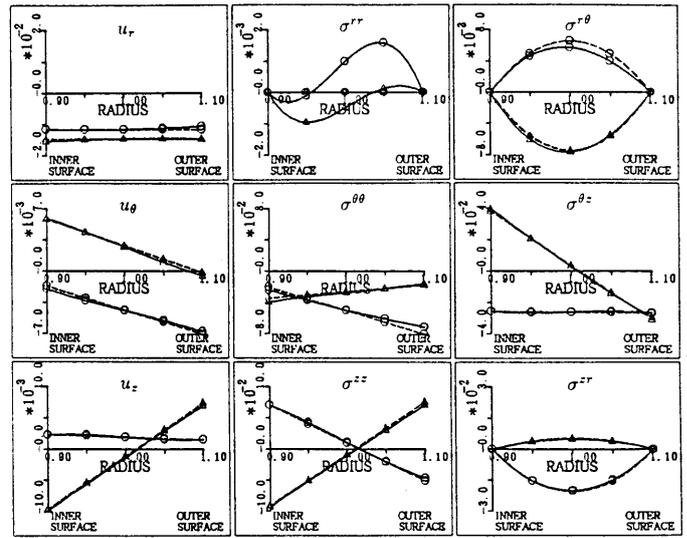
$n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$, ○:実数部 △:虚数部, 実線:三次元解析 破線:シェル理論



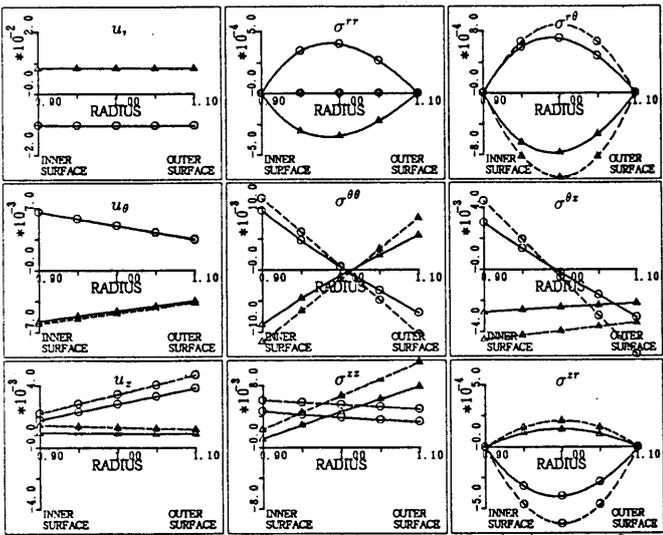
せん断変形を考慮した場合 (ω_{C1})



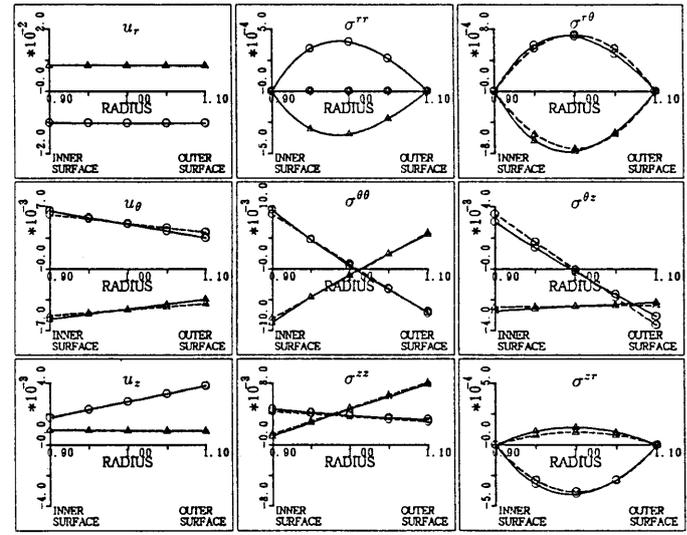
法線保持を仮定した場合 (ω_{A1})



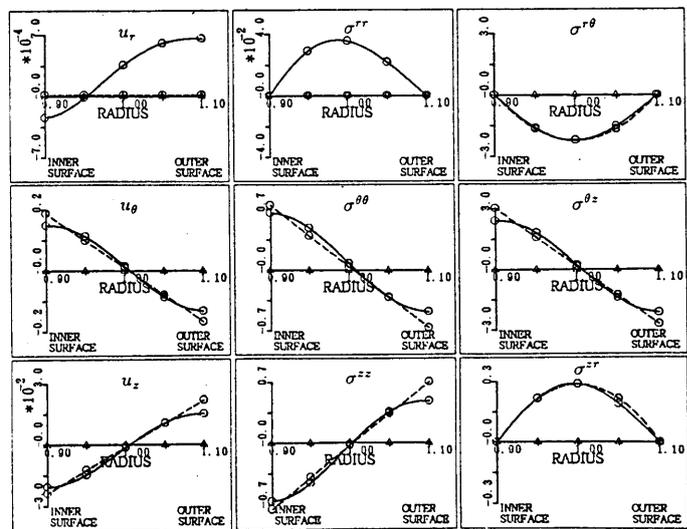
せん断変形を考慮した場合 (ω_{A1})



法線保持を仮定した場合 (ω_B)



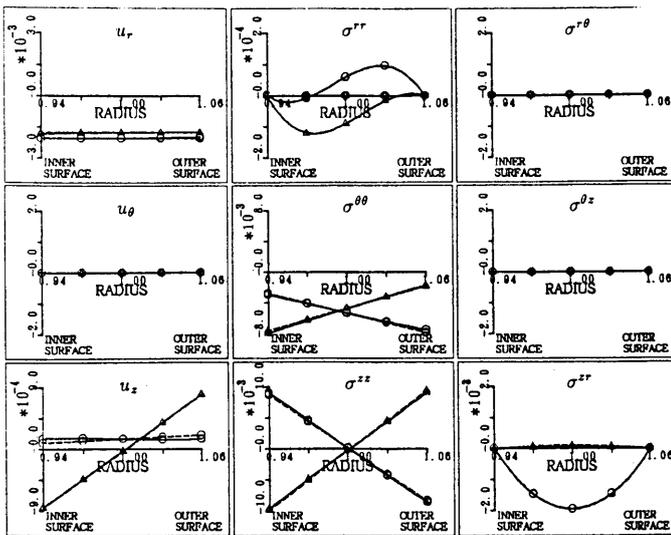
せん断変形を考慮した場合 (ω_B)



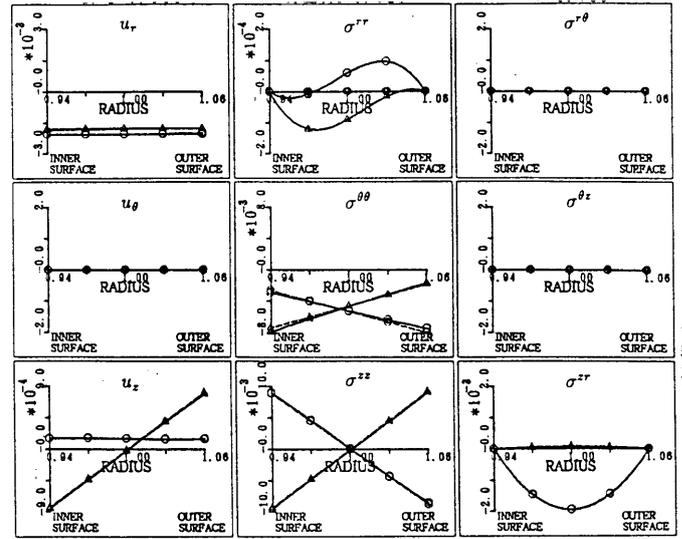
せん断変形を考慮した場合 (ω_{C1})

図 4.5: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較

$n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$, ○: 実数部 △: 虚数部, 実線: 三次元解析 破線: シェル理論



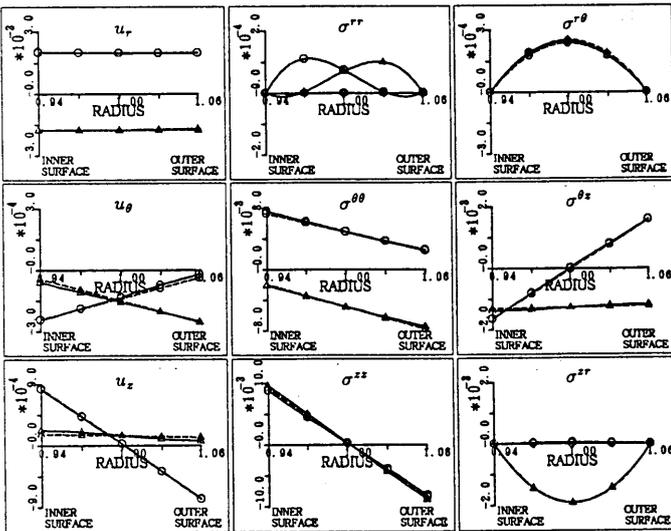
法線保持を仮定した場合 (ω_{A1})



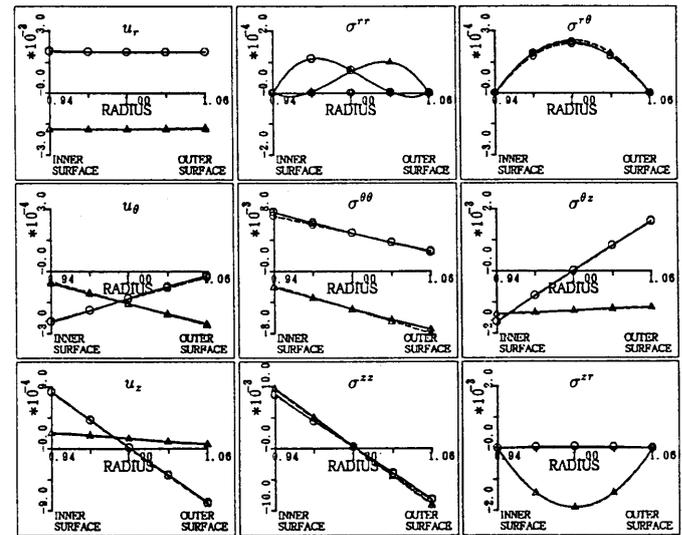
せん断変形を考慮した場合 (ω_{A1})

図 4.6: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較

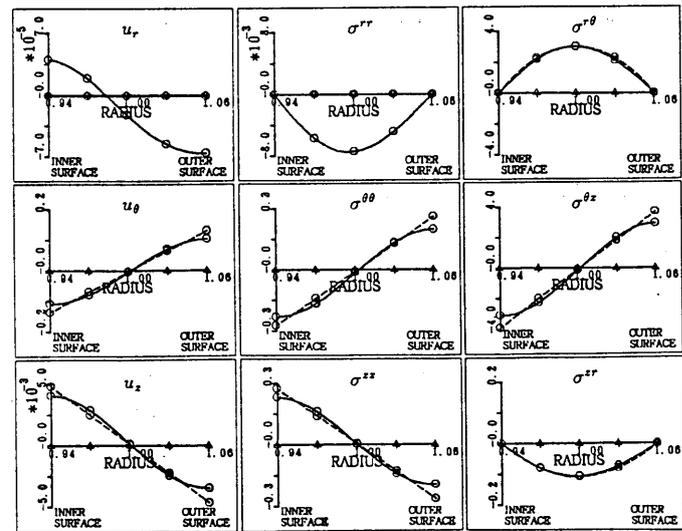
$n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 9$, ○:実数部 △:虚数部, 実線:三次元解析 破線:シェル理論



法線保持を仮定した場合 (ω_{A1})



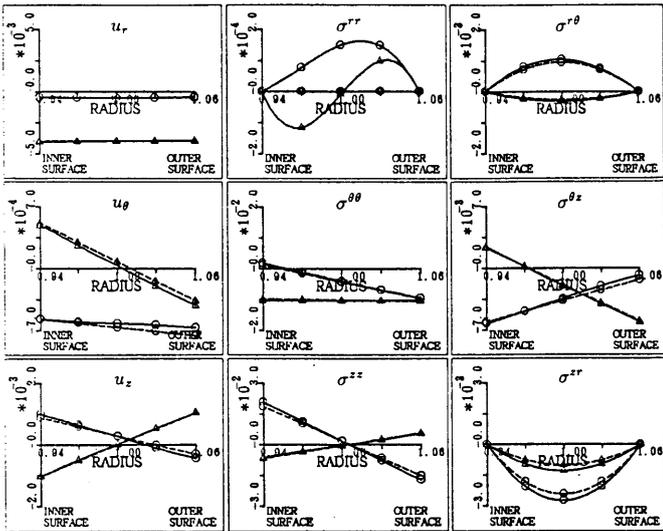
せん断変形を考慮した場合 (ω_{A1})



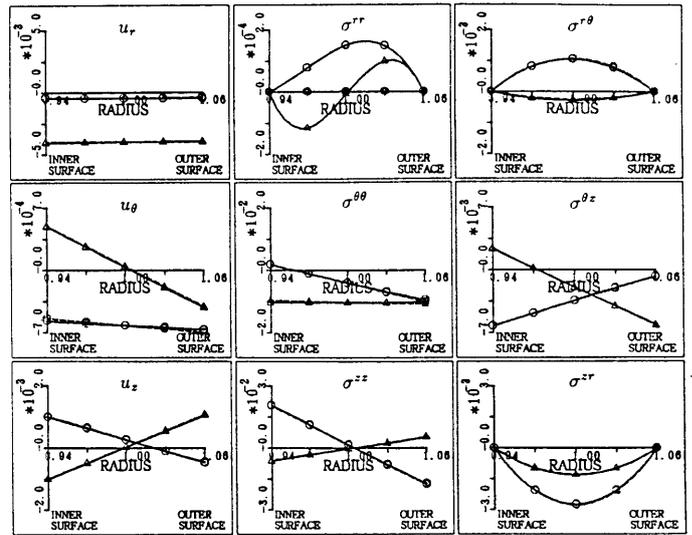
せん断変形を考慮した場合 (ω_{C1})

図 4.7: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較

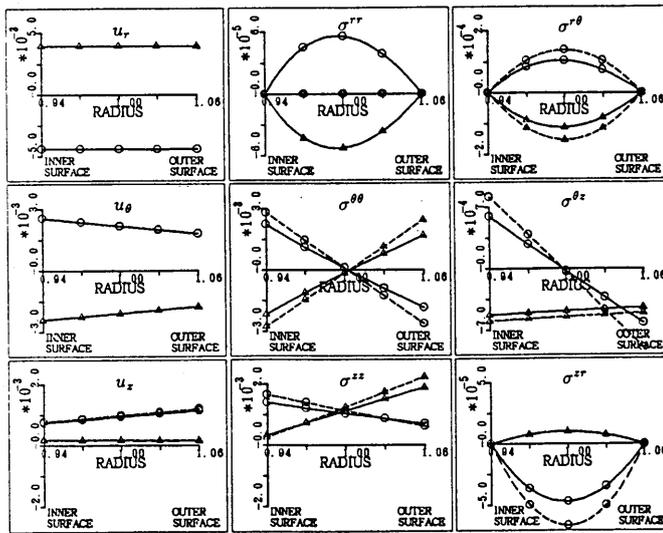
$n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 9$, ○:実数部 △:虚数部, 実線:三次元解析 破線:シェル理論



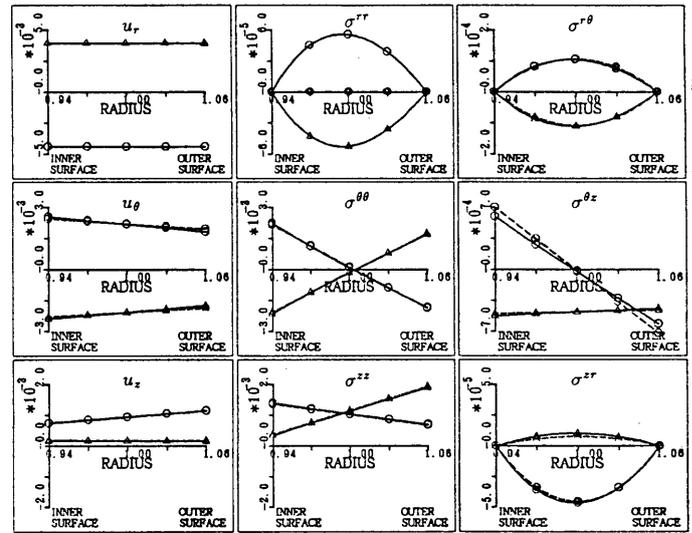
法線保持を仮定した場合 (ω_{A1})



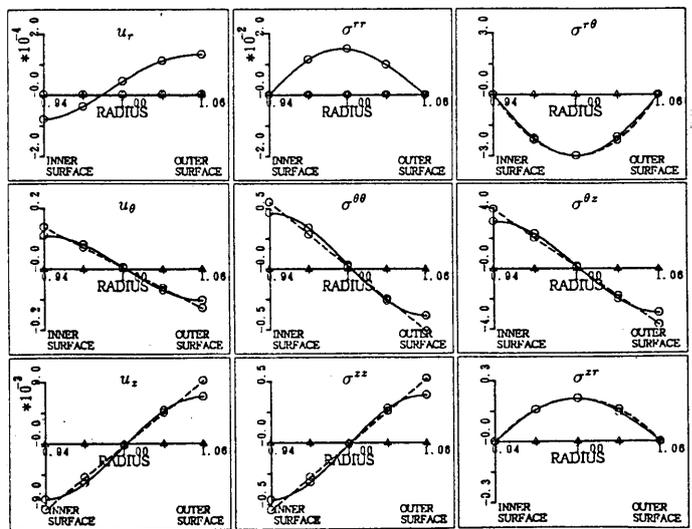
せん断変形を考慮した場合 (ω_{A1})



法線保持を仮定した場合 (ω_B)



せん断変形を考慮した場合 (ω_B)



せん断変形を考慮した場合 (ω_{C1})

図 4.8: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較

$n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 9$, ○: 実数部 △: 虚数部, 実線: 三次元解析 破線: シェル理論

4.2.3 一般解の構成

シェル理論を用いて三次元解析と同じ条件で解析を行うと次のような一般解が得られる(付録 D参照)。なお、ねじりモードは省いている。

シェル理論の一般解

・膜応力解

軸方向にべき級数型の変位分布を持つ。また、膜応力解の $n \geq 2$ の場合は、曲げ応力解の B 種 (ω_B) に相当することが日置により証明されている [37]。

・曲げ応力解

<法線保持を仮定したシェル理論の場合>

軸方向に指数関数型の変位分布を持つ。解は特性方程式より得られる特性値に対応する特性モードの数だけあり、2 種類に分類される。(特性値の絶対値の大きい複素数解と小さい複素数解)

<せん断変形を考慮したシェル理論の場合>

法線保持を仮定したシェル理論より得られる曲げ応力解に加え、振動せず減衰のみの解が存在する。

シェル理論と三次元解析の一般解の構成を比較すると表 4.1 ~ 4.3 のようになる。

閉断面円筒シェルの材端における変位の境界条件は、一つの断面につき u_r (r 方向変位) u_θ (θ 方向変位) u_z (z 方向変位) $u_{z,r}$ (z 一定断面の傾き) $u_{\theta,r}$ (θ 一定断面の傾き) の 5ヶあり、計 10ヶある(軸対称問題の場合 $u_\theta, u_{\theta,r}$ を省いて 6ヶ)。しかし、法線保持を仮定したシェル理論では ω_{C1} に相当する解がない。 ω_{C1} はその断面内変位分布より $u_{\theta,r}$ に関係する解であるから、法線保持を仮定したシェル理論においては、 $u_{\theta,r}$ は無視され、境界条件として計 8ヶになると考えられる。

従って、三次元解析解の未定定数の数において $m = 1$ とし、C 種 (ω_{C1}) を無視すれば、法線保持の仮定を用いたシェル理論と三次元解析解が十分に対応していることが解る。

表 4.1: 三次元解析解の未定定数の数 ($m \geq 0$)

フーリエ展開次数 (n)	軸方向にべき級 数で表される解	軸方向に A 種	指数関数で B 種	表される解 C 種	計
0	2	4+4m	なし	なし	6+4m
1	4	4+4m	なし	2+2m	10+6m
2 以上	なし	4+4m	4	2+2m	10+6m

表 4.2: 法線保持を仮定したシェル理論の未定定数の総数

フーリエ展開次数 (n)	膜応力解 (べき級数型)	曲げ応力解 減衰大 (A 種)	(指数型) 減衰小 (B 種)	計
0	2	4	なし	6
1	4	4	なし	8
2 以上	4	4	4 (膜応力解に含める)	8

表 4.3: せん断変形を考慮したシェル理論の未定定数の総数

フーリエ展開次数 (n)	膜応力解 (べき級数型)	曲げ応力解 減衰大 (A 種)	(指数型) 減衰小 (B 種)	実数 (C 種)	計
0	2	4	なし	なし	6
1	4	4	なし	2	10
2 以上	なし	4	4	2	10

4.3 軸方向フーリエ展開した場合の一般解の比較

4.3.1 変位が周方向にべき級数で表される解の比較

4.3.1.1 剛体回転

法線保持の仮定を用いたシェル理論の膜応力解 (D.1.3より) は次のように示される。

$$\begin{aligned} u_r &= u_z = 0 \\ u_\theta &= K_2 \end{aligned}$$

これは、中立面 ($r = r_0$) における三次元解析解 (式 (3.29)) と同一である。

4.3.1.2 面内せん断変形

法線保持の仮定を用いたシェル理論の膜応力解 (D.1.3より) は次のように示される。

$$\begin{aligned} u_z &= K_1\theta + K_2 \\ u_\theta &= u_r = 0 \\ \sigma^{\theta z} &= N_{x\theta}/t_0 = G\frac{1}{r_0}K_1 \end{aligned}$$

これは、中立面 ($r = r_0$) における三次元解析解 (式 (3.30)) と同一である。ただし、付録 D に示したシェル断面内の変位と応力の分布の計算式では、三次元解析解と同じ応力 $\sigma^{\theta z}$ を計算することはできない。

4.3.1.3 純曲げが作用する円弧

法線保持の仮定を用いたシェル理論の膜応力解 (D.1.3より) は次のように示される。

$$\begin{aligned} u_z &= 0 \\ u_\theta &= K_1\theta + K_2 \\ u_r &= -K_1 \\ M_\theta &= -\frac{D}{r_0^2}K_1 \quad D = \frac{Gt_0^3}{6(1-\nu)} \end{aligned}$$

また、三次元解析解 (式 (3.31)) は r_0 に対して t_0 を無視することにより、次のようになる。ただし、変位は中立面において計算する。

$$\begin{aligned} u_r &= 4\frac{1-\nu}{r_0}C_3 \\ u_\theta &= -4\frac{1-\nu}{r_0}C_3\theta + C_4r_0 \\ u_z &= 0 \\ M_\theta &= \int_{r_1}^{r_2} \sigma^{\theta\theta} r dr = G\frac{t_0^3}{6r_0^3}C_3 \end{aligned}$$

両式を比較し、 $K_1 = -4\frac{1-\nu}{r_0}C_3$ とすると両式の変位は一致することが解る。しかし、三次元解析結果の曲げモーメント M_θ は、シェル理論のその $\frac{1}{4}$ の結果となっている。

応力 $\sigma^{\theta\theta}$ は単純に比較できないため、三次元解析解と法線保持の仮定から推測される応力分布を数値解析例で比較する。ただし、シェル理論から推測される応力分布は一次関数で分布するとして次のように仮

定した。

$$\sigma^{\theta\theta} = \frac{M_\theta}{(t_0^3/12)}(r - r_0)$$

$r_0/t_0 = 5.0$ の場合の計算例を図 4.9 に示す。このような厚肉のシェルにおいてもシェル理論が非常によい近似を与えていることが解る。

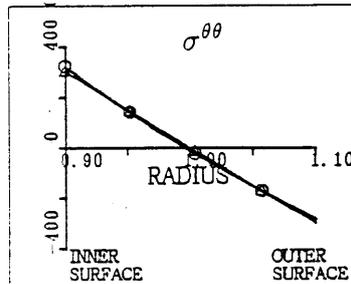


図 4.9: $\sigma^{\theta\theta}$ の断面内分布の比較

($\nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) ○ : 三次元解析 △ : シェル理論

4.3.2 変位が周方向に三角関数で表される解の比較

4.3.2.1 剛体変位

法線保持の仮定を用いたシェル理論の膜応力解 (D.1.3 より) は次のように示される。

$$\begin{aligned} u_z &= 0 \\ u_\theta &= K_1 \sin \theta + K_2 \cos \theta \\ u_r &= -K_1 \cos \theta + K_2 \sin \theta \end{aligned}$$

よって、三次元解析解 (式 (3.32)) において、 $r = r_0$ とした場合と同一になる。

4.3.2.2 せん断力が作用する円弧

法線保持の仮定を用いたシェル理論の膜応力解 (D.1.3 より) は次のように示される。

$$\begin{aligned} u_z &= 0 \\ u_\theta &= \frac{a}{B}(-K_1 \cos \theta - K_2 \sin \theta) + \frac{a^3}{D}(K_1 \cos \theta + K_2 \sin \theta) \\ u_r &= -\frac{a^3}{D}(-K_1 \sin \theta + K_2 \cos \theta) \\ Q_\theta &= K_1 \cos \theta + K_2 \sin \theta \\ N_\theta &= K_1 \sin \theta - K_2 \cos \theta \\ M_\theta &= -aK_1 \sin \theta + aK_2 \cos \theta \end{aligned}$$

また、三次元解析解 (式 (3.33)) は 1 に対して t_0/r_0 を無視することにより、次のようになる。ただし、変位は中立面において計算する。

$$u_r = C_1 \left(\frac{1}{2} r_0^2 - r_0^2 \log r_0 \right) \cos \theta - C_2 \left(\frac{1}{2} r_0^2 - r_0^2 \log r_0 \right) \sin \theta$$

$$\begin{aligned}
 u_\theta &= C_1 \left(\frac{3-2\nu}{2(1-2\nu)} r_0^2 + r_0^2 \log r_0 \right) \sin \theta + C_2 \left(\frac{3-2\nu}{2(1-2\nu)} r_0^2 + r_0^2 \log r_0 \right) \cos \theta \\
 Q_\theta &= \int_{r_1}^{r_2} \sigma^{\theta r} dr = G \frac{2}{1-2\nu} r_0 t_0 C_1 \sin \theta + G \frac{2}{1-2\nu} r_0 t_0 C_2 \cos \theta \\
 N_\theta &= \int_{r_1}^{r_2} \sigma^{\theta\theta} dr = G \frac{2}{1-2\nu} r_0 t_0 C_1 \cos \theta - G \frac{2}{1-2\nu} r_0 t_0 C_2 \sin \theta \\
 M_\theta &= \int_{r_1}^{r_2} \sigma^{\theta\theta} r dr = -G \frac{2}{1-2\nu} r_0^2 t_0 C_1 \cos \theta + G \frac{2}{1-2\nu} r_0^2 t_0 C_2 \sin \theta
 \end{aligned}$$

両式を比較すると、断面力 ($Q_\theta, N_\theta, M_\theta$) は、等価である。しかし、変位に関しては、シェル理論における変位を $u_{r,\theta\theta} = -\frac{r_0^2}{D} M_\theta$ として計算したため、厳正解との誤差を生じたと考えられる。

また、応力 $\sigma^{\theta\theta}, \sigma^{r^2}$ は単純に比較できないため、三次元解析解と法線保持の仮定から推測される応力分布を数値解析例で比較する。ただし、シェル理論から推測される応力分布は $\sigma^{\theta\theta}$ は一次関数、 σ^{r^2} は二次関数で分布するとして次のように仮定した。

$$\begin{aligned}
 \sigma^{\theta\theta} &= \frac{N_\theta}{t_0} + \frac{M_\theta}{(t_0^3/12)}(r - r_0) \\
 \sigma^{r^2} &= -\frac{3Q_\theta}{2t_0} \frac{(r - r_1)(r - r_2)}{(t_0^2/4)}
 \end{aligned}$$

$r_0/t_0 = 5.0$ の場合の計算例を図 4.10 に示す。このような厚肉のシェルにおいてもシェル理論が非常によい近似を与えていることが解る。

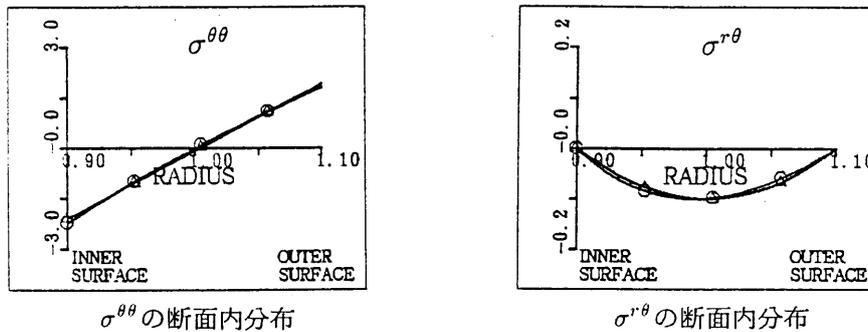


図 4.10: 応力の断面内分布の比較
 ($\nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$) ○:三次元解析 △: シェル理論

4.3.3 変位が周方向に指数関数で表される解の比較

4.3.3.1 特性値の比較

シェル理論の曲げ応力解の適合性の検討を行うため、特性値を三次元解析による厳正解と比較した。ただし、三次元解析では n_{A1a}, n_{A1b} しか得ることが出来なかったため、 n_{A1a}, n_{A1b} のみを比較する。なお、法線保持を仮定したシェル理論の特性方程式では、三次元解析により得られる解の内、 n_{A1a}, n_{A1b} を得ることができ、せん断変形を考慮したシェル理論では、 n_{A1a}, n_{A1b}, n_{C1} を得ることが出来る。

各種の理論を比較するため、 $\nu = 0.3$ の場合について、三次元解析解を正解として百分比で比較し、図 4.11 の結果を得た。法線保持の仮定を用いた解析では、 $\omega_0 < 1$ の場合、 $r_0/t_0 < 10$ の範囲において誤差が

大きくなり、実用に適さないと考えられる。また、せん断変形を考慮して得られた特性値も、 $\omega_0 = 8$ の場合、 $r_0/t_0 < 10$ の範囲において誤差が大きくなり、実用に適さないと考えられる。

しかし、 $r_0/t_0 > 20$ の範囲においては誤差は3%以内であるのでシェル理論は実用にこの範囲で十分に適用可能と考えられる。

A 種の特性値 誤差は、各解法とも、 r_0/t_0 が小さくなるほど誤差は大きくなる。三次元解析解においてポアソン比は特性値の変化にあまり寄与していないので、シェル理論の特性値の誤差に対するポアソン比の影響は、余りないと考えられる。また、軸方向展開次数 ω_0 の特性値の誤差への定性的な影響はあまりないと考えられる。

実用上、特性値の誤差が10%以内であれば良いなら、各解法とも解を厳密に求めるなら $r_0/t_0 = 20$ ぐらいまで、シェル理論を用いても良いと考えられる。

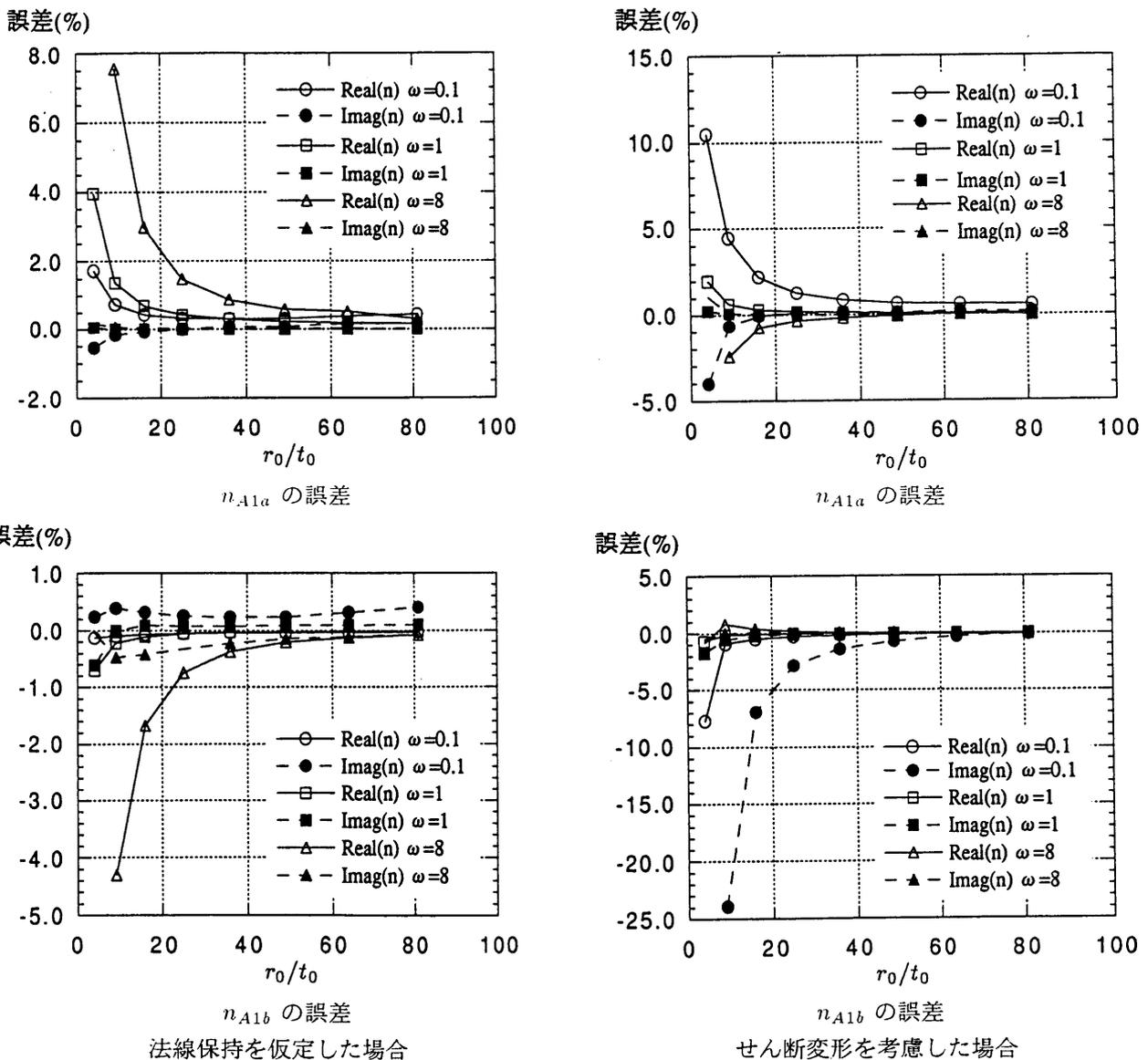


図 4.11: シェル理論による特性値の誤差 ($\nu = 0.3$)

4.3.3.2 A 種の断面内分布モードの比較

断面内の変位、応力の分布モードについて、三次元解析解に対する違いを法線保持の仮定を用いたシェル理論とせん断変形を考慮したシェル理論とを用いて比較した。実線が三次元解析解を示し、破線がシェル理論解を表す。ただし、シェル理論による断面内の変位応力分布は付録 D に示したものを使用する。また、三次元解析解とシェル理論の分布性状を比較するため、 $r = r_0$ における変位 u_r の値を等しくして比較した。図 4.12~4.19 に $r_0/t_0 = 4.0, 9.0, 25.0, 49.0$ の場合についての計算結果を示す。

三次元解析解と比較してシェル理論は全般的に比較的良好な近似解を与えている。しかし、特性値 n_{A1b} の $\omega_0 = 0.1$ 、 $r_0/t_0 = 25, 49$ の場合は法線保持のシェル理論では特性値の誤差が小さいのに対して、特性モードが三次元解析解と異なっているのに注意を要する。

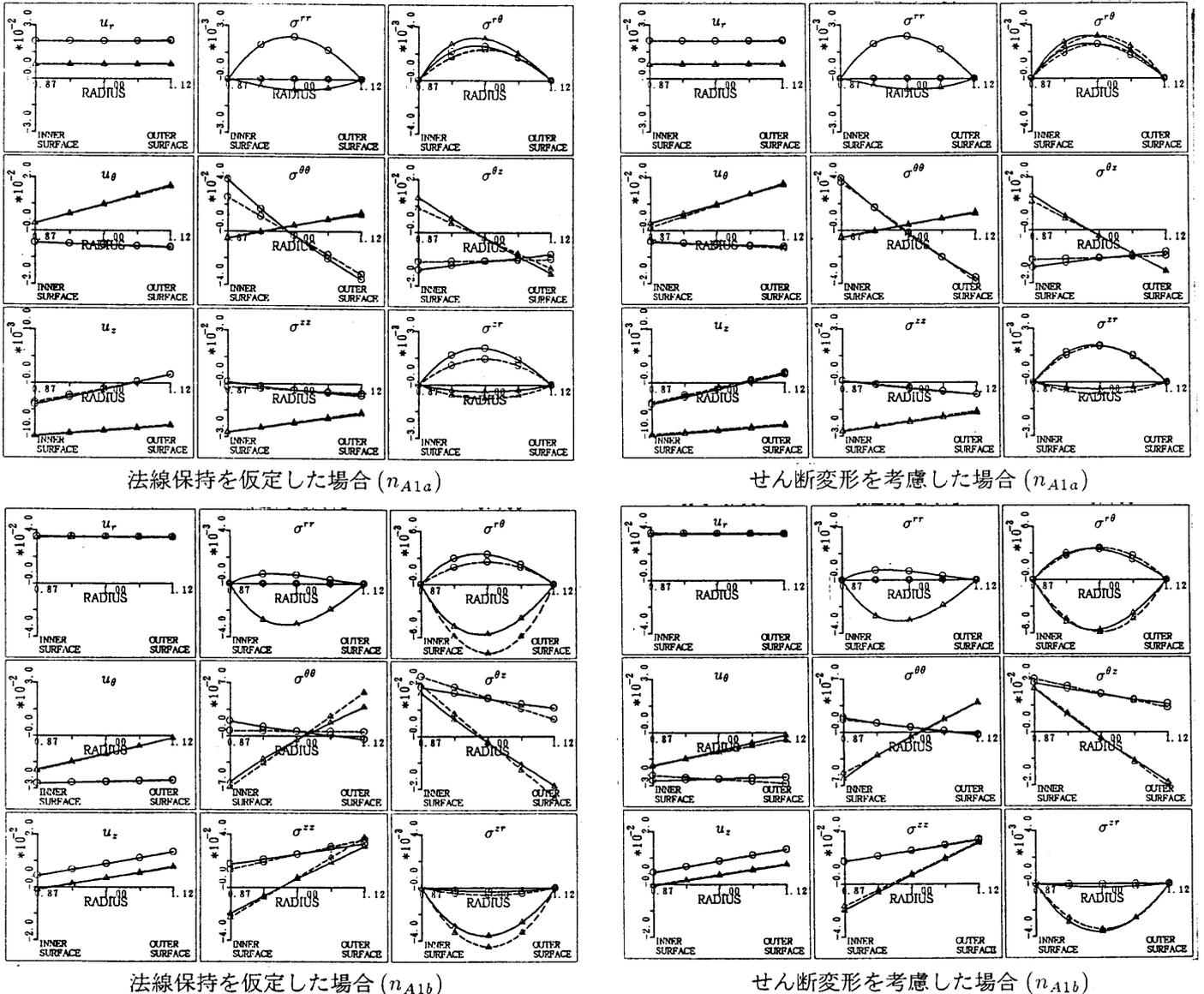
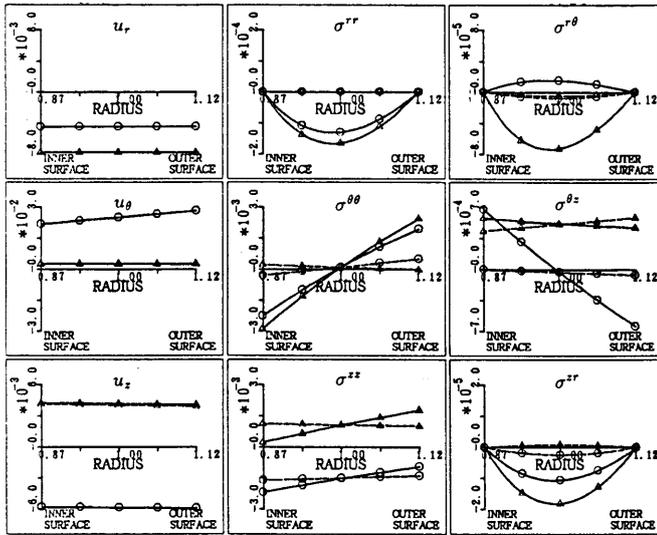
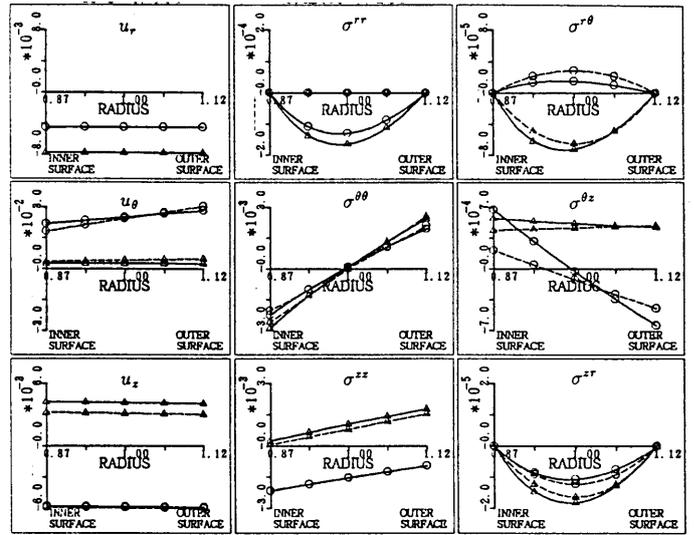


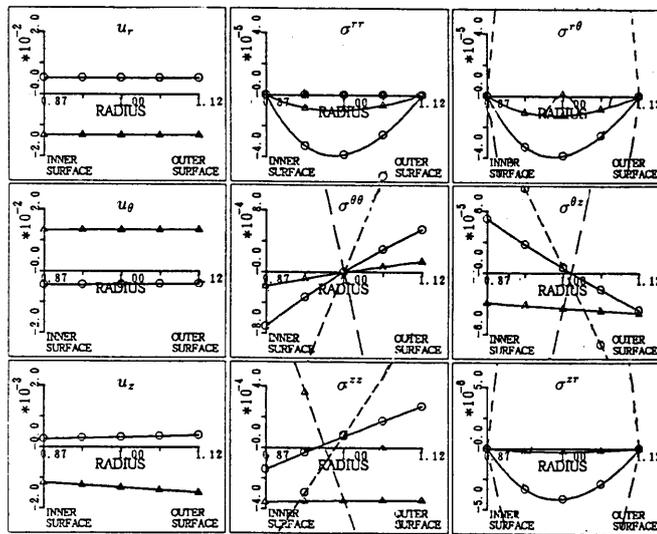
図 4.12: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較
 $\omega_0 = 1.0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 4$, \bigcirc : 実数部 \triangle : 虚数部, 実線: 三次元解析 破線: シェル理論



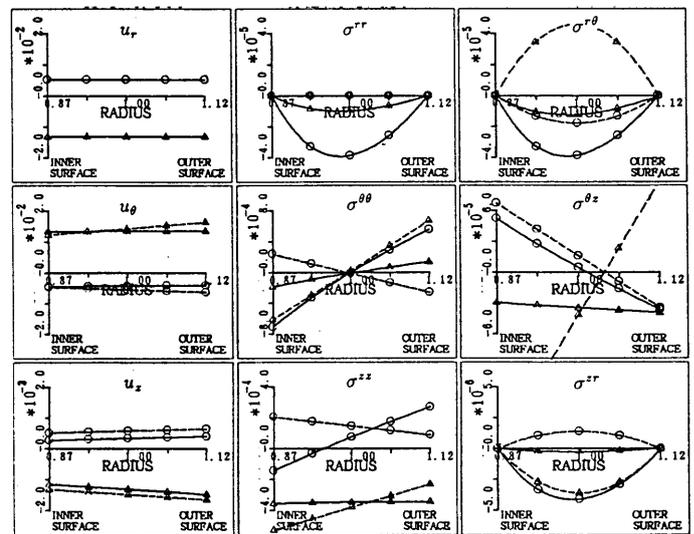
法線保持を仮定した場合 (n_{A1a})



せん断変形を考慮した場合 (n_{A1a})



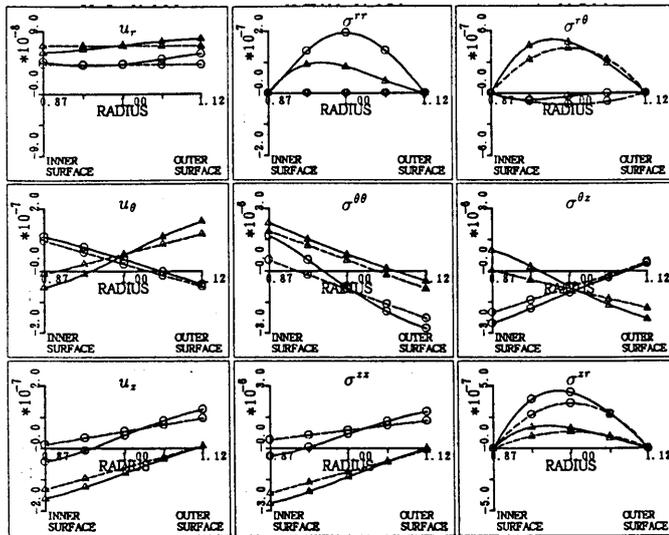
法線保持を仮定した場合 (n_{A1b})



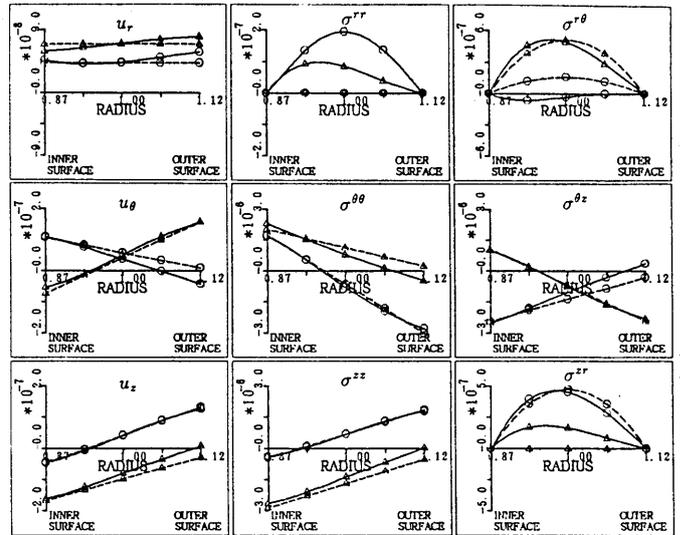
せん断変形を考慮した場合 (n_{A1b})

図 4.13: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較

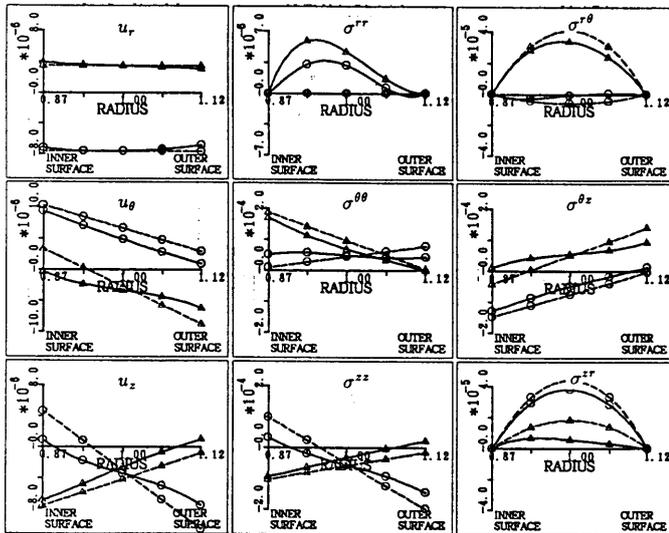
$\omega_0 = 0.1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 4$, \circ : 実数部 \triangle : 虚数部, 実線: 三次元解析 破線: シェル理論



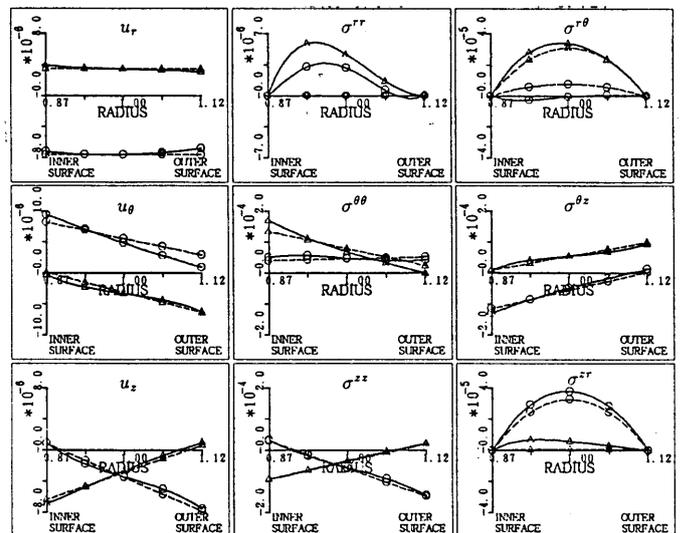
法線保持を仮定した場合 (n_{A1a})



せん断変形を考慮した場合 (n_{A1a})



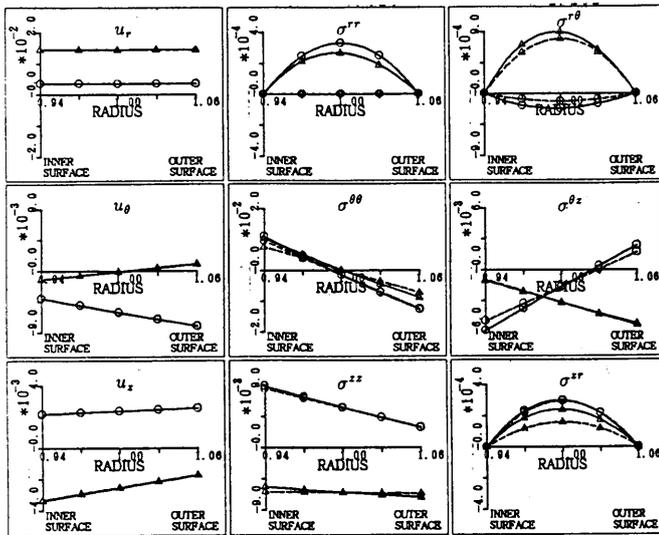
法線保持を仮定した場合 (n_{A1b})



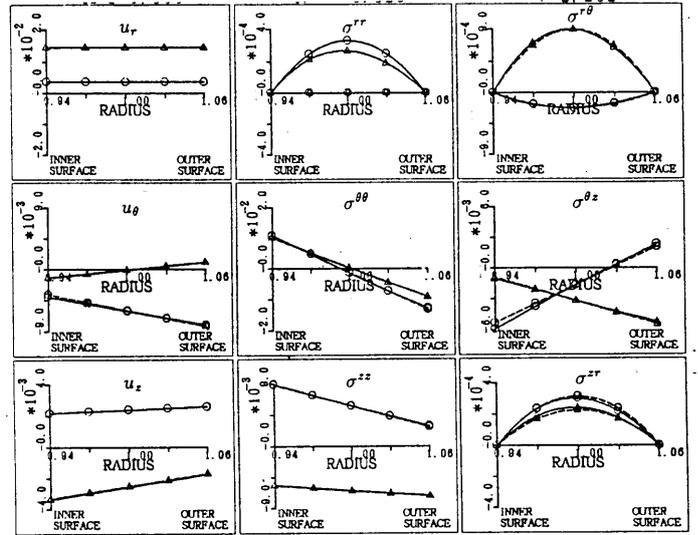
せん断変形を考慮した場合 (n_{A1b})

図 4.14: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較

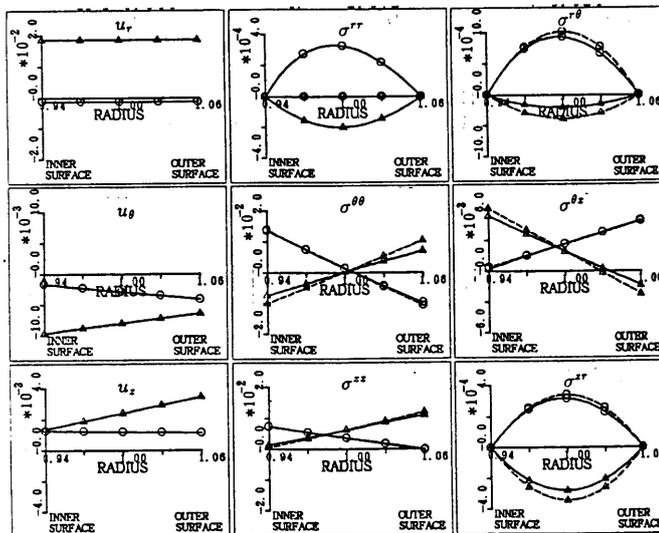
$\omega_0 = 8.0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 4$, \circ : 実数部 \triangle : 虚数部, 実線: 三次元解析 破線: シェル理論



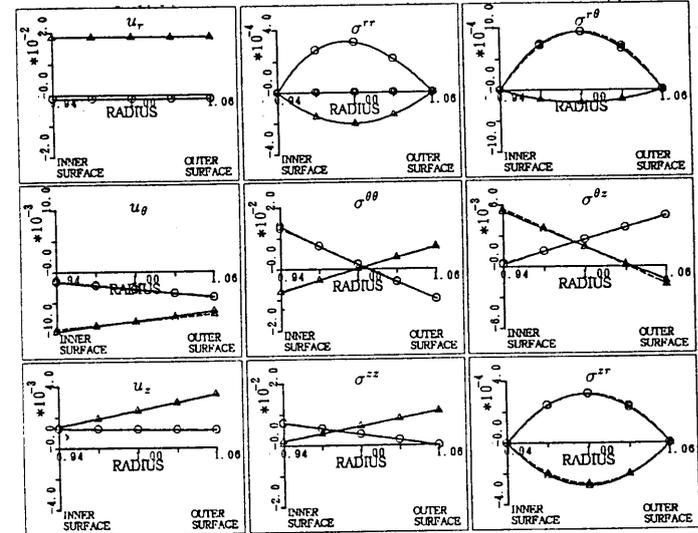
法線保持を仮定した場合 (n_{A1a})



せん断変形を考慮した場合 (n_{A1a})



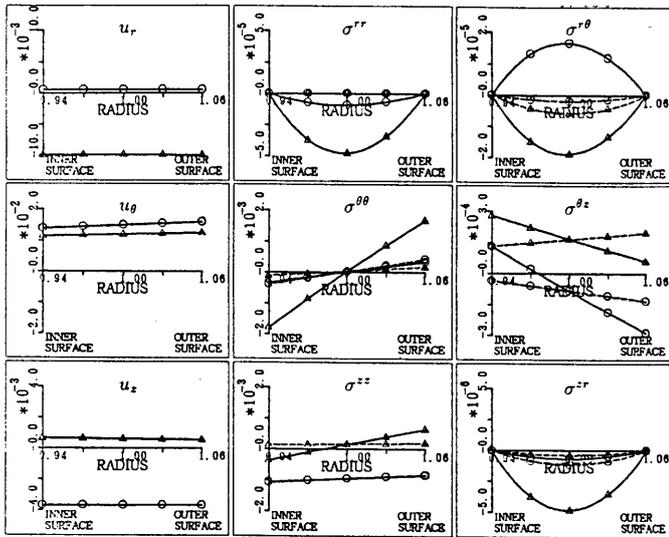
法線保持を仮定した場合 (n_{A1b})



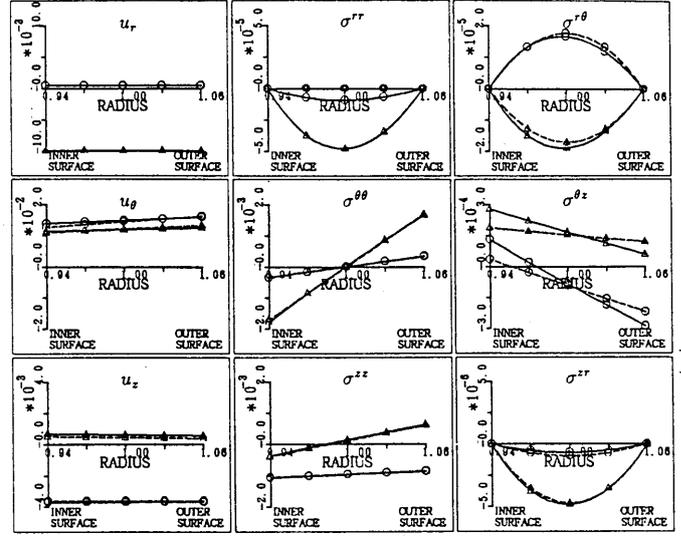
せん断変形を考慮した場合 (n_{A1b})

図 4.15: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較

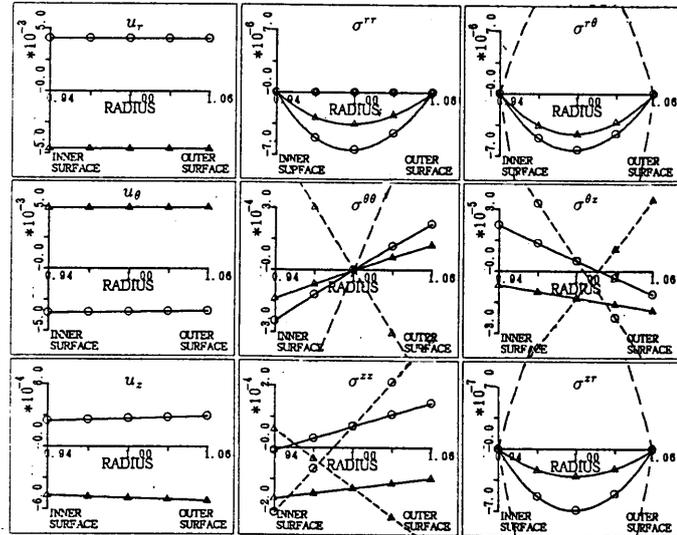
$\omega_0 = 1.0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 9$, \bigcirc : 実数部 \triangle : 虚数部, 実線: 三次元解析 破線: シェル理論



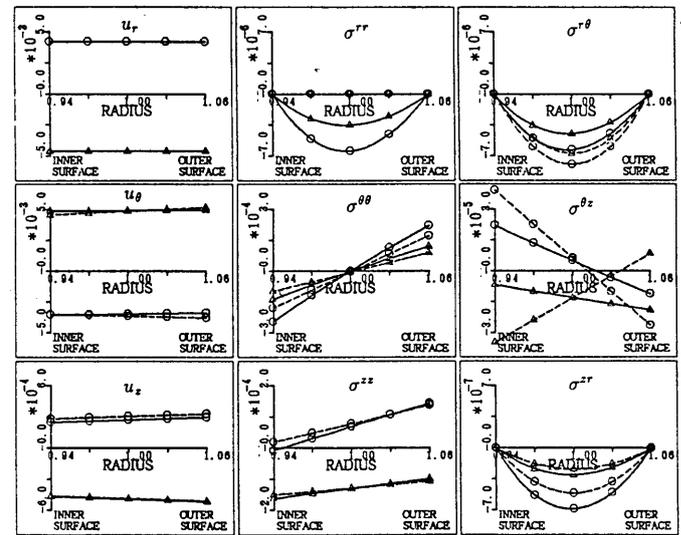
法線保持を仮定した場合 (n_{A1a})



せん断変形を考慮した場合 (n_{A1a})



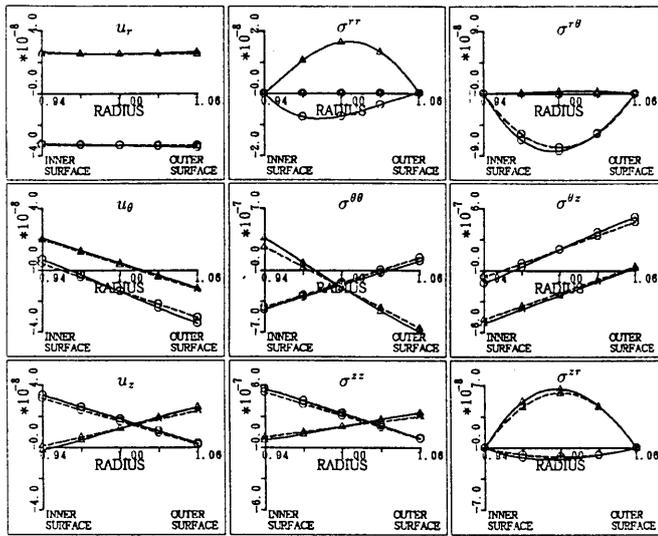
法線保持を仮定した場合 (n_{A1b})



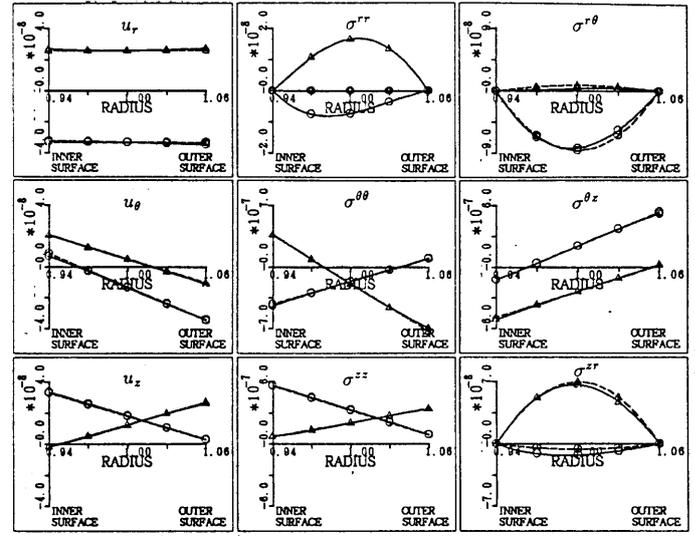
せん断変形を考慮した場合 (n_{A1b})

図 4.16: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較

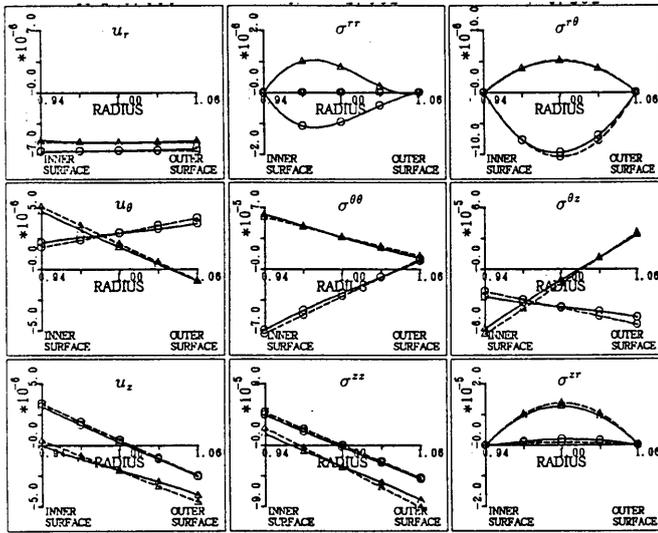
$\omega_0 = 0.1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 9$, \circ : 実数部 \triangle : 虚数部, 実線: 三次元解析 破線: シェル理論



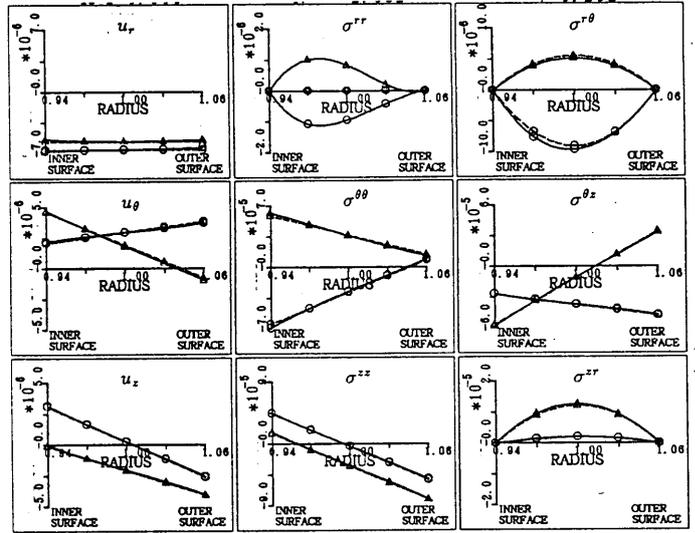
法線保持を仮定した場合 (n_{A1a})



せん断変形を考慮した場合 (n_{A1a})



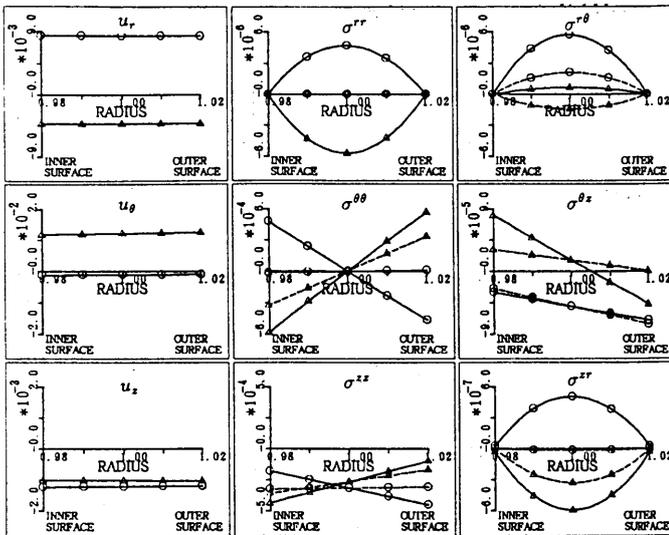
法線保持を仮定した場合 (n_{A1b})



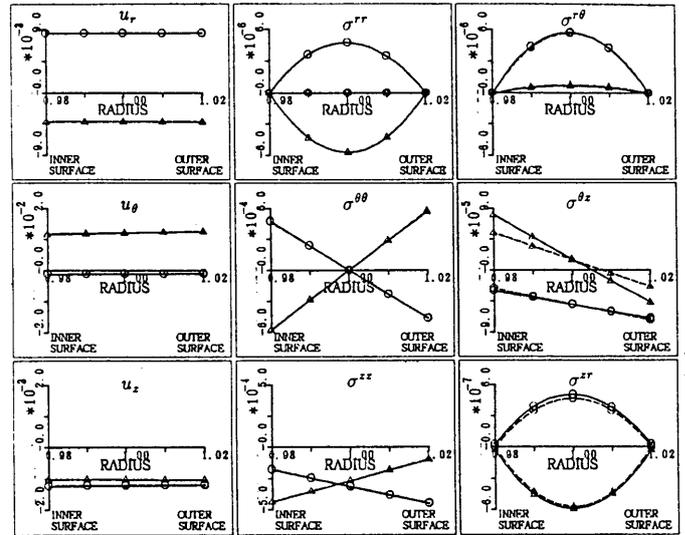
せん断変形を考慮した場合 (n_{A1b})

図 4.17: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較

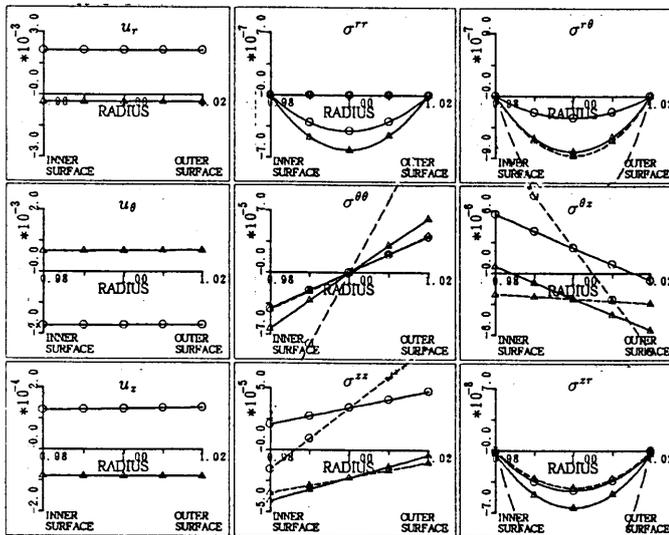
$\omega_0 = 8.0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 9$, \circ : 実数部 \triangle : 虚数部, 実線: 三次元解析 破線: シェル理論



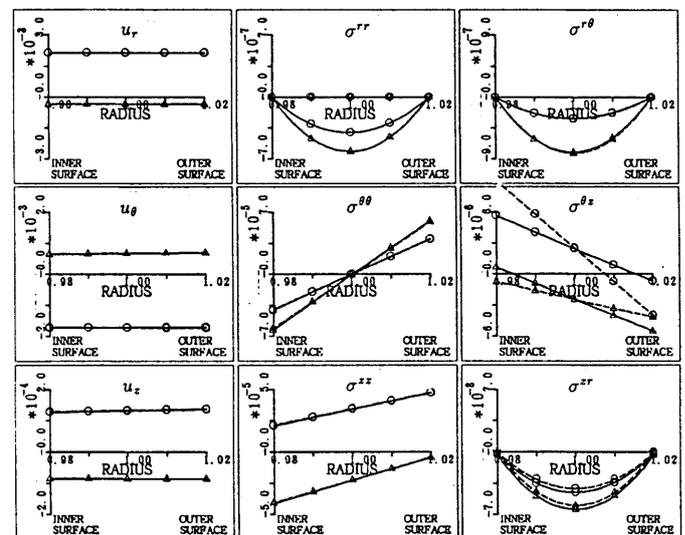
法線保持を仮定した場合 (n_{A1a})



せん断変形を考慮した場合 (n_{A1a})



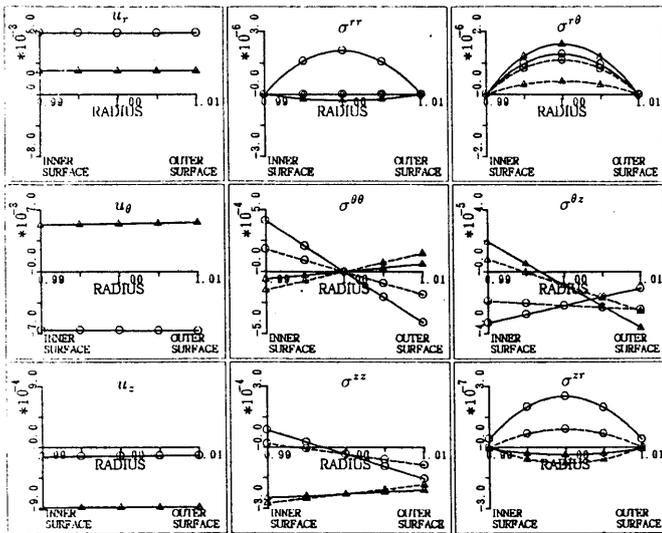
法線保持を仮定した場合 (n_{A1b})



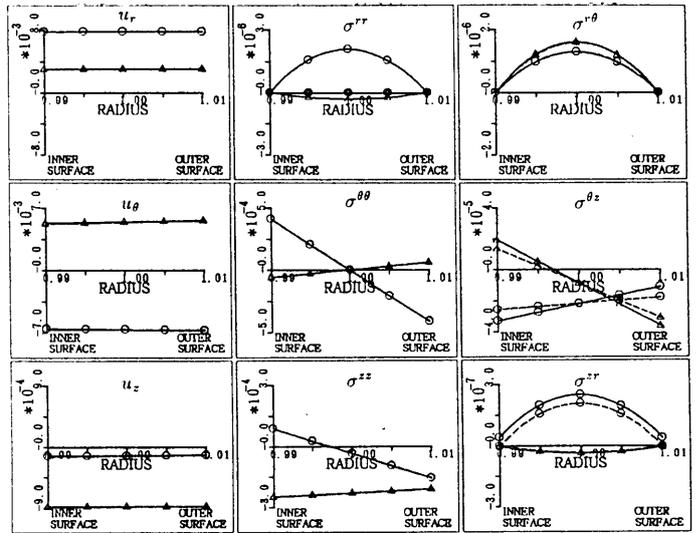
せん断変形を考慮した場合 (n_{A1b})

図 4.18: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較

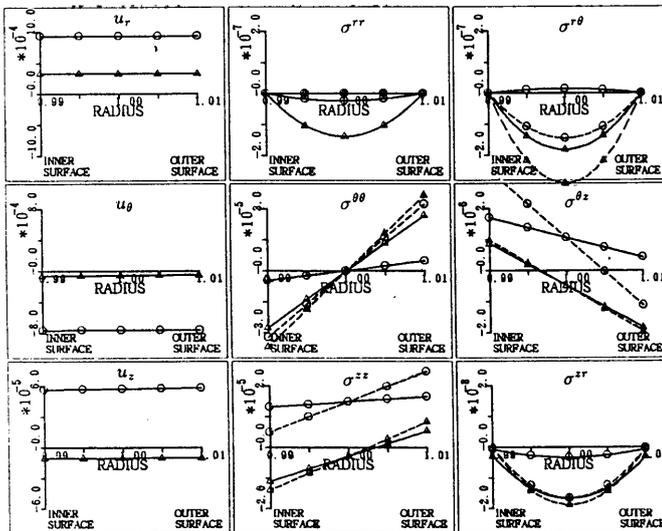
$\omega_0 = 0.1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 25$, ○:実数部 △:虚数部, 実線:三次元解析 破線:シェル理論



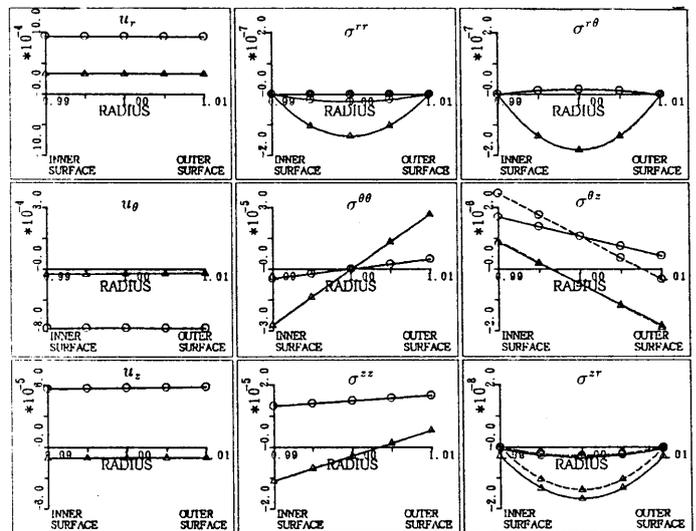
法線保持を仮定した場合 (n_{A1a})



せん断変形を考慮した場合 (n_{A1a})



法線保持を仮定した場合 (n_{A1b})



せん断変形を考慮した場合 (n_{A1b})

図 4.19: シェル理論と三次元解析解の断面内分布モードの比較

$\omega_0 = 0.1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 49$, \circ : 実数部 \triangle : 虚数部, 実線: 三次元解析 破線: シェル理論

4.3.4 一般解の構成

シェル理論を用いて三次元解析と同じ条件で解析を行うと次のような一般解が得られる(付録D)。ただし、面内せん断変形に関する変位は除いている。

・平面歪問題

周方向にべき級数で表される解(剛体回転、純曲げモーメントの作用する円弧)と周方向に三角関数で表される解(剛体変位、せん断力の作用する円弧)を解に持つ。

・曲げ応力解

$n = 0$ 近辺に8個の解を持つ。ただし、せん断変形を考慮したシェル理論を用いると n が純虚数(減衰の大きい)解が得られる。

軸方向フーリエ展開の一般解の種類とその未定定数の総数をまとめると表4.4~4.6のようになる。

$\omega_0 = 0$ の場合の三次元解析による特性値の数を考えれば、周方向にフーリエ展開した場合と同様な結果が得られていることが解る。

閉断面円筒シェルの材端における変位の境界条件は、一つの断面につき u_r (r 方向変位) u_θ (θ 方向変位) u_z (z 方向変位) $u_{\theta,r}$ (θ 一定断面の傾き) $u_{z,r}$ (z 一定断面の傾き) の5ヶあり、計10ヶある。(2次元問題の場合 $u_z, u_{z,r}$ を省いて6ヶ)しかし、法線保持を仮定したシェル理論では n_{C1} に相当する解がない。 n_{C1} の特性値は虚数部のみであり、 n_{A1a}, n_{A1b} に比べ減衰が大きいため、法線保持を仮定したシェル理論においては無視されると考えられる。従って、三次元解析解の未定定数の数において $m = 0$ とし、C種を無視すれば、シェル理論と三次元解析解が十分に対応していることが解る。

表4.4: 三次元解析解の未定定数の数 ($m \geq 0$)

軸方向展開次数 ω_0	周方向にべき級数 で表される解	周方向に三角関数 で表される解	周方向に指数関数 で表される解 A種	周方向に指数関数 で表される解 C種	計
0	2	4	4m	なし	6 + 4m
$\neq 0$	なし	なし	8 + 4m	2 + 2m	10 + 6m

表4.5: 法線保持を仮定したシェル理論の未定定数の総数

軸方向展開次数 ω_0	周方向にべき級数 で表される解	周方向に三角関数 で表される解	曲げ応力解 (指数関数型)		計
			A種	C種	
0	2	4	なし	なし	6
$\neq 0$	なし	なし	8	なし	8

表4.6: せん断変形を考慮したシェル理論の未定定数の総数

軸方向展開次数 ω_0	周方向にべき級数 で表される解	周方向に三角関数 で表される解	曲げ応力解 (指数関数型)		計
			A種	C種	
0	2	4	なし	なし	6
$\neq 0$	なし	なし	8	2	10

4.4 有限長の円筒シェルの解析

本節では、周方向にフーリエ展開された場合について有限長の閉断面円筒シェルの端部に強制変位を与えた場合の変位と応力についてシェル理論と三次元解析解とを比較する。

4.4.1 端部境界条件

シェル理論と三次元理論解析を比較するため、周方向にフーリエ展開された場合について解析を行う。以下にシェルの端部の境界条件を示す。

- 軸対称の場合： z 方向変位、 r 方向変位、 z -一定断面の z 方向への傾き (u_r, u_z, β_z) が両端にあるので、計 6 個の境界条件がある。
- 非軸対称の場合： z 方向変位、 r 方向変位、 θ 方向変位、 z -一定断面の z 方向への傾き、 z -一定断面の θ 方向への傾き ($u_r, u_\theta, u_z, \beta_z, \beta_\theta$) が両端にあるので、計 10 個の境界条件がある。

ただし、 $\beta_z = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \beta_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial r}$ とする。

4.4.2 用いる解

上記のような境界条件を与えられた場合、用いるべき解は以下のように考えられる。

- 軸対称 ($n = 0$) の場合：べき級数型 (未定定数 2 個)、指数型 ω_{A1} 解 (未定定数 4 個) の計 6 個の未定定数
- フーリエ展開次数 $n = 1$ の場合：べき級数型 (未定定数 4 個)、指数型 ω_{A1} 解 (未定定数 4 個)、指数型 ω_{C1} 解 (未定定数 2 個) の計 10 個の未定定数
- フーリエ展開次数 $n \geq 2$ の場合：指数型 ω_{A1} 解 (未定定数 4 個)、指数型 ω_B 解 (未定定数 4 個)、指数型 ω_{C1} 解 (未定定数 2 個) の計 10 個の未定定数

となる。

4.4.3 解析例

中立面半径 $r_0 = 1$ シェル長さ (L) が 2 である円筒シェルに対し、シェルの端部に周方向にフーリエ展開した強制変位を与え、その $z = 0$ における断面内の応力分布を見る。

以上に示した解を用いて、端部の中立面に強制変位を与えた場合を解析した。

式に示すと以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ \beta_z \\ \beta_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_A & \bar{u}_A & u_B & \bar{u}_B & u_C \\ v_A & \bar{v}_A & v_B & \bar{v}_B & v_C \\ w_A & \bar{w}_A & w_B & \bar{w}_B & w_C \\ \beta_{zA} & \bar{\beta}_{zA} & \beta_{zB} & \bar{\beta}_{zB} & \beta_{zC} \\ \beta_{\theta A} & \bar{\beta}_{\theta A} & \beta_{\theta B} & \bar{\beta}_{\theta B} & \beta_{\theta C} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_A \\ \bar{C}_A \\ C_B \\ \bar{C}_B \\ C_C \end{pmatrix}$$

- u_A : 中立面での A 種 (ω_{A1}) の固有変位
- β_z : 断面の z 方向への傾き
- β_θ : 断面の θ 方向への傾き
- C_A : A 種 (ω_{A1}) のモードに関する未定定数
- \bar{X} : X の共役複素数

ただし、法線保持の仮定に基づく理論においては、C種の解(ω_{C1})が得られていないので、 β_θ に関する拘束を行わないことにする。また、三次元解析解においては断面の傾きは明示されないため、内外面での各方向変位を断面厚さで除したものを採用している。

$$\beta_z = \frac{u_z(r=r_2) - u_z(r=r_1)}{t_0}, \quad \beta_\theta = \frac{u_\theta(r=r_2) - u_\theta(r=r_1)}{t_0}$$

境界条件として $u_r = 1, u_\theta = u_z = \beta_z = \beta_\theta = 0$ を与え、半径-厚さ比 $r_0/t_0 = 4$ の場合と $r_0/t_0 = 9$ の場合の変位と断面力の軸方向分布および $z = 0$ における変位、応力の断面内分布の比較を図 4.21 ~ 4.26 に示す。ただし、各変位と応力の正方向は、図 4.20にあるように採用する。また、○は三次元解析解による結果を表し、△は法線保持のシェル理論による結果、+はせん断変形を考慮したシェル理論による結果を表す。

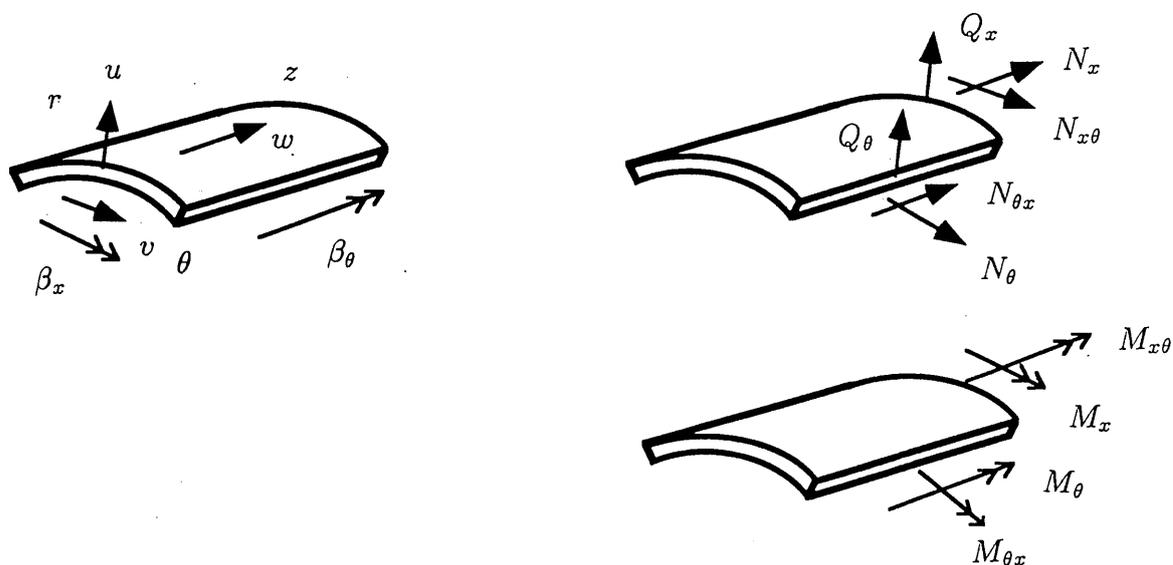
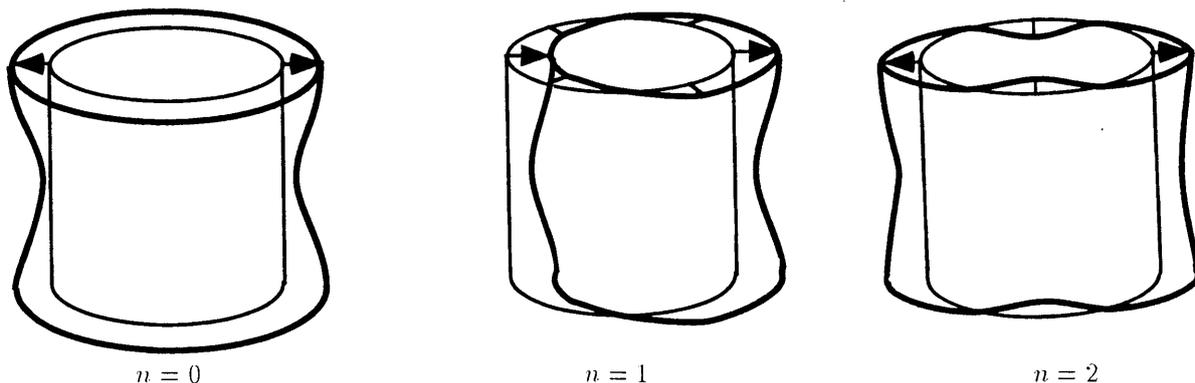


図 4.20: 変位と応力の正方向

ただし、今回の例題においては、特性値の誤差は、せん断変形を考慮した場合、5% 以下である。また、法線保持を仮定したシェル理論では $n = 2$ の場合で誤差が非常に大きいが $n = 0, 1$ の場合には誤差は 10% 以下である。

なお、 $n = 0, 1, 2$ の場合の円筒の変形は大体次のようになる。

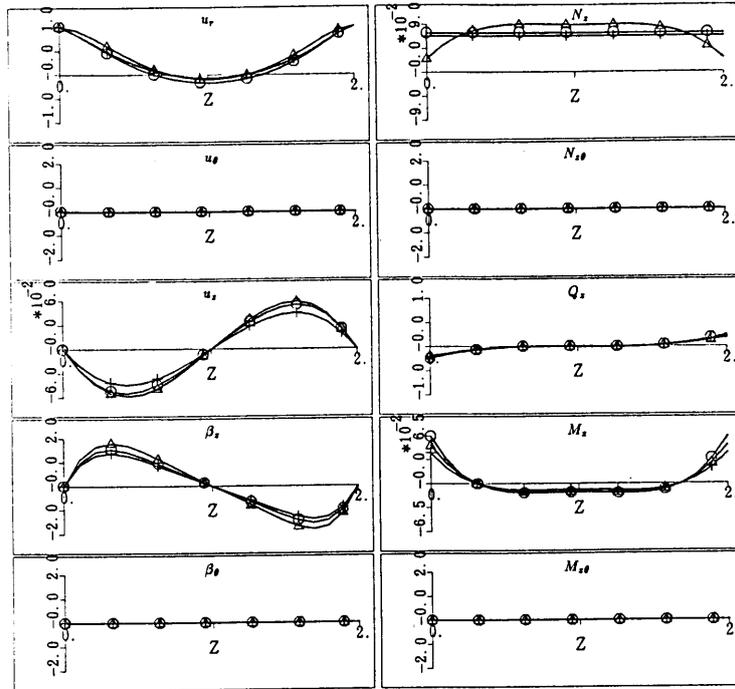


円筒シェルの変形

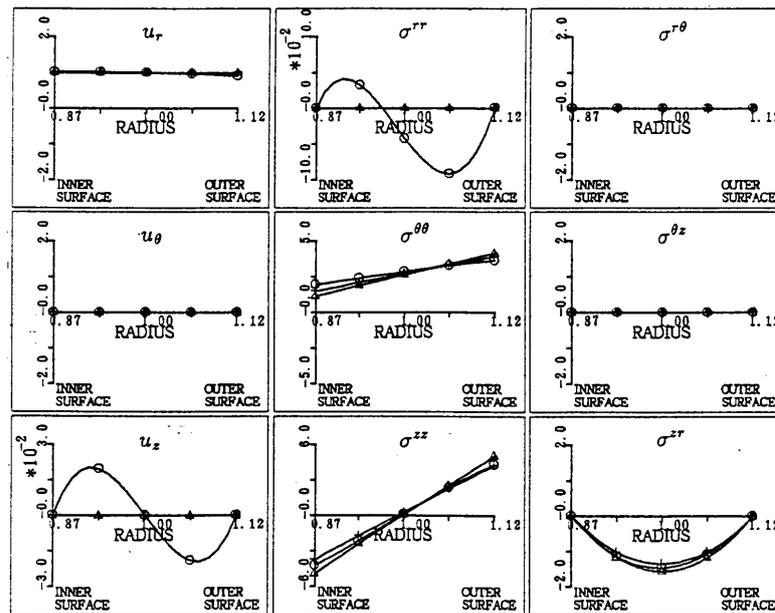
図 4.22 を見ると、変位は法線保持の仮定の結果は三次元解析と酷似している。

また、断面内の応力分布は、周方向フーリエ展開次数 $n = 0$ の場合は、 $r_0/t_0 = 4$ の場合にも、法線保持のシェル理論で十分な解が得られていることが解る。しかし、 $n = 1$ 、 $n = 2$ の場合にはせん断変形を考慮したシェル理論を用いる必要がある。

結果として、今回取り上げた例題のような特性値の誤差が 10% 以下である場合には、使用可能と判断される。また、法線保持の仮定を用いたシェル理論では $\sigma_{r\theta}$ の応力分布を除いて、使用可能と判断される。



変位、断面力の軸方向分布

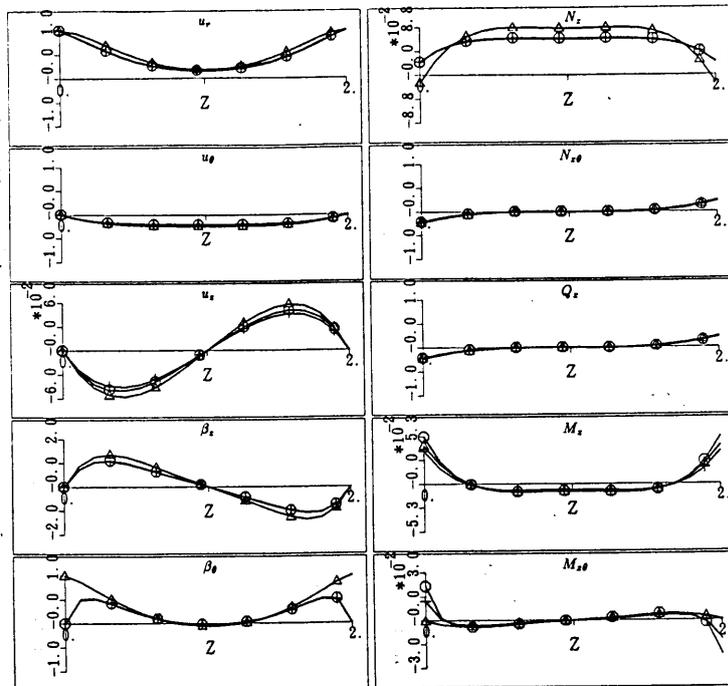


シェル断面内の変位、応力分布 ($z = 0$)

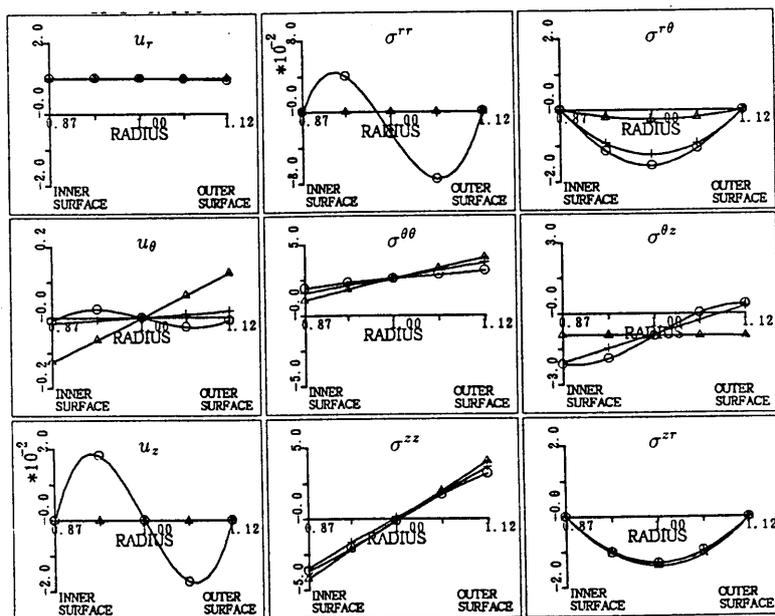
図 4.21: 強制変位による変位、応力分布

$$(n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 4)$$

○ : 三次元解析解 , △ : 法線保持のシェル理論 , + : せん断変形を考慮したシェル理論



変位、断面力の軸方向分布

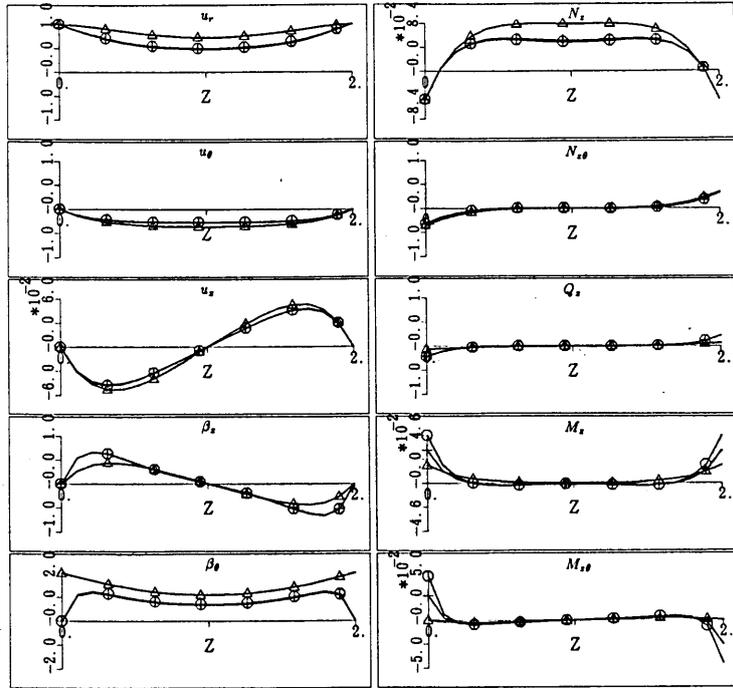


シェル断面内の変位、応力分布 ($\epsilon = 0$)

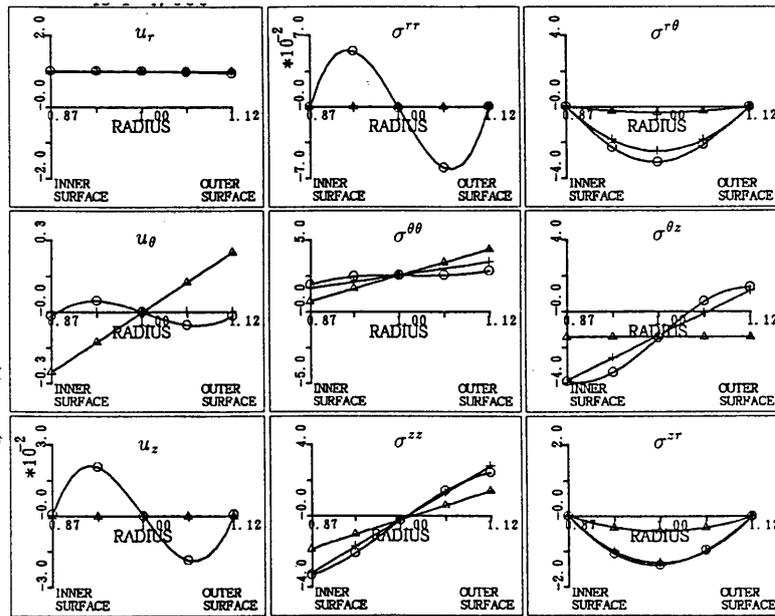
図 4.22: 強制変位による変位、応力分布

$$(n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 4)$$

○ : 三次元解析解 , △ : 法線保持のシェル理論 , + : せん断変形を考慮したシェル理論



変位、断面力の軸方向分布

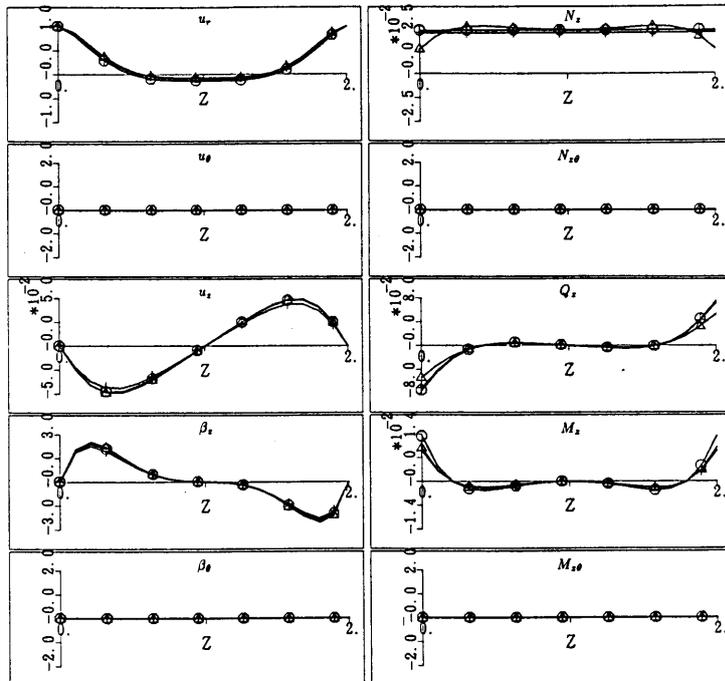


シェル断面内の変位、応力分布 ($z = 0$)

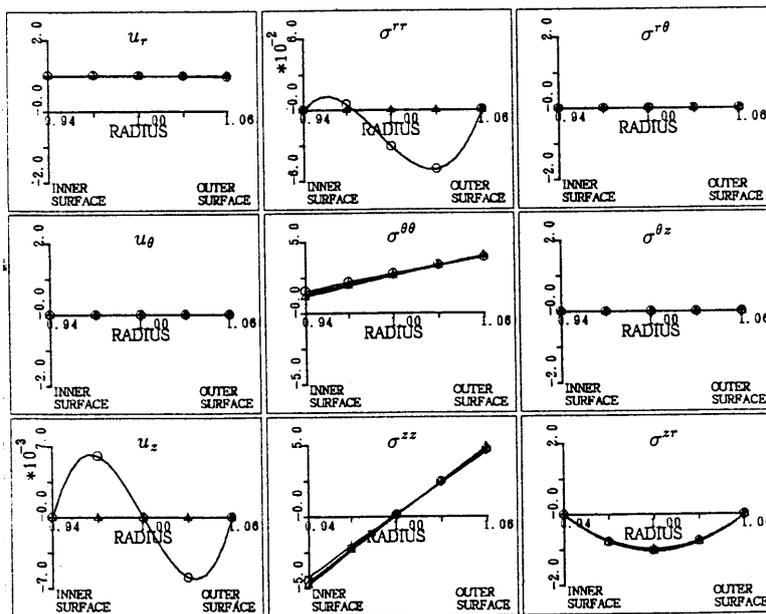
図 4.23: 強制変位による変位、応力分布

$$(n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 4)$$

○ : 三次元解析解 , △ : 法線保持のシェル理論 , + : せん断変形を考慮したシェル理論



変位、断面力の軸方向分布

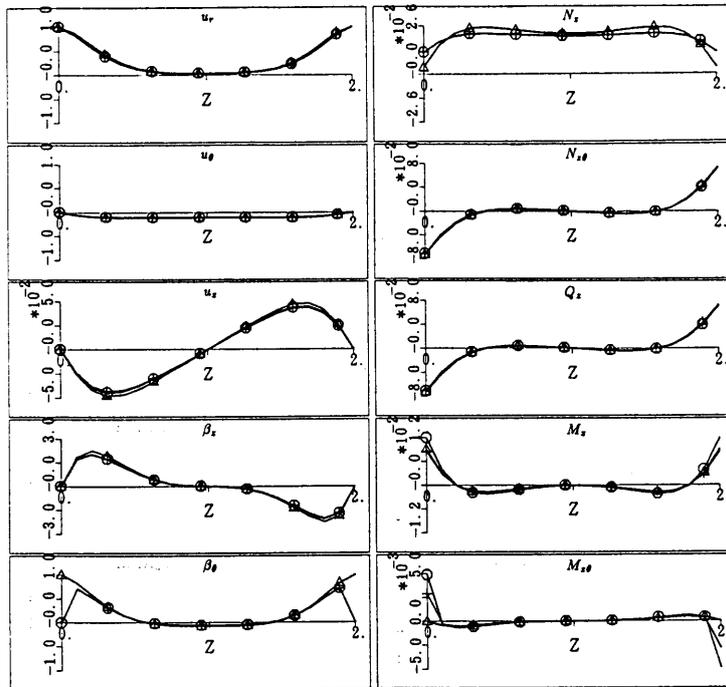


シェル断面内の変位、応力分布 ($z = 0$)

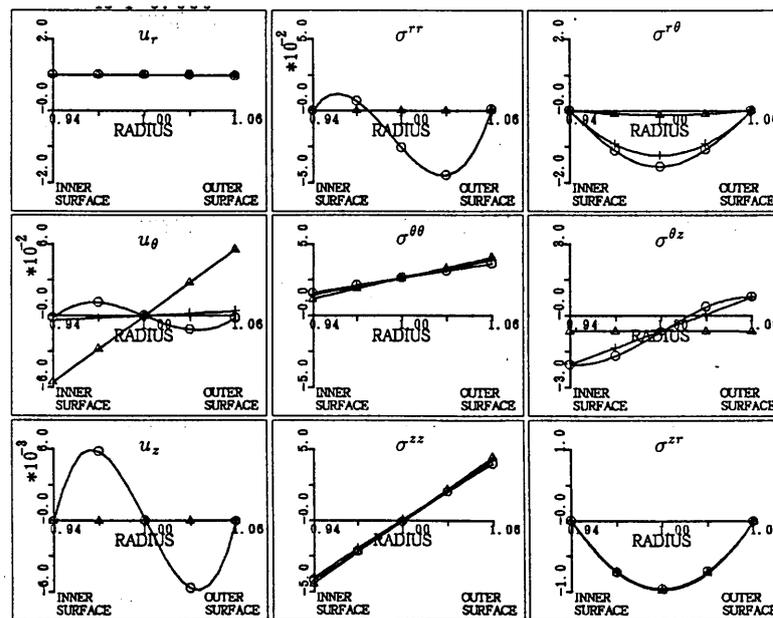
図 4.24: 強制変位による変位、応力分布

$$(n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 9)$$

○ : 三次元解析解 , △ : 法線保持のシェル理論 , + : せん断変形を考慮したシェル理論



変位、断面力の軸方向分布

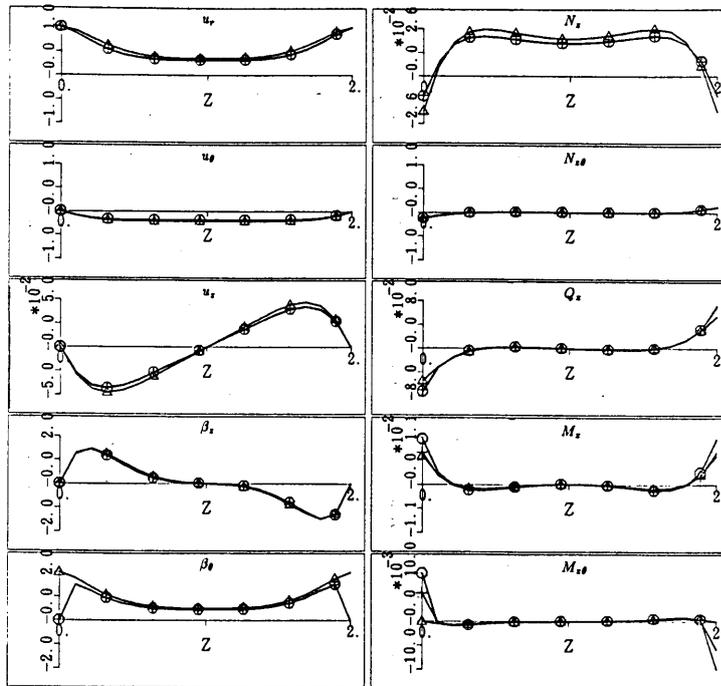


シェル断面内の変位、応力分布 ($z = 0$)

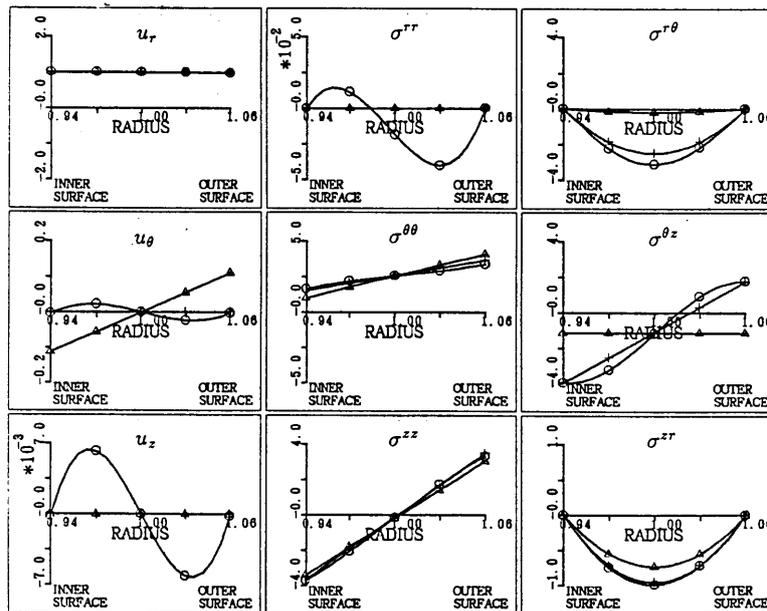
図 4.25: 強制変位による変位、応力分布

$$(n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 9)$$

○ : 三次元解析解 , △ : 法線保持のシェル理論 , + : せん断変形を考慮したシェル理論



変位、断面力の軸方向分布



シェル断面内の変位、応力分布 ($z = 0$)

図 4.26: 強制変位による変位、応力分布

$$(n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 9)$$

○: 三次元解析解, △: 法線保持のシェル理論, +: せん断変形を考慮したシェル理論

4.5 本章のまとめ

本章においては、シェル理論で得られる一般解を三次元厳正解と比較した。

周方向にフーリエ展開された場合の一般解の場合、軸方向にべき級数で表される解は三次元解析解とシェル理論解では大差はない。軸方向に指数関数で表される解は特性値とその特性値に関するシェル断面内の変位・応力の分布モードから考えて、せん断変形を考慮したシェル理論では半径と厚さの比 r_0/t_0 が 10 程度の厚肉シェルまでは特性方程式を数値解析すれば十分であり、法線保持を仮定したシェル理論においては、半径と厚さの比 r_0/t_0 が 30 程度の厚肉シェルまでは Dischinger の特性方程式の厳密解で得られるシェル理論の曲げ応力解で十分に解析可能である。なお、法線保持を仮定したシェル理論では、減衰のみを発生する曲げ応力解 (C 種) は計算できないので注意を要する。また、有限長の円筒シェルの端部に強制変位を作用させた場合についてシェル理論と三次元解析解を比較した。その結果、今回取り上げた例題のような特性値の誤差が 10% 以下の場合にはせん断変形を考慮したシェル理論では使用可能と判断される。また、法線保持の仮定を用いたシェル理論ではせん断力 $\sigma^{r\theta}$, $\sigma^{\theta z}$, σ^{rz} の応力分布を除いて、使用可能と判断される。しかし、シェル理論の実構造物への適用範囲を決定するには今後の更なる解析が必要である。

軸方向にフーリエ展開された場合の一般解の場合、面内せん断変形、剛体変位、剛体回転はシェル理論と三次元解析解は一致する。しかし、純曲げが作用する円弧、せん断力が作用する円弧では、変位と応力の比が理論解析と近似理論では変わるので注意が必要である。周方向に指数関数で表される解は特性値とその特性値に関するシェル断面内の変位・応力の分布モードから考えて、軸方向フーリエ展開次数 ω_0 が 1 以上の場合は特性値の精度のあまり関係なく特性モードの分布形状は良く、 r_0/t_0 が 10 程度の厚肉シェルまでは特性方程式を数値解析すれば十分である。しかし、 $\omega_0 = 0.1$ の場合では特性値の精度が良くても特性モードの分布形状が良いとは限らないので注意が必要である。これは、 ω_0 が 0 に近づくと軸方向の変位分布が小さい二次元的な変形になり、純曲げが作用する円弧やせん断力が作用する円弧に近づくためと考えられる。つまり、 ω_0 が 0 に近い場合に法線保持を仮定したシェル理論を用いるべきではないと結論される。またこの場合、半径と厚さの比 $r_0/t_0 < 25$ のシェルでせん断変形を考慮したシェル理論を適用するのは危険と考えられる。

第 5 章

有限長の円筒シェルの三次元理論解

本章では、3章で得られたシェル理論では得られない高次の一般解を用いた三次元強制変位解析を行う。

5.1 はじめに

3章で行った三次元解析より、特性値は複数次存在し、その組み合わせによりシェル端部の境界条件が満足されることが推測される。

例えば、第4章で示したように、周方向にフーリエ展開された場合の特性値の内、薄膜の仮定を用いたシェル理論でも得られる特性値 $\omega_{A1}, \omega_B, \omega_{C1}$ で示される解を用いればシェル理論と同じような解を得ることができる。そこでこれらの解に加え、 ω_{A2}, ω_{C2} で示される解を解析で用いれば断面内に変位や応力の分布に制約を加えた解析が可能と考えられる。

そこで本章では、周方向にフーリエ展開された場合について、高次の解を用いた三次元解析を選点法とガラーキン法により行う。また、有限要素法による解析結果と比較し解の妥当性を検証する。

5.2 三次元理論解を用いた解析方法

5.2.1 解析レベルの設定

三次元解析を行う上で、使用する一般解により解析レベルを次のように決める。この解析レベルは解析レベルが上がるにつれ、変位及び応力の断面内分布モードが複雑な境界条件に対応できる。なお、膜応力解とは、変位が軸方向にべき級数で表される解である。

周方向フーリエ展開次数	解析レベル	使用する解	未定定数の総数
$n = 0$	I	膜応力解、 ω_{A1}	6
	II	膜応力解、 ω_{A1}, ω_{A2}	10
	III	膜応力解、 $\omega_{A1}, \omega_{A2}, \omega_{A3}$	14
$n = 1$	I	膜応力解、 ω_{A1}, ω_{C1}	10
	II	膜応力解、 $\omega_{A1}, \omega_{A2}, \omega_{C1}, \omega_{C2}$	16
	III	膜応力解、 $\omega_{A1}, \omega_{A2}, \omega_{A3}, \omega_{C1}, \omega_{C2}, \omega_{C3}$	22
$n \geq 2$	I	$\omega_B, \omega_{A1}, \omega_{C1}$	10
	II	$\omega_B, \omega_{A1}, \omega_{A2}, \omega_{C1}, \omega_{C2}$	16
	III	$\omega_B, \omega_{A1}, \omega_{A2}, \omega_{A3}, \omega_{C1}, \omega_{C2}, \omega_{C3}$	22

5.2.2 選点法による解析

本小節においては、選点法を用いて三次元境界値問題を解析する。選点法を用いる場合には、端部の境界条件の総数と未定定数の総数を一致させなければならない。そこで、前節に示される解レベルに対して、 r_i をシェル端部断面内の任意点としてシェル端部における境界条件の種類を以下のように決める。

周方向フーリエ展開次数	解析レベル	$z = 0$ 及び $z = L$ における境界条件	境界条件の総数
$n = 0$	I	$\frac{\partial u_z}{\partial r}, u_r(r_i), u_z(r_i) (i = 1)$	6
	II	$\frac{\partial u_z}{\partial r}, u_r(r_i), u_z(r_i) (i = 1, 2)$	10
	III	$\frac{\partial u_z}{\partial r}, u_r(r_i), u_z(r_i) (i = 1, 2, 3)$	14
$n \neq 0$	I	$\frac{\partial u_z}{\partial r}, \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, u_r(r_i), u_\theta(r_i), u_z(r_i) (i = 1)$	10
	II	$\frac{\partial u_z}{\partial r}, \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, u_r(r_i), u_\theta(r_i), u_z(r_i) (i = 1, 2)$	16
	III	$\frac{\partial u_z}{\partial r}, \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, u_r(r_i), u_\theta(r_i), u_z(r_i) (i = 1, 2, 3)$	22

上記の境界条件の内、 $\frac{\partial u_z}{\partial r}, \frac{\partial u_\theta}{\partial r}$ はシェル断面の平均回転角に相当する値であり、本論では次の式で定義している。

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{u_z(r_2) - u_z(r_1)}{t_0}, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{u_\theta(r_2) - u_\theta(r_1)}{t_0} \quad (5.1)$$

解析例として、先ず $n = 0, r_0 = 1, r_0/t_0 = 5.0$, シェル長さ (L) が 2 である円筒シェルに対して、軸方向強制変位を円筒の両端において $u_r = 1$ を与えた場合を取り上げる。

解析の条件として、円筒シェルの端部の変位を $z = 0$ および $z = 2$ の断面で次のように与える。

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0, \quad u_r = 1, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = 0$$

また、解析点は次ように採る。

解析レベル	解析点 (Control Point)
I	r_0
II	$r_0 \pm 0.57735 \frac{t_0}{2}$
III	$r_0, r_0 \pm 0.77460 \frac{t_0}{2}$

$z = 0$ における解析結果を図 5.1~5.5 に示す。

これらの図より、解析点 (Control Point) の総数によって断面内の応力分布が大きく変化する事がわかる。特に解析レベル II の場合に大きな違いがある。解析レベル II の場合について適切な解析点を考察するため、先に示した以外の解析点を与えて解析を行った。解析結果は図 5.4, 5.5 の様になった。これらと先の解析結果より、中立面において変位を指定するべきであることがわかる。また、解析点の位置が解析結果に大きな影響を持つことが解る。

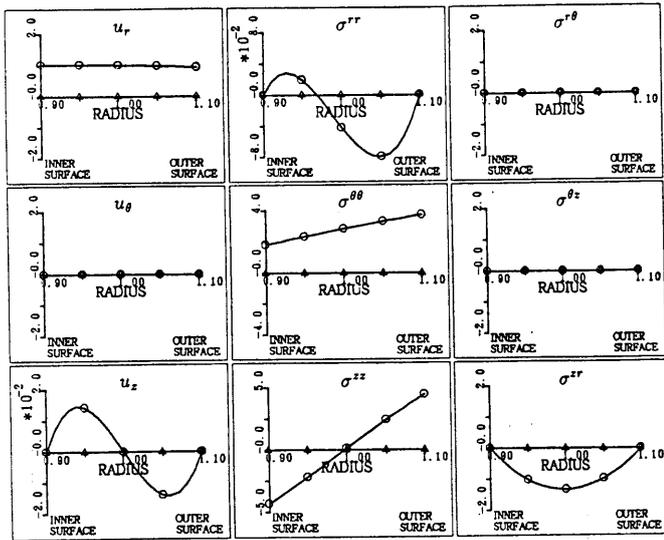


図 5.1: 解析レベル I ($n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$)

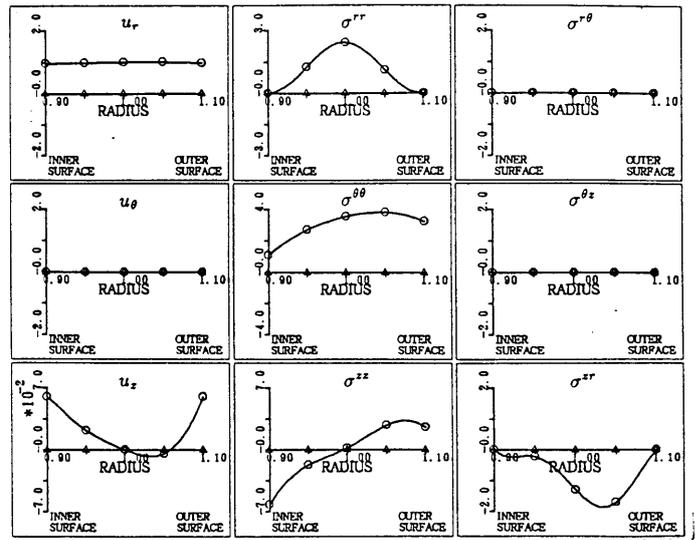


図 5.4: 解析レベル II ($n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$)

$$\text{解析点 } r = r_0, r_0 + 0.57735 \frac{t_0}{2}$$

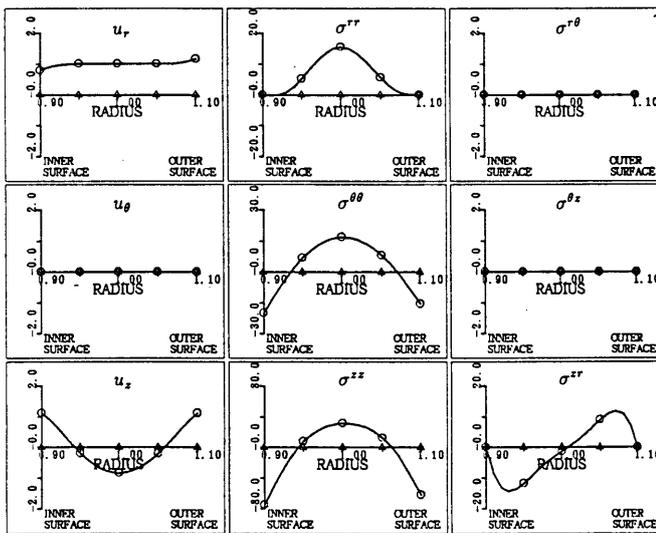


図 5.2: 解析レベル II ($n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$)

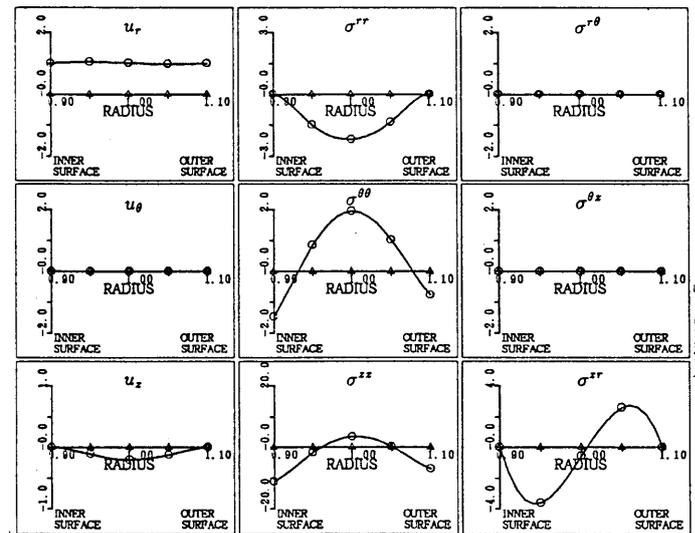


図 5.5: 解析レベル II ($n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$)

$$\text{解析点 } r = r_0 \pm \frac{t_0}{2}$$

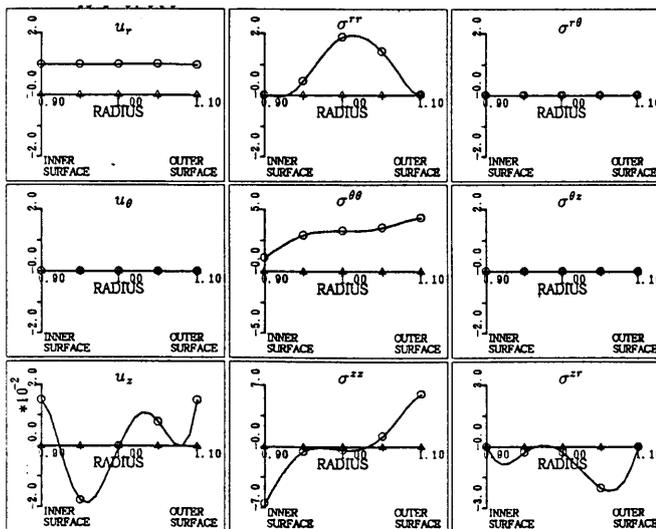
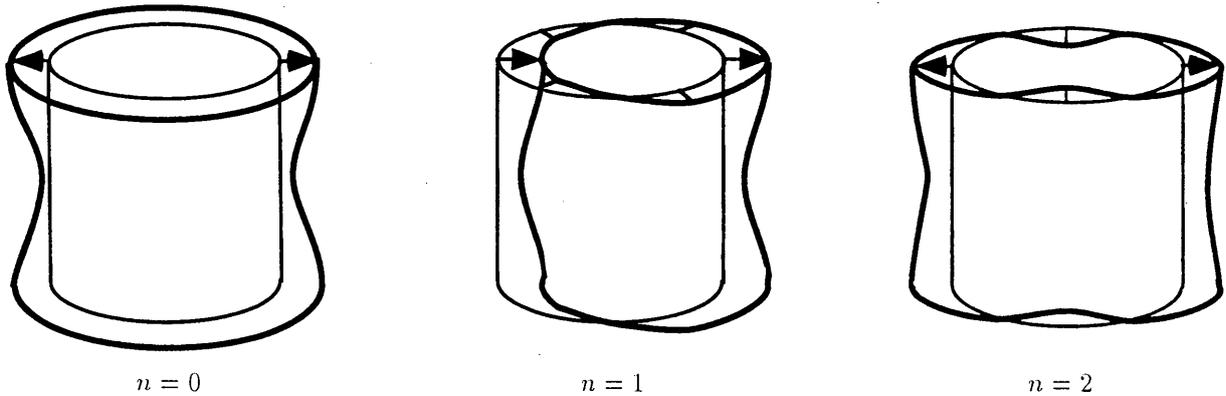


図 5.3: 解析レベル III ($n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$)

$n = 0$ の解析レベル II の場合における解析点の結果より、解析点を次のように改めた。

解析レベル	解析点 (Control Point)
I	r_0
II	$r_0, r_0 + 0.57735 \frac{t_0}{2}$
III	$r_0, r_0 \pm 0.77460 \frac{t_0}{2}$

解析モデルと解析条件は先程と同じものを用い、 $n = 0, 1, 2$ の場合を解析する。 $n = 0, 1, 2$ の場合の円筒の変形は大体次のようになる。

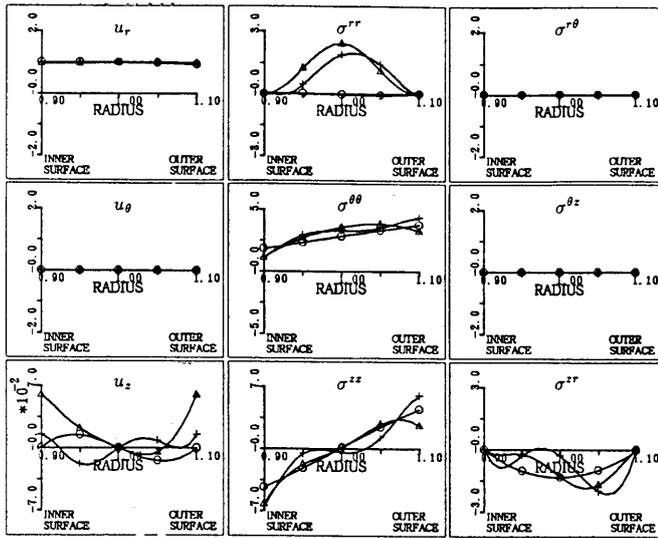


円筒シェルの変形

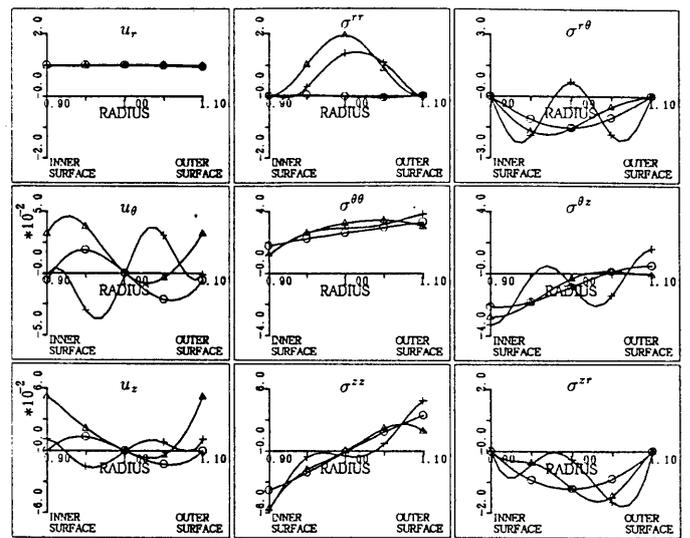
以降に、レベル I ~ III の解析比較結果を示す。図中において、○ は解析レベル I、△ は解析レベル II、+ は解析レベル III の解析結果を示す。

この解析例では、 ω_{A3} のモードが 16% に減衰する $z = 0.05$ において、解析レベル III と解析レベル I, II とでは、せん断応力 $\sigma^{r\theta}, \sigma^{\theta z}, \sigma^{rz}$ に差が生じている。

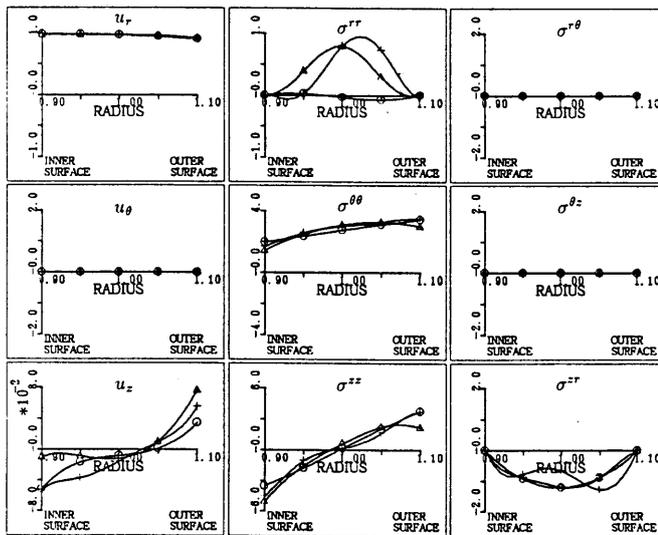
また、レベル I の解析では微小であった σ^{rr} がレベル II、レベル III においては有意な値を持つことが解る。



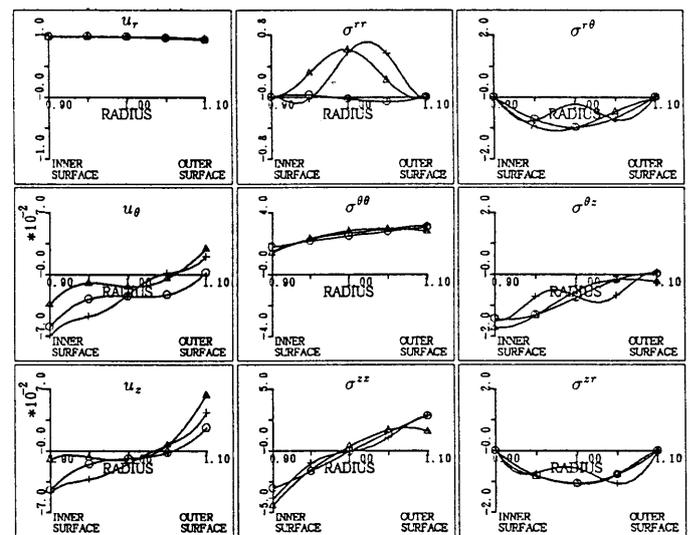
$z=0.0$



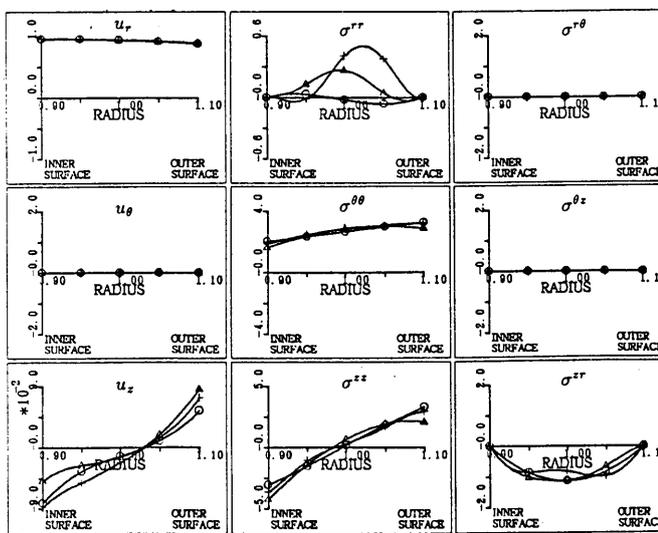
$z=0.0$



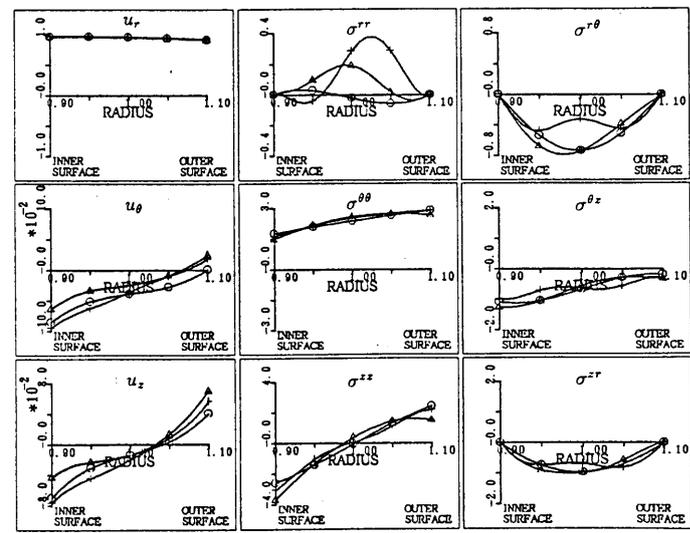
$z=0.03$



$z=0.03$



$z=0.05$



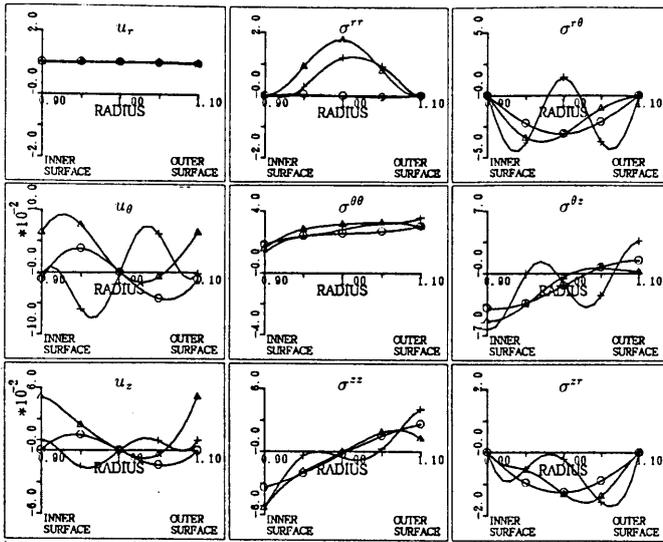
$z=0.05$

図 5.6: 強制変位解析 ($n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$)

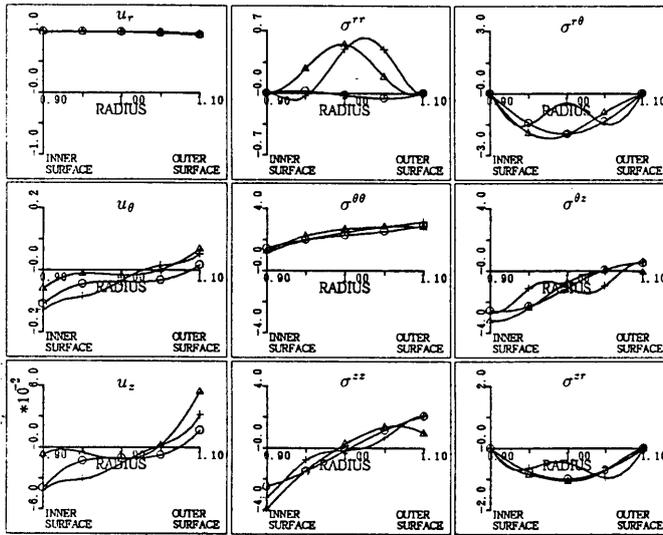
○ : 解析レベル I △ : 解析レベル II
+ : 解析レベル III

図 5.7: 強制変位解析 ($n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$)

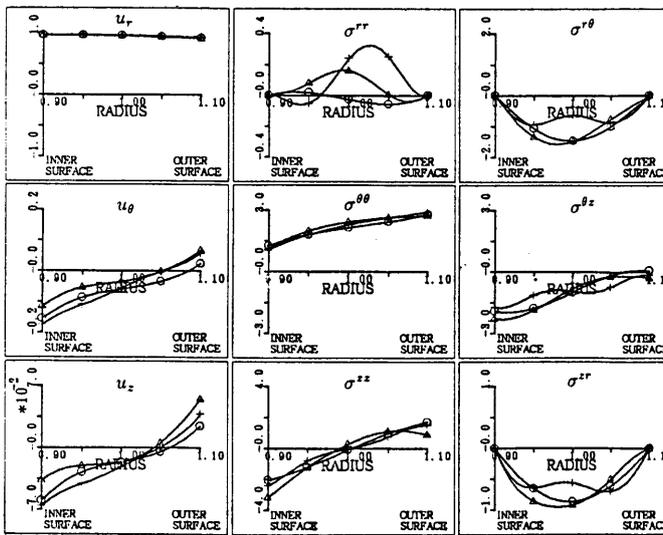
○ : 解析レベル I △ : 解析レベル II
+ : 解析レベル III



$z=0.0$



$z=0.03$



$z=0.05$

図 5.8: 強制変位解析 ($n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$)

○ : 解析レベル I △ : 解析レベル II

+ : 解析レベル III

5.2.3 ガラーキン法による解析

本小節においては、ガラーキン法を用いて三次元境界値問題を解析する。そこでシェル的一般解の特性モードをそれぞれの未定定数に対する分布関数とみなし、次の式でそれぞれの関数の重み(未定定数)を計算する。

$$\delta C_i : \int_{r_1}^{r_2} \left[u_r^i(r) \left\{ \sum_{j=1}^n C_j u_r^j(r) - u_{or}(r) \right\} + u_\theta^i(r) \left\{ \sum_{j=1}^n C_j u_\theta^j(r) - u_{o\theta}(r) \right\} \dots \right. \\ \left. + \sigma^{rri}(r) \left\{ \sum_{j=1}^n C_j \sigma^{rrij}(r) - \sigma_o^{rr}(r) \right\} \dots \right] r dr = 0 \quad (5.2)$$

$u_{or}(r), \sigma_o^{rr}(r) : u_r, \sigma^{rr}$ などの指定変位、応力断面内分布関数

$u_r^j, \sigma^{rrij} : u_r, \sigma^{rr}$ などの未定定数 C_j に対する変位、応力断面内分布関数

解析例として $r_0 = 1, r_0/t_0 = 5.0$, シェル長さ(L)が2である円筒シェルに対して、円筒シェルの端部の変位を次のように $z = 0$ および $z = 2$ の断面内で一定値とする境界条件を与える。

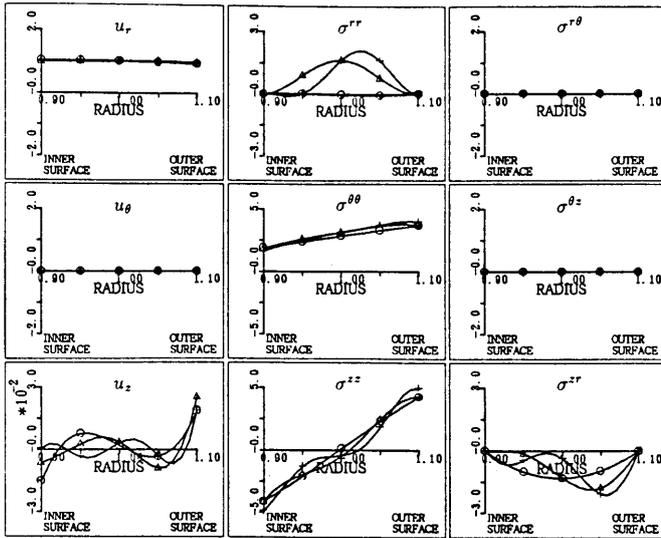
$$u_r = 1, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = 0$$

なお、解析レベルは5.2.1節において、定義したものである。

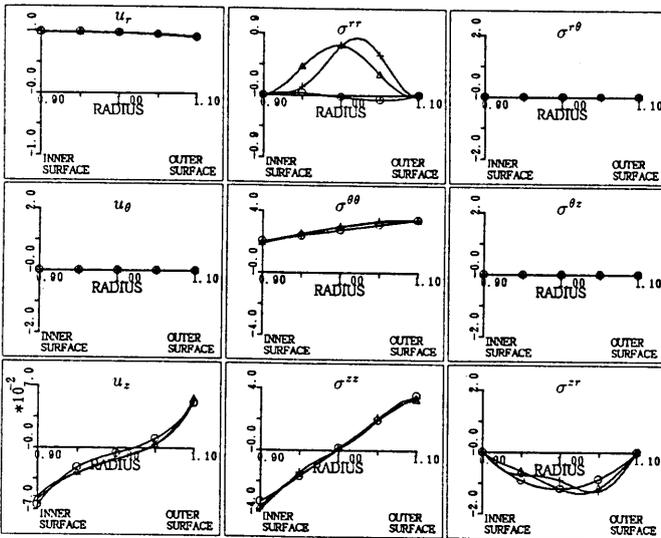
$z = 0$ における解析結果を図5.9以降に示す。なお、図中において、○は解析レベルI、△は解析レベルII、+は解析レベルIIIの解析結果を示す。

この解析例では、 ω_{A3} のモードが16%に減衰する $z = 0.05$ において、解析レベルI,II,IIIの間で、 σ^{rr} を除いた応力分布に差が生じていない。

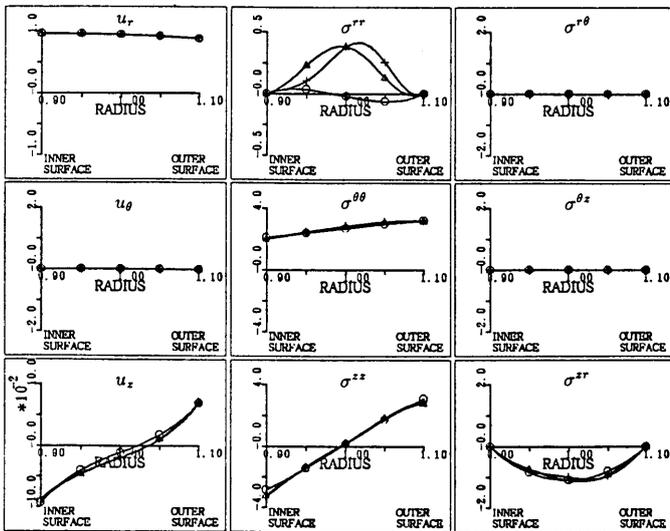
また、レベルIの解析では微小であった σ^{rr} がレベルII、レベルIIIにおいては有意な値を持つことが解る。これはシェルの構成材料の塑性化が従来考えられた場合より低い荷重で発生することを意味すると考えられる。



$z=0.0$



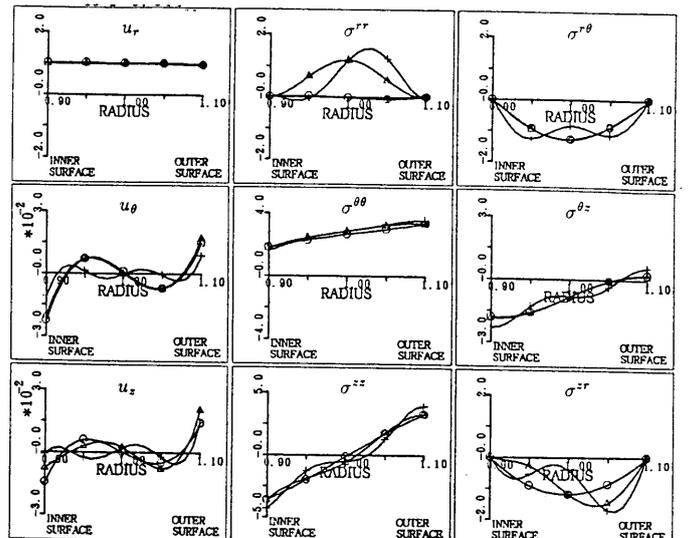
$z=0.03$



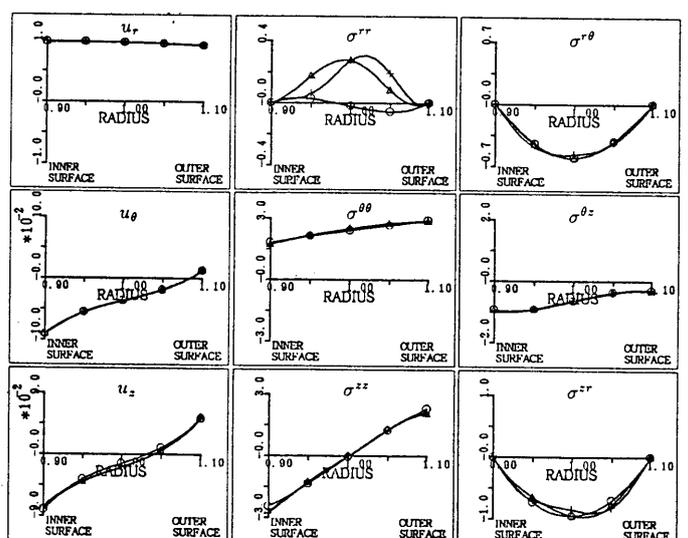
$z=0.05$

図 5.9: 強制変位解析 ($n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$)

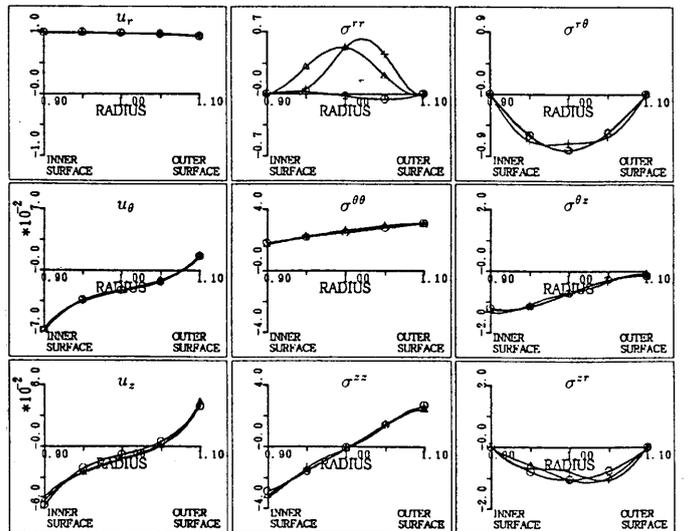
○ : 解析レベル I △ : 解析レベル II
+ : 解析レベル III



$z=0.0$



$z=0.03$



$z=0.05$

図 5.10: 強制変位解析 ($n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$)

○ : 解析レベル I △ : 解析レベル II
+ : 解析レベル III

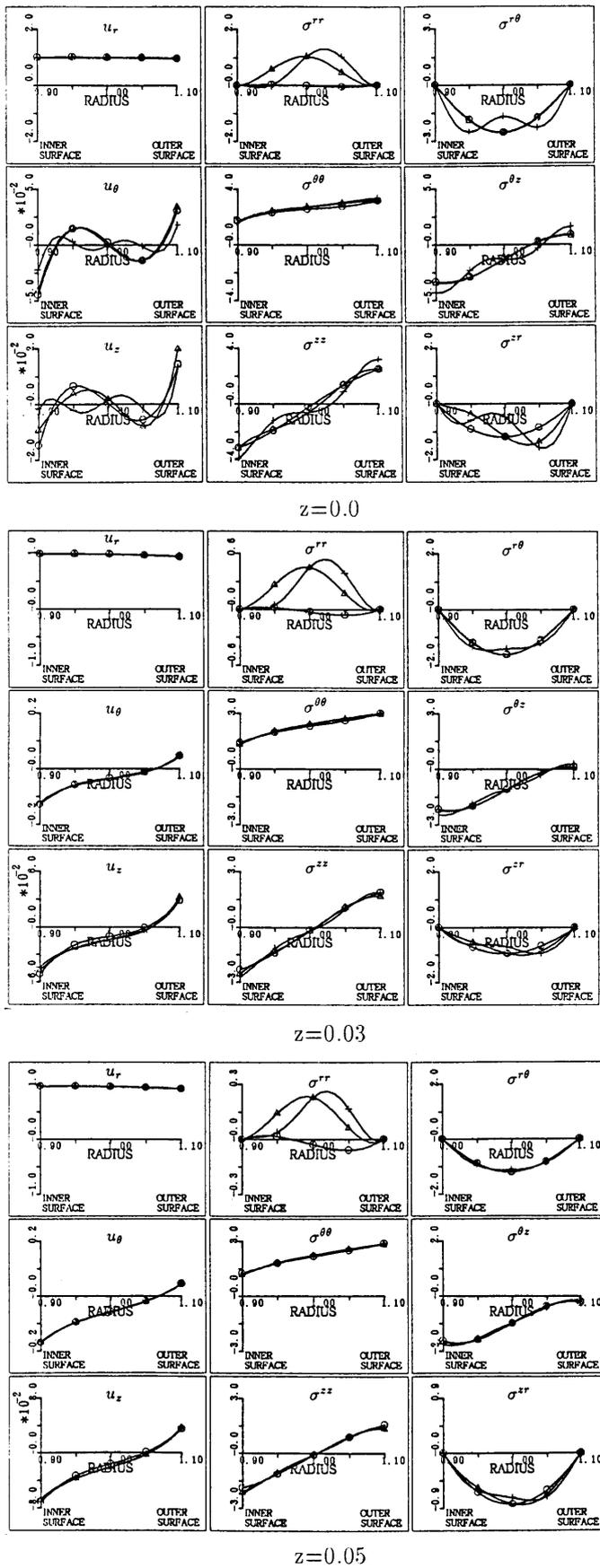


図 5.11: 強制変位解析 ($n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$)

○ : 解析レベル I △ : 解析レベル II

+ : 解析レベル III

5.2.4 両解法の比較

選点法による解析とガラーキン法による解析を比較する。

両解法の解析結果は図 5.6 と図 5.9、図 5.7 と図 5.10、図 5.8 と図 5.11、が対応する。

フーリエ展開次数 $n = 1, 2$ の場合、せん断応力 $\sigma^{r\theta}, \sigma^{\theta z}$ の分布が両解法で違いを生じている。この違いはその応力の分布モードから、 $\omega_{1,3}$ の特性モードの励起量の違いと推測され、選点法においては、解析点での変位の拘束が解全体に強い影響を及ぼしていることが解る。

なお、計算時間としては、ガラーキン法による解法は断面内積分を行っているので不利である。しかし、選点法では解析点 (Control Point) の選択によって解析結果が変化するので、解析の安定性の観点からはガラーキン法が優れていると考えられる。両解法の特徴は以下の表にまとめられる。

	利点	欠点
選点法	境界条件の設定を解析点で与えればよいので直感に訴えやすく、解析を行いやすい。	解析結果が解析点の選び方に依存する。
ガラーキン法	解析結果が選点法に比べ安定している。	断面内で積分を行うので計算時間が多い。境界条件を境界断面内分布関数として与えなければならない。

5.3 有限要素法で得られる解との比較

本節においては、前節において得られた三次元解析結果と三次元有限要素法と比較する。

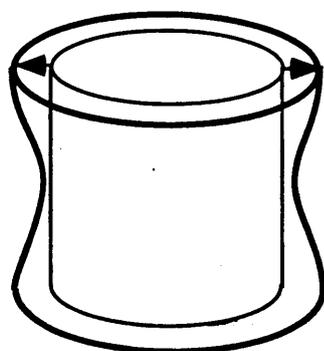
5.3.1 解析対象と解析条件

解析モデルは、前節と同じ $r_0 = 1, r_0/t_0 = 5.0$. シェル長さ (L) が 2 である円筒シェルに対して、軸方向強制変位を円筒の両端において $u_r = 1$ を与えた場合を取り上げる。

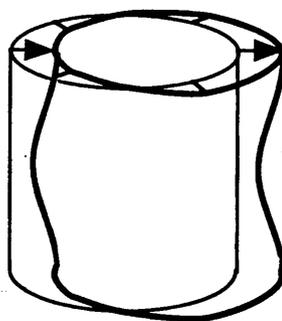
解析の条件として、円筒シェルの端部の変位を次のように $z = 0$ および $z = 2$ の断面内で一定値とする。

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0, \quad u_r = 1, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = 0$$

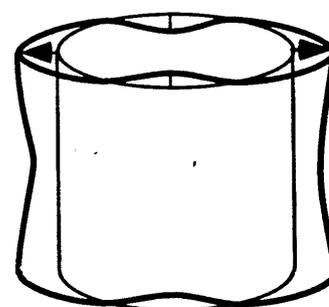
また、フーリエ展開次数を $n = 0, 1, 2$ の場合を解析する。



$n = 0$



$n = 1$



$n = 2$

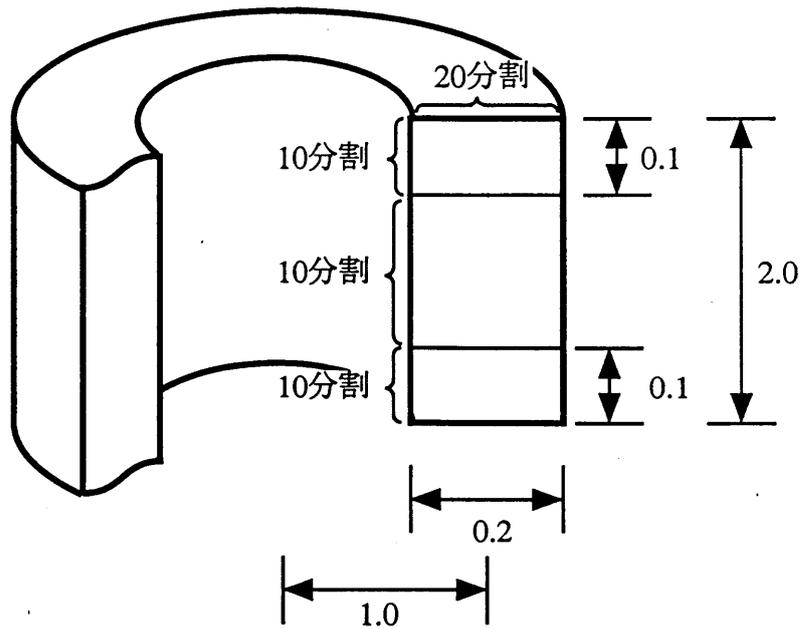
円筒シェルの変形

5.3.2 有限要素法の解析モデル

今回用いる有限要素法では、周方向にフーリエ展開を行い、次元を低減した上で定式化を行った。

また、解析には 4 節点四辺形アイソパラメトリック要素 (3 自由度/節点) を用いた。

要素分割は、厚さ $r = 0.9 \sim 1.1$ の範囲を均等に 20 分割し、軸方向は、シェルの固定端近傍の $z = 0 \sim 0.1$ および $z = 1.9 \sim 2$ の範囲をそれぞれ均等に 10 分割、 $z = 0.1 \sim 1.9$ の範囲を均等に 10 分割した。



解析モデルと要素分割

5.3.3 解析結果

周方向フーリエ展開次数 $n = 0, 1, 2$ の場合の有限要素法と三次元解析結果を図 5.12~5.14 に示す。なお、図中において、○ は解析レベル I、△ は解析レベル II、+ は解析レベル III、× は有限要素法の解析結果を示す。

ただし、有限要素法の解析結果では、 $z = 0$ の支持端において、シェルの内外面の σ^{rr} , $\sigma^{r\theta}$, σ^{rz} が零でなく解析結果を鵜呑みに信用はできない。

解析結果より、ガラーキン法で得られた解は、 $z = 0.0, 0.03, 0.05$ と支持端から遠ざかるにつれ、有限要素法で得られる解に近づき、解析レベルが高いほど有限要素法との誤差は小さい。また、選点法で得られた解では、支持端から遠ざかるにつれ、有限要素法で得られる解に近づくが、フーリエ展開次数 $n = 1, 2$ の場合の $\sigma^{r\theta}$, σ^{rz} の断面内分布は解析レベルが高ければ有限要素法との誤差が小さいとは云えない。従って、三次元理論解を用いる場合にはガラーキン法を採用した法がよいと考えられる。

また、 $z = 0.03$ における応力分布から、支持端近傍における応力の断面内最大値は、レベル III の三次元理論解析によって予測可能であると考えられる。

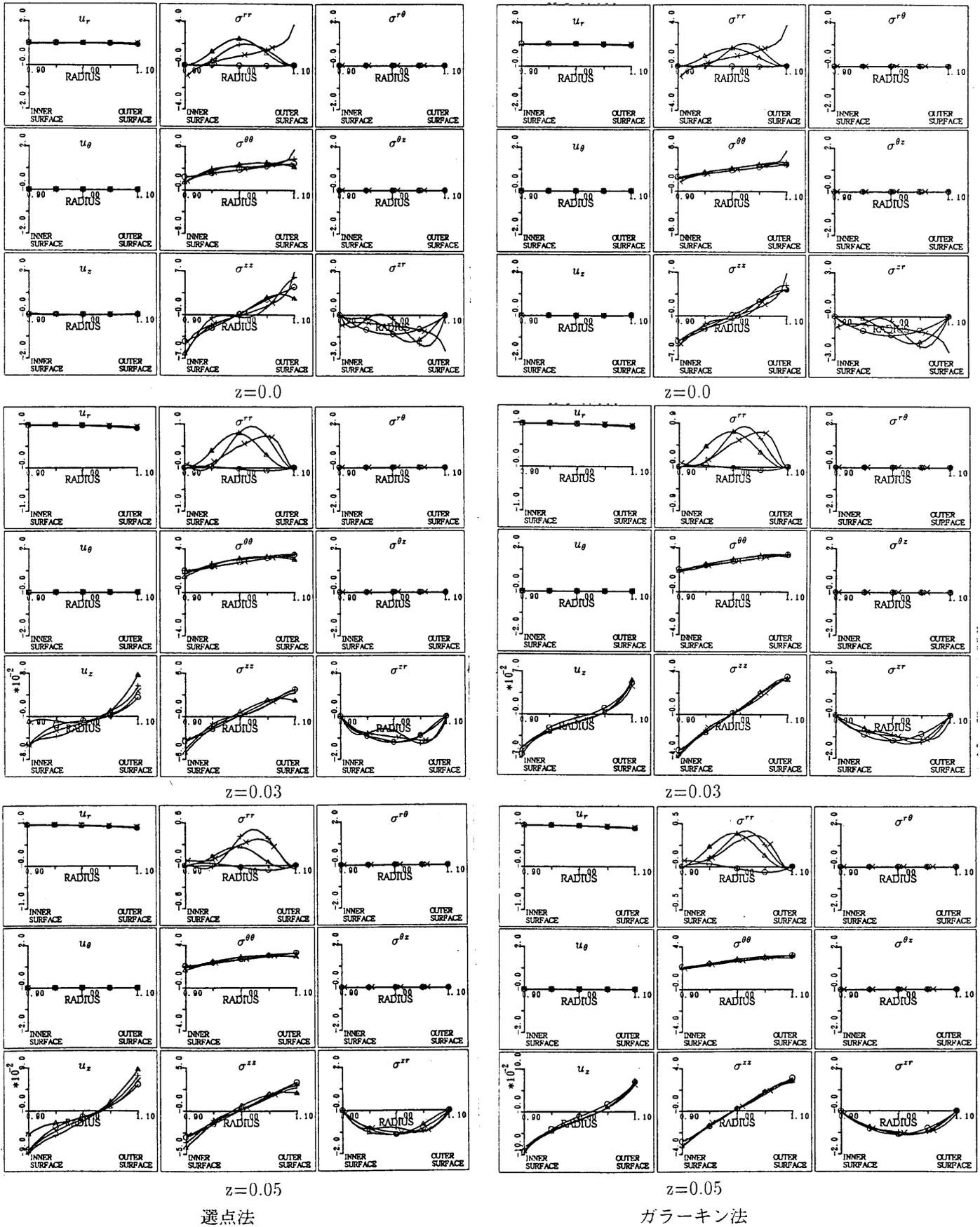


図 5.12: 三次元解析法(選点法)と有限要素法との比較

($n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$) \circ : 解析レベル I \triangle : 解析レベル II $+$: 解析レベル III \times : F.E.M.

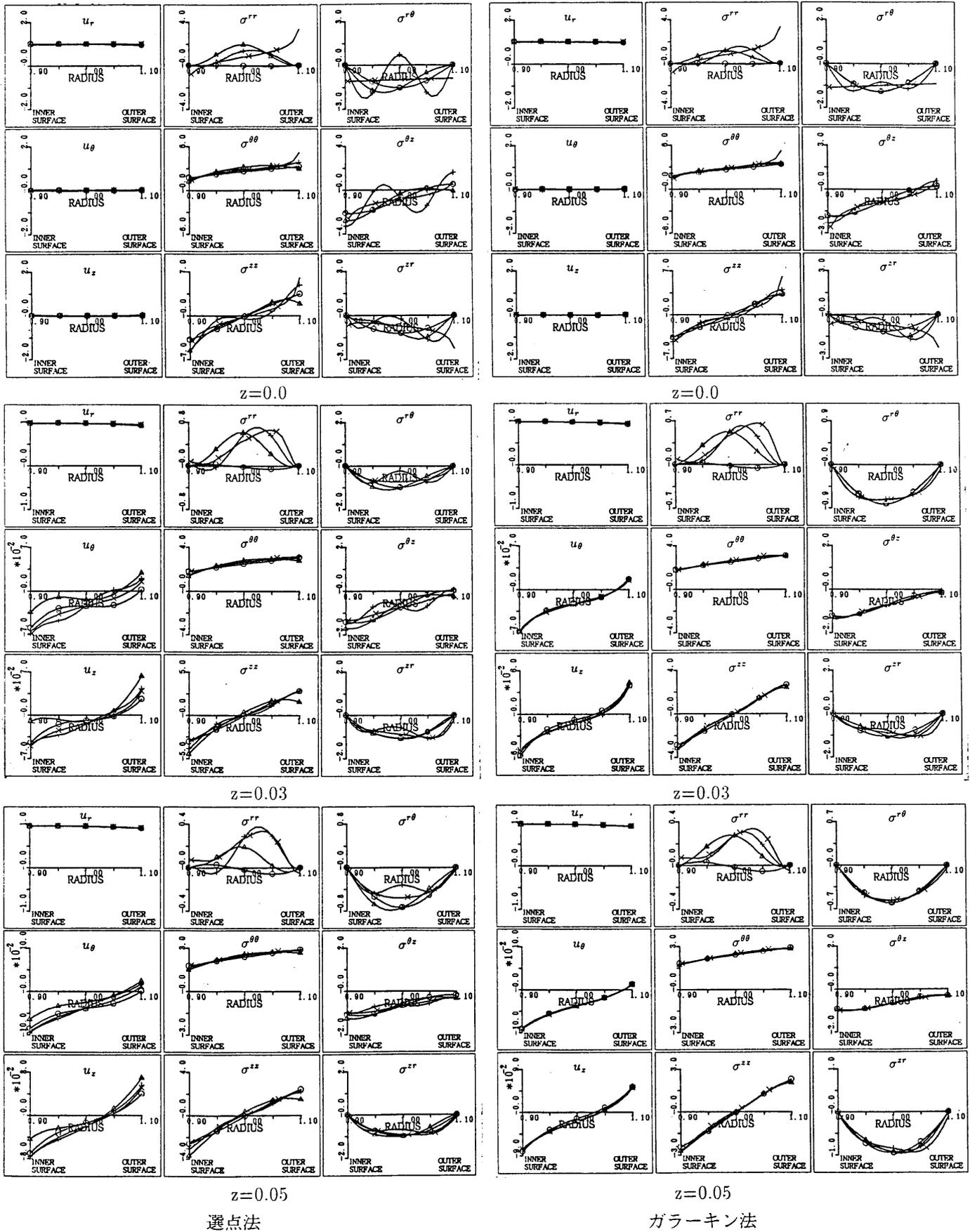


図 5.13: 三次元解析法 (選点法) と有限要素法との比較

($n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$) ○: 解析レベル I △: 解析レベル II +: 解析レベル III ×: F.E.M.

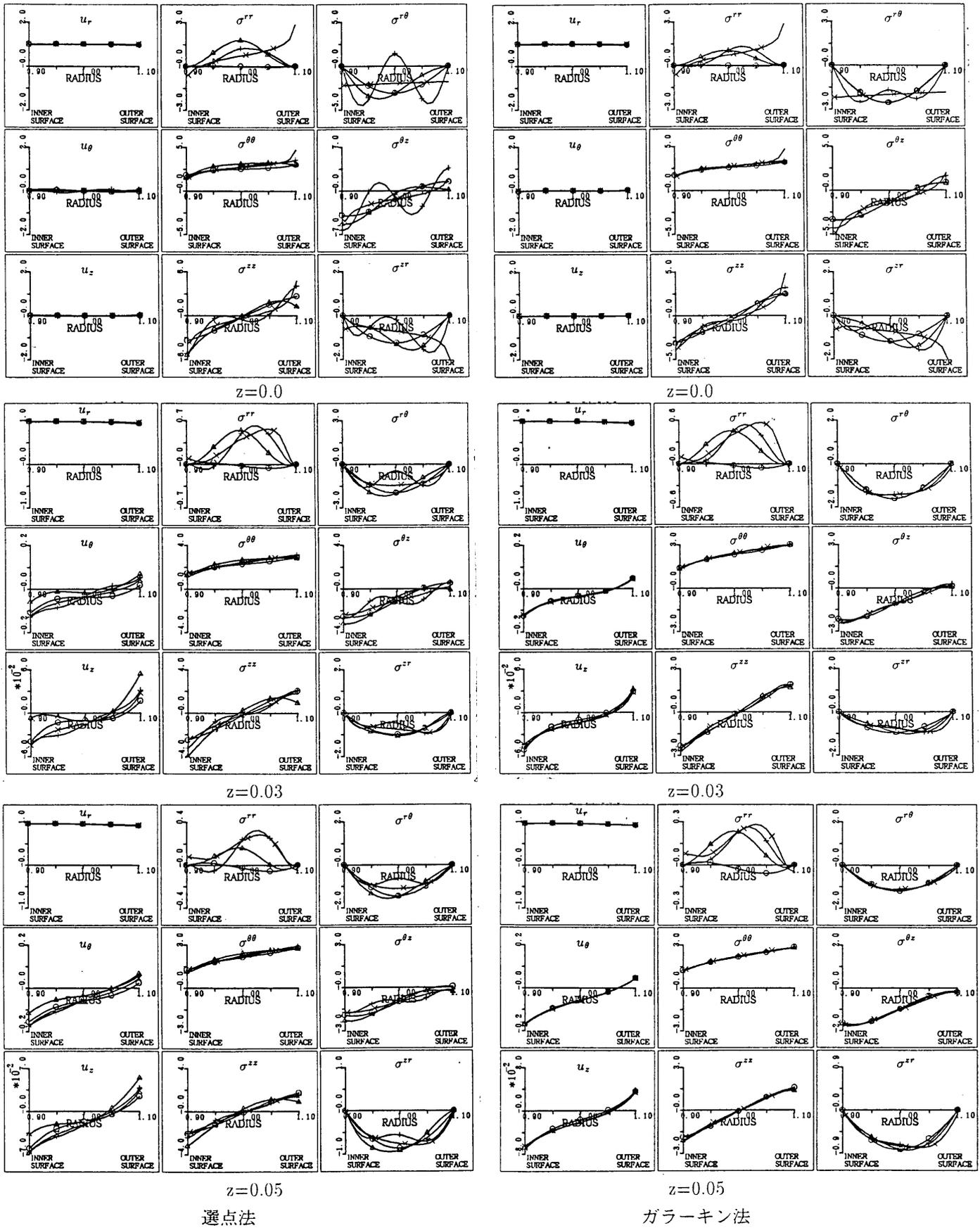


図 5.14: 三次元解析法(選点法) と有限要素法との比較

($n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5$) ○: 解析レベル I △: 解析レベル II +: 解析レベル III ×: F.E.M.

5.4 シェル支持端における拘束条件の特性解の重みへの影響

三次元解析による曲げ応力解はシェル理論により求められる曲げ応力解以外にも複数得られる。

そこで本節においては、これらの新しい曲げ応力解の影響度を周方向にフーリエ展開された場合を例に検討する。

曲げ応力解の各特性値のモードの影響度を考察するため、べき級数で表される解(式(3.11))を無視し、曲げ応力解($\omega_{A1} \sim \omega_{A3}$)のみを用いて、ガラーキン法(式(5.2))で解析する。解析条件として、閉断面円筒シェルの z -一定の断面に強制変位を与える。

図 5.15 ~ 5.17 は、 $\nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$ として、 $z = 0$ の断面に $u_z = 1$ の強制変位を与えた場合の断面内変位・応力分布モードを $z = 0$ 断面において計算したものである。また、図 5.18 ~ 5.20 は、 $\nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$ として、 $z = 0$ の断面に $u_z = 1$ の強制変位を与えた場合の断面内変位・応力分布モードを $z = 0$ 断面において計算したものである。使用した特性値は図 3.5 ~ 3.7 に示される $\omega_{A1} \sim \omega_{A3}$ の 3 つのみである¹。なお、図中において、○ は $\omega_{A1}, \omega_{A2}, \omega_{A3}$ の三つのモードを用いた場合の計算結果であり、△ は ω_{A1} のモードのみ用いた計算結果である。

図 5.15 ~ 5.17 においては σ^{rr} の値が極端に違う以外は ω_{A2}, ω_{A3} の寄与は小さい。しかし、 σ^{rr} の最大値の絶対値は σ^{zz} のその 1 割程度であるのでこの程度の差異であれば実用的には無視しても良いと考えられ、例に示されるような厚肉のシェルにおいても、高次のモード ω_{A2}, ω_{A3} の影響は小さいと考えられる。

また、図 5.18 ~ 5.20 における応力分布は、使用モードの数により大きく違っている。これは次のように考えられる。図 5.15 ~ 5.17 では断面内において、軸方向変位 u_z を一定に保つ条件を与えている。この条件は実際の構造物においても発生しうるものであり、理にかなっている。しかし、図 5.18, 5.19, 5.20 では断面内において、半径方向変位 u_r を一定に保つ条件を与えている。これは軸引張力の作用させた場合ポアソン比の影響で断面が縮むことを考えれば、非常に難しい条件で解析していると考えられる。よって、高次の断面内分布モードが励起され、断面内に一定の半径方向変位を与える ($u_r = 1$) という条件を満足させたものと考えられる。

以上の結果より、例えばシェルの材端を拘束する材料の剛性がシェルの材料の剛性と同じであるような”シェル断面の厚さの変化が許容される”場合には、高次の断面内変位、応力分布モードが大きく励起されることはないと考えられる。

¹ 剛体変位と軸方向の引っ張りを表す膜応力解(式(3.11))は考慮していないので、純粋な曲げ応力問題となっている。

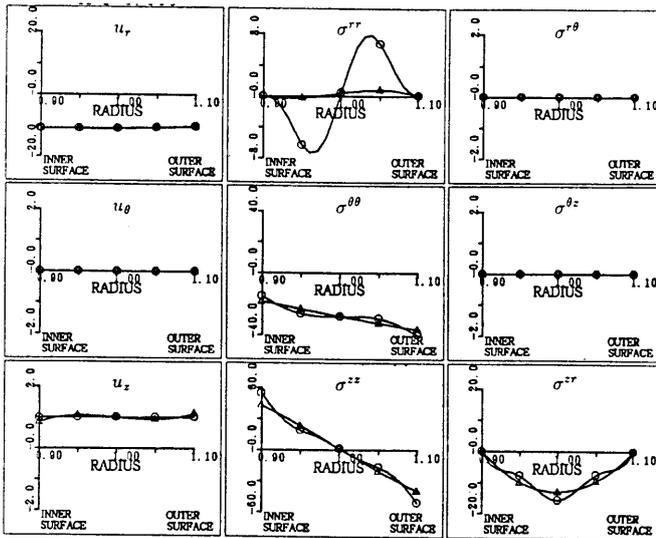


図 5.15: $u_z = 1$ の強制変位を与えた場合
($n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$)

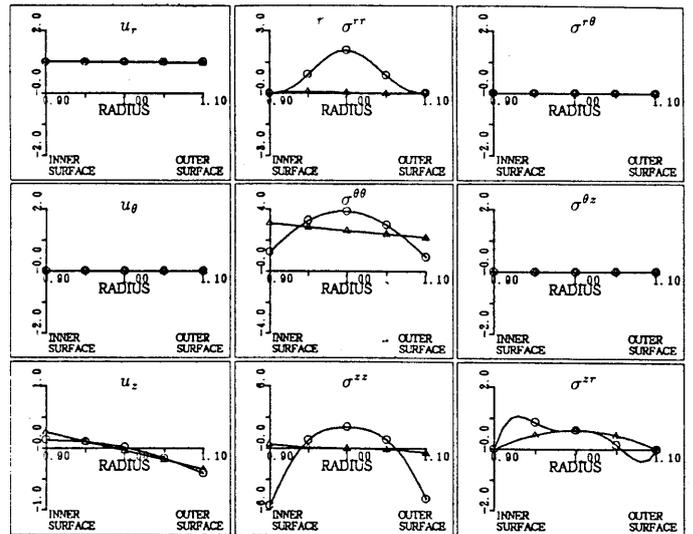


図 5.18: $u_r = 1$ の強制変位を与えた場合
($n = 0, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$)

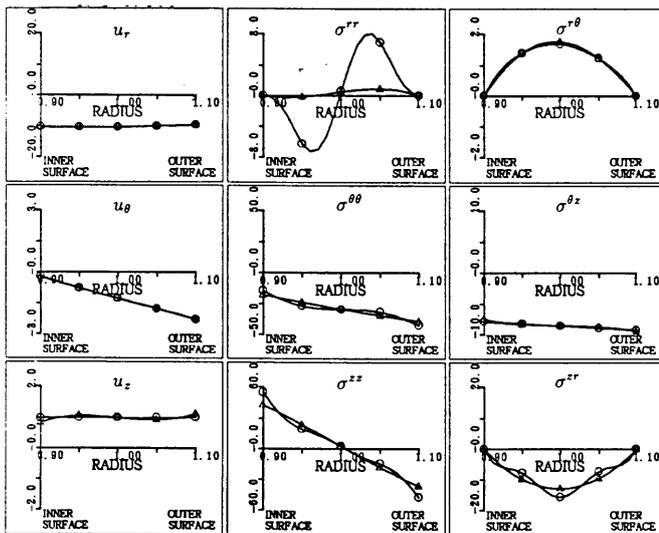


図 5.16: $u_z = 1$ の強制変位を与えた場合
($n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$)

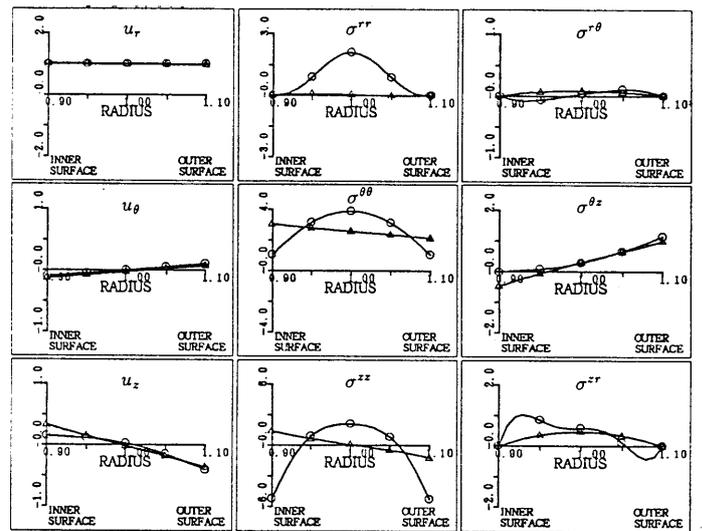


図 5.19: $u_r = 1$ の強制変位を与えた場合
($n = 1, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$)

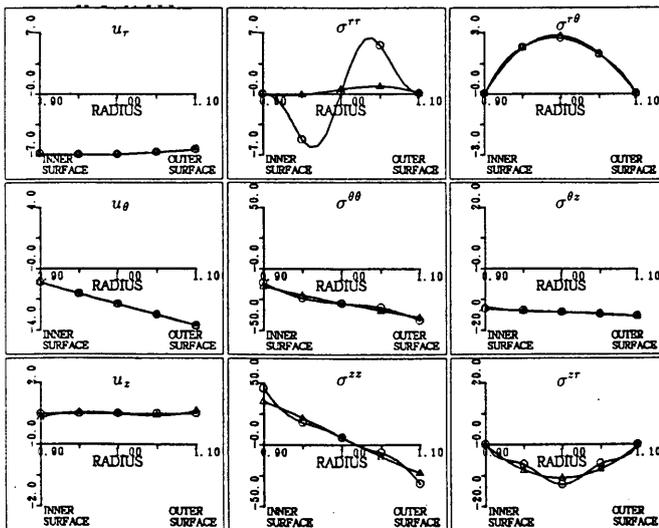


図 5.17: $u_z = 1$ の強制変位を与えた場合
($n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$)

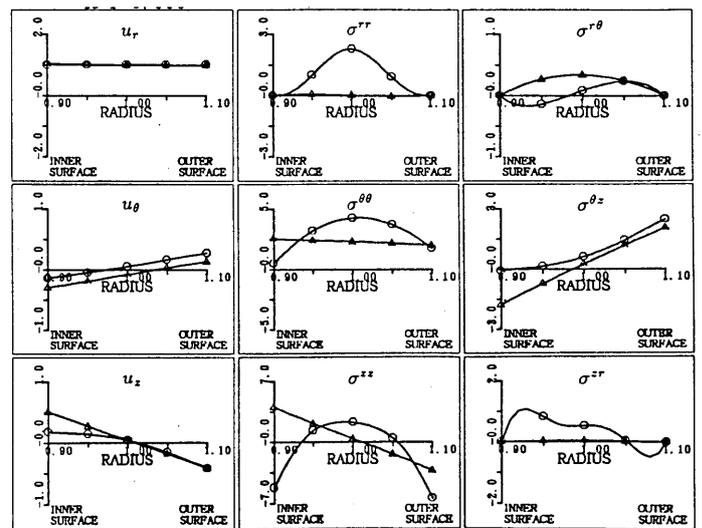


図 5.20: $u_r = 1$ の強制変位を与えた場合
($n = 2, \nu = 0.3, r_0/t_0 = 5.0$)

○: $\omega_{A1}, \omega_{A2}, \omega_{A3}$ のモードを用いた値
△: ω_{A1} のモードのみ用いた値

○: $\omega_{A1}, \omega_{A2}, \omega_{A3}$ のモードを用いた値
△: ω_{A1} のモードのみ用いた値

5.5 本章のまとめ

本章で得られた知見は次のようにまとめられる。

高次の解を用いた解析法について 高次の解を用いた解析法として、選点法とガラーキン法を取り上げた。両解法の特徴は次の表に示される。

	利点	欠点
選点法	境界条件の設定を解析点で与えればよいので直感に訴えやすく、解析を行いやすい。	解析結果が解析点の選び方に依存する。
ガラーキン法	解析結果が選点法に比べ安定している。	断面内で積分を行うので計算時間が多い。境界条件を境界断面内分布関数として与えなければならない。

また、有限要素法で得られる解との比較から、シェル断面内の応力分布精度の良いガラーキン法を採用すべきと考えられる。ただし、支持端近傍における応力の断面内最大値は、選点法、ガラーキン法双方のレベル III の三次元理論解析によって予測可能であると考えられる。

シェル支持端における拘束条件の特性解の重みへの影響について 高次の変位、応力分布モードの影響度は、シェルの支持端における断面内の強制変位の指定により、大きく変化する。しかし、断面の厚さの変化を許容する断面内変位分布条件を指定された場合には、高次の断面内変位、応力分布モードが大きく励起されることはないと考えられる。

第 6 章

線形解析のまとめ

第 1 部では、円筒シェル構造の材端での固定条件を満足するための”一般解”を三次元弾性論上で取り扱った。

第 2 章では、三次元理論解析手法を比較した。その結果、各解析法の得意とする分野をまとめると

変位ポテンシャル	:	振動問題の解析
ガラーキネクトル	:	一般静的問題 (物体力は作用しない)
体積歪	:	一般問題

となる。

第 3 章では、本論文における円筒シェルの一般解の定義と解析に必要な周方向にフーリエ展開した場合と軸方向にフーリエ展開した場合の微小部分釣り合い式、応力-歪関係式、歪-変位関係式を表し、定義を満足する解を求めた。

周方向にフーリエ展開した場合の変位が軸方向にべき級数で表される解は、円筒の柱に軸引張りが作用する場合、円筒にねじりが作用する場合、円筒の梁に純曲げが作用する場合、円筒の梁にせん断力が作用する場合、剛体変位、剛体回転のみである。一方、シェル理論で”曲げ応力解”と呼ばれる軸方向に指数関数で表される一般解では、シェル理論で得られる曲げ応力解の特性値以外の高次の特性値が存在した。また、軸方向にフーリエ展開した場合の変位が周方向にべき級数で表される解は、変位がべき級数で表される解は、剛体回転、円筒シェルに面内せん断力が作用する場合、円弧に純曲げモーメントが作用する場合である。また、変位が周方向に三角関数で表される解は、剛体変位、円弧にせん断力が作用する場合である。一方、シェル理論で”曲げ応力解”と呼ばれる周方向に指数関数で表される一般解では、シェル理論で得られる曲げ応力解の特性値以外の高次の特性値が存在した。

本解析で用いた”曲げ応力解”の特性値を求める手法は特性値を複素平面上に示すことにより、その特性値の特徴を分類し易くした。また、この表現手法を用いれば厚肉シェルでの特性値の分岐の理解もし易く、理論上は全ての特性値が得られる。この手法は他のシェル構造の三次元曲げ応力解析にも適用可能であると考えられる。

また、今回示した解の形状から推測すれば、高次の解は断面内に非常に複雑な応力分布を持つと考えられる。このことはシェル構造物の断面内方向の応力分布の計算精度が必要とされる解析を有限要素法により行う場合には、高次の断面内分布モードが表記可能なように要素分割に注意しなければならないことを示している。

第 4 章では、シェル理論解と三次元解析解とを比較した。

周方向にフーリエ展開された場合の一般解においては、今回の解析結果より、法線保持を仮定したシェル理論では $r_0/t_0 > 30$ 、せん断変形を考慮したシェル理論では $r_0/t_0 > 10$ の範囲で信頼できると思われる。また、軸方向にフーリエ展開された一般解においては、軸方向フーリエ展開次数 ω_0 が 1 以上の場合は特性値の精度のあまり関係なく特性モードの分布形状は良く、 r_0/t_0 が 10 程度の厚肉シェルまでは特性方程式を数値解析すれば十分である。しかし、 $\omega_0 = 0.1$ の場合では特性値の精度が良くても特性モードの分布形状が良いとは限らないので注意が必要である。これは、 ω_0 が 0 に近づくにつれ軸方向の変位分布が小さい二次元的な変形になり、純曲げが作用する円弧やせん断力が作用する円弧に近づくためと考えられる。つまり、 ω_0 が 0 に近い場合に法線保持を仮定したシェル理論を用いるべきではないと結論される。またこの場合、半径と厚さの比 r_0/t_0 が 25 以下のシェルでせん断変形を考慮したシェル理論を適用するのは危険と考えられる。

しかし、シェル理論の実造物への適用範囲を決定するには今後の更なる解析が必要である。

第 5 章では、第 3 章で得られた高次の”曲げ応力解”を用いた三次元解析を行った。ここでは、三次元理論解を利用した解析法として、選点法とガラーキン法を提案した。両解析法の特質は次の表に示される。

	利点	欠点
選点法	境界条件の設定を解析点で与えればよいので直感に訴えやすく、解析を行いやすい。	解析結果が解析点の選び方に依存する。
ガラーキン法	解析結果が選点法に比べ安定している。	断面内で積分を行うので計算時間が多い。境界条件を境界断面内分布関数として与えなければならない。

また、有限要素法で得られる解との比較から、シェル断面内の応力分布精度の良いガラーキン法を採用すべきと考えられる。また、支持端近傍における応力の断面内最大値は、選点法、ガラーキン法双方のレベル III の三次元理論解析によって予測可能であると考えられる。

また、高次の変位、応力分布モードの影響度は、シェルの支持端における断面内の強制変位の指定により、大きく変化する。しかし、断面の厚さの変化を許容する断面内変位分布条件を指定された場合には、高次の断面内変位、応力分布モードが大きく励起されることはないと考えられる。

本論文により、三次元等方弾性体の特性値を求める方法が示された。また、円筒シェルの特性値の一般的な特徴が示され、特定の場合を除いて薄肉の仮定を用いたシェル理論が $r_0/t_0 = 30$ 程度のシェルにおいても使用可能であることが示された。

第 II 部

幾何学的非線形解析

第 7 章

幾何学的非線形理論の基礎

本章においては、幾何学的非線形解析を行う際に必要な変形後の釣合状態における釣合式、歪-変位関係式、応力-歪関係式を示す。ただし、歪はグリーンの歪を用い、応力の交換則として第二 Piola-Kirchhoff 応力テンソルを用いる。

7.1 はじめに

シェル安定問題は、薄肉の仮定を用いたシェル理論上で議論されてきた。しかし、近年、地下構造物、海洋構造物などに比較的厚肉のシェルが用いられ、厚肉のシェルの座屈解析の必要性が生じてきた。この問題に対し、薄肉の仮定を用い、幾何学的非線形性を考慮したシェル理論がどの程度の厚肉シェルに対して有効であるかは明らかにされていない。ここにシェルの幾何学的非線形性を考慮した三次元解析を行うことの意義がある。

三次元解析の方法には、有限要素法などの数値解析法のほか、厚さ方向に高次の近似関数を用いたシェル理論 [13],[15]、あるいは厳正な三次元理論による解析などが考えられる。しかし、三次元有限要素法により解析した場合、シェルの支持端における変位、応力等の拘束条件の違いにより、座屈荷重は大きく変化する。座屈荷重に影響を及ぼさないシェル端部の拘束条件は現在のところ不明であるから、例えば純曲げによる屈服座屈のような単純応力下でのシェルの三次元座屈解析にせよ、有限要素法を適用して純粋な座屈荷重を求めるのは難しいと考えられる。また、法線保持の仮定を用いたシェル理論に幾何学的非線形性を考慮すると、釣り合い式は煩雑になる [12],[16]。更に厚さ方向に高次の変位を仮定することによって、釣合式は一層煩雑になると予想される。また厚さ方向の変位場が仮定されているため正解である保証もなく、幾何学的非線形性により発生する線形解析では得られない新たな応力の断面内分布を適正に表現することが可能であるかは明らかでない。よって現段階において厚さ方向に高次の近似関数を用いたシェル理論を幾何学的非線形解析に適用するのは難しいと考えられる。

三次元理論解析による幾何学的非線形解析はシェル理論によるよりも煩雑で労力も多いが、線形弾性体における三次元理論解が得られるため、三次元有限要素法などの数値解析の規範となることが期待される。

そこで第 3 部では幾何学的非線形性を考慮した三次元理論解析法を提案し、解析例を示す。

通常、三次元物体に幾何学的非線形性を考慮した解析を行う場合には、有限要素法が用いられる。有限要素法では弾性体に対して弾性エネルギーの停留を条件にして解析を行う。その為、幾何学的非線形性を考慮した解析においても、歪のみに幾何学的非線形性を考慮すれば十分である。しかし、幾何学的非線形性を考慮した三次元物体を弾性理論解析する場合には、その微小部分釣合式に幾何学的非線形性を考慮しなければならない。そこで本章においては”変形後の状態”での微小部分釣合式を構成する。また、この”微小部分釣り合い式”を観察する視点(座標系)となる”基底ベクトル”を導く。

7.2 解析のための諸式

本論文において取り扱う物体は、線形弾性体である。また、歪の定義として”グリーンの歪”を用い、変形前と後の応力の関係には”第二 Piola-Kirchhoff 応力テンソル”の関係を用いる。

7.2.1 記号

本章で用いる記号を以下に再掲する。なお、変形後の量は $\bar{\quad}$ を付けて表すとする。

E	ヤング係数
G	せん断弾性係数
ν	ポアソン比
\mathbf{r}	位置ベクトル ($\mathbf{r} = \theta^i \mathbf{a}_i = \theta_i \mathbf{a}^i$)
\mathbf{u}	変位ベクトル ($\mathbf{u} = u^i \mathbf{a}_i = u_i \mathbf{a}^i$)
\mathbf{X}	物体力ベクトル ($\mathbf{X} = X^i \mathbf{a}_i = X_i \mathbf{a}^i$)
θ^i	一般曲線座標
$\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^i$	i 方向共変・反変基底ベクトル
\mathbf{T}	応力ベクトル
\mathbf{n}	法線ベクトル
a_{ij}, a^{pq}	共変・反変計量テンソル
ε_{ij}	グリーンの歪テンソル
$\bar{\sigma}^i_j$	変形後の面積を基準とする変形後の基底ベクトル方向の応力、真応力 (以後、変形後の応力と呼ぶ)
σ^i_j	変形前の面積を基準とする変形前の基底ベクトル方向の応力 (以後、変形前の応力と呼ぶ)
$_{,i}$	偏微分 ($\frac{\partial(\quad)}{\partial z} = (\quad)_{,z}$)
$ _j$	共変微分
Γ^b_{qi}	Christoffel の 3 字記号
δ^i_j	クロネッカ のデルタ
e_{ijk}	Eddington の e 記号 (配列 ijk が 偶順列の場合 1、奇順列の場合 -1、その他は零)
$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$	スカラー三重積
$\rho, \bar{\rho}$	変形前と変形後の質量密度

7.2.2 基本量の関係

上記の各量の関係は次のようになる。

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}} &= \mathbf{r} + \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{u} = u_i \mathbf{a}^i = u^j \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_i &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^i} \quad , \quad \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = \delta^j_i \\ a_{ij} &= \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \quad , \quad a^{ij} = \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j \quad , \quad a = \det |a_{ij}| \end{aligned}$$

よって、変形後の共変・反変基底ベクトル $\bar{\mathbf{a}}_i, \bar{\mathbf{a}}^j$ 共変・反変計量テンソル $\bar{a}_{ij}, \bar{a}^{pq}$ はそれぞれ、下のよう表される。

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}_i &= \mathbf{a}_i + (u^a \mathbf{a}_a)_{,i} = (\delta^p_i + u^p |_i) \mathbf{a}_p \quad , \quad \bar{\mathbf{a}}_i \bar{\mathbf{a}}^j = \delta^j_i \\ \bar{a}_{ij} &= \bar{\mathbf{a}}_i \bar{\mathbf{a}}_j \quad , \quad \bar{a}^{ij} = \bar{\mathbf{a}}^i \bar{\mathbf{a}}^j \quad , \quad \bar{a}_{jq} \bar{a}^{iq} = \delta^i_i \quad , \quad \bar{a} = \det | \bar{a}_{ij} | \\ \Gamma^k_{ij} &= \mathbf{a}_{i,j} \mathbf{a}^k \quad , \quad \bar{\Gamma}^k_{ij} = \bar{\mathbf{a}}_{i,j} \bar{\mathbf{a}}^k \end{aligned}$$

7.2.3 微小ベクトルと微小面積

物体内部の微小ベクトル $d\bar{r}$ を次のように表す。

$$d\bar{r} = \bar{r}_{,i} d\theta^i = \bar{a}_i d\theta^i = \mathbf{a}_p (\delta_i^p + u^p |_{,i}) d\theta^i$$

ここで、 $d\bar{\theta}^p$ を新たに定義し、

$$d\bar{\theta}^p = (\delta_i^p + u^p |_{,i}) d\theta^i, \quad \text{即ち} \quad \frac{\partial \bar{\theta}^p}{\partial \theta^i} = \delta_i^p + u^p |_{,i} \quad (7.1)$$

とおく。 $\frac{\partial \bar{\theta}^p}{\partial \theta^i}$ の逆関数 $\frac{\partial \theta^j}{\partial \bar{\theta}^q}$ は次の恒等式から求めることができる。

$$\frac{\partial \bar{\theta}^p}{\partial \theta^i} \frac{\partial \theta^i}{\partial \bar{\theta}^q} = \delta_q^p, \quad \frac{\partial \bar{\theta}^p}{\partial \theta^i} \frac{\partial \theta^j}{\partial \bar{\theta}^p} = \delta_i^j$$

よって、次の変換式が成立する。

$$\begin{aligned} d\bar{r} &= \mathbf{a}_p d\bar{\theta}^p, \quad \bar{a}_i = \mathbf{a}_p \frac{\partial \bar{\theta}^p}{\partial \theta^i}, \quad \mathbf{a}_p = \bar{a}_i \frac{\partial \theta^i}{\partial \bar{\theta}^p} \\ \bar{a}^j &= \frac{\partial \theta^j}{\partial \bar{\theta}^i} \mathbf{a}^i, \quad \mathbf{a}^j = \frac{\partial \bar{\theta}^j}{\partial \theta^i} \bar{a}^i \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= [\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3] = \left[\frac{\partial \bar{\theta}^1}{\partial \theta^1} \mathbf{a}_1, \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial \theta^2} \mathbf{a}_2, \frac{\partial \bar{\theta}^3}{\partial \theta^3} \mathbf{a}_3 \right] \\ &= \sqrt{a} e_{ijk} \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^1} \frac{\partial \bar{\theta}^j}{\partial \theta^2} \frac{\partial \bar{\theta}^k}{\partial \theta^3} \end{aligned} \quad (7.3)$$

また、変形前後において質量は不変であるから次の関係が存在する。

$$\rho \sqrt{a} = \bar{\rho} \sqrt{\bar{a}} \quad (7.4)$$

次に、微小面積は次のように表される。変形前、弾性体内の一点を起点とする二つの微小ベクトル dr_1 と dr_2 は変形後 $d\bar{r}_1$ と $d\bar{r}_2$ に移るとする。

面 $dS = dr_1 \times dr_2$ の面積を dS 、その外向き単位法線を $n = n_k \mathbf{a}^k$ とし、 $dr_1 = a_i d\theta_1^i$ 、 $dr_2 = a_j d\theta_2^j$ とおく。

$$\begin{aligned} dS &= dr_1 \times dr_2 = \sqrt{a} e_{ijk} \mathbf{a}^k d\theta_1^i d\theta_2^j = n_k \mathbf{a}^k dS \\ n_k dS &= \sqrt{a} e_{ijk} d\theta_1^i d\theta_2^j \end{aligned} \quad (7.5)$$

同様に、変形後の微小面積ベクトル $d\bar{S}$ は以下ようになる。

$$d\bar{S} = d\bar{r}_1 \times d\bar{r}_2 = \bar{a}_i \times \bar{a}_j d\theta_1^i d\theta_2^j = \sqrt{\bar{a}} e_{ijk} \bar{a}^k d\theta_1^i d\theta_2^j \quad (7.6)$$

$d\bar{S}$ の外向き単位法線を $\bar{n} = \bar{n}_p \bar{a}^p$ とおいて次の式が得られる。

$$\bar{n}_p d\bar{S} = \sqrt{\bar{a}} e_{abp} d\theta_1^a d\theta_2^b \quad (7.7)$$

また式 (7.7) に式 (7.4), (7.5) を用いて、次の関係が導かれる。

$$\bar{n}_p d\bar{S} = \frac{\rho}{\bar{\rho}} n_p dS \quad (7.8)$$

7.3 釣り合い式の導入

本節では前節で示した諸量の関係を用いて、幾何学的非線形性を考慮した理論解析のために必要な式を導く。

7.3.1 釣合式、歪、構成式

幾何学的非線形解析を行うにあたり、以下の関係を用いる。

変形された状態での釣合式を採用し、変形後の量を用いて次のように表される [1]。

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} (\sqrt{a} \bar{\sigma}^{ij} \bar{a}_j) + \sqrt{a} \bar{\lambda}^j \bar{a}_j = 0 \quad (7.9)$$

グリーンの歪テンソル ε_{ij} を採用する [1]。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{a}_{ij} - a_{ij}) = \frac{1}{2} (u_i |j + u_j |i) + \frac{1}{2} u_p |i u^p |j \quad (7.10)$$

変形前の応力と歪の間には次のような線形関係が成り立つものとする [1]。

$$\sigma^{ij} = G(a^{ia} a^{jb} + a^{ib} a^{ja} + \frac{2\nu}{1-2\nu} a^{ij} a^{ab}) \varepsilon_{ab} \quad (7.11)$$

7.3.2 第二 Piola-Kirchhoff 応力テンソル

変形前の微小面積 dS に作用する応力ベクトルを T とする。変形前の微小面積全体に加わる力は次のようになる。

$$T dS = \sigma^{pq} n_p dS a_q = (\sigma^{pq} \sqrt{a} e_{ijp} d\theta^i d\theta^j) a_q = R^q a_q \quad (7.12)$$

R^q は $T dS$ の a_q 成分である。

変形後の微小面積 $d\bar{S}$ に作用する応力ベクトルを \bar{T} とする。式 (7.2), (7.8) から、変形後の微小面積全体に作用する力は次のように表される。

$$\bar{T} d\bar{S} = \bar{\sigma}^{ab} \bar{a}_b \bar{n}_a d\bar{S} = \frac{\rho}{\bar{\rho}} \bar{\sigma}^{ab} n_a dS \bar{a}_b = \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\theta}^p}{\partial \theta^b} \bar{\sigma}^{ab} n_a dS a_p = \bar{R}^p a_p \quad (7.13)$$

第二 Piola-Kirchhoff 応力テンソル (変形前の応力) と真応力 (変形後の応力) との変換則は式 (7.12) の R^i と式 (7.13) の \bar{R}^p に対して次式で与えられる。

$$R^i a_j = \frac{\partial \theta^i}{\partial \bar{\theta}^p} \bar{R}^p a_j \quad (7.14)$$

上式に式 (7.12), (7.13) の関係を代入することにより、次の関係が得られる。

$$\sigma^{ai} = \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{\partial \theta^i}{\partial \bar{\theta}^p} \frac{\partial \bar{\theta}^p}{\partial \theta^b} \bar{\sigma}^{ab} = \frac{\rho}{\bar{\rho}} \delta_b^i \bar{\sigma}^{ab} = \frac{\rho}{\bar{\rho}} \bar{\sigma}^{ai} \quad (7.15)$$

上式に式 (7.4) の関係を用いることにより、変形後の反変対称応力テンソル $\bar{\sigma}^{ij}$ と変形前の応力テンソル σ^{ij} との間には次の関係が成立する。

$$\sqrt{a} \bar{\sigma}^{ij} = \sqrt{a} \sigma^{ij} \quad (7.16)$$

式 (7.16) はキルヒホフ応力 σ^{ij} の変換式と同一である。また、式 (7.16) は応力の物理成分 $\overset{(o)}{\sigma}{}^{ij}$ を用いて次のように書き直すことができる。

$$\sqrt{a} \frac{\sqrt{a^{ii}}}{\sqrt{a^{jj}}} \overset{(o)}{\sigma}{}^{ij} = \sqrt{a} \frac{\sqrt{a^{ii}}}{\sqrt{a^{jj}}} \overset{(o)}{\sigma}{}^{ij} \quad (7.17)$$

よって、変形前の応力と変形後の応力の関係は、第二 Piola-Kirchhoff 応力テンソルの交換則により式 (7.16) で表される。

7.3.3 理論解析のための釣合式

変形後の釣合式 (7.9) を、式 (7.16) を用いて、変形前の状態量で表すと次のようになる。

・変形後の基底ベクトルで表した場合

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta^i} \{ \sqrt{a} \sigma^{ij} \} + \sqrt{a} \sigma^{ij} \Gamma_{iq}^p + \sqrt{a} \bar{X}^j \right] \bar{a}_p = 0 \quad (7.18)$$

・変形前の基底ベクトルで表した場合

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta^i} \{ \sqrt{a} \sigma^{ij} (\delta_j^p + u^p |_j) \} + \sqrt{a} \sigma^{ij} \Gamma_{iq}^p (\delta_j^q + u^q |_j) + \sqrt{a} \bar{X}^j (\delta_j^p + u^p |_j) \right] a_p = 0 \quad (7.19)$$

また、変形後の断面に働く断面力は式 (7.8)(7.16) を用いて次のように表される。

$$\text{断面力 } \bar{T} d\bar{S} = \bar{\sigma}^{ij} \bar{a}_j \bar{n}_i d\bar{S} = \sigma^{ij} n_i dS \bar{a}_j \quad (7.20)$$

また、後に用いる”断面に働くモーメント”は次式で算出する。

$$\text{モーメント } M d\bar{S} = \mathbf{r}_{arm} \times \bar{T} d\bar{S} \quad (7.21)$$

\mathbf{r}_{arm} : 計測点から微小面積までの位置ベクトル

変形後の釣合式 (7.9) を実際に解析するには、変形後の基底ベクトル \bar{a}_i が予測できればその基底ベクトル方向の釣合式 (式 (7.18)) を形成すれば容易に解析可能であり、次に示す式を解けば良い。

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} \{ \sqrt{a} \sigma^{ij} \} + \sqrt{a} \sigma^{ij} \Gamma_{iq}^p + \sqrt{a} \bar{X}^j = 0 \quad (7.22)$$

また、予想不可能な場合にも、初期形状での基底ベクトル方向 (\mathbf{a}_j) での釣合式 (式 (7.19)) を得ることは可能であり、釣合式は次のように繁雑になるが解析は可能である。また、変形後の基底ベクトルをそれに近い基底ベクトルで表すことにより、複雑な釣合式を少しは簡略化可能と考えられる。

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} \{ \sqrt{a} \sigma^{ij} (\delta_j^p + u^p |_j) \} + \sqrt{a} \sigma^{ij} \Gamma_{iq}^p (\delta_j^q + u^q |_j) + \sqrt{a} \bar{X}^j (\delta_j^p + u^p |_j) = 0 \quad (7.23)$$

7.4 歪エネルギーを変分した式との対応

以上で得られた釣合式 (7.19) と幾何学的非線形性を考慮した歪エネルギーの変分により導かれる釣合式を比較をする。まず、歪エネルギーの変分をとることにより変形後の釣合式を求める。ただし、ここでは変形前の初期形状を基準にして述べる。

変形前の単位体積あたりの歪エネルギー W は次のように表される。

$$W = \frac{1}{2} \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} \quad (7.24)$$

ただし、 ε_{ij} はグリーンの歪テンソル (式 (7.10)) であり、 σ^{ij} は式 (7.10) により、歪成分で表される。

式 (7.24) を変形前の全領域にわたって積分し、変分をとる。

$$\delta \iiint W \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \iiint \sqrt{a} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \quad (7.25)$$

式(7.25)は、ガウスの発散定理および応力テンソルの対称性 $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$ 、変分操作と共変微分操作が交換できること ($u_b|_j \delta(u^b|_i) = u^b|_j \delta(u_b|_i)$)¹等を用いて、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \delta \iiint W \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ &= - \iiint \left[\frac{\partial}{\partial \theta^i} \{ \sqrt{a} \sigma^{ij} (\delta_j^b + u^b|_j) \} + \sqrt{a} \sigma^{ij} (\delta_j^q + u^q|_j) \Gamma_{qi}^b \right] \delta u_b d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ & \quad + \iiint \frac{\partial}{\partial \theta^i} \{ \sqrt{a} \sigma^{ij} (\delta_j^b + u^b|_j) \delta u_b \} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \end{aligned} \quad (7.26)$$

式(7.26)の右辺の第一項は微小部分の釣り合いを表し、第二項は物体表面の境界条件を表す。今、右辺の第一項の δu_b が任意であるとすれば、物体力がない場合の釣合式が次のように得られる。

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} \{ \sqrt{a} \sigma^{ij} (\delta_j^b + u^b|_j) \} + \sqrt{a} \sigma^{ij} \Gamma_{qi}^b (\delta_j^q + u^q|_j) = 0 \quad (7.27)$$

変形後の応力と基底ベクトルを用いて表示された変形後の釣合式を、変形前の応力と変形前の基底ベクトルによって表示して得られた式(7.19)は、物体力が零のとき、式(7.27)と一致する。よって、先の釣合式(7.19)は、幾何学的非線形性を考慮した歪-変位関係を用いた歪エネルギーの変分により得られる釣合式と等価であることが示される。つまり、本解法は歪に幾何学的非線形性を考慮した三次元有限要素法と等価であり、有限要素法により得られた解の検証の手段になりうることを示された。

7.5 本章のまとめ

本章においては、幾何学的非線形解析を行うに必要な変形後の釣合式と解析対象の表面に働く変形後の表面応力ベクトルを変形前の断面で算出した応力を用いて表した。

結論として、幾何学的非線形性を考慮した三次元理論解析では次のことに留意する。

- 変形後の釣合式をキルヒホッフ応力 σ^{ij} を用いて表す。(式(7.18)または(7.19))
- 幾何学的非線形性を考慮した厳密な歪-変位関係すなわちグリーンの歪テンソル(式(7.10))を用いる。
- 応力は変形後の単位断面に働く応力として定義し、断面力・モーメントは変形を考慮して算定する。(式(7.20))

$$\begin{aligned} \text{断面力} \quad & \bar{T} d\bar{S} = \bar{\sigma}^{ij} \bar{a}_j \bar{n}_i d\bar{S} = \sigma^{ij} n_i dS \bar{a}_j \\ \text{モーメント} \quad & M d\bar{S} = r_{arm} \times \bar{T} d\bar{S} \\ r_{arm} \quad & : \text{中立軸から微小面積までの位置ベクトル} \end{aligned} \quad (7.28)$$

¹ $v_i|_j g^{ik} = v^k|_j$ であるから、 $u_b|_j \delta(u^b|_i) = u_b|_j \delta(u_i|_k g^{kb}) = u_b|_j g^{kb} \delta(u_j|_i) = u^b|_j \delta(u_j|_i) = u^b|_j \delta(u_b|_i)$ となる

第 8 章

円筒シェルの幾何学的非線形解析

本章においては、前章において得られた諸式を円筒座標系に適用し、円筒シェルにおける幾何学的非線形性を考慮した三次元理論解析法を示す。また解析例として、“純曲げの働く円筒シェルの幾何学的非線形解析”と“横せん断力の働く円筒シェルの幾何学的非線形解析”を示す。

8.1 円筒座標系における基礎式

8.1.1 解析対象

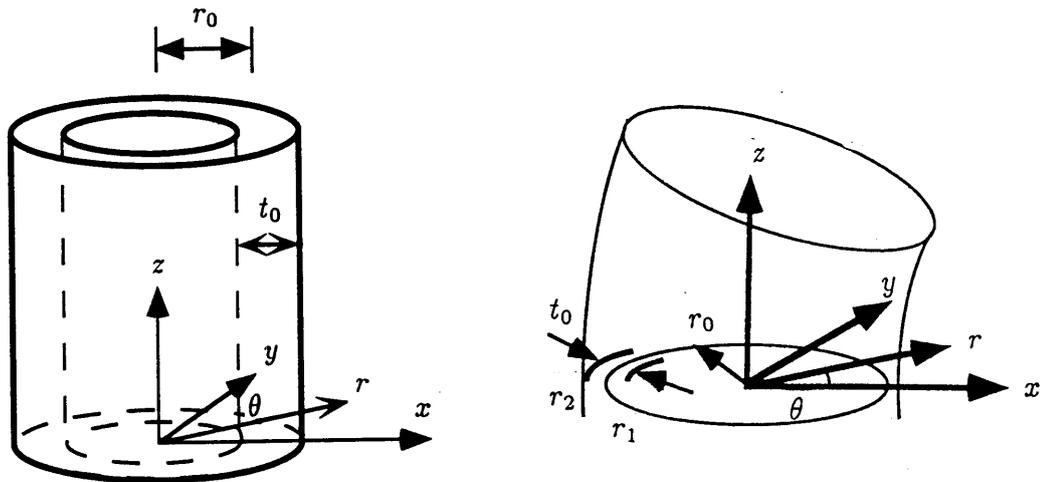


図 8.1: 座標系及び解析対象

解析対象とする円筒シェルは図 8.1 に示すように平均半径を r_0 、シェル厚を t_0 、内半径を $r_1 = r_0 - \frac{1}{2}t_0$ 、外半径を $r_2 = r_0 + \frac{1}{2}t_0$ 、とする。

なお、今回取り上げる解析例においては、変形後の基底ベクトルで表された釣合式 (7.18) ではなく、自然状態 (無荷重状態) での基底ベクトルで表された釣合式 (7.19) を解析する。

8.1.2 基本関係式の物理成分表示

前節に示した歪-変位関係式(式(7.10))、応力-歪関係式(式(7.11)) および釣合式(式(7.19)) を円筒座標系における物理成分で表示すると以下ようになる。ただし、偏微分操作を次のように表すこととする。

$\frac{\partial(\quad)}{\partial z} = (\quad)_{,z}$ なお、 \quad の項は線形解析では無視される非線形項である。

・歪-変位関係式

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= u_{,r}^r + \frac{1}{2} \{ (u_{,r}^r)^2 + (u_{,r}^\theta)^2 + (u_{,r}^z)^2 \} \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} (u^r + u_{,\theta}^\theta) + \frac{1}{2r^2} \{ (u_{,\theta}^\theta + u^r)^2 + (u_{,\theta}^r - u^\theta)^2 + (u_{,\theta}^z)^2 \} \\
 \varepsilon_{zz} &= u_{,z}^z + \frac{1}{2} \{ (u_{,z}^r)^2 + (u_{,z}^\theta)^2 + (u_{,z}^z)^2 \} \\
 \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} u_{,\theta}^r + u_{,r}^\theta - \frac{1}{r} u^\theta \right) + \frac{1}{2r} \{ (u_{,\theta}^r - u^\theta) u_{,r}^r + (u_{,\theta}^\theta + u^r) u_{,r}^\theta + u_{,r}^z u_{,\theta}^z \} \\
 \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(u_{,z}^\theta + \frac{1}{r} u_{,\theta}^z \right) + \frac{1}{2r} \{ (u_{,\theta}^r - u^\theta) u_{,z}^r + (u^r + u_{,\theta}^\theta) u_{,z}^\theta + u_{,\theta}^z u_{,z}^z \} \\
 \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} (u_{,z}^r + u_{,r}^z) + \frac{1}{2} (u_{,r}^r u_{,z}^r + u_{,r}^\theta u_{,z}^\theta + u_{,r}^z u_{,z}^z) \\
 \varepsilon &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

・応力-歪関係式

$$\sigma^{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \delta_j^i \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \right) \tag{8.2}$$

・釣合式

(r 方向)

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \sigma_{,r}^{rr} + \frac{1}{r} (\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta r} + \sigma_{,z}^{zr} \right\} \\
 & + \left\{ \sigma_{,r}^{rr} + \frac{1}{r} (\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta r} + \sigma_{,z}^{zr} \right\} u_{,r}^r \\
 & + \left\{ \sigma_{,r}^{r\theta} + \frac{2}{r} \sigma^{r\theta} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta\theta} + \sigma_{,z}^{z\theta} \right\} \frac{1}{r} (u_{,\theta}^r - u^\theta) \\
 & + \left\{ \sigma_{,r}^{rz} + \frac{1}{r} \sigma^{rz} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta z} + \sigma_{,z}^{zz} \right\} u_{,z}^r \\
 & + \sigma^{rr} u_{,rr}^r + \sigma^{\theta\theta} \frac{1}{r} \left\{ u_{,r}^r + \frac{1}{r} (u_{,\theta\theta}^r - u_{,\theta}^\theta) - \frac{1}{r} (u_{,\theta}^\theta + u^r) \right\} + \sigma^{zz} u_{,zz}^r \\
 & + \frac{2}{r} \sigma^{r\theta} \left\{ (u_{,r\theta}^r - u_{,r}^\theta) - \frac{1}{r} (u_{,\theta}^r - u^\theta) \right\} + 2\sigma^{rz} u_{,rz}^r + \frac{2}{r} \sigma^{z\theta} \{ u_{,\theta z}^r - u_{,z}^\theta \} = 0
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

(θ 方向)

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \sigma_{,r}^{r\theta} + \frac{2}{r} \sigma^{r\theta} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta\theta} + \sigma_{,z}^{z\theta} \right\} \\
 & + \left\{ \sigma_{,r}^{rr} + \frac{1}{r} (\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta r} + \sigma_{,z}^{zr} \right\} u_{,r}^\theta \\
 & + \left\{ \sigma_{,r}^{r\theta} + \frac{2}{r} \sigma^{r\theta} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta\theta} + \sigma_{,z}^{z\theta} \right\} \left\{ \frac{1}{r} (u_{,\theta}^\theta + u^r) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \sigma_{,r}^{rz} + \frac{1}{r} \sigma^{rz} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta z} + \sigma_{,z}^{zz} \right\} u_{,z}^{\theta} \\
& + \frac{\sigma^{rr} u_{,rr}^{\theta} + \sigma^{\theta\theta} \frac{1}{r} \left\{ u_{,r}^{\theta} + \frac{1}{r} (u_{,\theta\theta}^{\theta} + u_{,r}^{\theta}) + \frac{1}{r} (u_{,\theta}^r - u^{\theta}) \right\} + \sigma^{zz} u_{,zz}^{\theta}}{r} \\
& + \frac{2}{r} \sigma^{r\theta} \left\{ (u_{,r\theta}^{\theta} + u_{,r}^r) - \frac{1}{r} (u_{,\theta}^{\theta} + u^r) \right\} + \frac{2\sigma^{rz} u_{,rz}^{\theta}}{r} + \frac{2}{r} \sigma^{z\theta} \{ u_{,\theta z}^{\theta} + u_{,z}^r \} = 0
\end{aligned} \quad (8.4)$$

(z 方向)

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sigma^{rz,r} + \frac{1}{r} \sigma^{rz} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta z} + \sigma_{,z}^{zz} \right\} \\
& + \left\{ \sigma_{,r}^{rr} + \frac{1}{r} (\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta r} + \sigma_{,z}^{zr} \right\} u_{,r}^z \\
& + \left\{ \sigma_{,r}^{r\theta} + \frac{2}{r} \sigma^{r\theta} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta\theta} + \sigma_{,z}^{z\theta} \right\} \frac{1}{r} u_{,\theta}^z \\
& + \left\{ \sigma_{,r}^{rz} + \frac{1}{r} \sigma^{rz} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta z} + \sigma_{,z}^{zz} \right\} u_{,z}^z \\
& + \frac{\sigma^{rr} u_{,rr}^z + \sigma^{\theta\theta} \frac{1}{r} \left\{ u_{,r}^z + \frac{1}{r} u_{,\theta\theta}^z \right\} + \sigma^{zz} u_{,zz}^z}{r} \\
& + \frac{2}{r} \sigma^{r\theta} \left\{ u_{,r\theta}^z - \frac{1}{r} u_{,\theta}^z \right\} + \frac{2\sigma^{rz} u_{,rz}^z}{r} + \frac{2}{r} \sigma^{\theta z} u_{,\theta z}^z = 0
\end{aligned} \quad (8.5)$$

8.1.3 解の精度と近似解

式 (8.3)~(8.5) を用いて幾何学的非線形性を考慮した完全な厳正解を求めるのは不可能と考えられる。

そこで、摂動法を用いる。先ず、 $|\alpha| < 1$ である α を用いて、変位を次のように表す。

$$u^p = \alpha \overset{(\alpha^1)}{u^p} + \alpha^2 \overset{(\alpha^2)}{u^p} \cdots + \alpha^i \overset{(\alpha^i)}{u^p} \cdots + \alpha^n \overset{(\alpha^n)}{u^p} \quad (8.6)$$

この時、グリーンの歪テンソル ε_{pq} は式 (7.10) より、変位と線形関係にある ε_{pq}^L と非線形関係にある ε_{pq}^N に分けられ次のように表される。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{pq} & = \varepsilon_{pq}^L + \varepsilon_{pq}^N \\
& = \alpha \overset{(\alpha^1)}{\varepsilon_{pq}^L} + \alpha^2 \overset{(\alpha^2)}{\varepsilon_{pq}^L} \cdots + \alpha^j \overset{(\alpha^j)}{\varepsilon_{pq}^L} \cdots + \alpha^n \overset{(\alpha^n)}{\varepsilon_{pq}^L} \\
& \quad + \alpha^2 \overset{(\alpha^2)}{\varepsilon_{pq}^N} + \alpha^3 \overset{(\alpha^3)}{\varepsilon_{pq}^N} \cdots + \alpha^j \overset{(\alpha^j)}{\varepsilon_{pq}^N} \cdots + \alpha^{2n} \overset{(\alpha^{2n})}{\varepsilon_{pq}^N}
\end{aligned} \quad (8.7)$$

ここで、 $\overset{(\alpha^i)}{\varepsilon_{pq}^L}$ は $\overset{(\alpha^i)}{u^p}$ を用いて計算され、 $\overset{(\alpha^i)}{\varepsilon_{pq}^N}$ は $\overset{(\alpha^i)}{u^p} \sim \overset{(\alpha^{i-1})}{u^p}$ を用いて計算される。従って、歪の精度は歪の線形部 $\overset{(\alpha^i)}{\varepsilon_{pq}^L}$ の精度 α^n と同一となる。一方、応力と歪は線形関係であるから、応力の精度と、断面に働く応力の総和 (断面力) の精度は、歪の精度と同一である。歪、応力の精度をその構成する変位成分で表すと次のようになる。

歪、応力の精度	線形部分	非線形部分 (付加応力)
α^1 の項	u^p ^(α^1)	
α^2 の項	u^p ^(α^2)	u^p ^(α^1)
α^3 の項	u^p ^(α^3)	u^p ^(α^2) , u^p ^(α^1)
\vdots	\vdots	\vdots
α^i の項	u^p ^(α^i)	u^p ^(α^{i-1}) \sim u^p ^(α^1)
\vdots	\vdots	\vdots
α^n の項	u^p ^(α^n)	u^p ^(α^{n-1}) \sim u^p ^(α^1)

釣合式の精度は、式 (7.22) の場合、応力の精度と同じ α^n であり、式 (7.23) の場合は、応力と変位の積が存在するが、釣合式の精度は応力の精度と同じ α^n である。

以上のように表された変位、応力の精度を考慮しつつ、釣合式に変位成分 u^p ^(α^i) ($i = 1 \sim n$) を代入し、釣合式を α^i ($i = 1 \sim n$) で整理して n 個の部分に書き表し、その釣り合い式を構成する変位成分を表すと以下ようになる。

釣合式の精度	線形部分	非線形部分 (付加物体力)
α^1 の項	u^p ^(α^1)	
α^2 の項	u^p ^(α^2)	u^p ^(α^1)
α^3 の項	u^p ^(α^3)	u^p ^(α^2) , u^p ^(α^1)
\vdots	\vdots	\vdots
α^i の項	u^p ^(α^i)	u^p ^(α^{i-1}) \sim u^p ^(α^1)
\vdots	\vdots	\vdots
α^n の項	u^p ^(α^n)	u^p ^(α^{n-1}) \sim u^p ^(α^1)

そこで、これらの釣合式の内、影響の大きい α^1 の釣合式から解いて行き、順次、精度を上げていくことにする。

実作業としては、先ず釣合式の α^1 の項は線形の式となっているから、この式をシェルの内外面での応力条件などを考慮して解き、 u^p ^(α^1) を求める。この u^p ^(α^1) を釣合式の α^2 の項に代入すると、釣合式の非線形部は、釣合式の線形部に対する付加物体力としての影響を持つ。このようにすると釣合式の非線形部は確定されるから、釣合式の α^2 の項も線形の式となり、この式を解いて u^p ^(α^2) を得る。ただし、シェルの内外面 ($r = r_1, r_2$) 等における応力に関する境界条件に対しては、釣合式の線形部より計算される u^p ^(α^2) に由来する応力に歪-変位関係式 (7.10) に由来する応力の非線形部、即ち、 u^p ^(α^1) で計算される付加応力を加えて境界条件を満足させる必要がある。

同様に α^{i-1} の変位 u^p ^(α^{i-1}) まで得られたとして、釣合式の α^i の項に u^p ^(α^1) \sim u^p ^(α^{i-1}) を代入して、釣合式の線形部に対する付加物体力を求める。その後、線形部の α^i の変位 u^p ^(α^i) を得る。また、 u^p ^(α^1) の未定定数は、 u^p ^(α^1) を歪-変位関係式の線形部に代入して得られる応力に u^p ^(α^1) \sim u^p ^(α^{i-1}) を歪-変位関係式の非線形部に代入して得られる付加応力を加えてシェルの自由表面などにおける表面力の境界条件を満足するように決定する。

8.2 純曲げの働く円筒シェルの幾何学的非線形解析

本節においては、三次元幾何学的非線形解析の例として”純曲げの働く円筒シェルの屈服座屈”を取り上げ、解析する。

8.2.1 はじめに

幾何学的非線形性を考慮した三次元理論解析法を検証するため、シェル理論に基づいた解析で解の得られている純曲げの作用する円筒について解析を行う。

純曲げの作用する円筒の屈服座屈解析は Brazier [17] によって始められ、その後は曲げと軸圧縮の同時載荷問題 [18] など複合荷重下での座屈解析が行われてきた。また、最近においても材料の等方硬化を仮定した解析 [19] や数々の実験 [20],[21] が行われている。しかし、シェルを三次元体として扱った文献は著者の知る限りでは見られない。

そこで本節では純曲げの作用する円筒について三次元幾何学的非線形解析を行いその解析解を示し、シェル理論に基づいた解析と比較検討する。また、この結果を用いて、Mises の降伏条件に基づいた材の塑性化と円筒シェルの半径-厚さ比の関係を考察する。

8.2.2 解析対象

純曲げの働く円筒の屈服座屈を解析する。図 8.2 に示すように円筒シェルの平均半径を r_0 、シェル厚を

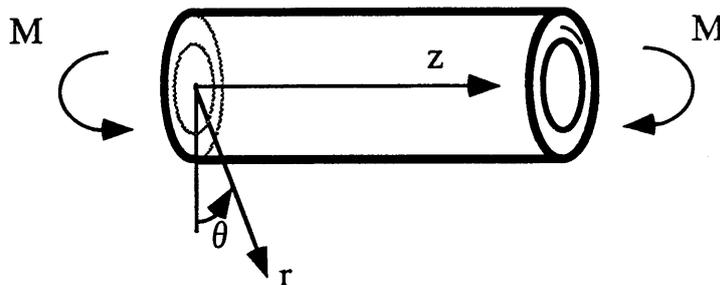


図 8.2: 座標系及び解析対象

t_0 、内半径を $r_1 = r_0 - \frac{1}{2}t_0$ 、外半径を $r_2 = r_0 + \frac{1}{2}t_0$ 、とする。

なお、今回の解析例においては、変形前での基底ベクトルで表された釣合式 (7.19) を採用する。また、三次元物体であるシェルの境界条件として、シェルの内外面 ($r = r_1, r_2$) において表面力が 0 となる様にする。

$$\sigma^{rr} = \sigma^{r\theta} = \sigma^{rz} = 0 \quad \text{at } r = r_1, r_2 \quad (8.8)$$

さらに、 $z = 0, z = L$ でのシェルの両端は、現実問題としてはスチフナーが存在し、シェル断面の変形が拘束されることが多い。このような場合は、当然、シェルの両端は固定端として解析すべきではある。しかし、ここで対象としているのは両端の拘束条件に依存しない純曲げによる屈服座屈であるから、シェル両端の断面の変形 (変位)、及び、断面内の応力分布を制限しないこととする。

ただし、応力を円筒断面上で積分した軸力 (変形後の断面力の内、変形前の軸方向に向かう分力 N)、横せん断力 (変形後の断面力の内、変形前の軸方向に直交する分力 Q) を 0、円筒断面に加わる曲げモーメン

トを M であるようにし、純曲げモーメントが作用している状態を再現する。

$$N = \int \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_z}{|\mathbf{a}_z|} dS = 0, \quad Q = \int \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_y}{|\mathbf{a}_y|} dS = 0 \quad \text{at } z = 0, z = L \quad (8.9)$$

$$M = \int (\mathbf{r}_{arm} \times \mathbf{T}) \cdot \frac{\mathbf{a}_y}{|\mathbf{a}_y|} dS$$

r_{arm} : 応力の中立点から微小面積までの位置ベクトル

8.2.3 解析

釣合式 (8.3), (8.4), (8.5) を満足し、シェルの内外面 ($r = r_1, r_2$) において表面力 ($\sigma^{rr}, \sigma^{r\theta}, \sigma^{rz}$) が 0 となるような変位と応力を完全に得るのは難しい。そこで摂動法 (8.1.3 節) を用いて、解の検証に必要な精度 α^3 まで解を求める。

8.2.3.1 α^1 の解 (u^p) (線形解)

8.1.3 節によれば α^1 の釣合式は線形であるから、線形解を解 u^p として使用して良い。純曲げの作用する線形解は式 (3.12) より、次のように表される。

$$\begin{aligned} u^r &= \left\{ \alpha \frac{1}{2} (-z^2 - \nu r^2) + \frac{L}{2} z \right\} \cos \theta \\ u^\theta &= \left\{ \alpha \frac{1}{2} (z^2 - \nu r^2) - \frac{L}{2} z \right\} \sin \theta \\ u^z &= \left(-\frac{L}{2} + \alpha z \right) r \cos \theta \\ \sigma^{rr} &= \sigma^{\theta\theta} = \sigma^{r\theta} = \sigma^{\theta z} = \sigma^{zr} = 0 \\ \sigma^{zz} &= 2G(1 + \nu) \alpha r \cos \theta \\ \varepsilon &= \alpha(1 - 2\nu) r \cos \theta \quad (\varepsilon : \text{体積歪}) \end{aligned} \quad (8.10)$$

ここで、線形解において α は $\alpha = M/EI$ (M はモーメント、 I は断面二次モーメント) となり、変形後の軸方向の曲率を表す。また、この α に中立面半径 r_0 を乗じた αr_0 は、中立面半径での歪に比例する値となる。

純曲げの作用する円筒シェルの梁とみなすと、せん断力は零であるから平面保持理論から得られる変位は、三次元解析解 (8.10) に極めて接近したものであり、同式の を除いたものである。また、 は剛体回転による項である。剛体回転による応力に無関係であるから、本解析においては剛体回転を 0 と置く。よって、本解析で用いる線形解は次のようになる。

$$\begin{aligned} u^r &= \frac{1}{2} (-z^2 - \nu r^2) \cos \theta & u^\theta &= \frac{1}{2} (z^2 - \nu r^2) \sin \theta \\ u^z &= z r \cos \theta \\ \sigma^{rr} &= \sigma^{\theta\theta} = \sigma^{r\theta} = \sigma^{\theta z} = \sigma^{zr} = 0 \\ \sigma^{zz} &= 2G(1 + \nu) \alpha r \cos \theta \end{aligned} \quad (8.11)$$

従って、 α^1 の変位は以下のようなになる。

$$u^r = u^{r(\alpha^1)}, \quad u^\theta = u^{\theta(\alpha^1)}, \quad u^z = u^{z(\alpha^1)} \quad (8.12)$$

8.2.3.2 α^2 の解 ($u^{(2)}$)

次に8.1.3節に示される手順に従って、 $u^{(1)}$ を釣合式の α^2 の項に代入して $u^{(2)}$ を求める。

まず、線形解(8.11)から、厳正な応力を求め、変形後の釣合式(8.3)~(8.5)に代入する。釣合式の左辺では α の一次の項は零となり、 α^2 の項と α^3 の項が左辺に残留し、付加物体力の項となる。

まず、釣合式の α^2 の項を解析する。これらは、軸対称物体力の部分と周方向フーリエ展開次数" $n=2$ "の物体力の部分から成り立っている。そこでこれらの項を打ち消すための新たな解を線形の釣合式と線形な歪-変位関係を用いて求める。ただし、厳正な歪-変位関係の非線形項に由来する付加応力が物体表面($r=r_1, r_2$)において作用しているため、これらを加えて、自由表面の条件($\sigma^{rr}=0, \sigma^{r\theta}=0, \sigma^{rz}=0$)を満足するようにしなければならない。また、 z が一定の断面において、変形後の軸力が零($N=0$)となるようにする。

α^2 の付加物体力は次のようになる。

$$\begin{aligned} r \text{ 方向} & \quad \alpha^2 G \frac{1}{2} \frac{(1+2\nu)(4\nu-1)}{1-2\nu} r + \alpha^2 G \frac{1}{2} \frac{4\nu-1}{1-2\nu} r \cos 2\theta \\ \theta \text{ 方向} & \quad -\alpha^2 G \frac{1}{2} \frac{4\nu-1}{1-2\nu} r \sin 2\theta \\ z \text{ 方向} & \quad \alpha^2 G \frac{3-2\nu}{1-2\nu} z \end{aligned}$$

付加応力は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma^{rr} &= \alpha^2 G \frac{1+2\nu}{2(1-2\nu)} \nu r^2 + \alpha^2 G \frac{1+2\nu}{2(1-2\nu)} z^2 + \alpha^2 G \frac{\nu}{2(1-2\nu)} r^2 \cos 2\theta + \alpha^2 G \frac{1}{2} z^2 \cos 2\theta \\ \sigma^{\theta\theta} &= \alpha^2 G \frac{1+2\nu}{2(1-2\nu)} \nu r^2 + \alpha^2 G \frac{1+2\nu}{2(1-2\nu)} z^2 + \alpha^2 G \frac{\nu}{2(1-2\nu)} r^2 \cos 2\theta - \alpha^2 G \frac{1}{2} z^2 \cos 2\theta \\ \sigma^{zz} &= \alpha^2 G \frac{4\nu^3 - \nu + 1}{2(1-2\nu)} r^2 + \alpha^2 G \frac{1}{1-2\nu} z^2 + \alpha^2 G \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)} r^2 \cos 2\theta \\ \sigma^{r\theta} &= -\alpha^2 G \frac{1}{2} z^2 \sin 2\theta \\ \sigma^{\theta z} &= -\alpha^2 G \frac{1+2\nu}{2} r z \sin 2\theta \\ \sigma^{zr} &= \alpha^2 G \frac{1}{2} r z + \alpha^2 G \frac{1+2\nu}{2} r z \cos 2\theta \end{aligned} \quad (8.13)$$

また、付加断面力(軸力)は

$$N_{\alpha^2} = \alpha^2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{1-2\nu} G \pi z^2 + \alpha^2 \frac{(r_2^4 - r_1^4)(1-\nu)(3-4\nu^2)}{1-2\nu} G \pi \quad (8.14)$$

よって、解析する釣合式は次のようになる。

軸対称($n=0$)の釣合式

$$\begin{aligned} \sigma_{,r}^{rr} + \frac{1}{r}(\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}) + \sigma_{,z}^{rz} + \alpha^2 G \frac{(1+2\nu)(4\nu-1)}{2(1-2\nu)} r &= 0 \\ \sigma_{,r}^{rz} + \frac{1}{r} \sigma^{rz} + \sigma_{,z}^{zz} + \alpha^2 G \frac{3-2\nu}{1-2\nu} z &= 0 \end{aligned} \quad (8.15)$$

フーリエ展開次数 $n=2$ の釣合式

$$\begin{aligned} \sigma_{,r}^{rr} + \frac{1}{r}(\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta r} + \sigma_{,z}^{zr} + \alpha^2 G \frac{4\nu-1}{2(1-2\nu)} r \cos 2\theta &= 0 \\ \sigma_{,r}^{r\theta} + \frac{2}{r} \sigma_{,\theta}^{r\theta} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta\theta} + \sigma_{,z}^{z\theta} - \alpha^2 G \frac{4\nu-1}{2(1-2\nu)} r \sin 2\theta &= 0 \\ \sigma_{,r}^{rz} + \frac{1}{r} \sigma^{rz} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta z} + \sigma_{,z}^{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (8.16)$$

式 (8.15), (8.16) は α^2 の係数が乗ぜられる変位 u^r , u^z , u^r , u^θ , u^z を用いて次のように表される。
軸対称 ($n=0$) の釣合式

$${}^{(\alpha^2 0)} u^r = u, \quad {}^{(\alpha^2 0)} u^z = w, \quad \varepsilon = u_{,r} + \frac{1}{r}u + w_{,z} \text{ として}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \varepsilon + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon &= -\frac{1+4\nu^2}{1-\nu} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u - \frac{1}{r^2} u + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} &= -\frac{(1+2\nu)(4\nu-1)}{2(1-2\nu)} r \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} w + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w + \frac{\partial^2}{\partial z^2} w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= -\frac{3-2\nu}{1-2\nu} z \end{aligned}$$

フーリエ展開次数 $n=2$ の釣合式

$${}^{(\alpha^2 2)} u^r = u \cos 2\theta, \quad {}^{(\alpha^2 2)} u^\theta = v \sin 2\theta, \quad {}^{(\alpha^2 2)} u^z = w \cos 2\theta, \quad \varepsilon = u_{,r} + \frac{1}{r}u + \frac{2}{r}v + w_{,z}, \quad f = u + v, \quad g = u - v \text{ として}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \varepsilon + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \varepsilon - \frac{4}{r^2} \varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon &= -\frac{4\nu-1}{1-\nu} r \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} f + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f - \frac{9}{r^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - 2\frac{\varepsilon}{r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} g + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} g - \frac{1}{r^2} g + \frac{\partial^2}{\partial z^2} g + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + 2\frac{\varepsilon}{r} \right) &= -\frac{4\nu-1}{1-2\nu} r \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} w + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w - \frac{4}{r^2} w + \frac{\partial^2}{\partial z^2} w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

解 (u^p) は、シェルの内外面及び断面における付加表面力・断面力を考慮して、次のようになる。

< 軸対称 ($n=0$) の解 >

$$\begin{aligned} {}^{(\alpha^2 0)} u^r &= \left[-\frac{1}{4} r z^2 + \frac{1-2\nu-4\nu^2}{16(1-\nu)} r^3 + \frac{-3+10\nu-6\nu^2+4\nu^3}{16(1-\nu)} B_3 r - \frac{3+2\nu}{16(1-\nu)} \frac{B_4^2}{r} \right] \\ {}^{(\alpha^2 0)} u^z &= \left[-\frac{1}{6} z^3 - \frac{3-2\nu}{8} B_3 z \right] \end{aligned} \quad (8.17)$$

< $n=2$ の解 >

$$\begin{aligned} {}^{(\alpha^2 2)} u^r &= \left[B_0 B_3 B_4^4 \frac{1}{r^3} - 4(1-\nu) B_0 B_1 B_4^2 \frac{1}{r} + \frac{1+2\nu^2}{12} r^3 + 4B_0 B_4^2 \nu r^3 - B_0 B_1 B_3 r - \frac{1}{4} r z^2 \right] \cos 2\theta \\ {}^{(\alpha^2 2)} u^\theta &= \left[B_0 B_3 B_4^4 \frac{1}{r^3} + 2(1-2\nu) B_0 B_1 B_4^2 \frac{1}{r} + \frac{(\nu-2)(1+2\nu)}{12} r^3 - 2(3-2\nu) B_0 B_4^2 r^3 \right. \\ &\quad \left. + B_0 B_1 B_3 r + \frac{1}{4} r z^2 \right] \sin 2\theta \\ {}^{(\alpha^2 2)} u^z &= \left[-\frac{1}{2} \nu r^2 z \right] \cos 2\theta \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\text{ただし } B_0 = \frac{1+\nu}{4(r_2^2 - r_1^2)^2}, \quad B_1 = r_1^4 + r_1^2 r_2^2 + r_2^4, \quad B_3 = r_1^2 + r_2^2, \quad B_4 = r_1 r_2$$

従って、 α^2 の変位は以下のようになる。

$${}^{(\alpha^2)} u^r = {}^{(\alpha^2 0)} u^r + {}^{(\alpha^2 2)} u^r, \quad {}^{(\alpha^2)} u^\theta = {}^{(\alpha^2 2)} u^\theta, \quad {}^{(\alpha^2)} u^z = {}^{(\alpha^2 0)} u^z + {}^{(\alpha^2 2)} u^z \quad (8.19)$$

8.2.3.3 α^3 の解 (u^p)

α^2 の解を得るのと同様にして、 u^p と u^p を α^3 の釣合式に代入して α^3 の解 u^p を求める。
 α^3 の釣合式には、付加物体力が周方向フーリエ展開次数 $n = 1, 3$ という形で発生する。
フーリエ展開次数 $n = 1$ の不釣り合い物体力

r 方向

$$\alpha^3 G \left[-\frac{3+14\nu+8\nu^2}{16(1-\nu)} B_4^2 \frac{1}{r^2} + \frac{16\nu^2-4\nu-3}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \frac{1}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{-96\nu^4-72\nu^3+206\nu^2+32\nu-45}{16(1-\nu)(1-2\nu)} r^2 + 3 \frac{-16\nu^2+20\nu-3}{1-2\nu} B_0 B_4^2 r^2 \right. \\ \left. + \frac{\nu}{2(1-2\nu)} z^2 - \frac{16\nu^4-12\nu^3+10\nu^2+20\nu-9}{16(1-\nu)(1-2\nu)} B_3 + (1+4\nu) B_0 B_1 B_3 \right] \cos \theta$$

θ 方向

$$\alpha^3 G \left[-\frac{3+14\nu+8\nu^2}{16(1-\nu)} B_4^2 \frac{1}{r^2} + \frac{16\nu^2-4\nu-3}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \frac{1}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{32\nu^4-8\nu^3-74\nu^2+15}{16(1-\nu)(1-2\nu)} r^2 + 3 \frac{-16\nu^2+4\nu+1}{1-2\nu} B_0 B_4^2 r^2 \right. \\ \left. - \frac{\nu}{2(1-2\nu)} z^2 + \frac{16\nu^4-12\nu^3+10\nu^2+20\nu-9}{16(1-\nu)(1-2\nu)} B_3 - (1+4\nu) B_0 B_1 B_3 \right] \sin \theta$$

z 方向

$$\alpha^3 G \left[-\frac{1-2\nu+8\nu^2-12\nu^3}{2(1-\nu)(1-2\nu)} r z - 24 B_0 B_4^2 r z \right] \cos \theta$$

フーリエ展開次数 $n = 1$ の不釣り合い表面応力

$$\sigma^{rr} = \alpha^3 G \left[6 B_0 B_3 B_4^2 \nu \frac{1}{r^3} - \frac{\nu(3+2\nu)}{8(1-\nu)} B_4^2 \frac{1}{r} + 2 \frac{4\nu-1}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \nu \frac{1}{r} \right. \\ \left. + \frac{-4\nu^3+2\nu^2-3}{8(1-\nu)(1-2\nu)} B_3 \nu r - \frac{2\nu^3-8\nu^2+\nu}{8(1-\nu)(1-2\nu)} r^3 + 6 \frac{3-4\nu}{1-2\nu} B_0 B_4^2 \nu r^3 + \frac{\nu}{2(1-2\nu)} r z^2 \right] \cos \theta$$

$$\sigma^{\theta\theta} = \alpha^3 G \left[-6 B_0 B_3 B_4^2 \nu \frac{1}{r^3} + \frac{\nu(3+2\nu)}{8(1-\nu)} B_4^2 \frac{1}{r} + 2 \frac{3-4\nu}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \nu \frac{1}{r} \right. \\ \left. + \frac{-4\nu^3+2\nu^2-3}{8(1-\nu)(1-2\nu)} B_3 \nu r - \frac{-16\nu^3+2\nu^2-1}{8(1-\nu)(1-2\nu)} r^3 + 6 \frac{3-4\nu}{1-2\nu} B_0 B_4^2 \nu r^3 + \frac{\nu}{2(1-2\nu)} r z^2 \right] \cos \theta$$

$$\sigma^{zz} = \alpha^3 G \left[4 \frac{\nu^2}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \frac{1}{r} + \frac{-4\nu^5+6\nu^4-8\nu^3-4\nu^2+8\nu-3}{4(1-\nu)(1-2\nu)} B_3 r \right. \\ \left. - \frac{-4\nu^4+3\nu^3-3\nu^2-2\nu+1}{2(1-\nu)(1-2\nu)} \nu r^3 + 12 \frac{3-4\nu}{1-2\nu} B_0 B_4^2 \nu^2 r^3 + \frac{1-\nu-\nu^2}{1-2\nu} r z^2 \right] \cos \theta$$

$$\sigma^{r\theta} = \alpha^3 G \left[6 B_0 B_3 B_4^2 \nu \frac{1}{r^3} + \frac{3+2\nu}{8(1-\nu)} B_4^2 \nu \frac{1}{r} - 4 B_0 B_1 B_4^2 \nu \frac{1}{r} + \frac{1-2\nu-4\nu^2}{8(1-\nu)} \nu r^3 \right] \sin \theta$$

$$\sigma^{\theta z} = \alpha^3 G \left[\frac{3-2\nu^2+4\nu^3}{16(1-\nu)} B_3 z - \frac{3+2\nu}{16(1-\nu)} B_4^2 \frac{z}{r^2} \right. \\ \left. + (4\nu-3) B_0 B_1 B_4^2 \frac{z}{r^2} + \frac{3-6\nu-2\nu^2}{16(1-\nu)} r^2 z - B_0 B_1 B_3 z + 3 B_0 B_4^2 r^2 z \right] \sin \theta$$

$$\sigma^{zr} = \alpha^3 G \left[\frac{3 - 10\nu + 6\nu^2 - 4\nu^3}{16(1-\nu)} B_3 z - \frac{3+2\nu}{16(1-\nu)} B_4^2 \frac{z}{r^2} + (4\nu - 3) B_0 B_1 B_4^2 \frac{z}{r^2} - \frac{3(1-2\nu-4\nu^2)}{16(1-\nu)} r^2 z \right. \\ \left. + B_0 B_1 B_3 z - \frac{3-2\nu}{8} B_3 z - \frac{3+5\nu}{8} r^2 z - 3(3-2\nu) B_0 B_4^2 r^2 z - 6 B_0 B_4^2 \nu r^2 z \right] \cos \theta$$

フーリエ展開次数 $n = 1$ の場合には次のように不釣合い断面力が発生する。

$$Q_0 = -\alpha^3 G \pi \frac{(1-2\nu^2)(r_2^4 - r_1^4)}{8} z$$

フーリエ展開次数 $n = 3$ の不釣合い物体力

r 方向 (8.20)

$$\alpha^3 G \left[3(1+4\nu) B_0 B_3 B_4^4 \frac{1}{r^4} - \frac{1+4\nu-16\nu^2}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \frac{1}{r^2} \right. \\ \left. - \frac{5+5\nu+8\nu^2-16\nu^3}{8(1+2\nu)} r^2 + 3 \frac{3-20\nu+16\nu^2}{1-2\nu} B_0 B_4^2 r^2 \right] \cos 3\theta$$

θ 方向 (8.21)

$$\alpha^3 G \left[3(1+4\nu) B_0 B_3 B_4^4 \frac{1}{r^4} - \frac{3-20\nu+16\nu^2}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \frac{1}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{5+5\nu+8\nu^2-16\nu^3}{8(1+2\nu)} r^2 - 3 \frac{3-20\nu+16\nu^2}{1-2\nu} B_0 B_4^2 r^2 \right] \sin 3\theta$$

z 方向 (8.22)

$$\alpha^3 G \left[-8 B_0 B_1 B_4^2 \frac{z}{r^3} \right] \cos 3\theta \quad (8.23)$$

フーリエ展開次数 $n = 3$ の不釣合い表面応力

$$\sigma^{rr} = \alpha^3 G \left[2 \frac{4\nu-3}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \nu \frac{1}{r} + \frac{(\nu-1)(3+4\nu)\nu}{4(1-2\nu)} r^3 - 6 \frac{3-4\nu}{1-2\nu} B_0 B_4^2 \nu r^3 + 2 B_0 B_1 B_3 \nu r - \frac{\nu}{2} r z^2 \right] \cos 3\theta$$

$$\sigma^{\theta\theta} = \alpha^3 G \left[2 \frac{4\nu-3}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \nu \frac{1}{r} + \frac{-4\nu^3-5\nu^2+\nu}{4(1-2\nu)} r^3 + 6 \frac{1-4\nu}{1-2\nu} B_0 B_4^2 \nu r^3 - 2 B_0 B_1 B_3 \nu r + \frac{\nu}{2} r z^2 \right] \cos 3\theta$$

$$\sigma^{zz} = \alpha^3 G \left[4 \frac{4\nu-3}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \nu^2 \frac{1}{r} - \frac{\nu^3+\nu}{2(1-2\nu)} r^3 - 12 \frac{\nu^2}{1-2\nu} B_0 B_4^2 r^3 \right] \cos 3\theta$$

$$\sigma^{r\theta} = \alpha^3 G \left[\frac{(1+\nu)\nu}{2} r^3 + 12 B_0 B_4^2 \nu r^3 - 2 B_0 B_1 B_3 \nu r + \frac{\nu}{2} r z^2 \right] \sin 3\theta$$

$$\sigma^{\theta z} = \alpha^3 G \left[3 B_0 B_3 B_4^4 \frac{z}{r^4} - 3 B_0 B_1 B_4^2 \frac{z}{r^2} + \frac{4\nu^2-\nu+1}{8} r^2 z + 3(4\nu-3) B_0 B_4^2 r^2 z \right] \sin 3\theta$$

$$\sigma^{zr} = \alpha^3 G \left[3 B_0 B_3 B_4^4 \frac{z}{r^4} - B_0 B_1 B_4^2 \frac{z}{r^2} - \frac{4\nu^2-\nu+1}{8} r^2 z - 3(4\nu-3) B_0 B_4^2 r^2 z \right] \cos 3\theta$$

従って、解くべき釣合式は応力を用いて次のよう表記される。

フーリエ展開次数 $n = 1$ の釣合式

$$\sigma_{,r}^{r,r} + \frac{1}{r} (\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta,r} + \sigma_{,z}^{z,r}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha^3 G \left[-\frac{3+14\nu+8\nu^2}{16(1-\nu)} B_4^2 \frac{1}{r^2} + \frac{16\nu^2-4\nu-3}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \frac{1}{r^2} \right. \\
& \quad + \frac{-96\nu^4-72\nu^3+206\nu^2+32\nu-45}{16(1-\nu)(1-2\nu)} r^2 + 3 \frac{-16\nu^2+20\nu-3}{1-2\nu} B_0 B_4^2 r^2 \\
& \quad \left. + \frac{\nu}{2(1-2\nu)} z^2 - \frac{16\nu^4-12\nu^3+10\nu^2+20\nu-9}{16(1-\nu)(1-2\nu)} B_3 + (1+4\nu) B_0 B_1 B_3 \right] \cos \theta = 0 \\
\cdot \quad & \sigma_{,r}^{r\theta} + \frac{2}{r} \sigma^{r\theta} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta\theta} + \sigma_{,z}^{z\theta} \\
& +\alpha^3 G \left[-\frac{3+14\nu+8\nu^2}{16(1-\nu)} B_4^2 \frac{1}{r^2} + \frac{16\nu^2-4\nu-3}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \frac{1}{r^2} \right. \\
& \quad + \frac{32\nu^4-8\nu^3-74\nu^2+15}{16(1-\nu)(1-2\nu)} r^2 + 3 \frac{-16\nu^2+4\nu+1}{1-2\nu} B_0 B_4^2 r^2 \\
& \quad \left. - \frac{\nu}{2(1-2\nu)} z^2 + \frac{16\nu^4-12\nu^3+10\nu^2+20\nu-9}{16(1-\nu)(1-2\nu)} B_3 - (1+4\nu) B_0 B_1 B_3 \right] \sin \theta = 0 \\
\cdot \quad & \sigma_{,r}^{rz} + \frac{1}{r} \sigma^{rz} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta z} + \sigma_{,z}^{zz} + \alpha^3 G \left[-\frac{1-2\nu+8\nu^2-12\nu^3}{2(1-\nu)(1-2\nu)} r z - 24 B_0 B_4^2 r z \right] \cos \theta = 0 \quad (8.24)
\end{aligned}$$

フーリエ展開次数 $n=3$ の釣合式

$$\begin{aligned}
\cdot \quad & \sigma_{,r}^{rr} + \frac{1}{r} (\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta r} + \sigma_{,z}^{zr} \\
& +\alpha^3 G \left[3(1+4\nu) B_0 B_3 B_4^4 \frac{1}{r^4} - \frac{1+4\nu-16\nu^2}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \frac{1}{r^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{5+5\nu+8\nu^2-16\nu^3}{8(1+2\nu)} r^2 + 3 \frac{3-20\nu+16\nu^2}{1-2\nu} B_0 B_4^2 r^2 \right] \cos 3\theta = 0 \\
\cdot \quad & \sigma_{,r}^{r\theta} + \frac{2}{r} \sigma^{r\theta} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta\theta} + \sigma_{,z}^{z\theta} \\
& +\alpha^3 G \left[3(1+4\nu) B_0 B_3 B_4^4 \frac{1}{r^4} - \frac{3-20\nu+16\nu^2}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \frac{1}{r^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{5+5\nu+8\nu^2-16\nu^3}{8(1+2\nu)} r^2 - 3 \frac{3-20\nu+16\nu^2}{1-2\nu} B_0 B_4^2 r^2 \right] \sin 3\theta = 0 \\
\cdot \quad & \sigma_{,r}^{rz} + \frac{1}{r} \sigma^{rz} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta z} + \sigma_{,z}^{zz} + \alpha^3 G \left[-8 B_0 B_1 B_4^2 \frac{z}{r^3} \right] \cos 3\theta = 0
\end{aligned}$$

また、以上の釣合式は α^3 の係数が乗せられる変位 $u^{(\alpha^3 1)}$, $u^{\theta(\alpha^3 1)}$, $u^z(\alpha^3 1)$, $u^{r(\alpha^3 3)}$, $u^{\theta(\alpha^3 3)}$, $u^z(\alpha^3 3)$ を用いて次のように表される。

フーリエ展開次数 $n=1$ の釣合式

$$\begin{aligned}
& u^{r(\alpha^3 1)} = u \cos \theta, \quad u^{\theta(\alpha^3 1)} = v \sin \theta, \quad u^z(\alpha^3 1)} = w \cos \theta, \quad \varepsilon = u_{,r} + \frac{1}{r} u + \frac{1}{r} v + w_{,z}, \quad f = u + v, \quad g = u - v \text{ として} \\
& \frac{\partial^2}{\partial r^2} \varepsilon + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \varepsilon - \frac{1}{r^2} \varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon = X a_0 (1-2\nu) r \\
& \frac{\partial^2}{\partial r^2} f + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f - \frac{4}{r^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \frac{\varepsilon}{r} \right) = \frac{X a_{11}}{r^2} + X a_{12} r^2 \\
& \frac{\partial^2}{\partial r^2} g + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} g + \frac{\partial^2}{\partial z^2} g + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\varepsilon}{r} \right) = X a_{21} r^2 + X a_{22} + X a_{23} z^2 \\
& \frac{\partial^2}{\partial r^2} w + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w - \frac{1}{r^2} w + \frac{\partial^2}{\partial z^2} w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = X a_3 r z \quad (8.25)
\end{aligned}$$

$$\text{ただし } X a_0 = \frac{16\nu^3+36\nu^2-2\nu-7}{2(1-\nu)(2\nu-1)} - 24 \frac{-4\nu^2+5\nu-1}{(1-2\nu)(1-\nu)} B_0 B_4^2$$

$$\begin{aligned}
Xa_{11} &= \frac{8\nu^2 + 14\nu + 3}{3(1-\nu)} B_4^2 - 2 \frac{16\nu^2 - 4\nu - 3}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \\
Xa_{12} &= -\frac{-32\nu^4 + 40\nu^3 + 66\nu^2 + 16\nu - 15}{8(1-\nu)(1-2\nu)} - 6 \frac{-16\nu^2 + 12\nu - 1}{1-2\nu} B_0 B_4^2 \\
Xa_{21} &= -\frac{-32\nu^4 - 16\nu^3 + 70\nu^2 + 8\nu - 15}{4(1-\nu)(1-2\nu)} - 12 \frac{4\nu - 1}{1-2\nu} B_0 B_4^2 \\
Xa_{22} &= \frac{16\nu^4 - 12\nu^3 + 10\nu^2 + 20\nu - 9}{8(1-\nu)(1-2\nu)} B_3 - 2(1+4\nu) B_0 B_1 B_3 \\
Xa_{23} &= -\frac{\nu}{1-2\nu} \\
Xa_3 &= -\frac{-12\nu^3 + 8\nu^2 - 2\nu + 1}{2(1-\nu)(1-2\nu)} + 24 B_0 B_4^2
\end{aligned} \tag{8.26}$$

フーリエ展開次数 $n = 3$ の釣合式

$$\begin{aligned}
& \overset{(\alpha^3 3)}{u^r} = u \cos 3\theta, \quad \overset{(\alpha^3 3)}{u^\theta} = v \sin 3\theta, \quad \overset{(\alpha^3 3)}{u^z} = w \cos 3\theta, \quad \varepsilon = u_{,r} + \frac{1}{r}u + \frac{3}{r}v + w_{,z}, \quad f = u + v, \quad g = u - v \text{ と} \\
& \text{して}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2} \varepsilon + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \varepsilon - \frac{9}{r^2} \varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon &= \frac{Xc_0(1-2\nu)}{r^3} \\
\frac{\partial^2}{\partial r^2} f + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f - \frac{16}{r^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - 3 \frac{\varepsilon}{r} \right) &= \frac{Xc_{11}}{r^4} + \frac{Xc_{12}}{r^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial r^2} g + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} g - \frac{4}{r^2} g + \frac{\partial^2}{\partial z^2} g + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + 3 \frac{\varepsilon}{r} \right) &= \frac{Xc_{21}}{r^2} + Xc_{22} r^2 \\
\frac{\partial^2}{\partial r^2} w + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w - \frac{9}{r^2} w + \frac{\partial^2}{\partial z^2} w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= \frac{Xc_{3z}}{r^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ただし } Xc_0 &= 8 \frac{(\nu-1)(4\nu-1)B_0 B_1 B_4^2}{(1-2\nu)(1-\nu)} \\
Xc_{11} &= -6(1+4\nu)B_0 B_3 B_4^4 \\
Xc_{12} &= 4 \frac{1-4\nu}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \\
Xc_{21} &= -2 \frac{1-12\nu+16\nu^2}{1-2\nu} B_0 B_1 B_4^2 \\
Xc_{22} &= \frac{5+5\nu+8\nu^2-16\nu^3}{4(1-2\nu)} - 6 \frac{3-20\nu+16\nu^2}{1-2\nu} B_0 B_4^2 \\
Xc_3 &= 8 B_0 B_1 B_4^2
\end{aligned} \tag{8.27}$$

ここで $\overset{(\alpha^2)}{u^p}$ を得るのと同じ操作を行うと、次のような解が得られる。

<フーリエ展開次数 $n = 1$ の補正解>

$$\begin{aligned}
\overset{(\alpha^3 1)}{u^r} &= \left[\frac{1}{2} C_2 \frac{1}{r^2} + \frac{40\nu^3 + 68\nu^2 - 3\nu - 15}{192(\nu-1)} r^4 + \frac{16\nu^4 - 12\nu^3 + 10\nu^2 + 20\nu - 9}{32(1-\nu)(1-2\nu)} B_3 z^2 \right. \\
&+ \frac{1}{2} C_3 \log r - 2B_0 B_4^2 \nu r^4 + \frac{1}{2} (-C_1 - C_4) r^2 + \frac{1}{24} z^4 + (2C_1 + C_4) z^2 \\
&- \frac{1+4\nu}{2} B_0 B_1 B_3 z^2 + \frac{\nu}{8} r^2 z^2 - \frac{3(4\nu-3)}{4(1-2\nu)} B_0 B_4^4 \\
&\left. + \frac{28\nu^3 + 8\nu^2 - 23\nu + 9}{64(1-\nu)(1-2\nu)} B_4^2 + \frac{16\nu^2 - 4\nu - 3}{4(1-2\nu)} B_0 B_1 B_4^2 \right] \cos \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^\theta &= \left[\frac{1}{2} C_2 \frac{1}{r^2} + \frac{-8\nu^3 - 4\nu^2 + 15\nu + 3}{192(\nu - 1)} r^4 - \frac{16\nu^4 - 12\nu^3 + 10\nu^2 + 20\nu - 9}{32(1 - \nu)(1 - 2\nu)} B_3 z^2 \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} C_3 \log r - 2B_0 B_4^2 \nu r^4 + \frac{1}{2} (3C_1 + C_4) r^2 - \frac{1}{24} z^4 - (2C_1 + C_4) z^2 - \frac{1 + 4\nu}{2} B_0 B_1 B_3 z^2 + \frac{\nu}{8} r^2 z^2 \\
&\quad \left. - \frac{3(4\nu - 3)}{4(1 - 2\nu)} B_0 B_4^4 + \frac{28\nu^3 + 8\nu^2 - 23\nu + 9}{64(1 - \nu)(1 - 2\nu)} B_4^2 + \frac{16\nu^2 - 4\nu - 3}{4(1 - 2\nu)} B_0 B_1 B_4^2 \right] \sin \theta \\
u^z &= \left[-\frac{3(9 - 16\nu)}{2(1 - 2\nu)} B_0 B_4^4 \frac{z}{r} + \frac{21 - 36\nu - 22\nu^2 + 32\nu^3}{16(\nu - 1)(1 - 2\nu)} B_4^2 \frac{z}{r} - \frac{16\nu^2 - 4\nu - 3}{2(1 - 2\nu)} B_0 B_1 B_4^2 \frac{z}{r} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} r z^3 + \left(\frac{6\nu^2 + 2\nu - 3}{16(\nu - 1)} + 3B_0 B_4^2 \right) r^3 z + C_4 r z \right] \cos \theta
\end{aligned} \tag{8.28}$$

ただし

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{44\nu^3 + 4\nu^2 - 27\nu - 3}{32(1 - \nu)} \frac{B_4^2}{B_3} - \frac{12\nu^4 - 10\nu^3 - 12\nu^2 - 2\nu + 3}{16(1 - \nu)(1 - 2\nu)} B_3 + 12\nu B_0 \frac{B_4^4}{B_3} \\
C_2 &= -\frac{28\nu^3 - 4\nu^2 - 45\nu + 3}{96(1 - \nu)} \frac{B_4^4}{B_3} + 8\nu B_0 \frac{B_4^6}{B_3} \\
C_3 &= -\frac{24\nu^3 - 6\nu^2 - 47\nu - 9}{16(1 - \nu)} B_4^2 + 24\nu B_0 B_4^4 \\
C_4 &= \frac{3 + 3\nu - 4\nu^2 - 20\nu^3}{24(\nu - 1)} \frac{B_4^2}{B_3} + \frac{28\nu^4 - 18\nu^3 - 46\nu^2 - 9\nu + 12}{24(1 - \nu)(1 - 2\nu)} B_3
\end{aligned} \tag{8.29}$$

<フーリエ展開次数 $n = 3$ の補正解>

$$\begin{aligned}
u^r &= \left[\frac{3(1 + 2\nu)}{4(B_3^2 + 2B_4^2)} B_0 B_1 B_4^6 \frac{1}{r^4} - \frac{3(1 + 2\nu)(4\nu - 3)}{2(B_3^2 + 2B_4^2)} B_0 B_3 B_4^6 \frac{1}{r^2} - \frac{3(1 + 2\nu)(r_2^4 + r_1^4)}{4(B_3^2 + 2B_4^2)} B_0 B_3 B_4^4 \frac{1}{r^2} \right. \\
&\quad + \frac{40\nu^2 - 10\nu - 9}{8} B_0 B_3 B_4^4 \frac{1}{r^2} + \frac{3(1 + 2\nu)(1 + 4\nu)}{4(B_3^2 + 2B_4^2)} B_0 B_4^4 r^4 + 2(1 - \nu)\nu B_0 B_4^2 r^4 + \frac{-8\nu^3 + 30\nu^2 + 23\nu + 9}{192} r^4 \\
&\quad \left. - \frac{3(r_2^4 + r_1^4)}{8(B_3^2 + 2B_4^2)} B_0 B_1 B_3 r^2 - \frac{B_3^2 - 10B_4^2}{4(B_3^2 + 2B_4^2)} B_0 B_1 B_3 \nu r^2 + \frac{\nu}{8} r^2 z^2 - 2B_0 B_1 B_4^2 \nu \right] \cos 3\theta \\
u^\theta &= \left[\frac{3(1 + 2\nu)}{4(B_3^2 + 2B_4^2)} B_0 B_1 B_4^6 \frac{1}{r^4} + \frac{3(1 + 2\nu)(4\nu - 3)}{2(B_3^2 + 2B_4^2)} B_0 B_3 B_4^6 \frac{1}{r^2} - \frac{3(1 + 2\nu)(r_2^4 + r_1^4)}{4(B_3^2 + 2B_4^2)} B_0 B_3 B_4^4 \frac{1}{r^2} \right. \\
&\quad - \frac{40\nu^2 - 10\nu - 9}{8} B_0 B_3 B_4^4 \frac{1}{r^2} + \frac{3(1 + 2\nu)(4\nu - 7)}{4(B_3^2 + 2B_4^2)} B_0 B_4^4 r^4 + 2(1 - \nu)\nu B_0 B_4^2 r^4 + \frac{-8\nu^3 + 14\nu^2 - 17\nu - 15}{192} r^4 \\
&\quad \left. + \frac{3(r_2^4 + r_1^4)}{8(B_3^2 + 2B_4^2)} B_0 B_1 B_3 r^2 + \frac{B_3^2 - 10B_4^2}{4(B_3^2 + 2B_4^2)} B_0 B_1 B_3 \nu r^2 - \frac{\nu}{8} r^2 z^2 + 2B_0 B_1 B_4^2 \nu \right] \sin 3\theta \\
u^z &= \left[B_0 B_3 B_4^4 \frac{z}{r^3} - B_0 B_1 B_4^2 \frac{z}{r} + \left\{ \frac{(\nu - 1)(1 + 4\nu)}{24} + (4\nu - 3) B_0 B_4^2 \right\} r^3 z \right] \cos 3\theta
\end{aligned} \tag{8.30}$$

従って、 α^3 の変位は以下ようになる。

$$u^r = u^r^{(\alpha^3)} + u^r^{(\alpha^3 1)} + u^r^{(\alpha^3 3)}, \quad u^\theta = u^\theta^{(\alpha^3)} + u^\theta^{(\alpha^3 1)} + u^\theta^{(\alpha^3 3)}, \quad u^z = u^z^{(\alpha^3)} + u^z^{(\alpha^3 3)} \tag{8.31}$$

8.2.3.4 解のまとめ

以上の操作により求められた変位は次のようにまとめられる。

$$u^r = \alpha^1 u^r^{(\alpha^1)} + \alpha^2 u^r^{(\alpha^2)} + \alpha^3 u^r^{(\alpha^3)}$$

$$u^\theta = \alpha \overset{(\alpha^1)}{u^\theta} + \alpha^2 \overset{(\alpha^2)}{u^\theta} + \alpha^3 \overset{(\alpha^3)}{u^\theta}$$

$$u^z = \alpha \overset{(\alpha^1)}{u^z} + \alpha^2 \overset{(\alpha^2)}{u^z} + \alpha^3 \overset{(\alpha^3)}{u^z}$$

また、これらの変位より生ずる応力は次のように表される。

$$\sigma^{rr} = \alpha^2 S_{rr20} + \alpha^2 S_{rr22} \cos 2\theta + \alpha^3 S_{rr31} \cos \theta + \alpha^3 S_{rr33} \cos 3\theta$$

$$\sigma^{\theta\theta} = \alpha^2 S_{\theta\theta20} + \alpha^2 S_{\theta\theta22} \cos 2\theta + \alpha^3 S_{\theta\theta31} \cos \theta + \alpha^3 S_{\theta\theta33} \cos 3\theta$$

$$\sigma^{zz} = \alpha S_{zz11} \cos \theta + \alpha^2 S_{zz20} + \alpha^2 S_{zz22} \cos 2\theta + \alpha^3 S_{zz31} \cos \theta + \alpha^3 S_{zz33} \cos 3\theta$$

$$\sigma^{r\theta} = \alpha^2 S_{r\theta22} \sin 2\theta + \alpha^3 S_{r\theta31} \sin \theta + \alpha^3 S_{r\theta33} \sin 3\theta$$

$$\sigma^{\theta z} = \alpha^3 S_{\theta z31} \sin \theta$$

$$\sigma^{zr} = \alpha^3 S_{zr31} \cos \theta$$

$$S_{zz11} = 2(\nu + 1)Gr$$

$$S_{rr20} = \frac{1}{8} \frac{(2\nu + 3)GB_4^2}{(1 - \nu)r^2} + \frac{1}{8} \frac{(2\nu + 3)Gr^2}{1 - \nu} + \frac{1}{8} \frac{(-2\nu - 3)GB_3}{1 - \nu}$$

$$S_{\theta\theta20} = -\frac{1}{8} \frac{(2\nu + 3)GB_4^2}{(1 - \nu)r^2} + \frac{1}{8} \frac{(8\nu^2 + 6\nu + 1)Gr^2}{1 - \nu} + \frac{1}{8} \frac{(-2\nu - 3)GB_3}{1 - \nu}$$

$$S_{zz20} = \frac{1}{2} \frac{(2\nu^3 + \nu^2 + \nu + 1)Gr^2}{1 - \nu} + \frac{1}{4} \frac{(-2\nu^3 + \nu^2 - \nu - 3)GB_3}{1 - \nu}$$

$$S_{rr22} = -6 \frac{B_0GB_3B_4^4}{r^4} + 8 \frac{B_1B_0GB_4^2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{(\nu + 1)G}{r^2} - 2B_1B_0GB_3$$

$$S_{\theta\theta22} = 6 \frac{B_0GB_3B_4^4}{r^4} - \frac{1}{2}(\nu + 1)Gr^2 - 24B_0GB_4^2r^2 + 2B_1B_0GB_3$$

$$S_{zz22} = 8 \frac{B_1B_0GB_4^2\nu}{r^2} + \frac{1}{2}(-2\nu^2 - \nu + 1)Gr^2 - 24B_0GB_4^2\nu r^2$$

$$S_{r\theta22} = -6 \frac{B_0GB_3B_4^4}{r^4} + 4 \frac{B_1B_0GB_4^2}{r^2} - \frac{1}{2}(\nu + 1)Gr^2 - 12B_0GB_4^2r^2 + 2B_1B_0GB_3$$

$$S_{rr31} = -\frac{1}{48} \frac{(28\nu^3 - 4\nu^2 - 45\nu + 3)GB_4^4}{(\nu - 1)B_3r^3} + \frac{1}{16} \frac{(-24\nu^4 + 4\nu^3 + 50\nu^2 + \nu - 9)GB_4^2}{(\nu - 1)(1 - 2\nu)r}$$

$$-16 \frac{B_0GB_4^4\nu}{B_3r^3} + 6 \frac{(-4\nu + 1)B_0GB_4^4\nu}{(1 - 2\nu)r} + 6 \frac{B_0GB_3B_4^4\nu}{r^3} + 2 \frac{(4\nu - 1)B_1B_0GB_4^2\nu}{(1 - 2\nu)r}$$

$$+ \frac{1}{24} \frac{(20\nu^4 - 6\nu^3 - 56\nu^2 - 12\nu + 15)GB_3r}{(\nu - 1)(1 - 2\nu)} + \frac{1}{48} \frac{(-52\nu^3 + 4\nu^2 + 69\nu - 3)GB_4^2r}{(\nu - 1)B_3}$$

$$+ \frac{1}{8} \frac{(-4\nu^3 + 2\nu^2 - 3)GB_3\nu r}{(\nu - 1)(2\nu - 1)} - 24 \frac{B_0GB_4^4\nu r}{B_3}$$

$$+ \frac{1}{48} \frac{(32\nu^3 + 4\nu^2 - 54\nu - 30)Gr^3}{\nu - 1} + 8B_0GB_4^2\nu r^3$$

$$\begin{aligned}
S_{\theta\theta 31} &= \frac{1}{48} \frac{(28\nu^3 - 4\nu^2 - 45\nu + 3)GB_4^4}{(\nu - 1)B_3r^3} - 3 \frac{(4\nu - 3)B_0GB_4^4}{r} + \frac{1}{16} \frac{(12\nu^3 - 16\nu^2 - 23\nu + 9)GB_4^2}{(1 - \nu)r} \\
&+ \frac{(8\nu^2 + 2\nu - 3)B_1B_0GB_4^2}{(1 - 2\nu)r} + 16 \frac{B_0GB_4^6\nu}{B_3r^3} - 6 \frac{B_0GB_3B_4^4\nu}{r^3} + \frac{1}{8} \frac{(16\nu^4 - 12\nu^3 - 12\nu^2 + \nu + 3)GB_3r}{(\nu - 1)(1 - 2\nu)} \\
&+ \frac{1}{16} \frac{(44\nu^3 + 4\nu^2 - 27\nu - 3)GB_4^2r}{(\nu - 1)B_3} + 24 \frac{B_0GB_4^4\nu r}{B_3} + \frac{1}{24} \frac{(8\nu^3 - 38\nu^2 - 27\nu - 3)Gr^3}{\nu - 1} + 16B_0GB_4^2\nu r^3 \\
S_{z z 31} &= 6 \frac{(1 - \nu)(4\nu - 3)B_0GB_4^4}{(1 - 2\nu)r} + \frac{1}{8} \frac{(-20\nu^4 + 28\nu^3 + \nu^2 - 32\nu + 15)GB_4^2}{(\nu - 1)(1 - 2\nu)r} \\
&+ 4 \frac{B_1B_0GB_4^2\nu^2}{(1 - 2\nu)r} + \frac{1}{12} \frac{(-12\nu^5 + 46\nu^4 - 42\nu^3 - 58\nu^2 + 15\nu + 3)GB_3r}{(\nu - 1)(2\nu - 1)} \\
&+ \frac{1}{12} \frac{(-20\nu^3 - 4\nu^2 + 3\nu + 3)GB_4^2r}{(\nu - 1)B_3} + \frac{1}{8} \frac{(-16\nu^5 + 28\nu^4 + 10\nu^3 - 4\nu^2 + 3\nu - 3)Gr^3}{(\nu - 1)(1 - 2\nu)} \\
&+ 6 \frac{(8\nu^3 - 10\nu^2 + \nu + 1)B_0GB_4^2\nu r^3}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} + 6B_0GB_4^2r^3 \\
S_{r\theta 31} &= -\frac{1}{48} \frac{(28\nu^3 - 4\nu^2 - 45\nu + 3)GB_4^4}{(\nu - 1)B_3r^3} + \frac{3}{2} \frac{(16\nu^2 - 4\nu - 3)B_0GB_4^4}{(1 - 2\nu)r} - \frac{1}{32} \frac{(48\nu^4 - 8\nu^3 - 80\nu^2 + 6\nu + 18)GB_4^2}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)r} \\
&- \frac{1}{2} \frac{(16\nu^2 - 4\nu - 3)B_1B_0GB_4^2}{(1 - 2\nu)r} - 16 \frac{B_0GB_4^6\nu}{B_3r^3} + 6 \frac{B_0GB_3B_4^4\nu}{r^3} + \frac{1}{8} \frac{(2\nu + 3)GB_4^2\nu}{(1 - \nu)r} - 4 \frac{B_1B_0GB_4^2\nu}{r} \\
&- \frac{1}{24} \frac{(2\nu + 1)(2\nu^2 - 3\nu + 3)GB_3r}{\nu - 1} + \frac{1}{96} \frac{(184\nu^3 + 8\nu^2 - 150\nu - 6)GB_4^2r}{(\nu - 1)B_3} + 24 \frac{B_0GB_4^4\nu r}{B_3} \\
&+ \frac{1}{24} \frac{(4\nu^3 - 4\nu^2 + 3\nu + 3)Gr^3}{\nu - 1} - 4B_0GB_4^2\nu r^3 \\
S_{\theta z 31} &= -3 \frac{(4\nu - 3)B_0GB_4^4z}{r^2} - \frac{1}{4} \frac{(\nu + 1)(4\nu - 3)GB_4^2z}{r^2} + \frac{(4\nu - 3)B_1B_0GB_4^2z}{r^2} \\
&- 48 \frac{B_0GB_4^4\nu z}{B_3} - 3 \frac{(\nu + 1)GB_4^2\nu z}{B_3} \\
&+ 4B_1B_0GB_3\nu z - (\nu + 1)GB_3\nu z \\
S_{z r 31} &= -3 \frac{(4\nu - 3)B_0GB_4^4z}{r^2} - \frac{1}{4} \frac{(\nu + 1)(4\nu - 3)GB_4^2z}{r^2} - \frac{(-4\nu + 3)B_1B_0GB_4^2z}{r^2} \\
&+ 48 \frac{B_0GB_4^4\nu z}{B_3} + 3 \frac{(\nu + 1)GB_4^2\nu z}{B_3} + \frac{1}{16} \frac{(10\nu^2 - 4\nu - 6)Gr^2z}{\nu - 1} \\
&+ \frac{1}{8} (2\nu - 3)GB_3z + \frac{1}{8} (8\nu^2 + 6\nu + 3)GB_3z - \frac{1}{8} (5\nu + 3)Gr^2z - 4B_1B_0GB_3\nu z \\
S_{r r 33} &= -6 \frac{(2\nu + 1)B_1B_0GB_4^6}{(B_3^2 + 2B_4^2)r^5} + \frac{1}{2} \frac{(26\nu + 9)B_0GB_3B_4^4}{r^3} + 3 \frac{(B_3^2 - 8B_4^2)(2\nu + 1)B_0GB_3B_4^4}{(B_3^2 + 2B_4^2)r^3} \\
&- 8 \frac{B_1B_0GB_4^2\nu}{r} - \frac{1}{2} \frac{\{(B_3^2 - 2B_4^2)(2\nu + 3) - 16B_4^2\nu\}B_1B_0GB_3r}{B_3^2 + 2B_4^2} \\
&+ 6 \frac{(2\nu + 1)B_0GB_4^4r^3}{B_3^2 + 2B_4^2} - \frac{1}{8} (\nu + 1)(2\nu - 3)Gr^3 - 8B_0GB_4^2\nu r^3 + 2B_1B_0GB_3\nu r \\
S_{\theta\theta 33} &= 6 \frac{(2\nu + 1)B_1B_0GB_4^6}{(B_3^2 + 2B_4^2)r^5} - 18 \frac{(2\nu + 1)B_0GB_3B_4^6}{(B_3^2 + 2B_4^2)r^3} + \frac{1}{2} \frac{(26\nu + 9)B_0GB_3B_4^4}{r^3} \\
&- 6 \frac{(B_3^2 - 2B_4^2)(2\nu + 1)B_0GB_3B_4^4}{(B_3^2 + 2B_4^2)r^3} - 6 \frac{B_1B_0GB_3B_4^4r}{B_3^2 + 2B_4^2} + \frac{(B_3^2 - 10B_4^2)B_1B_0GB_3\nu r}{B_3^2 + 2B_4^2} \\
&+ 6 \frac{(r_2^2 + 4r_1^2)(-8\nu^2 + 2\nu + 3)B_0Gr_2^6r^3}{B_3^2 + 2B_4^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -12 \frac{(2\nu+1)^2 B_0 G B_4^4 r^3}{B_3^2 + 2B_4^2} - 6(-r_1^4 + B_3^2 - 2B_4^2)(-8\nu^2 + 2\nu + 3) B_0 G r^3 \\
& + \frac{1}{8}(\nu+1)(2\nu-3) G r^3 + 16 B_0 G B_4^2 \nu r^3 + \frac{1}{2}(-4\nu+3) B_1 B_0 G B_3 r \\
S_{zz33} = & -24 \frac{(2\nu+1) B_0 B_3 B_4^6 \nu G}{B_3^2 + 2B_4^2} \frac{1}{r^3} + 2 \frac{(10\nu^2 + 4\nu + 1) B_0 B_3 B_4^4 G}{r^3} \\
& - 2 \frac{(4\nu^2 + \nu + 1) B_1 B_0 G B_4^2}{r} - 24 \frac{(2\nu+1) B_0 G B_4^4 \nu r^3}{B_3^2 + 2B_4^2} \\
& + \frac{1}{12}(\nu+1)(4\nu^2 - 9\nu - 1) G r^3 + 2(8\nu^2 + \nu - 3) B_0 G B_4^2 r^3 \\
S_{r\theta33} = & -6 \frac{(2\nu+1) B_1 B_0 G B_4^6}{(B_3^2 + 2B_4^2) r^5} + \frac{9(B_3^2 - 2B_4^2)(2\nu+1) B_0 G B_3 B_4^4}{2(B_3^2 + 2B_4^2) r^3} + 4 \frac{B_1 B_0 G B_4^2 \nu}{r} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\{(B_3^2 - 2B_4^2)(2\nu-3) + 32B_4^2 \nu\} B_1 B_0 G B_3 r}{B_3^2 + 2B_4^2} \\
& + \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2}(2\nu^2 - \nu - 3) - 72 \frac{(2\nu+1) B_0 B_4^4}{B_3^2 + 2B_4^2} + 48 B_0 B_4^2 \nu \right\} G r^3
\end{aligned}$$

8.2.4 シェル理論に基づく解析との比較

以上の解を用いて円筒断面の楕円化量とモーメントを計算し、シェル理論に基づいた解析と比較する。

8.2.4.1 シェル理論に基づく解析

シェル理論に基づいた解析としては文献 [22] に記載のものを用いた。この文献では Brazier の論文 [17] に基づき純曲げを受ける円筒シェルについて解析し、断面の楕円化と周方向伸び無し変形を仮定した上、ポテンシャルエネルギー最小の原理に基づき限界モーメントを求めている。

まず、純曲げによる二次的な変位として円筒断面の楕円化を仮定し、楕円化のパラメータ (ζ) を用いている。この二次的な変位は周方向伸び無し仮定より、次のように表される。

$$u^r = r_0 \zeta \cos 2\theta \quad u^\theta = -\frac{r_0 \zeta}{2} \sin 2\theta \quad (8.32)$$

よって、変形後の断面二次モーメントは次のように表される。

$$I_{(\zeta)} = I_o \left(1 - \frac{3}{2} \zeta + \frac{5}{8} \zeta^2 \right) \quad I_o = \pi r_0^3 t_0$$

軸方向の曲率を κ として、ポテンシャルエネルギーの停留条件により、次の関係が得られる。

$$\zeta = \frac{r_0^4 (1 - \nu^2)}{t_0^2} \kappa^2$$

結果として、シェル理論に基づく解析により得られるモーメントは次式となる。

$$M = EI_o \left\{ \kappa - \frac{3}{2} (1 - \nu^2) \frac{r_0^4}{t_0^2} \kappa^3 \right\} \quad (8.33)$$

モーメントの限界値は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\kappa_{CR} &= \frac{\sqrt{2} t_0}{3 r_0^2 \sqrt{1 - \nu^2}} \\
M_{CR} &= \frac{2}{9} \sqrt{\frac{2}{1 - \nu^2}} EI_o \frac{t_0}{r_0^2}
\end{aligned} \quad (8.34)$$

8.2.4.2 三次元解の中立面での変位

1 に対して t_0/r_0 を省略して、三次元解析により得られる中立面での変位を以下に示す。

$$\begin{aligned}
u^r &= \alpha \left[\frac{1}{2}(-z^2 - r_0^2 \nu) \right] \cos \theta \\
&+ \alpha^2 \left[-\frac{1}{4}r_0 z^2 - \frac{1}{2}(\nu^2 - \nu + 1)r_0^3 \right] + \alpha^2 \left[-(1 - \nu^2) \frac{r_0^5}{t_0^2} - \frac{1}{4}r_0 z^2 \right] \cos 2\theta \\
&+ \alpha^3 \left[-\frac{9}{16}\nu(1 + \nu) \frac{r_0^5}{t_0^2} - \frac{3}{16}(1 + \nu) \frac{r_0^4}{t_0^2} z^2 + \frac{1}{24}z^4 \right] \cos \theta \\
&+ \alpha^3 \left[\frac{1}{32}(1 + \nu)(10\nu^2 - 7\nu - 3) \frac{r_0^5}{t_0^2} + \frac{\nu}{8}r_0^2 z^2 \right] \cos 3\theta \\
u^\theta &= \alpha \left[\frac{1}{2}(z^2 - r_0^2 \nu) \right] \cos \theta \\
&+ \alpha^2 \left[\frac{1}{2}(1 - \nu^2) \frac{r_0^5}{t_0^2} + \frac{1}{4}r_0 z^2 \right] \cos 2\theta \\
&+ \alpha^3 \left[\frac{3}{16}\nu(1 + \nu) \frac{r_0^5}{t_0^2} + \frac{3}{16}(1 + \nu) \frac{r_0^4}{t_0^2} z^2 - \frac{1}{24}z^4 \right] \cos \theta \\
&+ \alpha^3 \left[\frac{1}{32}(1 + \nu)(-14\nu^2 + 13\nu + 1) \frac{r_0^5}{t_0^2} - \frac{\nu}{8}r_0^2 z^2 \right] \cos 3\theta \\
u^z &= \alpha [r_0 z] \cos \theta \\
&+ \alpha^2 \left[-\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{4}(2\nu - 3)r_0^2 z \right] + \alpha^2 \left[-\frac{\nu}{2}r_0^2 z \right] \cos 2\theta \\
&+ \alpha^3 \left[\frac{3}{8}(1 + \nu)(2\nu - 1) \frac{r_0^5}{t_0^2} z - \frac{1}{6}r_0 z^3 \right] \cos \theta + \alpha^3 \left[-\frac{1 - \nu^2}{4} \frac{r_0^5}{t_0^2} z \right] \cos 3\theta
\end{aligned} \tag{8.35}$$

上記の変位より軸方向の曲率変化 κ を計算する。本来、 κ は純曲げモーメントの作用下では軸方向に一定と考えられるから、 r 方向変位の z^2 の項のみを考慮すると、以下ようになる。

$$\kappa \simeq -\frac{\partial^2}{\partial z^2} u^r = \alpha + \frac{3}{8}(1 + \nu) \frac{r_0^4}{t_0^2} \alpha^3 \tag{8.36}$$

8.2.4.3 楕円化

三次元解析による中立面 ($r = r_0$) での楕円化を検討する。断面の楕円化は式 (8.35) の変位のフーリエ展開次数 $n = 2$ の項に表されている。

$$\begin{aligned}
u^r &= \alpha^2 \left[-(1 - \nu^2) \frac{r_0^5}{t_0^2} - \frac{1}{4}r_0 z^2 \right] \cos 2\theta \\
u^\theta &= \alpha^2 \left[\frac{1}{2}(1 - \nu^2) \frac{r_0^5}{t_0^2} + \frac{1}{4}r_0 z^2 \right] \cos 2\theta
\end{aligned} \tag{8.37}$$

今、円筒の中心軸のたわみ曲線は式 (8.35) より $y = -\alpha \frac{z^2}{2}$ で表されるから、付録 E より見かけの楕円化は次のようになる。

$$\begin{aligned}
u^r &= -r_0 \frac{\alpha^2}{4} z^2 \cos 2\theta \\
u^\theta &= r_0 \frac{\alpha^2}{4} z^2 \sin 2\theta
\end{aligned}$$

また、真の楕円化の r 方向変位と θ 方向変位のフーリエ展開次数 $n = 2$ の大きさの比は $2 : 1$ である。

従って、式 (8.37) の第 1 項は真の楕円化であり、第 2 項は見かけの楕円化である。また、真の楕円化量をシェル理論に基づく解析 [17] と比較すると次のようになる。

	三次元解析	シェル理論に基づく解析
$ u^r $	$\alpha^2(1-\nu^2)r_0^3\frac{r_0^2}{t_0^2}\cos 2\theta$	$r_0\zeta\cos 2\theta = \left\{ (1-\nu^2)r_0^3\frac{r_0^2}{t_0^2}\alpha^2 + \dots \right\} \cos 2\theta$
$ u^\theta $	$\alpha^2\frac{1-\nu^2}{2}r_0^3\frac{r_0^2}{t_0^2}\sin 2\theta$	$r_0\frac{\zeta}{2}\sin 2\theta = \left\{ \frac{1-\nu^2}{2}r_0^3\frac{r_0^2}{t_0^2}\alpha^2 + \dots \right\} \sin 2\theta$

ただし、 $\zeta = (1-\nu^2)r_0^2\frac{r_0^2}{t_0^2}\kappa^2$, κ は式 (8.36) を参照

従って、 α の 3 次以上の項を無視すれば、シェル理論と三次元解析の楕円化量は同じであることがわかる。

8.2.4.4 モーメント

三次元解析による変形後の断面におけるモーメントは次式を用いて得られる。

$$\text{モーメント } Md\bar{S} = r_{arm} \times \bar{T}d\bar{S} \quad (8.38)$$

(r_{arm} : 中立軸から微小面積までの位置ベクトル)

式 (8.38) によってモーメントを求めると次のようになる。

$$M = -2\alpha(1+\nu)G\pi r_0^3 t_0 + \alpha^3 \frac{3}{4}(1+\nu)^2(3-4\nu)G\pi \frac{r_0^7}{t_0} \quad (8.39)$$

ただし、1 に対して t_0/r_0 を省略している。

式 (8.39) とシェル理論に基づく解析により得られるモーメント (式 (8.33)) とを比較するため、式 (8.33) に式 (8.36) を代入する。

$$M = -2\alpha(1+\nu)G\pi r_0^3 t_0 + \alpha^3 \frac{3}{4}(1+\nu)^2(3-4\nu)G\pi \frac{r_0^7}{t_0} \dots$$

そして α^4 以上の高次の項を無視すると三次元解析により得られるモーメントに一致する。よって、本解析結果は軸方向の曲率変化をべき級数展開した解であることがわかる。

8.2.5 今回の解析で得られた解の特徴

三次元解析により得られた中立面での変位を図 8.3 と図 8.4 に示す。本節での解析では、荷重として純曲げモーメントを与えているので、断面の変形状態は材軸方向でどこでも同じであるはずが、図 8.3 では $z=0$ を離れるにつれ、違いが大きくなっている。これは純曲げの作用する円筒は変形後トーラスの一部となるのに対し、解析の基底ベクトルに変形前の円筒座標系の基底ベクトルを採用したため、変形状態を表現しきれず、誤差が生じるからである。

しかし、逆に今回得られた解はトーラス状に変形するものを $z=0$ のおいてべき級数展開したものと考えられる。また、純曲げ荷重下における断面の応力分布は理論的に z に無関係である。従って、 $z=0$ の断

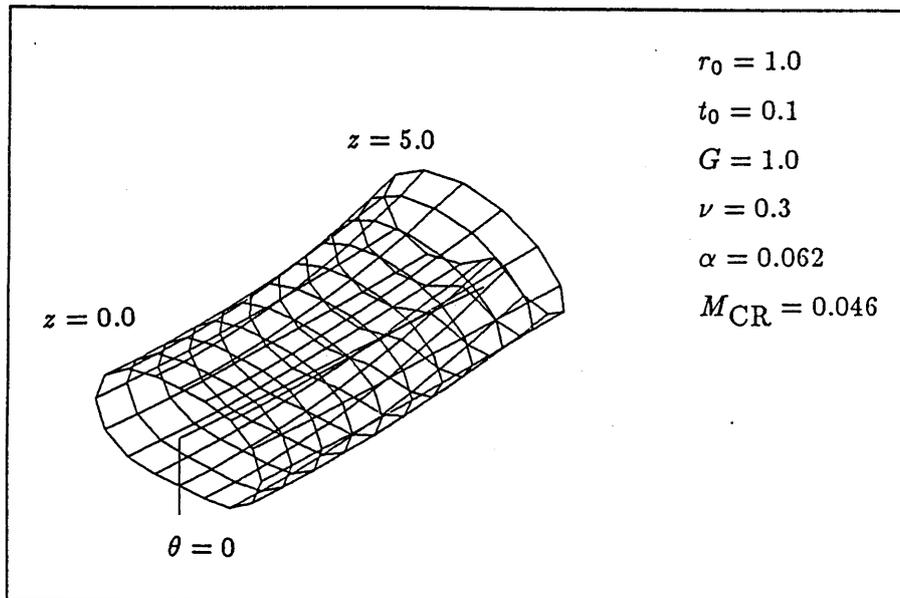


図 8.3: 屈服座屈時の中立面での変形 ($r_0/t_0 = 10.0$)

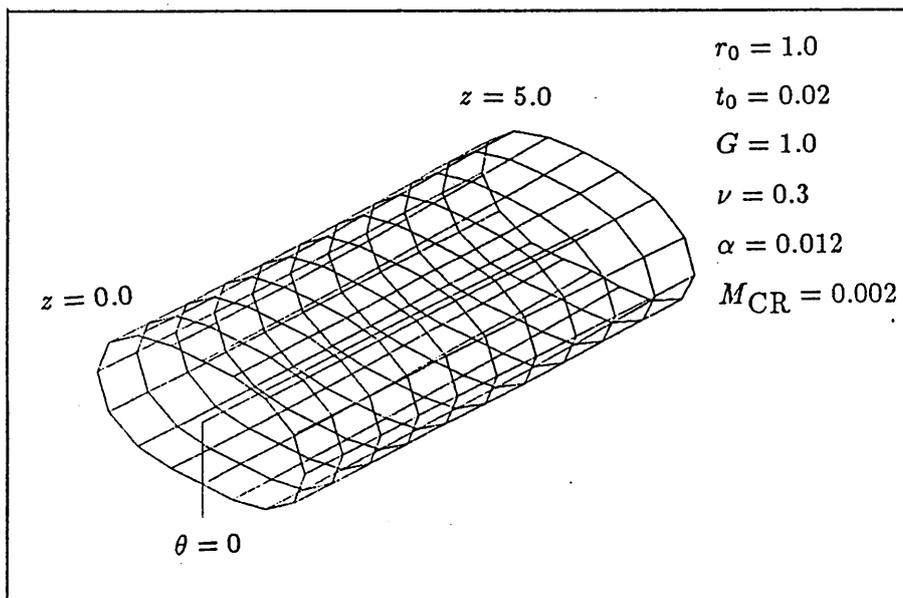
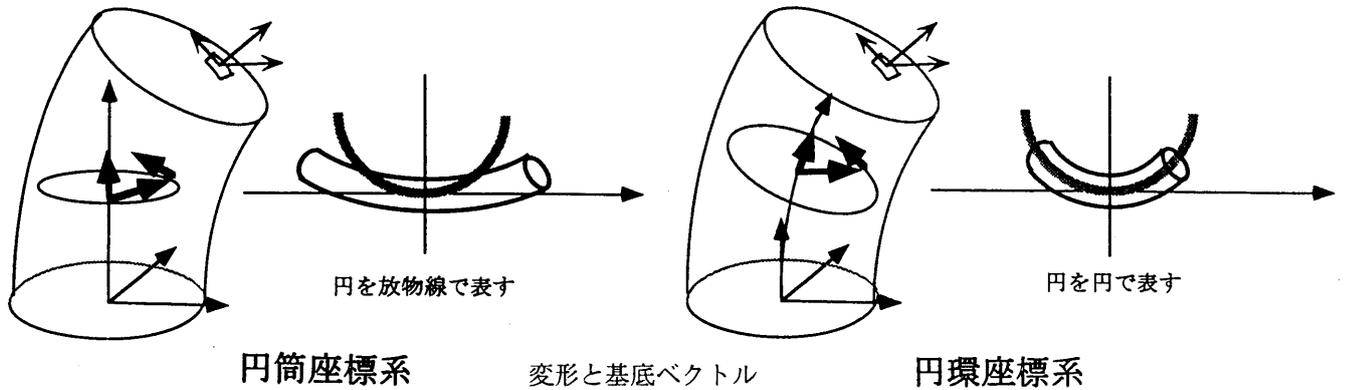


図 8.4: 屈服座屈時の中立面での変形 ($r_0/t_0 = 50.0$)

面について応力を検討すればよいと考えられる。



8.2.6 塑性座屈と局部座屈

以上の解析結果を応用して、円筒断面における塑性化を Mises の降伏条件を用いて考察する。

Mises の降伏条件は σ_i ($i = 1, 2, 3$) を主応力、 σ_y を降伏応力として次のように表される。

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}} \leq \sigma_y \quad (8.40)$$

Mises の降伏値の断面内での最大値を縦軸にとり、そのときのモーメントを横軸にとってグラフ化したのが図 8.5 ~ 8.7 である。ここでは、Mises の降伏条件はヤング係数で無次元化しており、モーメントは次に示すシェル理論による局部座屈モーメント M_{cr} で無次元化している。

$$M_{cr} \simeq 0.516 \frac{EI_o}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t_0}{r_0^2}$$

なお、最小局部座屈モーメントを計算するため、三次元解析においては、 $z = 0$ の断面を r 方向に 4 等分、 θ 方向に 16 等分した各格子点において式 (8.40) を計算し、その最大値を採用した。またシェル理論に基づいた解析においては、各格子点において、軸方向力から得られる $\sigma_x = N_x/t_0$ と円周方向曲げモーメントから得られる $\sigma_{\theta \max} = M_{\theta}/(t_0^3/12)$ の相互作用を次の計算式を用いて計算し、その最大値を採用した。

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}\{(\sigma_x - \sigma_{\theta \max})^2 + \sigma_{\theta \max}^2 + \sigma_x^2\}} \quad (8.41)$$

また、工学においては通常、初期形状における応力を用いて降伏値が与えられるので、本論においては、真応力 (変形後の応力) ではなく、初期形状における応力 (変形前の応力) を用いて計算を行った。

ここでシェルの材料を軟鋼 (ヤング係数 $E = 2.1 \times 10^4 \text{Kgf/mm}^2$ 、降伏応力 $\sigma_y = 21 \text{Kgf/mm}^2$) とする。 $\sigma_y/E = 1.0 \times 10^{-3}$ となるから、降伏限界を $\sigma_e/E = 1.0 \times 10^{-3}$ とした場合、弾性局部座屈が材料の塑性化より先に発生するシェルの条件は、 $\sigma_e/E < 1.0 \times 10^{-3}$ において $M/M_{cr} > 1.0$ となる $r_0/t_0 > 500$ であることが解る。また、図 8.7 より、このような薄肉のシェルの場合は法線保持を仮定したシェル理論によっても十分正確な解析が可能であると考えられる。逆に、 $r_0/t_0 < 500$ の範囲で円筒シェルの屈服座屈を解析するには、材料の塑性化の考慮の必要性を示している。

また、図 8.6 に示されるような $r_0/t_0 = 100$ の場合、 $\sigma_e/E < 1.0 \times 10^{-3}$ の範囲では、モーメントに対する σ_e の値は幾何学的非線形性の考慮の有無に関わらずほぼ同じである。よって、 $r_0/t_0 < 100$ の範囲では三次元線形解析によって、材料の塑性化の開始モーメントを予測して良いと考えられる。

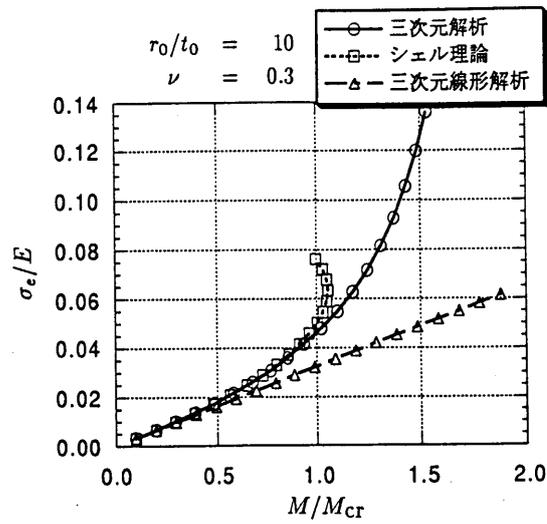


図 8.5: Mises の降伏値 ($r_0/t_0 = 10$)

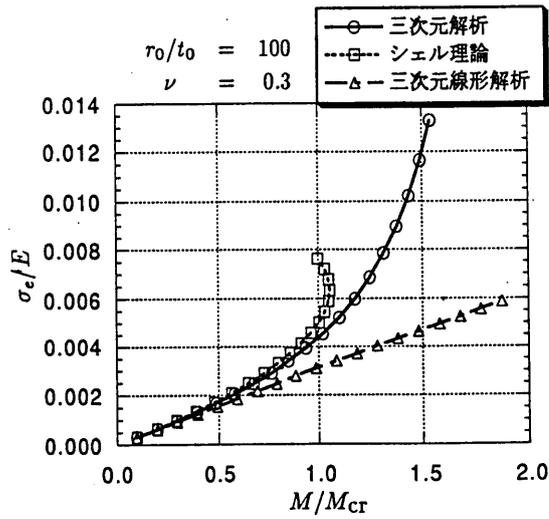


図 8.6: Mises の降伏値 ($r_0/t_0 = 100$)

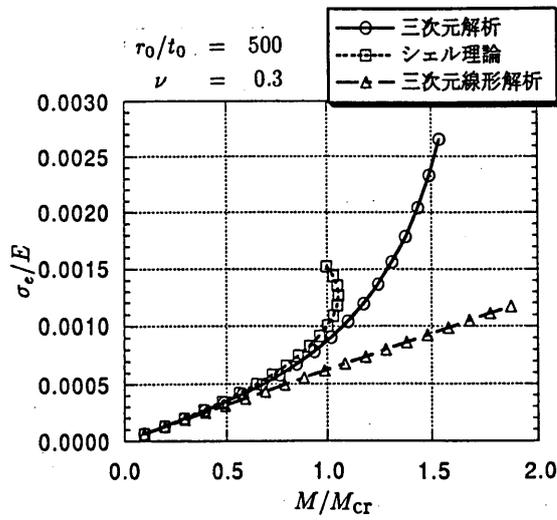


図 8.7: Mises の降伏値 ($r_0/t_0 = 500$)

8.3 横せん断力の働く円筒シェルの幾何学的非線形解析

本節においては、三次元幾何学的非線形解析の例として”横せん断力の働く円筒シェル”を取り上げ、解析する。また、その結果を応用して、横せん断力が作用する場合発生するの局部座屈の種類の違いを検証する。

8.3.1 はじめに

塔状円筒シェル構造は、タンクやサイロなどの貯蔵構造物、煙突、原子炉の圧力容器として多用されている。これらの構造物では座屈が問題となる。

これらの円筒シェル構造の座屈に関しての解析として、軸圧縮、純曲げ、一様外圧、捻り、等が単独に作用する場合の座屈、また、軸圧縮と純曲げ、内圧と曲げ、内圧と軸圧縮などの混合荷重下での座屈が行われてきた。また、地震時の様に横荷重が作用する塔状円筒シェルに対しての座屈に関する報告は、実験例 [23]、[24]、[25]、[26]、[27]、[28]、[29]、[30]、等があり、理論的研究としては、半谷らによる断面の楕円化の分布を仮定した解析 [31]、S.Y.Lu による級数による解析 [32]、Ru-Lin Lee によるスチフナーで補強をしたシェルの理論解析 [33]、H.M.Haydl は材料の剛塑性を考慮した数値解析 [34] を行っている。しかし、せん断力作用した場合の断面の変形状を報告した例は見受けられない。また、薄肉の円筒シェルが座屈する場合に曲げ座屈とせん断座屈のどちらが先行して発生するか、理論的には示されていないようである。

前節において純曲げの働く円筒シェルに、幾何学的非線形性を考慮した三次元理論解析を行い、エネルギー原理に基づいたシェル理論で示される円筒断面の楕円化について三次元理論解析手法の有効性を示した。

そこで本節においては、せん断力の働く片持ち梁の幾何学的非線形解析を行い、横せん断力による断面の変形を三次元有限幾何学的非線形解析により導きだす。また、その結果を応用して横せん断力の作用した片持ち梁のシェルに発生する局部座屈がせん断座屈と曲げ座屈のいずれであるかを検証する。

8.3.2 解析対象

横せん断力の働く円筒の屈服座屈を解析する。

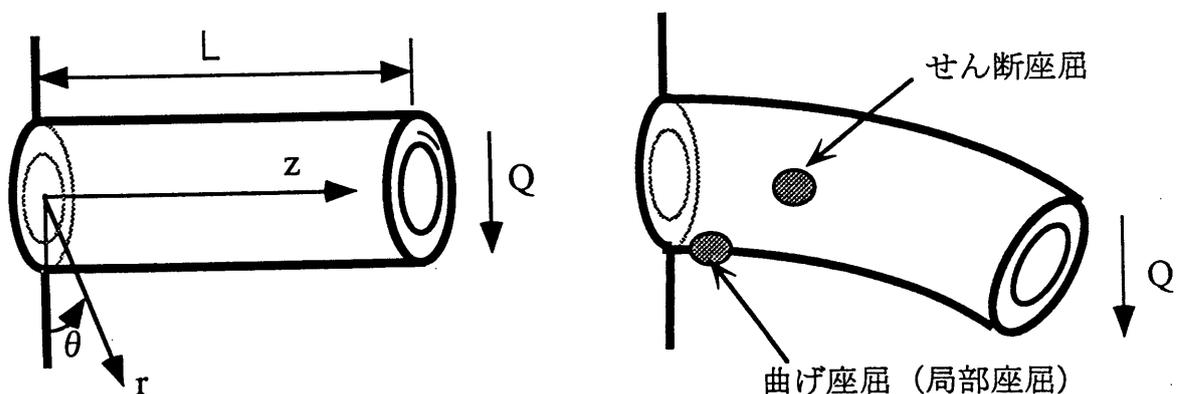


図 8.8: 座標系及び解析対象

図 8.8 に示すように円筒シェルの平均半径を r_0 、シェル厚を t_0 、内半径を $r_1 = r_0 - \frac{1}{2}t_0$ 、外半径を

$r_2 = r_0 + \frac{1}{2}t_0$ 、とする。このような荷重状態では円筒が短い場合には円筒の側面にせん断型の局部座屈が発生し、円筒が長い場合には、円筒の圧縮側に局部座屈が発生する。

なお、今回の解析例においては、変形前での基底ベクトルで表された釣合式 (7.19) を採用する。また、三次元物体であるシェルの境界条件として、シェルの内外面 ($r = r_1, r_2$) において表面力が 0 となる様にする。

$$\sigma^{rr} = \sigma^{r\theta} = \sigma^{rz} = 0 \quad \text{at } r = r_1, r_2 \quad (8.42)$$

また、応力を断面上で積分した軸力 (変形後の断面力の内、変形前の軸方向に向かう分力 N) を 0 とし、 $z = L$ における曲げモーメント M を 0、横せん断力 (変形後の断面力の内、変形前の軸方向に直交する分力 Q) を Q_0 であるようにし、長さ L の円筒の片持ち梁の端に横せん断力 Q_0 が作用している状態を再現する。

$$\begin{aligned} N &= \int \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_z}{|\mathbf{a}_z|} dS = 0 \quad \text{at } z = 0, z = L \\ Q &= \int \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_y}{|\mathbf{a}_y|} dS = Q_0, \quad M = \int (\mathbf{r}_{arm} \times \mathbf{T}) \cdot \frac{\mathbf{a}_y}{|\mathbf{a}_y|} dS = 0 \quad \text{at } z = L \quad (8.43) \\ \mathbf{r}_{arm} &: \text{応力の中立点から微小面積までの位置ベクトル} \end{aligned}$$

ただし、 $z = 0, z = L$ でのシェルの両端は、現実問題としてはスチフナーが存在し、シェル断面の変形が拘束されることが多く、シェルの両端は固定端として解析すべきである。しかし、ここで解析対象としているのは円筒に対する横せん断力の純粋な影響であるから、 $z = 0, L$ のシェル両端の断面の変形 (変位)、並びに、断面内の応力分布を制限しないこととする。

8.3.3 解析

釣合式 (8.3)~(8.5) を満足し、シェルの内外面 ($r = r_1, r_2$) において表面力 ($\sigma^{rr}, \sigma^{r\theta}, \sigma^{rz}$) が 0 となるような変位と応力を完全に得るのは難しいため、断面の変形性状の大枠をなす β^2 までの解を求める。

ただし、 $|\beta| < 1$ であるパラメータ β を用いて、変位を次のように表して解を求める。

$$\mathbf{u}^p = \beta \mathbf{u}^{p(\beta^1)} + \beta^2 \mathbf{u}^{p(\beta^2)} \quad (8.44)$$

8.3.3.1 β^1 の解 $\mathbf{u}^{p(\beta^1)}$ (線形解)

前章と同じ解析手順を踏む。つまり、 $\mathbf{u}^{p(\beta^1)}$ は剛体変位、剛体回転を除いた線形解を用いる。これは図 8.8 のモデルに相当し、解は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2\beta(1 - 2\nu)(z - L) \cos \theta \\ u^r &= \beta \left[-\left(\frac{1}{3}z - L\right) z^2 - \nu r^2(z - L) + \nu_1 B_3 z \right] \cos \theta \\ u^\theta &= \beta \left[\left(\frac{1}{3}z - L\right) z^2 - \nu r^2(z - L) - \nu_1 B_3 z \right] \sin \theta \\ u^z &= \beta \left[r(z - 2L)z - \frac{1}{2}r^3 + \nu_1 B_4 \frac{1}{r} \right] \cos \theta \quad (8.45) \end{aligned}$$

$$\text{ただし、} \quad \nu_1 = \frac{3 + 2\nu}{2} B_0 = \frac{1 + \nu}{4(r_2^2 - r_1^2)^2}, \quad B_1 = r_1^4 + r_1^2 r_2^2 + r_2^4, \quad B_3 = r_1^2 + r_2^2, \quad B_4 = r_1 r_2$$

ここで線形解析において β は $\beta = \frac{Q_0}{2EI} \left(I = \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{4} \right)$ と表される微小な量である。

8.3.3.2 β^2 の解 $u^{(\beta^2)}$

次に 8.1.3 節に示される手順に従って、 $u^{(\beta^1)}$ を釣合式の β^2 の項に代入して $u^{(\beta^2)}$ を求める。

まず、線形解 (8.45) から、厳正な応力を求め、変形後の釣合式 (8.3)~(8.5) に代入する。釣合式の左辺では β の一次の項は零となり、 β^2 の項と β^3 の項が左辺に残留し、付加物体力の項となる。

ここで、釣合式の β^2 の項を解析する。これらは、軸対称 ($n=0$) 物体力の部分と周方向フーリエ展開次数 $n=2$ の物体力の部分から成り立っている。そこでこれらの項を打ち消すための新たな解を線形の釣合式と線形な歪-変位関係を用いて求める。ただし、厳正な歪-変位関係の非線形項に由来する付加応力が物体表面 ($r=r_1, r_2$) において作用しているのので、これらを加えて、自由表面の条件 ($\sigma^{rr}=0, \sigma^{r\theta}=0, \sigma^{rz}=0$) を満足するようにしなければならない。また、 z が一定の断面において、変形後の軸力が零 ($N=0$) となるようにする。

β^2 の不釣り合い物体力を考慮するために解析する微分方程式は次のようになる。

軸対称 ($n=0$) の釣合式

$$\begin{aligned}\sigma_{,r}^{rr} + \frac{1}{r}(\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}) + \sigma_{,z}^{rz} + \beta^2 GX_{r20} &= 0 \\ \sigma_{,r}^{rz} + \frac{1}{r}\sigma^{rz} + \sigma_{,z}^{zz} + \beta^2 GX_{z20} &= 0\end{aligned}\quad (8.46)$$

フーリエ展開次数 $n=2$ の釣合式

$$\begin{aligned}\sigma_{,r}^{rr} + \frac{1}{r}(\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}) + \frac{1}{r}\sigma_{,\theta}^{\theta r} + \sigma_{,z}^{rz} + \beta^2 GX_{r22} \cos 2\theta &= 0 \\ \sigma_{,r}^{r\theta} + \frac{2}{r}\sigma^{r\theta} + \frac{1}{r}\sigma_{,\theta}^{\theta\theta} + \sigma_{,z}^{z\theta} + \beta^2 GX_{\theta22} \sin 2\theta &= 0 \\ \sigma_{,r}^{rz} + \frac{1}{r}\sigma^{rz} + \frac{1}{r}\sigma_{,\theta}^{\theta z} + \sigma_{,z}^{zz} + \beta^2 GX_{z22} \cos 2\theta &= 0\end{aligned}\quad (8.47)$$

$$\begin{aligned}X_{r20} &= -2 \frac{GB_4^2 \nu_1^2}{(1-2\nu)r^5} + \frac{GB_4^2 \nu_1}{r} + 2 \frac{(8\nu^2 + 2\nu - 1)GL^2 r}{1-2\nu} \\ &\quad + \frac{(-6\nu^2 + \nu + 4)Gr^3}{1-2\nu} + \frac{(-16\nu^2 - 6\nu + 5)G(-z+2L)rz}{1-2\nu} - 4GB_3\nu\nu_1 r \\ X_{z20} &= 2 \frac{(-4\nu + 1)G(-z+L)r^2}{1-2\nu} + 2 \frac{(-2\nu + 3)G(z-L)(z-2L)z}{1-2\nu} + 4 \frac{GB_3\nu\nu_1(-z+L)}{1-2\nu} \\ X_{r22} &= \frac{(4\nu + 1)GB_4^2 \nu_1}{r} + 2 \frac{(4\nu - 1)GL^2 r}{1-2\nu} - 2 \frac{GB_3\nu\nu_1 r}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \frac{(-16\nu^3 - 2\nu + 7)Gr^3}{1-2\nu} \\ &\quad + 2 \frac{GB_4^2 \nu_1(z-2L)z}{(1-2\nu)r^3} + 4 \frac{(-3\nu + 1)G(-z+2L)rz}{1-2\nu} \\ X_{\theta22} &= \frac{(-8\nu^2 + 2\nu - 1)GB_4^2 \nu_1}{(1-2\nu)r} + 2 \frac{(-4\nu + 1)GL^2 r}{1-2\nu} + 2 \frac{GB_3\nu\nu_1 r}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \frac{(-16\nu^3 + 6\nu - 3)Gr^3}{1-2\nu} \\ &\quad + 2 \frac{GB_4^2 \nu_1(z-2L)z}{(1-2\nu)r^3} + 4 \frac{(3\nu - 1)G(-z+2L)rz}{1-2\nu} \\ X_{z22} &= 2 \frac{(-4\nu + 3)GB_4^2 \nu_1(-z+L)}{(1-2\nu)r^2} + \frac{(4\nu^2 - 4\nu - 1)G(-z+L)r^2}{1-2\nu}\end{aligned}\quad (8.48)$$

式 (8.46), (8.47) は β^2 の係数が乗せられる変位を用いて次のように表される。

軸対称 ($n=0$) の釣合式 (8.46) は

$$u^r = u, \quad u^z = w, \quad \varepsilon = u_{,r} + \frac{1}{r}u + w_{,z} \text{ として}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \varepsilon + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial}{\partial r} X_{r20} + \frac{1}{r} X_{r20} + \frac{\partial}{\partial z} X_{z20} \right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2}u + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}u - \frac{1}{r^2}u + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial r} &= -X_{r20} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}w + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w + \frac{\partial^2}{\partial z^2}w + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} &= -X_{z20}\end{aligned}$$

フーリエ展開次数 $n = 2$ の釣合式 (8.47) は

$$\begin{aligned}u^r &= u \cos 2\theta, \quad u^\theta = v \sin 2\theta, \quad u^z = w \cos 2\theta, \quad \varepsilon = u_{,r} + \frac{1}{r}u + \frac{2}{r}v + w_{,z}, \quad f = u + v, \quad g = u - v\end{aligned}$$

として

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\varepsilon + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\varepsilon - \frac{4}{r^2}\varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\varepsilon &= -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial r}X_{r20} + \frac{1}{r}X_{r20} + \frac{2}{r}X_{\theta22} + \frac{\partial}{\partial z}X_{z20}\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}f + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}f - \frac{9}{r^2}f + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f + \frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial r} - 2\frac{\varepsilon}{r}\right) &= -(X_{r22} + X_{\theta22}) \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}g + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}g - \frac{1}{r^2}g + \frac{\partial^2}{\partial z^2}g + \frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial r} + 2\frac{\varepsilon}{r}\right) &= -(X_{r22} - X_{\theta22}) \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}w + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}w - \frac{4}{r^2}w + \frac{\partial^2}{\partial z^2}w + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} &= -X_{z22}\end{aligned}\tag{8.49}$$

不釣り合い表面力は、次のようになる。

軸対称 ($n = 0$) の場合の不釣り合い表面力

$$\begin{aligned}\sigma^{rr} &= \beta^2 \frac{1}{2}G \left[\frac{B_4^4 \nu_1^2}{(1-2\nu)r^4} + \frac{1}{4} \frac{(8\nu^3 - 8\nu + 9)r^4}{1-2\nu} + 4 \frac{(2\nu+1)L^2 \nu r^2}{1-2\nu} + 2 \frac{B_4^2 \nu_1 (-z+2L)z}{r^2} + \frac{(-4\nu+3)B_4^2 \nu_1}{1-2\nu} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{B_3^2 \nu \nu_1^2}{1-2\nu} + 4 \frac{B_3 \nu \nu_1 (-z+2L)z}{1-2\nu} - \frac{(-8\nu^2 - 6\nu + 3)(z-2L)r^2 z}{1-2\nu} + \frac{(2\nu+1)(z-2L)^2 z^2}{1-2\nu} \right] \\ \sigma^{\theta\theta} &= \beta^2 \frac{1}{2}G \left[\frac{B_4^4 \nu_1^2}{(1-2\nu)r^4} + \frac{1}{4} \frac{(8\nu^3 + 8\nu + 1)r^4}{1-2\nu} + 4 \frac{(2\nu+1)L^2 \nu r^2}{1-2\nu} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{B_4^2 \nu_1 (z-2L)z}{r^2} + 4 \frac{B_3 \nu \nu_1 (-z+2L)z}{1-2\nu} + \frac{(-8\nu^2 - 2\nu + 1)(-z+2L)r^2 z}{1-2\nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2\nu+1)(z-2L)^2 z^2}{1-2\nu} + 2 \frac{B_3^2 \nu \nu_1^2}{1-2\nu} + \frac{(4\nu-1)B_4^2 \nu_1}{1-2\nu} \right] \\ \sigma^{zz} &= \beta^2 \frac{1}{2}G \left[2 \frac{B_4^4 \nu \nu_1^2}{(1-2\nu)r^4} + \frac{1}{2} \frac{(-4\nu^2 + 4\nu + 5)\nu r^4}{1-2\nu} + 4 \frac{(4\nu^3 - \nu + 1)L^2 r^2}{1-2\nu} \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{(-\nu+1)B_3 \nu_1 (-z+2L)z}{1-2\nu} + 4 \frac{(4\nu^3 - 2\nu + 1)(z-2L)r^2 z}{1-2\nu} + 2 \frac{(z-2L)^2 z^2}{1-2\nu} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{(-\nu+1)B_3^2 \nu_1^2}{1-2\nu} + 2 \frac{B_4^2 \nu \nu_1}{1-2\nu} \right] \\ \sigma^{zr} &= \beta^2 \frac{1}{2}G \left[2 \frac{B_4^2 \nu_1 (-z+L)}{r} + (-4\nu^2 + 3)(-z+L)r^3 + 2(z-L)(z-2L)rz \right]\end{aligned}$$

フーリエ展開次数 $n = 2$ の場合の不釣り合い表面力

$$\begin{aligned}\sigma^{rr} &= \beta^2 \frac{1}{2}G \left[\frac{B_4^4 \nu_1^2}{r^4} + \frac{1}{4} \frac{(-10\nu + 9)r^4}{1-2\nu} + 4 \frac{L^2 \nu r^2}{1-2\nu} - 4 \frac{B_3 \nu^2 \nu_1 r^2}{1-2\nu} + \frac{(-2\nu+3)B_4^2 \nu_1}{1-2\nu} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{B_4^2 \nu_1 (-z+2L)z}{(1-2\nu)r^2} + \frac{(-4\nu^2 - 8\nu + 3)(-z+2L)r^2 z}{1-2\nu} + (z-2L)^2 z^2 \right] \cos 2\theta \\ \sigma^{\theta\theta} &= \beta^2 \frac{1}{2}G \left[-\frac{B_4^4 \nu_1^2}{r^4} + \frac{1}{4} \frac{(10\nu - 1)r^4}{1-2\nu} + 4 \frac{L^2 \nu r^2}{1-2\nu} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -4 \frac{B_3 \nu^2 \nu_1 r^2}{1-2\nu} + 2 \frac{B_4^2 \nu_1 (-z+2L)z}{(1-2\nu)r^2} + \frac{(4\nu^2+1)(z-2L)r^2 z}{1-2\nu} - (z-2L)^2 z^2 + \frac{(2\nu+1)B_4^2 \nu_1}{1-2\nu} \Big] \cos 2\theta \\ \sigma^{zz} &= \beta^2 \frac{1}{2} G \left[2 \frac{\nu r^4}{1-2\nu} + 4 \frac{(-\nu+1)L^2 r^2}{1-2\nu} - 4 \frac{(-\nu+1)B_3 \nu \nu_1 r^2}{1-2\nu} \right. \\ & \quad \left. + 4 \frac{B_4^2 \nu \nu_1 (-z+2L)z}{(1-2\nu)r^2} + 2 \frac{(-2\nu^2-\nu+2)(z-2L)r^2 z}{1-2\nu} + 4 \frac{B_4^2 \nu \nu_1}{1-2\nu} \right] \cos 2\theta \\ \sigma^{r\theta} &= -\beta^2 \frac{1}{2} G \left[-\frac{B_4^4 \nu_1^2}{r^4} + \frac{3}{4} r^4 + (z-2L)^2 z^2 + 2(-z+2L)r^2 z - B_4^2 \nu_1 \right] \sin 2\theta \\ \sigma^{\theta z} &= \beta^2 \frac{1}{2} G \left[2 \frac{B_4^2 \nu_1 (-z+L)}{r} + (z-L)r^3 + 4B_3 \nu \nu_1 (z-L)r - 2(2\nu+1)(z-L)(z-2L)rz \right] \sin 2\theta \\ \sigma^{zr} &= \beta^2 \frac{1}{2} G \left[2 \frac{B_4^2 \nu_1 (-z+L)}{r} + 3(-z+L)r^3 + 4B_3 \nu \nu_1 (-z+L)r + 2(2\nu+1)(z-L)(z-2L)rz \right] \cos 2\theta \end{aligned}$$

また、不釣り合い断面力(軸力)は次のようになる。

$$\begin{aligned} N_{\beta^2} &= \beta^2 \pi \left[\frac{(r_2^4 - r_1^4)(-4\nu^3 + 4\nu^2 + 4\nu - 1)G(-z+2L)z}{1-2\nu} + \frac{(r_2^2 - r_1^2)G(z-2L)^2 z^2}{1-2\nu} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 - r_1^2)(2\nu+3)(-6\nu^2 - \nu + 5)Gr_2^2 r_1^2}{1-2\nu} + \frac{1}{12} \frac{(r_2^5 - r_1^5)(-4\nu^3 - 3\nu + 5)G}{1-2\nu} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)^2 (r_2^2 - r_1^2)(2\nu+3)(-2\nu^2 + \nu + 2)G}{1-2\nu} + \frac{(r_2^4 - r_1^4)(\nu-1)(4\nu^2-3)GL^2}{1-2\nu} \right] \end{aligned}$$

解 (u^{β^2}) は、シェルの内外面及び断面における付加表面力・断面力を考慮して、次のようになる。

$$u^r = u^r + u^r, \quad u^\theta = u^\theta, \quad u^z = u^z + u^z \quad (8.50)$$

軸対称($n=0$)の解

$$\begin{aligned} u^r &= \beta^2 \left[\frac{1}{8} \frac{B_4^4 \nu_1^2}{(-\nu+1)r^3} - \frac{1}{2} \frac{\{\log(r_2) - \log(r_1)\}(2\nu^3 + 3\nu^2 + 4\nu - 1)B_4^4}{(r_2^2 - r_1^2)(-\nu+1)r} - \frac{1}{4} \frac{(2\nu+3)L^2 B_4^2}{(-\nu+1)r} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{48} \frac{(24\nu^3 - 2\nu^2 - 56\nu - 9)B_3 B_4^2}{(-\nu+1)r} - \frac{1}{24} \frac{(2\nu^4 - 48\nu^3 - 90\nu^2 + 3\nu + 15)r_2^2 r_1^2 r}{(\nu+1)(-\nu+1)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{96} \frac{(r_2^4 + r_1^4)(16\nu^4 + 144\nu^3 + 18\nu^2 - 45\nu + 9)r}{(\nu+1)(-\nu+1)} + \frac{1}{4} \frac{(4\nu^3 - 6\nu^2 + 10\nu - 3)L^2 B_3 r}{-\nu+1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{(\nu^2 + \nu + 1)\{r_2^2 \log(r_2) - r_1^2 \log(r_1)\}B_4^2 r}{(r_2^2 - r_1^2)(-\nu+1)} + \frac{1}{96} \frac{(10\nu+9)(2\nu-1)r^5}{-\nu+1} - \frac{1}{4} \frac{(4\nu^2 + 2\nu - 1)L^2 r^3}{-\nu+1} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{16} \frac{(12\nu^3 + 2\nu^2 + 1)B_3 r^3}{-\nu+1} + \frac{1}{4} \frac{(-\nu+2)(2\nu+3)B_4^2 (-z+2L)z}{(-\nu+1)r} + \frac{1}{4} \frac{(4\nu^3 - 8\nu^2 + 12\nu - 3)B_3 (z-2L)rz}{-\nu+1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \frac{(4\nu^2 + 3\nu - 2)(-z+2L)r^3 z}{-\nu+1} - \frac{1}{2} \frac{(\nu^2 + \nu + 1)B_4^2 r \log(r)}{-\nu+1} - \frac{1}{4} (z-2L)^2 r z^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^z &= \beta^2 \left[\frac{1}{8} \frac{(4\nu+1)(-z+L)r^4}{-\nu+1} + \frac{1}{4} \frac{(8\nu^2 - 8\nu + 5)B_3 (z-L)r^2}{-\nu+1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{24} \frac{(36\nu^4 + 8\nu^3 - 78\nu^2 + 51\nu + 73)B_4^2 z}{(\nu+1)(\nu-1)} + \frac{1}{24} \frac{(r_2^4 + r_1^4)(12\nu^4 - 16\nu^3 - 27\nu^2 + 24\nu + 37)z}{(\nu+1)(\nu-1)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{(4\nu^3 + 4\nu^2 + 4\nu - 7)\{r_2^2 \log(r_2) - r_1^2 \log(r_1)\}B_4^2 z}{(r_2^2 - r_1^2)(-\nu+1)} + \frac{1}{2} \frac{(4\nu^3 + 4\nu^2 + 4\nu - 7)B_4^2 (-z+L) \log(r)}{-\nu+1} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{10} z^5 + \frac{1}{2} L z^4 - \frac{2}{3} L^2 z^3 + \frac{1}{6} (4\nu-1)B_3 (z-3L)z^2 + \frac{1}{2} (2\nu-3)L^2 B_3 z \right] \end{aligned}$$

フーリエ展開次数 $n = 2$ の解

$$\begin{aligned}
u^r = \beta^2 & \left[\frac{1}{2} \frac{C_3}{r^3} - \frac{(-\nu+1)C_2}{(1-2\nu)r} + 4 \frac{(4\nu-5)B_0B_4^6}{B_3r} + \frac{1}{12} \frac{(20\nu^2+\nu-12)B_4^4}{B_3r} + \frac{B_0B_3B_4^4}{r} - \frac{1}{2} \frac{B_4^4\nu_1}{B_3r} \right. \\
& - \frac{1}{16} \frac{(8\nu^2-4\nu-1)B_4^2\nu_1r}{-\nu+1} + \frac{1}{192} \frac{(48\nu^3+32\nu^2-6\nu-23)r^5}{-\nu+1} \\
& + \frac{1}{36} \frac{(4\nu^2-\nu-12)B_1r^3}{B_3} + \frac{1}{3} \frac{(-2\nu^2-2\nu+1)L^2r^3}{1-2\nu} \\
& + \frac{4}{3} \frac{(4\nu^2+\nu-3)B_1B_0B_4^2r^3}{(\nu+1)B_3} - \frac{1}{3} \frac{C_1\nu r^3}{1-2\nu} - \frac{1}{6} \frac{B_4^2\nu_1r^3}{B_3} + \frac{1}{3} \frac{B_3\nu^2\nu_1r^3}{1-2\nu} - 8 \frac{B_0LB_3B_4^4z}{r^3} \\
& + 32 \frac{(-\nu+1)B_1B_0LB_4^2z}{r} + \frac{LB_4^2\nu_1z}{r} - \frac{1}{6} \frac{(16\nu^3-24\nu^2+4\nu+1)Lr^3z}{1-2\nu} + 4 \frac{(3\nu-1)B_1B_0Lr^3z}{(\nu+1)(1-2\nu)} \\
& + 4 \frac{(8\nu-3)(3\nu-1)B_0LB_4^2r^3z}{(\nu+1)(1-2\nu)} + \frac{64}{3} \frac{(\nu-1)B_1B_0L\nu^2r^3z}{(\nu+1)(1-2\nu)} + 4 \frac{B_0B_3B_4^4z^2}{r^3} \\
& - 4 \frac{B_1B_0B_4^2z^2}{r} - 4 \frac{(-4\nu+3)B_1B_0B_4^2z^2}{r} - \frac{1}{2} \frac{B_4^2\nu_1z^2}{r} - \frac{1}{8} \frac{(8\nu-2)B_4^2\nu_1r \log(r)}{-\nu+1} \\
& + 8(1-2\nu)B_1B_0B_4^2r \log(r) - \frac{1}{48}(\nu-1)(4\nu+1)r^5 - (2\nu+1)B_0B_4^2r^5 + B_1B_0B_3r^3 + \frac{1}{2}C_4r \\
& \left. - 2B_1B_0B_4^2r + \frac{1}{12}(8\nu^2+7)r^3z^2 + 16B_0B_4^2\nu r^3z^2 - \frac{1}{4}(z-2L)^2rz^2 + 4B_1B_0B_3(-z+2L)rz \right] \cos 2\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^\theta = \beta^2 & \left[\frac{1}{2} \frac{C_2}{r} + \frac{1}{2} \frac{C_3}{r^3} - 4 \frac{(4\nu-5)B_0B_4^6}{B_3r} - \frac{1}{12} \frac{(20\nu^2+\nu-12)B_4^4}{B_3r} + \frac{B_0B_3B_4^4}{r} + \frac{1}{2} \frac{B_4^4\nu_1}{B_3r} \right. \\
& - \frac{1}{16} \frac{(8\nu^2-4\nu-1)B_4^2\nu_1r}{-\nu+1} + \frac{1}{192} \frac{(48\nu^3-48\nu^2-30\nu+13)r^5}{-\nu+1} + \frac{1}{36} \frac{(4\nu^2-\nu-12)B_1r^3}{B_3} \\
& + \frac{1}{6} \frac{(-2\nu+3)C_1r^3}{1-2\nu} + \frac{1}{3} \frac{(-2\nu^2+7\nu-2)L^2r^3}{1-2\nu} + \frac{4}{3} \frac{(4\nu^2+\nu-3)B_1B_0B_4^2r^3}{(\nu+1)B_3} \\
& - \frac{1}{6} \frac{B_4^2\nu_1r^3}{B_3} - \frac{1}{6} \frac{(-2\nu+3)B_3\nu\nu_1r^3}{1-2\nu} - 8 \frac{B_0LB_3B_4^4z}{r^3} + 16 \frac{(2\nu-1)B_1B_0LB_4^2z}{r} - \frac{LB_4^2\nu_1z}{r} \\
& + \frac{1}{6} \frac{(-16\nu^3+48\nu^2-40\nu+5)Lr^3z}{1-2\nu} - \frac{4}{3} \frac{(-16\nu^3+40\nu^2-15\nu-3)B_1B_0Lr^3z}{(\nu+1)(1-2\nu)} \\
& - 4 \frac{(-8\nu+9)(3\nu-1)B_0LB_4^2r^3z}{(\nu+1)(1-2\nu)} + 4 \frac{B_0B_3B_4^4z^2}{r^3} + 8 \frac{(1-2\nu)B_1B_0B_4^2z^2}{r} + \frac{1}{2} \frac{B_4^2\nu_1z^2}{r} \\
& + \frac{1}{4} \frac{(4\nu-1)B_4^2\nu_1r \log(r)}{-\nu+1} - 8(1-2\nu)B_1B_0B_4^2r \log(r) \\
& - \frac{1}{48}(\nu-1)(4\nu+1)r^5 + (-2\nu+3)B_0B_4^2r^5 - B_1B_0B_3r^3 - \frac{1}{2}C_4r - 2B_1B_0B_4^2r \\
& \left. + \frac{1}{12}(8\nu^2-12\nu-11)r^3z^2 - 8(-2\nu+3)B_0B_4^2r^3z^2 + \frac{1}{4}(z-2L)^2rz^2 + 4B_1B_0B_3(z-2L)rz \right] \sin 2\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^z = \beta^2 & \left[8B_1B_0B_4^2(z-L) + B_4^2\nu_1(-z+L) - 16 \frac{(2\nu-3)B_0LB_4^6}{B_3r^2} - \frac{2}{3} \frac{(5\nu^2-2\nu-6)LB_4^4}{B_3r^2} \right. \\
& - \frac{1}{6} \frac{(\nu-2)Lr^4}{1-2\nu} + \frac{2}{3} \frac{(8\nu^2-5\nu-1)B_1B_0Lr^4}{(\nu+1)(1-2\nu)} + 6 \frac{(3\nu-1)B_0LB_4^2r^4}{(\nu+1)(1-2\nu)} \\
& \left. + 48 \frac{(2\nu-1)B_0LB_4^4r^2}{B_3} + \frac{1}{3} \frac{(22\nu^2+8\nu-12)LB_4^2r^2}{B_3} + 8 \frac{(4\nu-5)B_0B_4^6z}{B_3r^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \frac{(20\nu^2 - 5\nu - 21)B_4^4 z}{B_3 r^2} - 2 \frac{B_0 B_3 B_4^4 z}{r^2} - \frac{1}{6} \frac{(4\nu^2 - \nu - 12)B_1 r^2 z}{B_3} - 8 \frac{(4\nu - 3)B_1 B_0 B_4^2 r^2 z}{B_3} \\
& + \frac{B_4^2 \nu_1 r^2 z}{B_3} - \frac{1}{6} (2\nu^2 + 7\nu + 9) L B_3 r^2 + \frac{1}{6} (4\nu - 1) r^4 z \\
& + 8 B_0 B_4^2 r^4 z + B_3 \nu \nu_1 r^2 z - \nu(z - L)(z - 2L)r^2 z - 2B_1 B_0 B_3 r^2 z] \cos 2\theta
\end{aligned}$$

以下に $C_1 \sim C_6$ を示す。

$$\begin{aligned}
C_1 = & B_3 \nu \nu_1 + \frac{1}{48} \frac{(64\nu^4 - 136\nu^3 + 104\nu^2 - 140\nu + 57)B_3}{-\nu + 1} - 384 \frac{(2\nu - 1)B_1 B_0^2 B_4^4}{(\nu + 1)^2 B_3} \\
& - 24 \frac{(\nu + 1)\{\log(r_2) - \log(r_1)\}(1 - 2\nu)^2 B_1 B_4^4}{(r_2^2 - r_1^2)^5} \\
& - \frac{2}{3} \frac{(2\nu - 1)(-10\nu^2 - 11\nu + 3)B_4^2}{B_3} + 48 \frac{(2\nu^2 + \nu - 1)B_0 L^2 B_4^2}{\nu + 1} \\
& + 1152 \frac{(2\nu + 1)(2\nu - 1)B_0^2 B_4^2 \nu}{(\nu + 1)^2 B_3} + 8 \frac{(34\nu + 25)(2\nu - 1)B_0 B_4^4 \nu}{(\nu + 1)B_3} \\
& + 3 \frac{\{\log(r_2) - \log(r_1)\}(4\nu - 1)(1 - 2\nu)B_4^4 \nu_1}{(r_2^2 - r_1^2)^3 (-\nu + 1)} + 16 \frac{(1 - 2\nu)B_0 B_4^4 \nu_1}{(\nu + 1)B_3} \\
& - \frac{1}{2} \frac{(1 - 2\nu)(16\nu^2 - 8\nu + 10)B_0 B_3 B_4^2 \nu_1}{(\nu + 1)(-\nu + 1)} + 4(\nu - 1)L^2 \nu \\
C_2 = & 1152 \frac{(1 - 2\nu)(2\nu^2 + \nu - 1)B_0^2 B_4^8}{(\nu + 1)^2 B_3} + 8 \frac{(1 - 2\nu)(50\nu^2 + 29\nu - 24)B_0 B_4^5}{(\nu + 1)B_3} \\
& + 8 \frac{(\nu + 1)\{\log(r_2) - \log(r_1)\}(1 - 2\nu)^2 B_1^2 B_4^4}{(r_2^2 - r_1^2)^5} \\
& + \frac{1}{3} \frac{(1 - 2\nu)(52\nu^2 + 32\nu - 21)B_4^4}{B_3} - 16 \frac{(2\nu^2 + \nu - 1)B_1 B_0 L^2 B_4^2}{\nu + 1} \\
& - \frac{1}{144} \frac{(64\nu^4 - 136\nu^3 + 104\nu^2 - 140\nu + 57)B_3 B_4^2}{-\nu + 1} \\
& - \frac{\{\log(r_2) - \log(r_1)\}(4\nu - 1)(1 - 2\nu)B_1 B_4^4 \nu_1}{(r_2^2 - r_1^2)^3 (-\nu + 1)} - 8 \frac{(r_2^4 + r_1^4)(1 - 2\nu)B_0 B_4^4 \nu_1}{(\nu + 1)B_3} \\
& + \frac{(1 - 2\nu)(8\nu^2 - 4\nu + 5)B_0 B_3 B_4^4 \nu_1}{(\nu + 1)(-\nu + 1)} + \frac{1}{9} (1 - 2\nu)(2\nu^2 + 7\nu - 3)B_3 B_4^2 \\
C_3 = & 384 \frac{(4\nu - 2)B_0^2 B_4^{10}}{(\nu + 1)B_3^2} - 4 \frac{(52\nu^3 - 30\nu^2 - 62\nu + 25)B_0 B_4^8}{(\nu + 1)(-\nu + 1)B_3^2} \\
& - \frac{1}{4} \frac{(28\nu^3 - 18\nu^2 - 38\nu + 13)B_4^6}{(-\nu + 1)B_3^2} - \frac{1}{4} \frac{\{\log(r_2) - \log(r_1)\}(4\nu - 1)(2\nu + 3)B_3 B_4^6}{(r_2^2 - r_1^2)^3 (-\nu + 1)} \\
& + 4 \frac{(\nu + 1)\{\log(r_2) - \log(r_1)\}(1 - 2\nu)B_1 B_3 B_4^6}{(r_2^2 - r_1^2)^5} - \frac{1}{96} \frac{(16\nu^3 + 76\nu^2 - 74\nu - 1)B_4^4}{-\nu + 1} + 8B_0 L^2 B_3 B_4^4 \\
C_4 = & \frac{1}{96} \frac{(44\nu^2 - 62\nu + 35)B_1}{-\nu + 1} - 1152 \frac{(4\nu - 2)B_0^2 B_4^8}{(\nu + 1)B_3^2} \\
& + 12 \frac{(64\nu^3 - 28\nu^2 - 74\nu + 23)B_0 B_4^6}{(\nu + 1)(-\nu + 1)B_3^2} - 16 \frac{(\nu + 1)\{\log(r_2) - \log(r_1)\}(1 - 2\nu)B_1^2 B_4^4}{(r_2^2 - r_1^2)^5 B_3} \\
& + \frac{3}{4} \frac{(40\nu^3 - 16\nu^2 - 50\nu + 11)B_4^4}{(-\nu + 1)B_3^2} + \frac{\{\log(r_2) - \log(r_1)\}(4\nu - 1)(2\nu + 3)B_1 B_4^4}{(r_2^2 - r_1^2)^3 (-\nu + 1)B_3} \\
& + \frac{1}{32} \frac{(64\nu^3 + 44\nu^2 - 146\nu - 35)B_4^2}{-\nu + 1} + \frac{1}{4} \frac{(4\nu - 1)(2\nu + 3)\{r_2^4 \log(r_2) - r_1^4 \log(r_1)\}B_4^2}{(r_2^2 - r_1^2)(-\nu + 1)B_3} \\
& - 4 \frac{(\nu + 1)(1 - 2\nu)\{r_2^4 \log(r_2) - r_1^4 \log(r_1)\}B_1 B_4^2}{(r_2^2 - r_1^2)^3 B_3} - 8B_1 B_0 L^2 B_3
\end{aligned}$$

$$C_5 = 48 \frac{(2\nu - 1)B_0LB_4^4}{B_3} + \frac{1}{3} \frac{(22\nu^2 + 8\nu - 12)LB_4^2}{B_3} - \frac{1}{6}(2\nu^2 + 7\nu + 9)LB_3$$

$$C_6 = -16 \frac{(2\nu - 3)B_0LB_4^5}{B_3} - \frac{2}{3} \frac{(5\nu^2 - 2\nu - 6)LB_4^4}{B_3}$$

8.3.3.3 解のまとめ

以上の操作により求められた変位は次のようにまとめられる。

$$u^r = \beta u^{r(\beta^1)} + \beta^2 u^{r(\beta^2)}$$

$$u^\theta = \beta u^{\theta(\beta^1)} + \beta^2 u^{\theta(\beta^2)}$$

$$u^z = \beta u^{z(\beta^1)} + \beta^2 u^{z(\beta^2)}$$

また、これらの変位より生ずる応力は以下のように表される。

$$\sigma^{rr} = \beta^2 S_{rr20} + \beta^2 S_{rr22} \cos 2\theta$$

$$\sigma^{\theta\theta} = \beta^2 S_{\theta\theta20} + \beta^2 S_{\theta\theta22} \cos 2\theta$$

$$\sigma^{zz} = \beta S_{zz11} \cos \theta + \beta^2 S_{zz20} + \beta^2 S_{zz22} \cos 2\theta$$

$$\sigma^{r\theta} = \beta^2 S_{r\theta22} \sin 2\theta$$

$$\sigma^{\theta z} = \beta S_{\theta z11} \sin \theta + \beta^2 S_{\theta z22} \sin 2\theta$$

$$\sigma^{zr} = \beta S_{zr11} \cos \theta + \beta^2 S_{zr20} + \beta^2 S_{zr22} \cos 2\theta$$

$$S_{zz11} = 4(\nu + 1)G(z - L)r$$

$$S_{\theta z11} = -\frac{GB_4^2\nu_1}{r^2} + \frac{1}{2}(1 - 2\nu)Gr^2 - GB_3\nu_1$$

$$S_{zr11} = -\frac{GB_4^2\nu_1}{r^2} - \frac{1}{2}(2\nu + 3)Gr^2 + GB_3\nu_1$$

$$S_{rr20} = -\frac{1}{4} \frac{GB_4^4\nu_1^2}{(1 - \nu)r^4} + \frac{\{\log(r_2) - \log(r_1)\}(2\nu^3 + 3\nu^2 + 4\nu - 1)GB_4^4}{(r_2^2 - r_1^2)(1 - \nu)r^2}$$

$$-\frac{1}{24} \frac{(24\nu^3 - 2\nu^2 - 56\nu - 9)GB_3B_4^2}{(1 - \nu)r^2} + \frac{GL^2B_4^2\nu_1}{(1 - \nu)r^2}$$

$$+\frac{1}{48} \frac{(-48\nu^4 - 32\nu^3 + 68\nu^2 - 38\nu + 9)Gr^4}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{1}{8} \frac{(-12\nu^3 - 6\nu^2 + 16\nu - 3)GB_3r^2}{1 - \nu}$$

$$+\frac{GL^2\nu_1r^2}{1 - \nu} - \frac{GB_3\nu_1(z - 2L)z}{1 - \nu} + \frac{GB_4^2\nu_1(z - 2L)z}{(1 - \nu)r^2}$$

$$+\frac{G\nu_1(z - 2L)r^2z}{1 - \nu} + \frac{(2\nu^3 + 3\nu^2 + 4\nu - 1)GB_4^2 \log(r)}{1 - \nu} + \frac{GB_3^2\nu_1^2}{1 - 2\nu}$$

$$-\frac{1}{48} \frac{(48\nu^4 - 128\nu^3 - 124\nu^2 + 202\nu - 9)B_1G}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$+\frac{(-2\nu^3 - 3\nu^2 - 4\nu + 1)\{r_2^2 \log(r_2) - r_1^2 \log(r_1)\}GB_4^2}{(r_2^2 - r_1^2)(1 - \nu)}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{GL^2B_3\nu_1}{1-\nu} - \frac{1}{8} \frac{(16\nu^3 - 44\nu^2 + 24\nu + 1)GB_4^2\nu_1}{(1-\nu)(1-2\nu)} \\
S_{\theta\theta 20} = & \frac{3}{4} \frac{GB_4^4\nu_1^2}{(1-\nu)r^4} - \frac{\{\log(r_2) - \log(r_1)\}(2\nu^3 + 3\nu^2 + 4\nu - 1)GB_4^4}{(r_2^2 - r_1^2)(1-\nu)r^2} \\
& + \frac{1}{24} \frac{(24\nu^3 - 2\nu^2 - 56\nu - 9)GB_3B_4^2}{(1-\nu)r^2} - \frac{GL^2B_4^2\nu_1}{(1-\nu)r^2} \\
& + \frac{1}{48} \frac{(24\nu^3 - 52\nu^2 - 4\nu - 3)Gr^4}{1-\nu} + \frac{1}{2} \frac{(4\nu + 1)(2\nu + 1)GL^2r^2}{1-\nu} \\
& + \frac{1}{8} \frac{(12\nu^3 - 2\nu^2 + 16\nu - 1)GB_3r^2}{1-\nu} - \frac{GB_3\nu_1(z - 2L)z}{1-\nu} \\
& - \frac{GB_4^2\nu_1(z - 2L)z}{(1-\nu)r^2} + \frac{1}{2} \frac{(4\nu + 1)(2\nu + 1)G(z - 2L)r^2z}{1-\nu} \\
& + \frac{(2\nu^3 + 3\nu^2 + 4\nu - 1)GB_4^2 \log(r)}{1-\nu} + \frac{GB_3^2\nu\nu_1^2}{1-2\nu} \\
& - \frac{1}{48} \frac{(48\nu^4 - 128\nu^3 - 124\nu^2 + 202\nu - 9)B_1G}{(1-\nu)(1-2\nu)} + \frac{1}{16} \frac{(-32\nu^4 - 56\nu^3 + 68\nu^2 + 22\nu - 35)GB_4^2}{(1-\nu)(1-2\nu)} \\
& + \frac{(-2\nu^3 - 3\nu^2 - 4\nu + 1)\{r_2^2 \log(r_2) - r_1^2 \log(r_1)\}GB_4^2}{(r_2^2 - r_1^2)(1-\nu)} - \frac{GL^2B_3\nu_1}{1-\nu} \\
S_{zz 20} = & \frac{1}{2} \frac{GB_4^4\nu\nu_1^2}{(1-\nu)r^4} - \frac{1}{8} \frac{(4\nu^3 + 4\nu^2 + 9\nu + 2)Gr^4}{1-\nu} + 2 \frac{(2\nu^3 + \nu^2 + \nu + 1)GL^2r^2}{1-\nu} \\
& + \frac{1}{2} \frac{(6\nu^3 + 8\nu^2 - 4\nu + 5)GB_3r^2}{1-\nu} - \frac{(2\nu^3 - 2\nu^2 + \nu + 4)GB_3(z - 2L)z}{1-\nu} \\
& + 2 \frac{(2\nu^3 + \nu^2 + \nu + 1)G(z - 2L)r^2z}{1-\nu} + \frac{(-2\nu^3 + \nu + 7)GB_4^2 \log(r)}{1-\nu} \\
& + \frac{1}{48} \frac{(8\nu^3 + 16\nu^2 + 30\nu - 16)B_1G}{1-\nu} - \frac{(2\nu^3 - \nu^2 + \nu + 3)GL^2B_3}{1-\nu} \\
& - \frac{1}{4} \frac{(\nu + 2)(6\nu^2 - 2\nu + 1)GB_3^2}{1-\nu} - \frac{1}{8} \frac{(4\nu^3 + 16\nu^2 - 19\nu - 2)GB_4^2}{\nu - 1} \\
& + \frac{(2\nu^3 - \nu - 7)\{r_2^2 \log(r_2) - r_1^2 \log(r_1)\}GB_4^2}{(r_2^2 - r_1^2)(1-\nu)} \\
S_{zr 20} = & \frac{(2\nu^3 + 2\nu + 1)GB_4^2(-z + L)}{(1-\nu)r} + \frac{(2\nu^3 + 2\nu + 1)GB_3(z - L)r}{1-\nu} + \frac{(2\nu^3 + 2\nu + 1)G(-z + L)r^3}{1-\nu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{rr 22} = & \frac{1}{2} \frac{GB_4^4\nu_1^2}{r^4} + 2 \frac{C_2G}{(1-2\nu)r^2} - 3 \frac{C_3G}{r^4} - 8 \frac{(4\nu - 5)B_0GB_4^2}{B_3r^2} \\
& + \frac{1}{6} \frac{(-20\nu^2 + 5\nu + 21)GB_4^4}{B_3r^2} - 2 \frac{B_0GB_3B_4^4}{r^2} \\
& - \frac{1}{4} \frac{(8\nu - 2)GB_4^2\nu_1\{\log(r) + 1\}}{1-\nu} - \frac{1}{96} \frac{(16\nu^3 - 160\nu^2 + 154\nu + 7)Gr^4}{1-\nu} \\
& + \frac{1}{6} \frac{(4\nu^2 - \nu - 12)B_1Gr^2}{B_3} + 8 \frac{(4\nu^2 + \nu - 3)B_1B_0GB_4^2r^2}{(\nu + 1)B_3} \\
& - \frac{GB_4^2\nu_1r^2}{B_3} + 48 \frac{B_0GLB_3B_4^4z}{r^4} - 64 \frac{B_1B_0GLB_4^2z}{r^2} + \frac{(12\nu^2 - 6\nu - 1)GLr^2z}{1-2\nu} \\
& + 24 \frac{(3\nu - 1)B_1B_0GLr^2z}{(\nu + 1)(1-2\nu)} - 72 \frac{(3\nu - 1)B_0GLB_4^2r^2z}{(\nu + 1)(1-2\nu)} \\
& + \frac{1}{2} \frac{(-4\nu^2 - 8\nu + 3)G(-z + 2L)r^2z}{1-2\nu} - 24 \frac{B_0GB_3B_4^4z^2}{r^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +32 \frac{B_1 B_0 G B_4^2 z^2}{r^2} - \frac{(-8\nu^2 + 10\nu - 1) G \nu r^2 z^2}{1 - 2\nu} \\
& +16(1 - 2\nu) B_1 B_0 G B_4^2 \log(r) - \frac{5}{24}(\nu - 1)(4\nu + 1) G r^4 \\
& -2(2\nu + 5) B_0 G B_4^2 r^4 + 2(\nu + 1) G L^2 r^2 + 6 B_1 B_0 G B_3 r^2 \\
& + \frac{1}{2}(8\nu^2 + 7) G r^2 z^2 + 8 B_1 B_0 G B_3(-z + 2L)z + G C_4 \\
& + \frac{1}{8} \frac{(8\nu^2 + 13) G B_4^2 \nu_1}{1 - \nu} + 4(-4\nu + 3) B_1 B_0 G B_4^2 \\
S_{\theta\theta 22} = & -\frac{1}{2} \frac{G B_4^4 \nu_1^2}{r^4} + 3 \frac{C_3 G}{r^4} - 8 \frac{(4\nu - 5) B_0 G B_4^5}{B_3 r^2} + \frac{1}{6} \frac{(-20\nu^2 + 5\nu + 21) G B_4^4}{B_3 r^2} \\
& + 6 \frac{B_0 G B_3 B_4^4}{r^2} - \frac{1}{96} \frac{(64\nu^3 + 148\nu^2 + 46\nu - 3) G r^4}{1 - \nu} + \frac{1}{6} \frac{(4\nu^2 - \nu - 12) B_1 G r^2}{B_3} + 2 \frac{C_1 G r^2}{1 - 2\nu} \\
& + 2 \frac{(-2\nu^2 + 5\nu - 1) G L^2 r^2}{1 - 2\nu} + 8 \frac{(4\nu^2 + \nu - 3) B_1 B_0 G B_4^2 r^2}{(\nu + 1) B_3} - \frac{G B_4^2 \nu_1 r^2}{B_3} - 2 \frac{G B_3 \nu \nu_1 r^2}{1 - 2\nu} \\
& - 48 \frac{B_0 G L B_3 B_4^4 z}{r^4} + \frac{(28\nu^2 - 30\nu + 3) G L r^2 z}{1 - 2\nu} - 8 \frac{(16\nu^2 - 13\nu - 1) B_1 B_0 G L r^2 z}{(\nu + 1)(1 - 2\nu)} \\
& - 168 \frac{(3\nu - 1) B_0 G L B_4^2 r^2 z}{(\nu + 1)(1 - 2\nu)} + \frac{1}{2} \frac{(4\nu^2 + 1) G(z - 2L) r^2 z}{1 - 2\nu} + 24 \frac{B_0 G B_3 B_4^4 z^2}{r^4} \\
& - \frac{(-8\nu^2 + 10\nu - 1) G \nu r^2 z^2}{1 - 2\nu} + \frac{1}{2} \frac{(4\nu - 1) G B_4^2 \nu_1 \log(r)}{1 - \nu} \\
& - 16(1 - 2\nu) B_1 B_0 G B_4^2 \log(r) + 2(2\nu + 5) B_0 G B_4^2 r^4 \\
& - 2 B_1 B_0 G B_3 r^2 + \frac{1}{2}(8\nu^2 - 8\nu - 5) G r^2 z^2 - 96 B_0 G B_4^2 r^2 z^2 + 8 B_1 B_0 G B_3(z - 2L)z - G C_4 \\
& - \frac{1}{8} \frac{(8\nu^2 - 16\nu - 7) G B_4^2 \nu_1}{1 - \nu} + 4(4\nu - 3) B_1 B_0 G B_4^2 \\
S_{zz 22} = & 16 \frac{(4\nu - 5) B_0 G B_4^6}{B_3 r^2} + \frac{1}{3} \frac{(20\nu^2 - 5\nu - 21) G B_4^4}{B_3 r^2} - 4 \frac{B_0 G B_3 B_4^4}{r^2} + 2 \frac{C_2 G \nu}{(1 - 2\nu) r^2} \\
& - \frac{1}{6} \frac{(16\nu^3 + 8\nu^2 - 9\nu + 2) G r^4}{1 - \nu} - \frac{1}{3} \frac{(4\nu^2 - \nu - 12) B_1 G r^2}{B_3} \\
& + 2 \frac{(1 - \nu) G L^2 r^2}{1 - 2\nu} - 16 \frac{(4\nu^2 + \nu - 3) B_1 B_0 G B_4^2 r^2}{(\nu + 1) B_3} + 2 \frac{C_1 G \nu r^2}{1 - 2\nu} + 2 \frac{G B_4^2 \nu_1 r^2}{B_3} \\
& - 2 \frac{(1 - \nu) G B_3 \nu \nu_1 r^2}{1 - 2\nu} - 64 \frac{B_1 B_0 G L B_4^2 \nu z}{r^2} + 2 \frac{(8\nu^2 - 6\nu - 1) G L \nu r^2 z}{1 - 2\nu} - 192 \frac{(3\nu - 1) B_0 G L B_4^2 \nu r^2 z}{(\nu + 1)(1 - 2\nu)} \\
& - 128 \frac{(\nu - 1) B_1 B_0 G L \nu^2 r^2 z}{(\nu + 1)(1 - 2\nu)} + \frac{(-2\nu^2 - \nu + 2) G(z - 2L) r^2 z}{1 - 2\nu} \\
& + 32 \frac{B_1 B_0 G B_4^2 \nu z^2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{(-16\nu^3 + 44\nu^2 - 20\nu - 1) G r^2 z^2}{1 - 2\nu} \\
& + 16(\nu + 1) B_0 G B_4^2 r^4 + 2 G B_3 \nu \nu_1 r^2 + 4 G L \nu(3z - L) r^2 - 4 B_1 B_0 G B_3 r^2 \\
& - \frac{1}{2}(16\nu^2 - 12\nu - 1) G r^2 z^2 - 96 B_0 G B_4^2 \nu r^2 z^2 + \frac{(\nu + 2)(2\nu - 1) G B_4^2 \nu_1}{1 - \nu} + 16(\nu + 1) B_1 B_0 G B_4^2 \\
S_{r\theta 22} = & \frac{1}{2} \frac{G B_4^4 \nu_1^2}{r^4} + \frac{C_2 G}{(1 - 2\nu) r^2} - 3 \frac{C_3 G}{r^4} - 4 \frac{B_0 G B_3 B_4^4}{r^2} + \frac{1}{4} \frac{(4\nu - 1) G B_4^2 \nu_1 \{\log(r) + 1\}}{1 - \nu} \\
& + \frac{1}{96} \frac{(64\nu^3 - 156\nu^2 - 46\nu + 53) G r^4}{1 - \nu} + \frac{C_1 G r^2}{1 - 2\nu} - 2 \frac{(-3\nu + 1) G L^2 r^2}{1 - 2\nu} - \frac{G B_3 \nu \nu_1 r^2}{1 - 2\nu} \\
& + 16 \frac{B_1 B_0 G B_4^2 (z - 2L) z}{r^2} + 24 \frac{B_0 G B_3 B_4^4 (-z + 2L) z}{r^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \frac{(4\nu^2 - 6\nu + 1)GLr^2z}{1 - 2\nu} - 16 \frac{(4\nu^2 - \nu - 1)B_1B_0GLr^2z}{(\nu + 1)(1 - 2\nu)} \\
& - 48 \frac{(3\nu - 1)B_0GLB_4^2r^2z}{(\nu + 1)(1 - 2\nu)} + \frac{1}{4} \frac{(4\nu - 1)GB_4^2\nu_1 \log(r)}{1 - \nu} \\
& - 16(1 - 2\nu)B_1B_0GB_4^2 \log(r) - \frac{3}{8}Gr^4 + 2(-2\nu + 7)B_0GB_4^2r^4 \\
& - 4B_1B_0GB_3r^2 - (2\nu + 3)Gr^2z^2 - 48B_0GB_4^2r^2z^2 \\
& + 8B_1B_0GB_3(z - 2L)z - G(-z + 2L)r^2z - GC_4 + \frac{1}{2}GB_4^2\nu_1 \\
& + \frac{1}{8} \frac{(8\nu^2 - 4\nu - 1)GB_4^2\nu_1}{1 - \nu} + 4(4\nu - 1)B_1B_0GB_4^2 \\
S_{\theta z 22} = & 32 \frac{(2\nu - 3)B_0GLB_4^6}{B_3r^3} + \frac{4}{3} \frac{(5\nu^2 - 2\nu - 6)GLB_4^4}{B_3r^3} - 8 \frac{B_0GLB_3B_4^4}{r^3} + 32 \frac{B_1B_0GLB_4^2\nu}{r} \\
& + \frac{GB_4^2\nu_1(-z - 2L)}{r} - 96 \frac{(2\nu - 1)B_0GLB_4^4r}{B_3} \\
& - \frac{2}{3} \frac{(22\nu^2 + 8\nu - 12)GLB_4^2r}{B_3} + \frac{1}{6} \frac{(-16\nu^3 + 48\nu^2 - 38\nu + 1)GLr^3}{1 - 2\nu} \\
& - \frac{16}{3} \frac{(-4\nu^3 + 12\nu^2 - 5\nu - 1)B_1B_0GLr^3}{(\nu + 1)(1 - 2\nu)} - 16 \frac{(3\nu - 1)(-2\nu + 3)B_0GLB_4^2r^3}{(\nu + 1)(1 - 2\nu)} \\
& - 16 \frac{(4\nu - 5)B_0GB_4^6z}{B_3r^3} + \frac{1}{3} \frac{(-20\nu^2 + 5\nu + 21)GB_4^4z}{B_3r^3} + 12 \frac{B_0GB_3B_4^4z}{r^3} \\
& - 32 \frac{B_1B_0GB_4^2\nu z}{r} + 3 \frac{GB_4^2\nu_1z}{r} + \frac{1}{3} \frac{(4\nu^2 - \nu - 12)B_1Grz}{B_3} \\
& + 16 \frac{(4\nu - 3)B_1B_0GB_4^2rz}{B_3} - 2 \frac{GB_4^2\nu_1rz}{B_3} + \frac{1}{2}G(z - L)r^3 \\
& + 2GB_3\nu\nu_1(z - L)r + 4B_1B_0GB_3(3z - 2L)r + \frac{1}{3}(2\nu^2 + 7\nu + 9)GLB_3r \\
& + \frac{1}{6}(8\nu^2 - 20\nu - 9)Gr^3z - 32(-\nu + 2)B_0GB_4^2r^3z - 2GB_3\nu\nu_1rz \\
S_{zr 22} = & 32 \frac{(2\nu - 3)B_0GLB_4^6}{B_3r^3} + \frac{4}{3} \frac{(5\nu^2 - 2\nu - 6)GLB_4^4}{B_3r^3} \\
& - 8 \frac{B_0GLB_3B_4^4}{r^3} + 32 \frac{(1 - \nu)B_1B_0GLB_4^2}{r} + \frac{GB_4^2\nu_1(-z + 2L)}{r} \\
& + 96 \frac{(2\nu - 1)B_0GLB_4^4r}{B_3} + \frac{2}{3} \frac{(22\nu^2 + 8\nu - 12)GLB_4^2r}{B_3} \\
& - \frac{1}{6} \frac{(16\nu^3 - 24\nu^2 + 8\nu - 7)GLr^3}{1 - 2\nu} + \frac{4}{3} \frac{(16\nu^3 - \nu - 5)B_1B_0GLr^3}{(\nu + 1)(1 - 2\nu)} + 4 \frac{(8\nu + 3)(3\nu - 1)B_0GLB_4^2r^3}{(\nu + 1)(1 - 2\nu)} \\
& - 16 \frac{(4\nu - 5)B_0GB_4^6z}{B_3r^3} + \frac{1}{3} \frac{(-20\nu^2 + 5\nu + 21)GB_4^4z}{B_3r^3} + 12 \frac{B_0GB_3B_4^4z}{r^3} - 32 \frac{(1 - \nu)B_1B_0GB_4^2z}{r} \\
& - \frac{GB_4^2\nu_1z}{r} - \frac{1}{3} \frac{(4\nu^2 - \nu - 12)B_1Grz}{B_3} - 16 \frac{(4\nu - 3)B_1B_0GB_4^2rz}{B_3} + 2 \frac{GB_4^2\nu_1rz}{B_3} \\
& + \frac{3}{2}G(-z + L)r^3 + 2GB_3\nu\nu_1(-z + L)r \\
& + 4B_1B_0GB_3(-3z + 2L)r - \frac{1}{3}(2\nu^2 + 7\nu + 9)GLB_3r + \frac{1}{24}(32\nu^2 + 64\nu + 12)Gr^3z \\
& + 32(\nu + 1)B_0GB_4^2r^3z + 2GB_3\nu\nu_1rz
\end{aligned}$$

以上の解を用いて、パラメータ β と横せん断力 Q_0 との関係を求めると $\beta = \frac{Q_0}{2EI} \left(I = \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{4} \right)$ となる。

表 8.1: 楕円化

見かけの楕円化	モーメントによる楕円化	せん断力による楕円化
$u^r = \beta^2 \left[-\frac{1}{4}r_0(z-2L)^2z^2 \right]$	$-4(1-\nu^2)r_0^3\frac{r_0^2}{t_0^2}(z-L)^2$	$+\frac{78-218\nu-96\nu^2+216\nu^3}{16}r_0^5\frac{r_0^2}{t_0^2}$
$u^\theta = \beta^2 \left[\frac{1}{4}r_0(z-2L)^2z^2 \right]$	$+2(1-\nu^2)r_0^3\frac{r_0^2}{t_0^2}(z-L)^2$	$-\frac{42-81\nu-33\nu^2+70\nu^3}{8}r_0^5\frac{r_0^2}{t_0^2}$
		$\left. \begin{matrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{matrix} \right\}$

8.3.4 楕円化について

8.3.4.1 三次元解

t_0/r_0 を 1 に対して省略すると、変位 (u^r, u^θ, u^z) は以下ようになる。

$$\beta = \frac{Q_0}{2EI} \quad (8.51)$$

$$\begin{aligned}
u^r = & \beta \left[-\nu r_0^2(z-L) - \frac{1}{3}(z-3L)z^2 + (3+2\nu)r_0^2z \right] \cos \theta \\
& + \beta^2 \left[-\frac{1}{4}r_0(z-2L)^2z^2 - \frac{4\nu^2-5\nu+5}{2}r_0^3(z-2L)z - 2(1-\nu+\nu^2)L^2r_0^3 - \frac{1+14\nu-3\nu^2}{4}r_0^5 \right] \\
& + \beta^2 \left[\frac{78-218\nu-96\nu^2+216\nu^3}{16}r_0^5\frac{r_0^2}{t_0^2} - 4(1-\nu^2)r_0^3\frac{r_0^2}{t_0^2}(z-L)^2 - \frac{1}{4}r_0(z-2L)^2z^2 \right] \cos 2\theta \\
u^\theta = & \beta \left[-\nu r_0^2(z-L) + \frac{1}{3}(z-3L)z^2 - (3+2\nu)r_0^2z \right] \sin \theta \\
& + \beta^2 \left[-\frac{42-81\nu-33\nu^2+70\nu^3}{8}r_0^5\frac{r_0^2}{t_0^2} + 2(1-\nu^2)r_0^3\frac{r_0^2}{t_0^2}(z-L)^2 + \frac{1}{4}r_0(z-2L)^2z^2 \right] \sin 2\theta \\
u^z = & \beta \left[r_0(z-2L)z + (1+\nu)r_0^3 \right] \cos \theta \\
& + \beta^2 \left[\frac{-11-14\nu+3\nu^2}{2}r_0^4z - \frac{19-36\nu+32\nu^2}{8(1-\nu)}Lr_0^4 + \frac{-7+4\nu+4\nu^2+4\nu^3}{2(1-\nu)}Lr_0^4 \log(r_0) \right. \\
& \left. - \frac{1}{10}z^5 + \frac{1}{2}Lz^4 - \frac{2}{3}L^2z^3 - \frac{1-4\nu}{3}r_0^2(z-3L)z^2 - (3-2\nu)L^2r_0^2z \right] \\
& + \beta^2 \left[2(1-\nu^2)r_0^4\frac{r_0^2}{t_0^2}(z-L) - \nu r_0^2(z-L)(z-2L)z \right] \cos 2\theta
\end{aligned} \quad (8.52)$$

さらに、楕円化の影響を考察するため、 $\sin 2\theta, \cos 2\theta$ の項のみを取り出すと、表 8.1 のようになる。

8.3.4.2 楕円化の種類

今、片持ち梁のたわみ曲線は式 (8.45) より $y = \beta \left(-\frac{z^3}{3} + Lz^2 \right)$ となる。付録 E より、見かけの楕円化は次のようになる。

$$\begin{aligned}
u^r &= \beta^2 \left\{ -\frac{1}{4}r_0(z-2L)^2z^2 \right\} \cos 2\theta \\
u^\theta &= \beta^2 \left\{ \frac{1}{4}r_0(z-2L)^2z^2 \right\} \sin 2\theta
\end{aligned}$$

これは三次元解析解の楕円化を表す変位の第一項に相当する。

また、曲げモーメントの働く場合の周方向に不伸張である真の楕円化は、純曲げモーメント M の働く円筒の解析結果より次式で示される。

$$u^r = - \left(\frac{M}{EI} \right)^2 (1 - \nu^2) r_0^3 \frac{r_0^2}{t_0^2}$$

$$u^\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right)^2 (1 - \nu^2) r_0^3 \frac{r_0^2}{t_0^2}$$

本節の解析モデルのモーメントの分布は $M = Q_0(L - z)$ 、 $Q_0 = 2EI\beta$ であるから、モーメントによる楕円化は次のようになる。

$$u^r = -4(\beta(L - z))^2 (1 - \nu^2) r_0^3 \frac{r_0^2}{t_0^2}$$

$$u^\theta = 2(\beta(L - z))^2 (1 - \nu^2) r_0^3 \frac{r_0^2}{t_0^2}$$

従って、楕円化の第二項は、モーメントによる楕円化と考えられる。

よって、残った第三項はせん断力による楕円化の項であると考えられる。

8.3.5 楕円化を考慮した局部座屈の発生予測

以上の解析結果を用いて、断面の楕円化を考慮した片持ち梁の円筒に発生する局部座屈を解析する。なお、局部座屈の発生基準として薄肉の仮定を適用したシェル理論のものを用いた。

8.3.5.1 楕円化量

せん断力に起因する楕円化の評価 せん断力による楕円化と曲げモーメントによる楕円化の大きさを把握するため周方向の曲率変化を比較する。まず、円筒シェルの楕円化に対して、周方向に不伸長の仮定を設けた場合の変位と曲率変化を求める。ここで、円周方向の伸び歪と曲率変化は次のように表される。

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r_0} (u_{,\theta}^\theta + u^r)$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{r_0^2} (u_{,\theta\theta}^\theta - u_{,\theta\theta}^r)$$

楕円化のパラメータとして ζ を使い、 $u^r = r_0 \zeta \cos 2\theta$ とする。周方向に不伸長の仮定 ($\varepsilon_\theta = 0$) から、 $u^\theta = r_0 \left(-\frac{1}{2} \zeta \right) \sin 2\theta$ となる。また、この変位から周方向の曲率変化を求めると次のようになる。

$$\kappa_\theta = \frac{3}{r_0} \zeta \cos 2\theta$$

いま、三次元解析による断面の楕円化に関する変位は次のようであった。

$$u^r = \beta^2 \left[\begin{array}{l} \text{モーメントによる楕円化} \\ -4(1 - \nu^2) r_0^3 \frac{r_0^2}{t_0^2} (z - L)^2 \end{array} + \begin{array}{l} \text{せん断力による楕円化} \\ \frac{78 - 218\nu - 96\nu^2 + 216\nu^3}{16} r_0^5 \frac{r_0^2}{t_0^2} \end{array} \right] \cos 2\theta$$

$$u^\theta = \beta^2 \left[\begin{array}{l} 2(1 - \nu^2) r_0^3 \frac{r_0^2}{t_0^2} (z - L)^2 \\ - \frac{42 - 81\nu - 33\nu^2 + 70\nu^3}{8} r_0^5 \frac{r_0^2}{t_0^2} \end{array} \right] \sin 2\theta$$

上記の変形のうち、モーメントによる楕円化の項は不伸長変形を満足しているが、せん断力による楕円化の項は満足していない。また、円筒シェルの局部座屈に影響する曲率変化 κ_θ は次のようになる。

$$\kappa_\theta = \frac{r_0^5}{t_0^2} \beta^2 \left[-12(1 - \nu^2) \frac{(z - L)^2}{r_0^2} + \frac{36 - 137\nu - 63\nu^2 + 146\nu^3}{4} \right] \cos 2\theta$$

上式の第1項はモーメントに関する項であり、第2項はせん断力に関する項である。 $\frac{(z-L)^2}{r_0^2} = 1$ として、これらの項の大きさを比較すると次のようになる。

ν	$-12(1-\nu^2)$	$\frac{36-137\nu-63\nu^2+146\nu^3}{4}$
0.1	-11.88	5.45
0.2	-11.52	1.81
0.3	-10.92	-1.71
0.4	-10.08	-4.88

この結果、 ν が 0.2 ~ 0.3 の場合、せん断力に起因する曲率変化は小さいものと考えられる。しかし、 $|(z-L)/r_0|$ が 1 に比べ小さい場合にはせん断力による影響もあると考えられる。

本節では、ポアソン比が 0.3 で軸長が 1 以上である円筒シェルの局部座屈を取り扱うので、せん断力に起因する曲率変化を無視することにする。

局部座屈の発生予測のための楕円化量の計算 楕円化は ζ を楕円化のパラメータとして、次のように発生するものとする。

$$u^r = r_0 \zeta \cos 2\theta, \quad u^\theta = -\frac{1}{2} r_0 \zeta \sin 2\theta$$

また、楕円化をもたらす要因として、曲げモーメントの影響を考慮し、解析モデルによっては、更にシェル理論の線形解の曲げ解を加え、シェルの端部における楕円化の拘束を再現する。

楕円化のパラメータ ζ は、例えばシェル端部において楕円化を拘束した場合、次のように計算される。

$$\begin{aligned} \zeta &= -(1-\nu^2) \frac{r_0^4}{t_0^2} \left\{ \frac{(z-L)Q_0}{EI_0} \right\}^2 \\ &\quad + W_1 e^{\omega_{A1}z} + \overline{W}_1 e^{\overline{\omega}_{A1}z} + W_2 e^{\omega_{Bz}} + \overline{W}_2 e^{\overline{\omega}_{Bz}} + W_3 e^{\omega_{C1}z} \\ &\quad + W_4 e^{-\omega_{A1}z} + \overline{W}_4 e^{-\overline{\omega}_{A1}z} + W_5 e^{-\omega_{Bz}} + \overline{W}_5 e^{-\overline{\omega}_{Bz}} + W_6 e^{-\omega_{C1}z} \\ &= A_2 Q_0^2 \end{aligned} \quad (8.53)$$

ただし $I_0 = \pi r_0^3 t$, $A = 2\pi r_0 t_0$, ω_X :シェルの特性値 である。また、 $W_1 \sim W_6$ は、端部の変形の固定条件により決定される線形解析による曲げ応力解の未定定数であり、フーリエ展開次数 $n = 2$ の変位を $z = 0, L$ において $u^r = 0, u^\theta = 0, u^z = 0, u_{,z}^r = 0, u_{,z}^\theta = 0$ とするようにより決める。

この楕円化のパラメータ ζ を用いて、シェルの円周方向曲率変化 κ_θ と円周方向の曲率半径 ρ は次のように表される。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r_0} + \kappa_\theta, \quad \kappa_\theta = \frac{3}{r_0} \zeta \cos 2\theta$$

また、変形後の断面二次モーメント $I(\zeta)$ は次のようになる。

$$I(\zeta) = I_0 \left(1 + \frac{3}{2} \zeta + \frac{5}{8} \zeta^2 \right)$$

以上の楕円化パラメータ ζ に関する仮定を採用し、円筒シェルの両端の楕円化を拘束した場合の円筒シェルの変形性状を図に示すと図 8.9 となる。また解析手法の比較として、半谷の手法 [31] を用いて、同じ材端たわみ量を発生する円筒シェルの変形性状を同図に示す。

なお、半谷は、楕円化量を z 方向に正弦関数で分布すると仮定し、ポテンシャルエネルギーの停留により、 $z = L$ でのたわみ量 d を用いて次のように楕円化パラメータを計算している。

$$\zeta = -\frac{162r_0^4(1-\nu^2)(\pi^2-4)}{\pi^3t_0^2L^2(9L^2-3\nu\pi^2r_0^2)}d^2 \sin \frac{\pi}{L}z = \zeta_0 \sin \frac{\pi}{L}z$$

$$Q_0 = \frac{9EI_0}{L^3} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\zeta_0 \frac{\pi^2-4}{\pi^3} \right) d$$

図 8.9 からも、本論の楕円化パラメータ ζ に関する仮定が正しいと推測される。

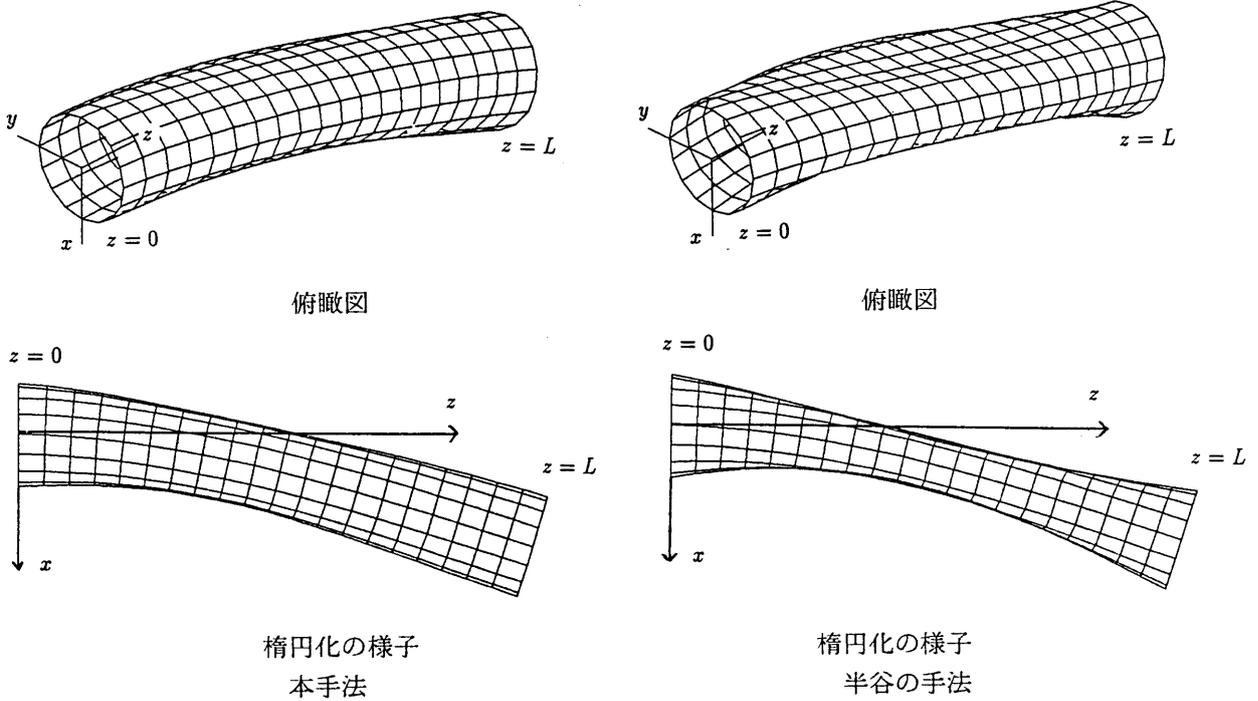


図 8.9: シェルの変形

$$r_0 = 1, t_0 = 0.05, L = 10, \beta = 0.03$$

8.3.5.2 局部座屈の発生基準

横せん断力の作用する円筒に発生する局部座屈の種類として、せん断変形による座屈、曲げによる軸圧縮座屈を仮定した。

曲げによる軸圧縮座屈 軸圧縮による座屈値は、文献 [22] を参照して、軸圧縮を受ける円筒シェルの古典座屈応力を用いた。

軸圧縮座屈は、円筒の圧縮側 ($z = z_1$, $5\pi/6 < \theta < 7\pi/6$) で発生するものとし、 $z = z_1$, $\theta = 5\pi/6 (= \theta_0)$ での軸圧縮応力 σ_z を次式で計算した。

$$\sigma_z = \frac{Q_0(L - z_1)}{I(\zeta)} \{ (r_0 + u^r) \cos \theta_0 - u^\theta \sin \theta_0 \}$$

また、軸圧縮の古典座屈応力 σ_{cr} は、以下の式を用いた。

$$\sigma_{cr} = \frac{Et_0}{\rho} \frac{1}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}}$$

$\sigma_z = \sigma_{cr}$ となったとき座屈するものとし、最小座屈せん断力 Q_{cr} は Q_0 に関する 6 次式の最小値となる。

$$\begin{aligned} & \frac{15}{8} A_1 A_2^3 \cos 2\theta_0 Q_0^6 + \left(\frac{5}{8} + \frac{9}{2} \cos 2\theta_0 \right) A_1 A_2^2 Q_0^4 \\ & - (\cos 2\theta_0 \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \sin \theta_0) A_2 Q_0^3 + \left(3 \cos 2\theta_0 + \frac{3}{2} \right) A_1 A_2 Q_0^2 - \cos \theta_0 Q_0 + A_1 = 0 \\ & A_1 = \frac{I_0 E t_0}{(L - z_1) r_0^2} \frac{1}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \end{aligned}$$

せん断座屈 せん断力による座屈は、限られた範囲で発生するものであり、シェル全体には発生しない。そこで、せん断力の作用する曲がったシートパイルの座屈応力 (文献 [35] p.464) を採用した。

先の文献によれば座屈せん断力 τ_{cr} は次のように表される。

$$\begin{aligned} \tau_{cr} &= 0.8 \frac{\pi E t_0^2}{3(1 - \nu^2) b} \sqrt[4]{12(1 - \nu^2)} \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\rho}{t_0}} \\ b &= b_0 r_0 : \text{座屈幅} \end{aligned}$$

シェルに作用するせん断応力は $\theta = \pi/2 \pm b_0/2$ の位置で計算する。

$$\tau_{z\theta} = \frac{Q_0}{\pi r t} \sin(\pi/2 - b_0/2)$$

$\tau_{z\theta} = \tau_{cr}$ となったとき座屈するものとした。また、本節では $b_0 = \pi/2$ として計算している。

座屈せん断力は次のようになる。

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{A_3}{\sqrt{3A_3^2 A_2 + 1}} \\ A_3 &= 0.8 \frac{E \pi^2}{1 - \nu^2} \sqrt[4]{12(1 - \nu^2)} \frac{t_0^3}{3b} \sqrt{\frac{r_0}{t_0}} \end{aligned}$$

8.3.5.3 円筒断面の変形の仮定

円筒断面の変形の仮定は、次の 4 種類とし、それぞれの場合の楕円化パラメータを示す。

A): シェル端部において断面の変形の制約を受けないシェル

$$\zeta = -(1 - \nu^2) \frac{r_0^4}{t_0^2} \left\{ \frac{(z - L) Q_0}{EI_0} \right\}^2$$

B): シェル端部において断面の変形の制約を受けるシェル

$$\begin{aligned} \zeta = & -(1-\nu^2) \frac{r_0^4}{t_0^2} \left\{ \frac{(z-L)Q_0}{EI_0} \right\}^2 \\ & + W_1 e^{\omega_{A1} z} + \overline{W}_1 e^{\overline{\omega}_{A1} z} + W_2 e^{\omega_{B1} z} + \overline{W}_2 e^{\overline{\omega}_{B1} z} + W_3 e^{\omega_{C1} z} \\ & + W_4 e^{-\omega_{A1} z} + \overline{W}_4 e^{-\overline{\omega}_{A1} z} + W_5 e^{-\omega_{B1} z} + \overline{W}_5 e^{-\overline{\omega}_{B1} z} + W_6 e^{-\omega_{C1} z} \end{aligned} \quad (8.54)$$

ただし、 $W_1 \sim W_6$ は、端部の変形の固定条件により決定される線形解析による曲げ応力解の未定定数であり、フーリエ展開次数 $n = 2$ の変位を $z = 0, L$ において $u^r = 0, u^\theta = 0, u^z = 0, u'_{,z} = 0, u''_{,z} = 0, (\zeta = 0)$ とするよう決める。

C): 断面変形のないシェル

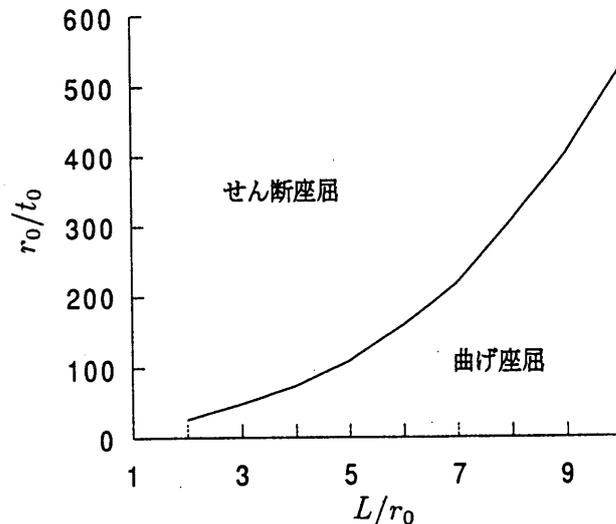
$$\zeta = 0$$

D): 半谷の手法 [31]

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{162r_0^4(1-\nu^2)(\pi^2-4)}{\pi^3 t_0^2 L^2 (9L^2 - 3\nu\pi^2 r_0^2)} d^2 \sin \frac{\pi}{L} z = \zeta_0 \sin \frac{\pi}{L} z \\ Q_0 &= \frac{9EI_0}{L^3} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \zeta_0 \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \right) d \\ d &: z = L \text{ でのたわみ量} \end{aligned}$$

また、解析結果と比較する実験例として、

E): Schröder による実験結果 [36] を採用した。



Schröder による実験結果

ただし、以上に示された最小座屈せん断力が計算される座屈発生箇所は理論的に決定し難いので、円筒の軸方向に計算点を均等に 100 個採り、それらの場所において座屈する場合のせん断力を計算し、最小のせん断力を座屈せん断力とした。

8.3.5.4 解析結果

図 8.10は $\theta_0 = 5\pi/6$, $b_0 = \pi/2$ とした場合の”曲げによる座屈 (以下、曲げ座屈)”と”せん断による座屈 (以下、せん断座屈)”との境界線を示したものである。各境界線より下側では”曲げ座屈”が発生し、上側では”せん断座屈”が発生する。

ここで、横せん断力による楕円化は、横せん断力によるモーメントによって $\frac{r_0^2}{t_0^2}(z-L)^2$ に比例して発生する。そのため、A) の場合は $z=0$ での材端において断面の変形が拘束されていないため曲げ座屈が発生し易い。また、C) の場合はシェルの楕円化を考慮していないため、曲げ座屈が発生し難い。

B) の場合には曲げ応力解による変形の拘束が働き、A) と C) の中間の結果となっている。

なお、今回提案した解析法 B) の結果は Schröder による実験結果 E) と良い対応がとれている。

また、D) 半谷の仮定を用いた場合は、曲げ座屈が発生し易くなっている。これは、図 8.9 に示されるように半谷の手法は、本論で提案した方法より楕円化量が大きく、より曲げ座屈の発生が容易になるためと考えられる。

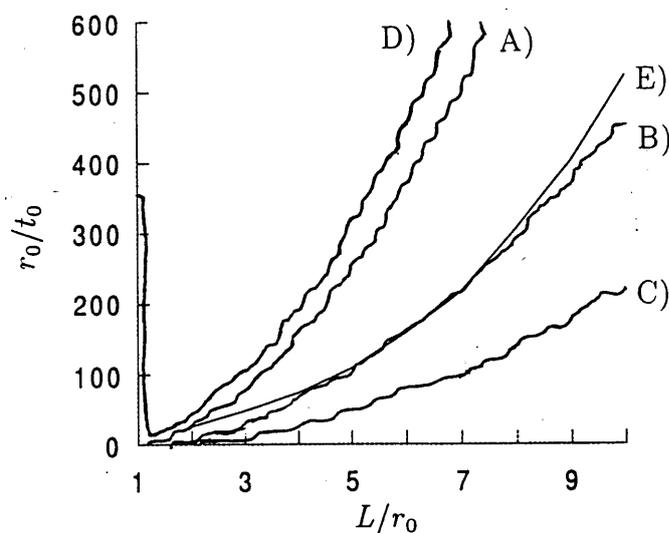


図 8.10: 局部座屈の発生の違い

$$\theta_0 = 5\pi/6, \quad b_0 = \pi/2$$

8.3.5.5 座屈せん断力の比較

円筒断面の楕円化による座屈せん断力の低下を考察するため、“B) 端部において断面の変形の制約を受けるシェル”の座屈荷重と“C) 断面変形のないシェル”における座屈荷重とを比較した。

ただし、“C) 断面変形のないシェル”における座屈荷重は次のように計算した。

- 軸圧縮による局部座屈荷重 ($z = 0, \theta = \pi$ において座屈するものとする)

軸圧縮座屈応力は $\sigma_{cr} = \frac{Et_0}{r_0} \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}$ 、 Q_σ を軸圧縮による座屈せん断力として、軸力は $\sigma_z = \frac{Q_\sigma(z-L)}{I} r_0$ ($I = \pi r_0^3 t_0$) と計算されるから、軸圧縮による座屈せん断力 Q_σ は次のようになる。

$$Q_\sigma = \frac{\pi E}{L} \frac{r_0 t_0}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

- せん断座屈 ($\theta = \pi/2$ において座屈するものとする)

座屈せん断応力は $\tau_{cr} = 0.8 \frac{\pi E t_0^2}{3(1-\nu^2)b} \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\rho}{t_0}}$ ($b = b_0 r_0, b_0 = \pi/3$)、 Q_τ をせん断応力による座屈せん断力として、せん断応力は $\tau = \frac{Q_\tau}{\pi r_0 t_0}$ と計算されるから Q_τ は次のようになる。

$$Q_\tau = 0.8 \frac{\pi^2 E}{1-\nu^2} \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{t_0^3}{3b} \sqrt{\frac{r_0}{t_0}} \quad (8.55)$$

以上に示された Q_σ, Q_τ と座屈せん断力 Q_{cr} を比較したものが図 8.11 である。

図 8.10 と図 8.11 を比べて、座屈せん断力 Q_{cr} は、軸圧縮座屈が発生する場合には Q_σ の 110~115% であり、 Q_σ に対する比は大きく変化しない。また、せん断座屈が発生する場合の Q_τ に対する比も 140~144% であり大きな変化はない。これは、曲げ応力解を解析に加えることによりシェル断面の楕円化が押さえられ、“断面変形のないシェル”と同様な形状を保たれるためと考えられる。このことは図 8.11 における $L/r_0 = 40$ のような曲げ応力解の変形抑止効果が材全体に及ばないシェルにおいて Q_{cr}/Q_σ が 90% 程度と小さくなることから推測される。なお、今回計算された座屈荷重 Q_{cr} が Q_σ, Q_τ よりも大きな値を示すのは、 Q_σ, Q_τ の計算を安全側で計算した為であると考えられる。

また、D) 半谷の手法 [31] を用いて得られる Q_{cr} に対して同様の比較を行ったものが図 8.12 である。この場合、座屈せん断力は、軸圧縮座屈が発生する場合には Q_σ の 50~70% である。これは、図 8.9 で示されるように同一たわみでも半谷の手法は本論で提案する手法より楕円化量が大きく、半谷の手法では曲げ座屈荷重が小さくなるためと考えられる。なお、せん断座屈が発生する場合の Q_τ に対する比は 140% であり、本論で提案する手法と同様の結果となっている。これは、せん断座屈が先行して発生する場合は円筒が短く、円筒の楕円化によるせん断応力の変化が小さいためと考えられる。

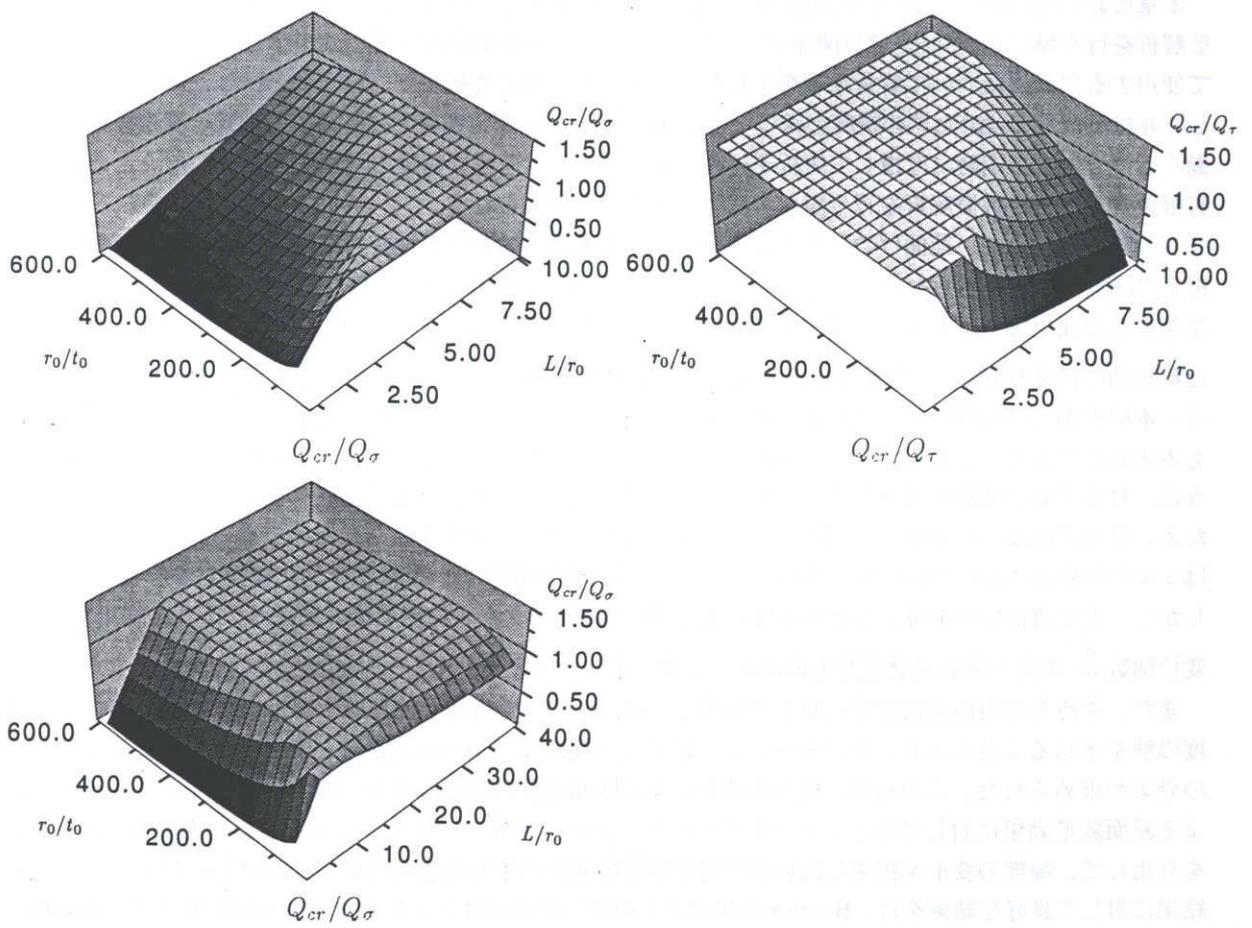


図 8.11: 座屈せん断力の比較

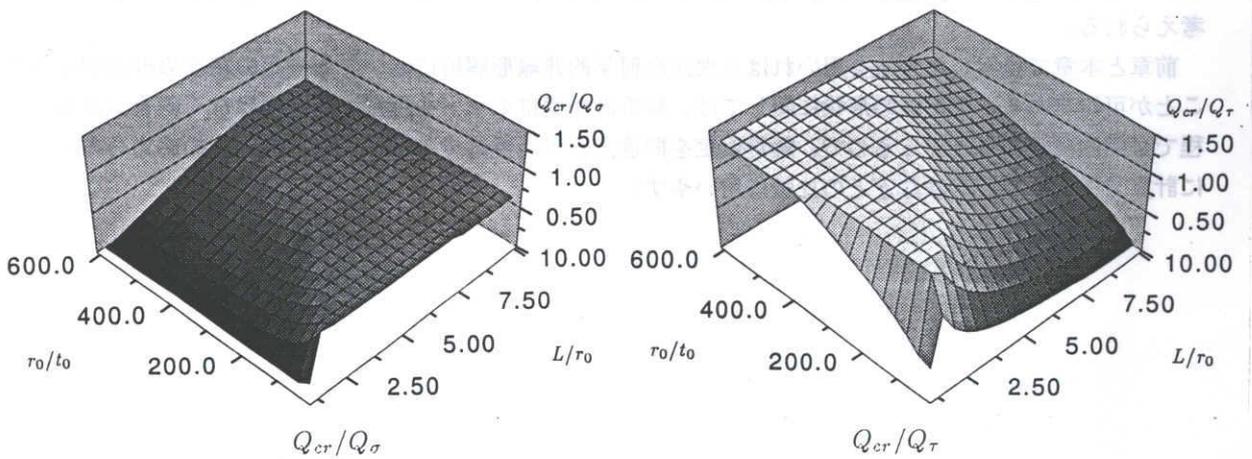


図 8.12: 座屈せん断力の比較 (半谷の手法)

8.4 本章のまとめ

本章においては前章で得られた関係式を円筒座標系に適用し、円筒シェルに対する三次元幾何学的非線形解析を行う際に必要な歪-変位関係式、応力-歪関係式、微小部分釣り合い式を示し、実際の解析において使用する摂動法について解析手順を示した。この解析手順の考察より、建築構造物など通常の物体に対して非線形性まで含めた式の精度を保つためには、厳正な歪-変位関係と変形後の釣合式と変形後の断面に働く応力方向を、同時に考慮して解析を行う必要があることを解析精度の考察から指摘した。このことは有限要素法などの数値解析を行う際も考慮すべきことと考えられる。

次に解析例として、純曲げの作用する円筒シェルを幾何学的非線形性を考慮して三次元理論解析し、解析上の注意点などを明らかにし、シェル理論に基づいた解析との比較から解の妥当性を検証した。そして、局部座屈の発生まではシェル理論でも応力の最大値は解析可能であることを指摘した。ただし、今回示した解析例では変位関数 u^p の精度にその後の修正された変位状態の精度が左右されるので注意が必要である。本解析例では円筒に対して純曲げモーメントを与えているので、断面の変形状態は材軸方向でどこでも本来同じである。しかし、 $z=0$ を離れるにつれ、違いが大きくなる。これは梁材の曲げ変形と同じように、材軸方向の変形が本来円弧の一部となるはずである円筒を変形前の基底ベクトルを基準に解析したため、材軸方向にべき級数(放物線)でしか表すことができず、誤差が生じたためである。なお、この誤差は $z=0$ の断面において解の検証を行うことにより、本解析例においては工学的に無視できるものである。しかし、更に適正な解を得ようとするならば、解析の基底ベクトルに変形後の基底ベクトルを採用するか、変位関数 u^p の分布関数を適正なものにする必要があると考えられる。

また、片持ちの円筒梁に横せん断力が作用した場合について幾何学的非線形解析を行った。 β^2 までの精度の解を求めることにより、曲げモーメントによる円筒断面の Brazier 効果と横せん断力による断面変形の効果が求められた。この結果、横せん断力による断面変形の効果は横せん断力に起因するモーメントによる断面変形効果に対して小さいことが示された。また、曲げモーメントによる円筒断面の Brazier 効果を利用して、端部の変形を拘束した場合の局部座屈の発生の予測方法を提案し、文献 [36] に示された実験結果に対して良好な結果を得、Brazier 効果による座屈の解析にはシェルの曲げ応力解を考慮する必要性を示した。今回示したような理論による断面変形と曲げ応力解との組み合わせによる断面変形を考慮した局部座屈発生の推定方法は、拘束条件に左右されるようなシェルの座屈問題に対して有効であると考えられる。今後の課題として、座屈せん断力、座屈位置に関して、本章において提案した手法と実験との比較が考えられる。

前章と本章で提案した方法を用いれば三次元幾何学的非線形解析においても一定の精度の理論解を得ることが可能である。変形後の形状に関しては、解析者が変位モードを仮定する必要はなく釣合式を解く過程で必然的に求められてくるので、解析仮定を間違える可能性は少ない。また、断面内の応力分布が正確に計算でき、有限要素法などとの比較に用いやすい。

第 9 章

幾何学的非線形解析のまとめ

第 II 部では、幾何学的非線形性を考慮した三次元理論解析手法を提案した。

第 7 章では、幾何学的非線形性を考慮した三次元理論解析に必要な諸式をテンソル表記した。

- 変形後の釣合式をキルヒホッフ応力 σ^{ij} を用いて表す。

変形後の基底ベクトルで表した場合

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta^i} \{ \sqrt{a} \sigma^{ij} \} + \sqrt{a} \sigma^{ij} \Gamma_{iq}^p + \sqrt{a} \bar{X}^j \right] \bar{a}_p = 0$$

変形前の基底ベクトルで表した場合

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta^i} \{ \sqrt{a} \sigma^{ij} (\delta_j^p + u^p |_j) \} + \sqrt{a} \sigma^{ij} \Gamma_{iq}^p (\delta_j^q + u^q |_j) + \sqrt{a} \bar{X}^j (\delta_j^p + u^p |_j) \right] a_p = 0$$

- 幾何学的非線形項を考慮した厳密な歪-変位関係すなわちグリーンの歪テンソルを用いる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{a}_{ij} - a_{ij}) = \frac{1}{2} (u_i |_j + u_j |_i) + \frac{1}{2} u_p |_i u^p |_j$$

- 応力は変形後の単位断面に働く応力として定義し、断面力・モーメントは変形を考慮して算定する。

$$\text{断面力} \quad \bar{T} d\bar{S} = \bar{\sigma}^{ij} \bar{a}_j \bar{n}_i d\bar{S} = \sigma^{ij} n_i dS \bar{a}_j$$

$$\text{モーメント} \quad M d\bar{S} = r_{arm} \times \bar{T} d\bar{S}$$

r_{arm} : 中立軸から微小面積までの位置ベクトル

第 8 章では、テンソル成分で表された式を円筒座標系の物理成分で表した。また、摂動法による解析手順を示した。そして、幾何学的非線形性を考慮した三次元理論解析の例題として”純曲げの作用する円筒シェル”の解析を行い、シェル理論に基づく解析との比較により、三次元解析手法の妥当性を示した。そして、局部座屈の発生まではシェル理論でも応力の最大値は計算可能であることを指摘した。また、”せん断力の作用する円筒シェル”の解析を行った。 β^2 までの精度の解を求めることにより、曲げモーメントによる円筒断面の Brazier 効果とせん断力による断面変形の効果が得られた。この結果、せん断力による断面変形の効果はモーメントによる断面変形効果に対して小さいことが示された。また、曲げモーメントによる円筒断面の Brazier 効果を応用して、端部の変形を拘束した場合の局部座屈の発生の予測方法を提案し、文献 [36] に示された実験結果に対して良好な結果を得、Brazier 効果による座屈の解析にはシェルの曲げ応力解を考慮する必要性を示した。

以上の結果、本論で提案された三次元幾何学的非線形解析法により、三次元弾性論上で幾何学的非線形性を考慮した解析が理論的に可能であることが示された。また、この解法から得られた解は、幾何学的非線形性を考慮した三次元有限要素法の解の検証に利用可能である。

ただし、安定した解を得るためには、第一近似解を適正に採用する必要がある。例えば今回例題として取り上げた”純曲げの作用する円筒シェル”では、第一近似解として、軸方向にべき級数で展開された解を用いた。しかし、純曲げ荷重下では、円筒はトロイド状に変形すると考えられる。そのため、今回の解析結果では、べき級数解が解を最も良く近似している $\varepsilon = 0$ から離れるにつれて変位の誤差が大きくなったと考えられる。従って、今後の課題として第一次近似解の適正化が考えられる。

第 10 章

結論

本論文では、円筒シェルを対象とした三次元理論解析について述べた。ただし、構成式として等方弾性体を仮定している。

第 I 部では、円筒シェルの三次元線形弾性問題の一般解を取り扱った。

- 第 2 章では三次元線形弾性解析を行うための解析理論を比較し、本論で取り扱う三次元解析手法の利点を述べた。
- 第 3 章では、本論で取り扱う一般解の定義と三次元解析のための基礎式を示し、その基礎式から一般解の定義を満足する解を求めた。

周方向にフーリエ展開した場合の変位が軸方向にべき級数で表される解は、円筒の柱に軸引張りが作用する場合、円筒にねじりが作用する場合、円筒の梁に純曲げが作用する場合、円筒の梁にせん断力が作用する場合、剛体変位、剛体回転のみである。加えて、シェル理論で曲げ応力解と呼ばれる軸方向に指数関数で減衰する解を解析し、シェル理論では得られない断面内に高次の応力分布モードを持つ解の存在を示した。また、軸方向にフーリエ展開した場合の変位が周方向にべき級数で表される解は、変位がべき級数で表される解は、剛体回転、円筒シェルに面内せん断力が作用する場合、円弧に純曲げモーメントが作用する場合である。また、変位が周方向に三角関数で表される解は、剛体変位、円弧にせん断力が作用する場合である。加えて、シェル理論で曲げ応力解と呼ばれる周方向に指数関数で減衰する解を解析し、シェル理論では得られない断面内に高次の応力分布モードを持つ解の存在を示した。

- 第 4 章では、三次元解析とシェル理論を比較することにより、シェル理論の使用可能な半径-厚さ比の範囲を示した。

周方向にフーリエ展開された場合の一般解においては、今回の解析結果より、法線保持を仮定したシェル理論では $r_0/t_0 > 30$ 、せん断変形を考慮したシェル理論では $r_0/t_0 > 10$ の範囲で信頼できると思われる。また、軸方向にフーリエ展開された一般解においては、軸方向フーリエ展開次数 ω_0 が 1 以上の場合は特性値の精度のあまり関係なく特性モードの分布形状は良く、 r_0/t_0 が 10 程度の厚肉シェルまでは特性方程式を数値解析すれば十分である。しかし、 $\omega_0 = 0.1$ の場合では特性値の精度が良くても特性モードの分布形状が良いとは限らないので注意が必要である。これは、 ω_0 が 0 に近づくにつれ軸方向の変位分布が小さい二次元的な変形になり、純曲げが作用する円弧やせん断力が作用する円弧に近づくためと考えられる。つまり、 ω_0 が 0 に近い場合に法線保持を仮定したシェル理論

を用いるべきではないと結論される。またこの場合、半径と厚さの比 r_0/t_0 が 25 以下のシェルでせん断変形を考慮したシェル理論を適用するのは危険と考えられる。

- 第 5 章では、第 3 章で得られた一般解の未定定数の総数とシェル断面の拘束条件の数について考察を行った。また、高次の”曲げ応力解”を用いた三次元解析を行い、高次の解を用いた解析法として、選点法とガラーキン法を取り上げた。シェル断面内の応力分布などは有限要素法で得られる解との比較から、応力分布精度の良いガラーキン法を採用すべきと考えられる。ただし、支持端近傍における応力の断面内最大値は、選点法、ガラーキン法双方のレベル III の三次元理論解析によって予測可能であると考えられる。なお、シェル断面の変位拘束条件によっては高次の”曲げ応力解”が誘発されることも示された。この結果、厚肉円筒シェルの端部の境界条件を弾性体の連続状態として解析する必要性を暗示していると思われる。またこの場合、シェルとその支持構造体の剛性の差より、シェル断面内の応力分布に通常の要素割りでは検出できない応力分布の発生が予測される。

第 I 部の解析結果より、シェル理論で示される断面力の範囲で応力を解析する場合には、特定の場合を除けば半径-厚さ比 r_0/t_0 が 30 程度までシェル理論を使用可能であることを示した。しかし、シェル断面の細かい応力分布はその境界条件に強い影響を受けるためシェル理論で解析する場合には注意が必要である。また、三次元解析解を用いて解析する場合には断面内分布モードの次数が解析の精度を決定される。

第 II 部では、円筒シェルの幾何学的非線形解析を取り扱った。

- 第 7 章では三次元幾何学的非線形弾性解析を行うための諸式をテンソルで示した。
- 第 8 章では、円筒シェルに対して幾何学的非線形解析を行うための微小部分釣合式、応力-歪関係式、歪-変位関係式を物理成分で示し、その基礎式の解法を示した。そして幾何学的非線形性を考慮した三次元理論解析の例題として”純曲げの作用する円筒シェル”の解析を行い、シェル理論に基づく解析との比較により、三次元解析手法の妥当性を示した。そして、局部座屈の発生まではシェル理論でも応力の最大値は解析可能であることを指摘した。また、せん断力の作用する円筒シェルに関して幾何学的非線形解析を行い、せん断力による楕円化と曲げモーメントによる楕円化を計算した。また、曲げモーメントによる楕円化と曲げ応力解との併用によりシェルの局部座屈の予測を行い良好な結果を得た。

第 II 部の解析結果より、三次元理論解析によっても幾何学的非線形問題を扱えることが示された。また、解析例より、シェル構造物の二次的な変形状を計算過程で容易に得られることが示された。

本論文により、三次元弾性論上で一般解を得る方法が示された。また、三次元理論解析に幾何学的非線形性を考慮するための諸式が示された。

今後の課題として、シェルの一般解の解析として円筒シェル以外のシェルへの応用が考えられる。ただし、同時に精度の高い複素関数の計算手法の開発も必要である。また、軸圧縮による局部座屈などの分岐型の座屈に対しての幾何学的非線形性を考慮した三次元理論解析手法の応用が期待される。

参考文献

- [1] 西村敏雄. テンソルとシェル理論. 彰国社, 1977.
- [2] Fung, Y.C. 大橋義夫訳. 固体の力学/理論. 培風館, 1970.
- [3] Flügge, W. 後藤学訳. テンソル解析と連続体力学. ブレイン図書出版, 1979.
- [4] W.T.Koiter. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. *Proc. IUTAM Symposium on the Theory of Thin Shells, Delft(1959)*, pp. 12-33., 1960.
- [5] 池田昌弘, 松岡理. 表面力の作用する単純支持厚肉円筒シェル. 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1988.
- [6] F.Dischinger. Die strenge theorie der kreiszylinderschale in ihrer anwendung auf die zei β -dywidag-schalen. *Beton u. Eisen Heft 16, s.257, Heft 18, s.283*, 1935.
- [7] W.Zerna . *Zur Berechnung der Randstörungen kreiszylindrischer Tounenschalen*,Ing-enier-Archiv, B20, H.5, 1952.
- [8] U. Finsterwalder , W. Flügge . *Statik u. Dynamik der Schalen*,Berlin, 1934.
- [9] H.Schorer . *Line Load Action on Thin Cylindrical Shells*,A.S.C.E., p.281. , 1952.
- [10] 日置興一郎. 特性値による円筒曲版諸理論の検討. 日本建築学会論文集, 49, 1954.
- [11] 松岡理. せん断変形を考慮したシェル理論. 日本建築学会中部支部研究報告 昭和 51 年 1 月, pp.153-156. , 1976.
- [12] Yokoo, Y. and Matsunaga, H. A general nonlinear theory of elastic shells. *Int. J. Solids Structures*, 10, pp.261-274. ,1974.
- [13] 松永裕之. 2次元高次理論による厚板の解析. 日本建築学会構造系論文報告集, 第 367 号, pp.48-57. ,1986.
- [14] 池田昌弘, 山田耕司, 樋口尚良, 久米弘記, 松岡理, 大森博司. 純曲げ及び横せん断力を受ける円筒シェルの三次元解析. 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1989.
- [15] Chester B. Sensenig. A shell theory compared with the exact three dimensional theory of elasticity. *Int. J. Engng Sci.*, 6, pp.435-464., 1968.
- [16] 登坂宣好, 坪井善勝. 曲面板の非線形理論. 日本建築学会論文報告集, 235, pp.27-38. , 1975.
- [17] Brazier,L.G. On the flexure of thin cylindrical shells and other thin sections. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 116, pp.104-114., 1927.
- [18] Donnel, L.H. A new theory for buckling of thin cylinder under axial compression and bending. *J. Appl. Mech.,Trans. ASME*, 56, pp.795-806., 1934.
- [19] S.kyriakides , G.T. Ju. Bifucation and localization instabilities in cylindrical shells under bending -1. experiments. *Int. J. Solids Structures*, 29, pp.1117-1142., 1992.
- [20] B.B.Sharma. On flexural vibrations of isotropic elastic plate according to mindlin's theory. *Czech. j. Phys.*, B 29, pp.1185-1189., 1979.

- [21] 大塚裕光. 薄肉円筒殻の曲げ座屈. 第 38 回応用力学連合講演会, pp.253-254. , 1988.
- [22] 半谷裕彦. 生研セミナーテキスト コース 91 シェルの座屈. 生産技術研究奨励会, 1983.
- [23] 半谷裕彦, 崔鉉植, 田波徹行. 水平せん断力を受ける塔状型円筒シェルの破壊実験. 日本建築学会構造系論文報告集, 第 369 号, pp.60-69. , 1986.
- [24] Y.Hangai M. Yoneda, H.Ohmori. Buckling failure of cantilever type cylindrical shells under the horizontal load. *Bull. ERS*, 15, pp.13-21., 1982.
- [25] 塩原一男, 内山和夫, 山田大彦. 円筒殻の曲げ座屈に関する実験的研究 (第 1 報). 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.937-938. , 1979.
- [26] 安齋栄尚, 高橋伸, 鈴木勝義. 厚さの変化する円筒かくの振動 (続報). 日本機械学会論文集 (C 編), 423, pp.1436-1448. , 1981.
- [27] 吉田正紀, 内山和夫, 山田大彦. 横荷重を受ける円筒殻の座屈に関する研究 (第 3 報). 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.1181-1182. , 1981.
- [28] 木村充, 内山和夫, 山田大彦. 横荷重を受ける円筒殻の座屈に関する研究 (第 4 報). 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.1103-1104. , 1982.
- [29] 大竹和夫, 内山和夫, 山田大彦. 横荷重を受ける円筒殻の座屈に関する研究 (第 5 報). 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.1111-1112. , 1983.
- [30] 大竹和夫, 桜井尚俊, 内山和夫, 山田大彦. 横荷重を受ける円筒殻の座屈に関する研究 (第 6 報). 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.1113-1114. , 1983.
- [31] 崔鉉植 etc. 半谷裕彦. 水平力を受ける塔状型円筒シェルの局部座屈. 日本建築学会論文報告集, 346, 1984.
- [32] S.Y. Lu. Buckling of cantilever cylindrical shell with a transverse end load. *AIAA Journal*, 3, No.12 pp.2350-2351., 1965.
- [33] Ru-Lin Lee. Buckling of a stiffened cylindrical shell with transverse shear load. *AIAA Journal*, 7, No.4 pp.768-769. , 1969.
- [34] A.N. Sherbourne H.M. Haydl. Effect of transverse shear on limit load of cylindrical shells. *Nuclear Engineering and Design*, 22, pp.290-295., 1972.
- [35] Timoshenko, S.P. Gire, J.M. 長谷川節訳. 弾性安定の理論. ブレイン図書出版, 1974.
- [36] Schröder, p. The buckling behaviour of transverse loaded circular clinders. *Technical Translation, ERSO TT-105*, 1974.
- [37] 日置興一郎. 特性値による円筒曲版諸理論の検討. 日本建築学会論文集, 49, 1954.
- [38] 坪井 善勝. 曲面構造~シェル理論とその応用. 丸善, 1965.

発表論文リスト

審査論文

- 松岡 理, 山田耕司, 松井徹哉, 大森博司: 円筒シェルの軸対称曲げ応力問題の三次元理論解析, 日本建築学会構造系論文集, 第 460 号, pp.83-92., 1994
- 松岡 理, 山田耕司, 松井徹哉, 大森博司: 純曲げの作用する閉断面円筒シェルの三次元有限変形理論解析, 日本建築学会構造系論文集, 第 468 号 (掲載予定), 1995
- 山田耕司, 松岡 理, 松井徹哉, 大森博司: 円筒シェルの非軸対称曲げ応力問題の三次元理論解析, 日本建築学会構造系論文集, (投稿中)

シンポジウム

- 松岡 理, 山田 耕司: Effect of Geometrical Non-linear Strain of Elastic Cylindrical Shell in Three Dimensional Analysis, 第 11 回 海洋工学シンポジウム, pp.94-104., 1992
- 松岡 理, 山田 耕司: 等方弾性体の三次元有限変形理論とそのシェルへの応用, 第 12 回 海洋工学シンポジウム, pp.293-298., 1994

国際会議

- O.MATSUOKA, H.OHMORI, K.YAMADA, T.YOKOI, M.IKEDA: Axisymmetric Three Dimensional Problems of Cylindrical Shells, Proceedings of the IASS Congress, 10 Years of Progress in Shell and Spatial Structures, Madrid, volume 1, 1989
- O.MATSUOKA, K.YAMADA: Three dimensional non-linear elastic analysis of a circular cylindrical shell subjected to pure bending, Proceedings of the SEIKEN-IASS Symposium on Nonlinear Analysis and Design for Shell and Spatial Structures, Tokyo, pp.45-52., 1993

IASS: International Association for Shell and Spatial Structures

口頭発表

日本建築学会

- 松岡理, 山田耕司: 表面力の働く単純支持円筒梁の三次元解析 平面保持理論との比較, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), pp.895-896., 1988
- 松岡理, 大森博司, 池田昌弘, 山田耕司, 樋口尚良, 久米弘記: 純曲げを受ける弾性円管の幾何学的非線形解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), pp.1145-1146., 1989
- 松岡理, 大森博司, 池田昌弘, 山田耕司, 樋口尚良, 久米弘記: 軸対称任意表面力の作用する円筒シェルの三次元解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), pp.1141-1142., 1989
- 松岡理, 大森博司, 池田昌弘, 山田耕司, 樋口尚良, 久米弘記: 純曲げ及び横せん断力を受ける円筒シェルの三次元解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), pp.1143-1144., 1989
- 松岡 理, 樋口 尚良, 久米 弘記, 山田耕司: 等方弾性体シェルの三次元解析, 日本学術会議力学研究連絡委員会, 第 40 回応用力学連合講演会講演予稿集, 1990
- 松岡理, 大森博司, 樋口尚良, 久米弘記, 山田耕司: 純曲げを受ける弾性円管の三次元幾何学的非線形解析 その 2, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), pp.1227-1228., 1990

- 松岡理, 大森博司, 樋口尚良, 久米弘記, 山田耕司: 円筒シェルの三次元解析 (軸対称曲げ問題), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), pp.1225-1226, 1990
- 松岡理, 松井徹哉, 大森博司, 山田耕司: 純曲げを受ける弾性円管の三次元幾何学的非線形解析 その3, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), pp.1671-1672, 1992
- 松岡理, 山田耕司: 横力を受ける弾性筒シェルの幾何学的非線形解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), pp.1669-1670, 1992
- 池田孝生, 松井徹哉, 山田耕司: 日光東照宮五重塔における懸垂式心柱の制振効果について, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), pp.1069-1070, 1992
- 松岡理, 山田耕司, 松井徹哉, 大森博司: 縦型円筒シェルの三次元解析による曲げ問題の解, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), pp.1463-1464, 1993
- 松岡理, 山田耕司, 上村充範: 三次元有限変形解析とキルヒホフ応力, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), pp.1459-1460, 1993
- 松岡理, 山田耕司, 上村充範: 純曲げの作用する縦型円筒シェルの有限変形解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), pp.1461-1462, 1993
- 松岡理, 上村充範, 山田耕司: 純曲げの作用する円筒シェルの円環を基準形状とする3次元有限変形解析1, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東海), pp.1783-1784, 1994
- 松岡理, 上村充範, 山田耕司: 純曲げの作用する円筒シェルの円環を基準形状とする3次元有限変形解析2, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東海), pp.1785-1786, 1994
- 松岡理, 山田耕司, 松井徹哉, 大森博司: 純曲げの作用する閉断面円筒シェルの三次元有限変形理論解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東海), pp.1787-1788, 1994

謝辞

本論文は著者が名古屋大学大学院進学以来今日まで行ってきた研究の成果をまとめたものです。

本論文が完成するまでに多くの方の御指導、御助言、御助力を頂きましたことに感謝の意を表します。特に、大学4年生の時より御厚情ある御指導、御鞭撻を頂き、今後の研究に関してもご指導下さいました名古屋大学教授・松井徹哉博士に対し、心よりお礼申し上げます。また、本論文をまとめるにあたり、貴重な御討議、御助言、励ましの言葉を頂きました名古屋大学教授・谷川恭雄博士、名古屋大学助教授・大森博司博士に感謝いたします。

名古屋大学名誉教授・松岡理博士(現中部大学教授)には著者の学部、修士課程在学時を通じて指導して頂きました。また、名古屋大学退官後においても、本研究テーマを示唆し、本研究に関し活発な討論をして頂き感謝は絶えません。

また、名古屋大学助教授・福和伸夫博士ならびに名古屋大学助手・萩原伸幸修士には本研究を通じて貴重なご意見を頂きました。同野崎公隆技官には研究生活上で数々のご助力を頂きました。研究を行うに際し協力していただいた、石原競さんをはじめとする構造基礎工学講座の卒業生および在校生の皆様に感謝いたします。

1994年12月

山田耕司

付録 A

周方向フーリエ展開次数 $n \geq 2$ の膜応力解

周方向フーリエ展開次数 $n \geq 2$ の場合、膜応力解が存在しない理由を以下に示す。

まず、周方向に n 次にフーリエ展開された釣合式 (3.7) を z 方向にべき級数展開して、解が z^m 以下の次数で書き表されるとすると、 $E_j^i, F_j^i, G_j^i, W_j^i$ を未定定数として次のように書き表すことができる。ただし、 $n \geq 2$ とする。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n &= \varepsilon_m^m z^m + \varepsilon_{m-1}^{m-1} z^{m-1} \\
 &\quad + (\varepsilon_{m-2}^{m-2} + \varepsilon_{m-2}^m) z^{m-2} + (\varepsilon_{m-3}^{m-3} + \varepsilon_{m-3}^{m-1}) z^{m-2} \\
 &\quad + (\varepsilon_{m-4}^{m-4} + \varepsilon_{m-4}^{m-2} + \varepsilon_{m-4}^m) z^{m-4} + (\varepsilon_{m-5}^{m-5} + \varepsilon_{m-5}^{m-3} + \varepsilon_{m-5}^{m-1}) z^{m-5} \\
 &\quad \dots \\
 f_n &= f_m^m z^m + f_{m-1}^{m-1} z^{m-1} \\
 &\quad + (f_{m-2}^{m-2} + f_{m-2}^m) z^{m-2} + (f_{m-3}^{m-3} + f_{m-3}^{m-1}) z^{m-2} \\
 &\quad + (f_{m-4}^{m-4} + f_{m-4}^{m-2} + f_{m-4}^m) z^{m-4} + (f_{m-5}^{m-5} + f_{m-5}^{m-3} + f_{m-5}^{m-1}) z^{m-5} \\
 &\quad \dots \\
 g_n &= g_m^m z^m + g_{m-1}^{m-1} z^{m-1} \\
 &\quad + (g_{m-2}^{m-2} + g_{m-2}^m) z^{m-2} + (g_{m-3}^{m-3} + g_{m-3}^{m-1}) z^{m-2} \\
 &\quad + (g_{m-4}^{m-4} + g_{m-4}^{m-2} + g_{m-4}^m) z^{m-4} + (g_{m-5}^{m-5} + g_{m-5}^{m-3} + g_{m-5}^{m-1}) z^{m-5} \\
 &\quad \dots \\
 w_n &= w_m^m z^m + w_{m-1}^{m-1} z^{m-1} \\
 &\quad + (w_{m-2}^{m-2} + w_{m-2}^m) z^{m-2} + (w_{m-3}^{m-3} + w_{m-3}^{m-1}) z^{m-2} \\
 &\quad + (w_{m-4}^{m-4} + w_{m-4}^{m-2} + w_{m-4}^m) z^{m-4} + (w_{m-5}^{m-5} + w_{m-5}^{m-3} + w_{m-5}^{m-1}) z^{m-5} \\
 &\quad \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ただし } \varepsilon_i^i &= E_1^i r^n + E_2^i r^{-n} \quad , \quad \varepsilon_{i-2k}^i : \varepsilon_i^i \text{ により生じる } z^{i-2k} \text{ の項} \\
 f_i^i &= F_1^i r^n + F_2^i r^{-n} \quad , \quad f_{i-2k}^i : f_i^i \text{ により生じる } z^{i-2k} \text{ の項} \\
 g_i^i &= G_1^i r^n + G_2^i r^{-n} \quad , \quad g_{i-2k}^i : g_i^i \text{ により生じる } z^{i-2k} \text{ の項} \\
 w_i^i &= W_1^i r^n + W_2^i r^{-n} \quad , \quad w_{i-2k}^i : w_i^i \text{ により生じる } z^{i-2k} \text{ の項} \\
 u_n &= (f_n + g_n)/2 \quad , \quad v_n = (f_n - g_n)/2 \\
 i &= 1, 2, \dots, m \quad , \quad k = 1, 2, \dots, i/2
 \end{aligned}$$

適合条件は、次のようになる。

$$\varepsilon_n = u_{n,r} + \frac{1}{r}u_n + \frac{n}{r}v_n + w_{n,z}$$

上式を変形して次の式にする。

$$u_{n,r} + \frac{1}{r}u_n + \frac{n}{r}v_n + w_{n,z} - \varepsilon_n = 0$$

$u_n, v_n, w_n, \varepsilon_n$ を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & u_{n,r} + \frac{1}{r}u_n + \frac{n}{r}v_n + w_{n,z} - \varepsilon_n \\ &= \left[\{(n+1)F_1^m - E_1^m\}r^n + \{-(n-1)G_2^m - E_2^m\}r^{-n} \right] z^m \\ & \quad + \left[\{(n+1)F_1^{m-1} - E_1^{m-1}\}r^n + \{-(n-1)G_2^{m-1} - E_2^{m-1}\}r^{-n} \right] z^{m-1} \\ & \quad \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

上記より

$$\begin{aligned} (n+1)F_1^m - E_1^m r^n &= 0 \\ -(n-1)G_2^m - E_2^m &= 0 \\ (n+1)F_1^{m-1} - E_1^{m-1} r^n &= 0 \\ -(n-1)G_2^{m-1} - E_2^{m-1} &= 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

境界条件は、

” シェルの内外面において ($r = r_1, r_2$) において表面力が働かない ($\sigma^{rr}, \sigma^{r\theta}, \sigma^{rz} = 0$) ”
である。よって

$$\begin{aligned} \sigma^{rr}/(G \cos n\theta) &= 2(u_{n,r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_n) \\ &= \left[\{(n+1)F_1^m + \frac{2\nu}{1-2\nu}E_1^m\}r^n - (n+1)F_2^m r^{-n-2} \right. \\ & \quad \left. + \{-(n-1)G_2^m + \frac{2\nu}{1-2\nu}E_2^m\}r^{-n} + (n-1)F_2^m r^{n-2} \right] z^m \\ & \quad + \left[\{(n+1)F_1^{m-1} + \frac{2\nu}{1-2\nu}E_1^{m-1}\}r^n - (n+1)F_2^{m-1} r^{-n-2} \right. \\ & \quad \left. + \{-(n-1)G_2^{m-1} + \frac{2\nu}{1-2\nu}E_2^{m-1}\}r^{-n} + (n-1)F_2^{m-1} r^{n-2} \right] z^{m-1} \\ & \quad \dots \\ \sigma^{r\theta}/(G \sin n\theta) &= v_{n,r} - \frac{n}{r}u_n - \frac{1}{r}v_n \\ &= \left[-(n+1)F_2^m r^{-n-2} - 2(n-1)G_1^m r^{n-2} \right] z^m \\ & \quad + \left[-(n+1)F_2^{m-1} r^{-n-2} - 2(n-1)G_1^{m-1} r^{n-2} \right] z^{m-1} \\ & \quad \dots \\ \sigma^{rz}/(G \cos n\theta) &= w_{n,r} + u_{n,z} \\ &= \left[2nW_1^m r^{n-1} - nW_2^m r^{-n-1} \right] z^m \\ & \quad + \left[mF_1^m r^{n+1} + (mF_2^m - 2nW_2^{m-1})r^{-n-1} + mG_2^m r^{1-n} + (mG_1^m + 2nW_1^{m-1})r^{n-1} \right] z^{m-1} \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

よって境界条件より、以下の結果が得られる。

$$\begin{aligned}
 r = r_1, r_2 \text{ において、} \sigma^{r\theta} = 0 \text{ より } F_2^m = G_1^m = F_2^{m-1} = G_1^{m-1} = 0 \\
 r = r_1, r_2 \text{ において、} \sigma^{rz} = 0 \text{ より } W_1^m = W_2^m = 0 \\
 r = r_1, r_2 \text{ において、} \sigma^{rr} = 0 \text{ より } (n+1)F_1^m + \frac{2\nu}{1-2\nu}E_1^m = 0 \quad - (n-1)G_2^m + \frac{2\nu}{1-2\nu}E_2^m = 0
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

また、式 (A.2) と式 (A.1) より

$$\begin{aligned}
 E_1^m = F_1^m = E_2^m = G_2^m = 0 \\
 E_1^{m-1} = F_1^{m-1} = E_2^{m-1} = G_2^{m-1} = 0
 \end{aligned}$$

上記の結果を考慮すると、

$$W_1^{m-1} = W_2^{m-1} = 0$$

となる。

以下、 z の次数を m を $m-2$ に下げて同じように解析をしていくと、最後には未定定数は全て 0 になり、解は存在しなくなる。よって、 $n \geq 2$ の場合には、有為な解は存在しない。

付録 B

せん断力が作用する円弧の解析

円弧にせん断力が作用する場合の変位と応力を求める。

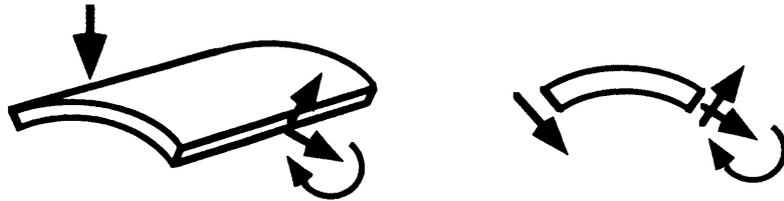


図 B.1: せん断力が作用する円弧

円弧にせん断力が作用した場合の解は、Airy の応力関数 Φ を用いて次のように得られている [2]。

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \left\{ r^3 - r_1^2 r_2^2 \frac{1}{r} - 2(r_1^2 + r_2^2)r \log r \right\} \sin \theta \\
 \sigma^{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\
 &= 2 \left(r + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} \right) \sin \theta \\
 \sigma^{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\
 &= 2 \left(3r - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} \right) \sin \theta \\
 \sigma^{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \\
 &= -2 \left(r + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2 + r_2^2}{r} \right) \cos \theta
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

しかし Airy の応力関数により得られた応力より変位を導き、その変位を釣合式に代入すると釣合を満足しない。そこで、体積歪を用いた解析法を用いて再度解析する。

この場合、先ず変位を未知関数とした釣り合い式 (3.10) を用い、Airy の応力関数の解から三次元解を予測し、変位と体積歪の適合条件を満足しシェル内外面での境界条件を満足しない変位解を求める。その後、 $n = 1 + xi$ を代入した解と $n = 1 - xi$ を代入した解の和を作る。そして $x \rightarrow 0$ の極限を採ると境界条件を満足した変位を含めた理論解が得られる。

以下に”せん断力の作用する円弧”の解を求める過程を示す。

先ず、釣合式(3.10)を満足する解は A_1, A_2, B_2, C_1 を未定数として次のようになる。

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left[\frac{A_2}{r^n} + A_1 r^n \right] e^{in\theta} \\ u_r &= \frac{1}{2} [f + g] e^{in\theta} \\ u_\theta &= \frac{1}{2} [f - g] e^{in\theta} \\ f &= \frac{1}{2} \frac{(3-4\nu)A_1 r^{n+1}}{(n+1)(1-2\nu)} - \frac{1}{2} \frac{A_2 r^{-n+1}}{1-2\nu} + B_2 r^{-n-1} \\ g &= -\frac{1}{2} \frac{A_1 r^{n+1}}{1-2\nu} - \frac{1}{2} \frac{(3-4\nu)A_2 r^{-n+1}}{(n-1)(1-2\nu)} + C_1 r^{n-1} \\ \sigma^{rr} &= G \left[\frac{1}{2} \frac{(n+2)A_2}{r^n(1-2\nu)} + \frac{1}{2} \frac{(-n+2)A_1 r^n}{1-2\nu} + (n-1)C_1 r^{n-2} + (-n-1)B_2 r^{-n-2} \right] e^{in\theta} \\ \sigma^{\theta\theta} &= G \left[\frac{1}{2} \frac{(-n+2)A_2}{r^n(1-2\nu)} + \frac{1}{2} \frac{(n+2)A_1 r^n}{1-2\nu} + (1-n)C_1 r^{n-2} + (n+1)B_2 r^{-n-2} \right] e^{in\theta} \\ \sigma^{r\theta} &= -iG \left[\frac{1}{2} \frac{nA_2}{r^n(1-2\nu)} + \frac{1}{2} \frac{nA_1 r^n}{1-2\nu} + (1-n)C_1 r^{n-2} + (-n-1)B_2 r^{-n-2} \right] e^{in\theta} \\ \sigma^{zz} &= 2G\nu \left[\frac{A_2}{r^n(1-2\nu)} + \frac{A_1 r^n}{1-2\nu} \right] e^{in\theta}\end{aligned}$$

境界条件 ($\sigma^{rr} = \sigma^{\theta\theta} = 0$ at $r = r_1, r_2$) を考慮すると次のような式になる。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{(-n+2)r_1^n}{1-2\nu} & \frac{1}{2} \frac{(n+2)}{r_1^n(1-2\nu)} & (-n-1)r_1^{-n-2} & (n-1)r_1^{n-2} \\ \frac{1}{2} \frac{nr_1^n}{1-2\nu} & \frac{1}{2} \frac{n}{r_1^n(1-2\nu)} & +(-n-1)r_1^{-n-2} & +(1-n)r_1^{n-2} \\ \frac{1}{2} \frac{(-n+2)r_2^n}{1-2\nu} & \frac{1}{2} \frac{(n+2)}{r_2^n(1-2\nu)} & (-n-1)r_2^{-n-2} & (n-1)r_2^{n-2} \\ \frac{1}{2} \frac{nr_2^n}{1-2\nu} & \frac{1}{2} \frac{n}{r_2^n(1-2\nu)} & +(-n-1)r_2^{-n-2} & +(1-n)r_2^{n-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$n = 1$ を上式に代入すると上式を満足することから、 $n = 1$ は解である。又、未定数 A_1, A_2, C_1, B_2 の比は次のようになる。ただし、 n に 1 を代入しない。

$$\begin{aligned}A_2 &= -\frac{1}{2}(r_2^2 + r_1^2)A_1 \\ C_1 &= \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)A_1}{n-1} (1-2\nu) \\ B_2 &= -\frac{1}{2} \frac{A_1 r_2^2 r_1^2}{n+1} (1-2\nu)\end{aligned}$$

よって、境界条件を満足する解は次のようになる。

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 e^{in\theta} = \left[-\frac{1}{2} \frac{(r_2^2 + r_1^2)A_1}{r^n} + A_1 r^n \right] e^{in\theta} \\ u_r &= u e^{in\theta} = \frac{1}{2} [f + g] e^{in\theta} \\ u_\theta &= v e^{in\theta} = \frac{1}{2} [f - g] e^{in\theta} \\ f &= \frac{1}{2} \frac{(3-4\nu)A_1 r^{n+1}}{(n+1)(1-2\nu)} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)A_1 r^{-n+1}}{1-2\nu} - \frac{1}{2} \frac{A_1 r_2^2 r_1^2 r^{-n-1}}{(n+1)(1-2\nu)} \\ g &= -\frac{1}{2} \frac{A_1 r^{n+1}}{1-2\nu} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)A_1 r^{n-1}}{(n-1)(1-2\nu)} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(3-4\nu)A_1 r^{-n+1}}{(n-1)(1-2\nu)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^{rr} &= S_{11}e^{in\theta} = G \left[-\frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(n+2)A_1}{(1-2\nu)r^n} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)A_1 r^{n-2}}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \frac{A_1 r_2^2 r_1^2 r^{-n-2}}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \frac{(-n+2)A_1 r^n}{1-2\nu} \right] e^{in\theta} \\
\sigma^{\theta\theta} &= S_{22}e^{in\theta} = G \left[-\frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(-n+2)A_1}{(1-2\nu)r^n} - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)A_1 r^{n-2}}{1-2\nu} - \frac{1}{2} \frac{A_1 r_2^2 r_1^2 r^{-n-2}}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \frac{(n+2)A_1 r^n}{1-2\nu} \right] e^{in\theta} \\
\sigma^{r\theta} &= -iS_{12}e^{in\theta} = -iG \left[-\frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)A_1 n}{(1-2\nu)r^n} - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)A_1 r^{n-2}}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \frac{A_1 r_2^2 r_1^2 r^{-n-2}}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \frac{A_1 n r^n}{1-2\nu} \right] e^{in\theta} \\
\sigma^{zz} &= S_{33}e^{in\theta} = 2G\nu \left[-\frac{1}{2} \frac{(r_2^2 + r_1^2)A_1}{(1-2\nu)r^n} + \frac{A_1 r^n}{1-2\nu} \right] e^{in\theta} \tag{B.2}
\end{aligned}$$

次に、 n を 1 に近づける操作をする。

まず、 $n = 1 + xi$ ($x \ll 1$) を代入する。代入した結果には添え字 1 をつけて区別する。また、 $A_1 = Aa_1 + Aa_2i$ とおく。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{01} &= -\frac{1}{2} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)}{r^{ix+1}} + (Aa_1 + Aa_2i)r^{ix+1} \\
f_1 &= \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)}{(1-2\nu)r^{ix}} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)(3-4\nu)r^{ix+2}}{(1-2\nu)(ix+2)} - \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)r_2^2 r_1^2 r^{-ix-2}}{(1-2\nu)(ix+2)} \\
g_1 &= -\frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)(3-4\nu)i}{(1-2\nu)r^{ix}x} - \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)r^{ix+2}}{1-2\nu} - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)ir^{ix}}{(1-2\nu)x} \\
S_{111} &= G \left[-\frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)(ix+3)}{(1-2\nu)r^{ix+1}} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)(-ix+1)r^{ix+1}}{1-2\nu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)r^{ix-1}}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)r_2^2 r_1^2 r^{-ix-3}}{1-2\nu} \right] \\
S_{221} &= G \left[-\frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)(-ix+1)}{(1-2\nu)r^{ix+1}} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)(ix+3)r^{ix+1}}{1-2\nu} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)r^{ix-1}}{1-2\nu} - \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)r_2^2 r_1^2 r^{-ix-3}}{1-2\nu} \right] \\
S_{121} &= G \left[-\frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)(ix+1)}{(1-2\nu)r^{ix+1}} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)(ix+1)r^{ix+1}}{1-2\nu} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)r^{ix-1}}{1-2\nu} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)r_2^2 r_1^2 r^{-ix-3}}{1-2\nu} \right] \\
S_{331} &= 2G\nu \left[-\frac{1}{2} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)}{(1-2\nu)r^{ix+1}} + \frac{(Aa_1 + Aa_2i)r^{ix+1}}{1-2\nu} \right]
\end{aligned}$$

次に先の $n = 1 + xi$ とは共役な $n = 1 - xi$ ($x \ll 1$) を代入する。ただし、 $A_1 = Aa_1 - Aa_2i$ とする。代入した結果には添え字 2 をつけて区別する。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{02} &= -\frac{1}{2} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)}{r^{-ix+1}} + (Aa_1 - Aa_2i)r^{-ix+1} \\
f_2 &= -\frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)r_2^2 r_1^2 r^{ix-2}}{(1-2\nu)(-ix+2)} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)(-4\nu+3)r^{-ix+2}}{(1-2\nu)(-ix+2)} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)r^{ix}}{1-2\nu} \\
g_2 &= \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)i}{(1-2\nu)r^{ix}x} - \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)r^{-ix+2}}{1-2\nu} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)(3-4\nu)ir^{ix}}{(1-2\nu)x} \\
S_{112} &= G \left[-\frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)(-ix+3)}{(1-2\nu)r^{-ix+1}} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)r_2^2 r_1^2 r^{ix-3}}{1-2\nu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)(ix+1)r^{-ix+1}}{1-2\nu} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)r^{-ix-1}}{1-2\nu} \right] \\
S_{222} &= G \left[-\frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)(ix+1)}{(1-2\nu)r^{-ix+1}} - \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)r_2^2 r_1^2 r^{ix-3}}{1-2\nu} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)(-ix + 3)r^{-ix+1}}{1 - 2\nu} - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)r^{-ix-1}}{1 - 2\nu} \\
S_{122} = & G \left[-\frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)(-ix + 1)}{(1 - 2\nu)r^{-ix+1}} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)r_2^2 r_1^2 r^{ix-3}}{1 - 2\nu} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)(-ix + 1)r^{-ix+1}}{1 - 2\nu} - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)r^{-ix-1}}{1 - 2\nu} \right] \\
S_{332} = & 2G\nu \left[-\frac{1}{2} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)}{(1 - 2\nu)r^{-ix+1}} + \frac{(Aa_1 - Aa_2i)r^{-ix+1}}{1 - 2\nu} \right]
\end{aligned}$$

添え字 1 と添え字 2 のついた解を足し合わせる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 & = \varepsilon_{01} + \varepsilon_{02} \\
& = -\frac{1}{2} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)}{r^{ix+1}} - \frac{1}{2} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)}{r^{-ix+1}} \\
& \quad + (Aa_1 + Aa_2i)r^{ix+1} + (Aa_1 - Aa_2i)r^{-ix+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f & = f_1 + f_2 \\
& = \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)}{(1 - 2\nu)r^{ix}} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)r^{ix}}{1 - 2\nu} \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)(3 - 4\nu)r^{ix+2}}{(1 - 2\nu)(ix + 2)} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)(3 - 4\nu)r^{-ix+2}}{(1 - 2\nu)(-ix + 2)} \\
& \quad - \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)r_2^2 r_1^2 r^{ix-2}}{(1 - 2\nu)(-ix + 2)} - \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)r_2^2 r_1^2 r^{-ix-2}}{(1 - 2\nu)(ix + 2)} \\
g & = g_1 + g_2 \\
& = \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)i}{(1 - 2\nu)r^{ix}x} - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)ir^{ix}}{(1 - 2\nu)x} \\
& \quad - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)(3 - 4\nu)i}{(1 - 2\nu)r^{ix}x} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)(3 - 4\nu)ir^{ix}}{(1 - 2\nu)x} \\
& \quad - \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)r^{ix+2}}{1 - 2\nu} - \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)r^{-ix+2}}{1 - 2\nu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{11} & = S_{111} + S_{112} \\
& = -\frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)G(ix + 3)}{(1 - 2\nu)r^{ix+1}} - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)G(-ix + 3)}{(1 - 2\nu)r^{-ix+1}} \\
& \quad + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)Gr^{ix-1}}{1 - 2\nu} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)Gr^{-ix-1}}{1 - 2\nu} \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)Gr_2^2 r_1^2 r^{ix-3}}{1 - 2\nu} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)Gr_2^2 r_1^2 r^{-ix-3}}{1 - 2\nu} \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)G(-ix + 1)r^{ix+1}}{1 - 2\nu} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)G(ix + 1)r^{-ix+1}}{1 - 2\nu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{22} & = S_{221} + S_{222} \\
& = -\frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)G(ix + 1)}{(1 - 2\nu)r^{-ix+1}} - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)G(-ix + 1)}{(1 - 2\nu)r^{ix+1}} \\
& \quad - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)Gr^{ix-1}}{1 - 2\nu} - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)Gr^{-ix-1}}{1 - 2\nu} \\
& \quad - \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)Gr_2^2 r_1^2 r^{ix-3}}{1 - 2\nu} - \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)Gr_2^2 r_1^2 r^{-ix-3}}{1 - 2\nu} \\
& \quad + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)G(ix + 3)r^{ix+1}}{1 - 2\nu} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)G(-ix + 3)r^{-ix+1}}{1 - 2\nu}
\end{aligned}$$

$$S_{12} = S_{121} + S_{122}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)G(ix + 1)}{(1 - 2\nu)r^{ix+1}} - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)G(-ix + 1)}{(1 - 2\nu)r^{-ix+1}} \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)Gr^{ix-1}}{1 - 2\nu} - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)Gr^{-ix-1}}{1 - 2\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)Gr_2^2 r_1^2 r^{ix-3}}{1 - 2\nu} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)Gr_2^2 r_1^2 r^{-ix-3}}{1 - 2\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)G(-ix + 1)r^{-ix+1}}{1 - 2\nu} + \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)G(ix + 1)r^{ix+1}}{1 - 2\nu} \\
S_{33} &= S_{331} + S_{332} \\
&= -\frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)G\nu}{(1 - 2\nu)r^{ix+1}} - \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)G\nu}{(1 - 2\nu)r^{-ix+1}} \\
&\quad + 2\frac{(Aa_1 + Aa_2i)G\nu r^{ix+1}}{1 - 2\nu} + 2\frac{(Aa_1 - Aa_2i)G\nu r^{-ix+1}}{1 - 2\nu} \tag{B.3}
\end{aligned}$$

次に x を 0 に近づけ、極限を取る。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= -\frac{(r_2^2 + r_1^2)Aa_1}{r} + 2Aa_1r \\
f &= -\frac{1}{2} \frac{Aa_1 r_2^2 r_1^2}{(1 - 2\nu)r^2} + \frac{1}{2} \frac{(3 - 4\nu)Aa_1 r^2}{1 - 2\nu} + \frac{1}{2} \frac{(r_2^2 + r_1^2)Aa_1}{1 - 2\nu} \\
g &= \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)i}{(1 - 2\nu)r^{ix}x} - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)ir^{ix}}{(1 - 2\nu)x} \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 + Aa_2i)(3 - 4\nu)i}{(1 - 2\nu)r^{ix}x} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(Aa_1 - Aa_2i)(3 - 4\nu)ir^{ix}}{(1 - 2\nu)x} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 + Aa_2i)r^{ix+2}}{1 - 2\nu} - \frac{1}{2} \frac{(Aa_1 - Aa_2i)r^{-ix+2}}{1 - 2\nu} \\
&= \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(2(2\nu - 1)Aa_1 + 4(\nu - 1)Aa_2i)i}{(1 - 2\nu)r^{ix}x} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)(2(1 - 2\nu)Aa_1 + 4(\nu - 1)Aa_2i)ir^{ix}}{(1 - 2\nu)x} - \frac{Aa_1 r^2}{1 - 2\nu} \\
&= \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)i[\{2(1 - 2\nu)Aa_1 + 4(\nu - 1)Aa_2i\}\{\cos(2x \log(r)) + i \sin(2x \log(r))\}] + 2(2\nu - 1)Aa_1 + 4(\nu - 1)Aa_2i}{(1 - 2\nu)\{\cos(x \log(r)) + i \sin(x \log(r))\}x} \\
&\quad - \frac{Aa_1 r^2}{1 - 2\nu} \\
&\quad x = 0 \text{ を } \cos(x \log(r)), \sin(x \log(r)) \text{ に代入する} \\
&= \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)i[\{2(1 - 2\nu)Aa_1 + 4(\nu - 1)Aa_2i\}\{i \sin(2x \log(r)) + 1\}] + 2(2\nu - 1)Aa_1 + 4(\nu - 1)Aa_2i}{(1 - 2\nu)x} \\
&\quad - \frac{Aa_1 r^2}{1 - 2\nu} \\
&= \frac{1}{4} \frac{(r_2^2 + r_1^2)i\{4(-\nu + 1)Aa_2 \sin(2x \log(r)) + 2(1 - 2\nu)Aa_1 i \sin(2x \log(r)) + 8(\nu - 1)Aa_2 i\}}{(1 - 2\nu)x} - \frac{Aa_1 r^2}{1 - 2\nu}
\end{aligned}$$

$Aa_2 = 0$ として虚数部を零とする。

$$= -\frac{Aa_1 r^2}{1 - 2\nu} - \frac{1}{2} \frac{(r_2^2 + r_1^2)Aa_1 \sin(2x \log(r))}{x}$$

再度、極限を取るにより次のようになる。

$$\begin{aligned}
&= -\frac{Aa_1 r^2}{1 - 2\nu} - (r_2^2 + r_1^2)Aa_1 \log(r) \\
S_{11} &= \frac{Aa_1 Gr_2^2 r_1^2}{(1 - 2\nu)r^3} - \frac{(r_2^2 + r_1^2)Aa_1 G}{(1 - 2\nu)r} + \frac{Aa_1 Gr}{1 - 2\nu} \\
S_{22} &= -\frac{Aa_1 Gr_2^2 r_1^2}{(1 - 2\nu)r^3} - \frac{(r_2^2 + r_1^2)Aa_1 G}{(1 - 2\nu)r} + 3\frac{Aa_1 Gr}{1 - 2\nu}
\end{aligned}$$

$$S_{12} = \frac{Aa_1Gr_2^2r_1^2}{(1-2\nu)r^3} - \frac{(r_2^2+r_1^2)Aa_1G}{(1-2\nu)r} + \frac{Aa_1Gr}{1-2\nu}$$

$$S_{33} = -2\frac{(r_2^2+r_1^2)Aa_1G\nu}{(1-2\nu)r} + 4\frac{Aa_1G\nu r}{1-2\nu}$$

従って解は次のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= C_1 \left[2r - \frac{r_1^2+r_2^2}{r} \right] \cos \theta - C_2 \left[2r - \frac{r_1^2+r_2^2}{r} \right] \sin \theta \\ u_r &= C_1 \left[-\frac{1}{4} \frac{r_2^2r_1^2}{(1-2\nu)r^2} + \frac{1}{4} \frac{(3-4\nu)r^2}{1-2\nu} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2+r_1^2)}{1-2\nu} - \frac{r^2}{2(1-2\nu)} - \frac{r_2^2+r_1^2}{2} \log(r) \right] \cos \theta \\ &\quad - C_2 \left[-\frac{1}{4} \frac{r_2^2r_1^2}{(1-2\nu)r^2} + \frac{1}{4} \frac{(3-4\nu)r^2}{1-2\nu} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2+r_1^2)}{1-2\nu} - \frac{r^2}{2(1-2\nu)} - \frac{r_2^2+r_1^2}{2} \log(r) \right] \sin \theta \\ u_\theta &= C_1 \left[-\frac{1}{4} \frac{r_2^2r_1^2}{(1-2\nu)r^2} + \frac{1}{4} \frac{(3-4\nu)r^2}{1-2\nu} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2+r_1^2)}{1-2\nu} + \frac{r^2}{2(1-2\nu)} + \frac{r_2^2+r_1^2}{2} \log(r) \right] \sin \theta \\ &\quad + C_2 \left[-\frac{1}{4} \frac{r_2^2r_1^2}{(1-2\nu)r^2} + \frac{1}{4} \frac{(3-4\nu)r^2}{1-2\nu} + \frac{1}{4} \frac{(r_2^2+r_1^2)}{1-2\nu} + \frac{r^2}{2(1-2\nu)} + \frac{r_2^2+r_1^2}{2} \log(r) \right] \cos \theta \\ u_z &= 0 \\ \sigma^{rr} &= C_1 \frac{1}{1-2\nu} G \left[\frac{r_1^2r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2+r_2^2}{r} + r \right] \cos \theta - C_2 \frac{1}{1-2\nu} G \left[\frac{r_1^2r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2+r_2^2}{r} + r \right] \sin \theta \\ \sigma^{\theta\theta} &= C_1 \frac{1}{1-2\nu} G \left[-\frac{r_1^2r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2+r_2^2}{r} + 3r \right] \cos \theta - C_2 \frac{1}{1-2\nu} G \left[-\frac{r_1^2r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2+r_2^2}{r} + 3r \right] \sin \theta \\ \sigma^{zz} &= C_1 \frac{2}{1-2\nu} G\nu \left[-\frac{r_1^2+r_2^2}{r} + 2r \right] \cos \theta - C_2 \frac{2}{1-2\nu} G\nu \left[-\frac{r_1^2+r_2^2}{r} + 2r \right] \sin \theta \\ \sigma^{r\theta} &= C_1 \frac{1}{1-2\nu} G \left[\frac{r_1^2r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2+r_2^2}{r} + r \right] \sin \theta + C_2 \frac{1}{1-2\nu} G \left[\frac{r_1^2r_2^2}{r^3} - \frac{r_1^2+r_2^2}{r} + r \right] \cos \theta \\ \sigma^{\theta z} &= 0 \\ \sigma^{zr} &= 0 \end{aligned} \tag{B.4}$$

付録 C

軸方向フーリエ展開 $\omega_0 = 0$ の場合の特性値

$\omega = 0$ の場合の平面せん断変形の曲げ応力解を求める。

適合条件を満足する解は C_5, C_6 を未定定数として次のようであった。

$$\begin{aligned} u_z &= [C_5 \{r^n\} + C_6 \{r^{-n}\}] e^{in\theta} \\ \sigma^{\theta z} &= -iG [C_5 \{-nr^{n-1}\} + C_6 \{-nr^{-n-1}\}] e^{in\theta} \\ \sigma^{zr} &= -iG [C_5 \{nr^{n-1}\} + C_6 \{-nr^{-n-1}\}] e^{in\theta} \end{aligned} \quad (C.1)$$

特性値を求める式は次のよう得られる。

$$\begin{bmatrix} nr_1^{n-1} & -nr_1^{-n-1} \\ nr_2^{n-1} & -nr_2^{-n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (C.2)$$

上式の左辺の配列の行列式を 0 とする特性値 n と特性ベクトルは次のようになる。

$$\begin{aligned} n &= i \frac{m\pi}{\log r_2 - \log r_1} = n_0 i \\ C_6 &= r_2^{2n} C_5 \end{aligned} \quad (C.3)$$

以上の n, C_5, C_6 を u_z に代入すると次のようになる。

$$u_z = 2C_5 \{\cos(n_0 \log r_2) + i \sin(n_0 \log r_2)\} e^{-n_0 \theta} \cos(-n_0 \log r + n_0 \log r_2) \quad (C.4)$$

$C_5 = C_7 \frac{\cos(n_0 \log r_2) - i \sin(n_0 \log r_2)}{2}$ とおいて、解は次のようになる。

$$\begin{aligned} u_z &= C_7 e^{-n_0 \theta} \cos(-n_0 \log r + n_0 \log r_2) \\ \sigma^{\theta z} &= -C_7 G \frac{n_0 e^{-n_0 \theta} \cos(-n_0 \log r + n_0 \log r_2)}{r} \\ \sigma^{zr} &= C_7 G \frac{n_0 e^{-n_0 \theta} \sin(-n_0 \log r + n_0 \log r_2)}{r} \end{aligned} \quad (C.5)$$

付録 D

シェル理論による一般解

本章では、本論文で取り上げたシェル理論の曲げ応力解を示す。

D.1 法線保持を仮定したシェル理論

D.1.1 仮定

- 中央面の法線は、曲板の変形後も新しい中央面において垂直で直線を保つ。
- 曲板厚さに対して、変位は微小である。
- 中央面に垂直に作用する z 方向の応力度は、ほかの応力度に比較して微小であるとして、これによる変形を無視する。また、中立面の法線方向の伸縮などの歪を無視する。

D.1.2 円周座標系におけるシェルの基本式

次に円筒座標系で基本関係式について説明する。

シェルの母線方向に x 軸、周方向（経線方向）に θ 、半径方向に z 軸（中心に向かう方向を正とする）をとって、 x 、 y 、 z を流動座標系とする。また、シェルの母線方向、周方向（経線方向）、半径方向の中立面変位をそれぞれ u, v, w とする。

釣合式は a を中立面半径、 t をシェル厚、 X, Y, Z を外荷重として次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} N_x + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} N_{x\theta} + X &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} N_{x\theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} N_\theta - \frac{1}{a} Q_\theta + Y &= 0 \\ \frac{1}{a} N_\theta + \frac{\partial}{\partial x} Q_x + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} Q_\theta + Z &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} M_x + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} M_{\theta x} + Q_x &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} M_{x\theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} M_\theta + Q_\theta &= 0\end{aligned}$$

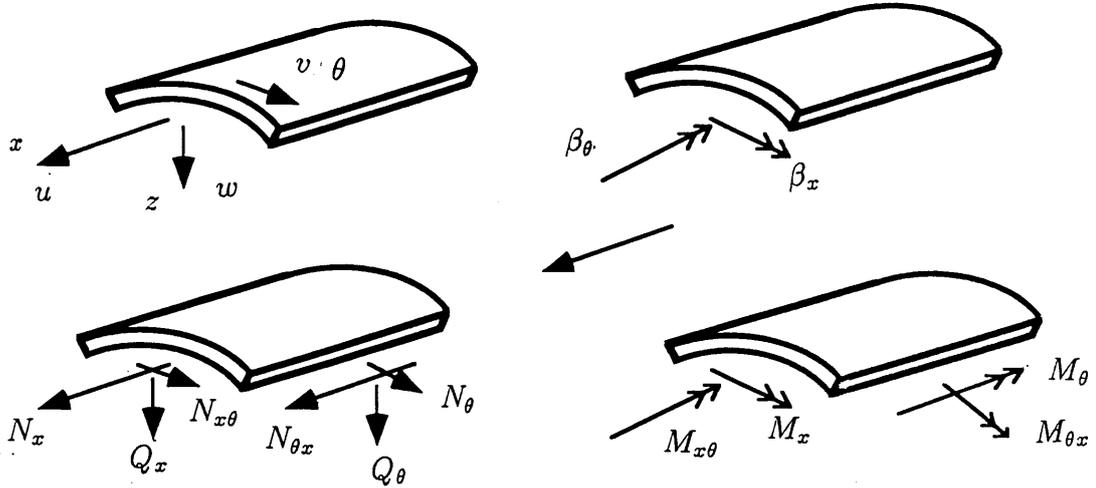


図 D.1: 変位、断面力の正方向

中央面での歪を次のようにおく。

$$\begin{array}{ll}
 x \text{ 方向歪} & \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} & x \text{ 方向曲率変化} & \kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 y \text{ 方向歪} & \varepsilon_\theta = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) & y \text{ 方向曲率変化} & \kappa_\theta = \frac{1}{a^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
 \text{せん断歪} & \gamma_{x\theta} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + a \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \text{ねじり率} & \kappa_{x\theta} = a \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta}
 \end{array}$$

次の仮定を設ける。

- モーメントにおける $u, v, \varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{\theta x}, \omega$ の項を無視する。
 ($M_x, M_\theta, M_{\theta x}, M_{x\theta}$ において、 $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{\theta x}, \omega$ は厚さ方向の応力分布を示すので、法線方向変位による曲げの力より小さいと考えられる)
- w に対して w の項を省略する
 (微小変形問題を考えるので、局所的な曲率変化の方がオーダー的に大きくなる)

以上の仮定の結果、断面力は次のよう表すことができる。

$$\begin{aligned}
 N_\theta &= \frac{B}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w + \nu a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = B(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x) \\
 N_x &= \frac{B}{a} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \left(w - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right) = B(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta) \\
 N_{x\theta} &= \frac{B}{a} \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + a \frac{\partial v}{\partial x} \right) = B \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\theta} = N_{\theta x} \\
 M_x &= -\frac{D}{a^2} \left(a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
 M_\theta &= -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$M_{x\theta} = -\frac{D}{a}(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta} = -D(1-\nu)\kappa_{x\theta} = M_{\theta x}$$

$$\text{ただし } B = \frac{Et}{1-\nu^2} \text{ 引張剛性, } D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \text{ 曲げ剛性, } S = \frac{D}{Ba^2} = \frac{t^2}{12a^2}$$

また、断面内における変位と応力分布を次のように定める。

$$\begin{aligned} u_z &= u - z\frac{\partial w}{\partial x} & v_z &= \left(1 - \frac{z}{a}\right)v - \frac{z}{a}\frac{\partial w}{\partial \theta} & w_z &= w \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{a}w - \frac{z}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} & \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \theta} - 2\frac{z}{a}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta) & \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x) & \sigma_z &= 0 \\ \tau_{x\theta} &= G\gamma_{x\theta} & \tau_{xz} &= \frac{3Q_x}{2t}\left\{1 - \left(\frac{2z}{t}\right)^2\right\} & \tau_{\theta z} &= \frac{3Q_\theta}{2t}\left\{1 - \left(\frac{2z}{t}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

D.1.3 膜応力解

D.1.3.1 周方向にフーリエ展開した場合のシェル理論解

膜応力状態では、面内応力のみで釣合が保たれるので、 $M_x = M_\theta = M_{\theta x} = M_{x\theta} = Q_x = Q_\theta = 0$ 、 $N_{\theta x} = N_{x\theta}$ とする。よって、釣合式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + X &= 0 \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + Y &= 0 \\ N_\theta + aZ &= 0 \end{aligned}$$

今、一般解を考えるため、シェルに外荷重が作用していない($X = Y = Z = 0$)のものとする。これらを積分して応力 $N_x, N_\theta, N_{x\theta}$ を求めると次の通りである。

$$\begin{aligned} N_\theta &= 0 \\ N_{x\theta} &= N_{\theta x} = K_1 f_1(\theta) \\ N_x &= -K_1 \frac{x}{a} \frac{\partial f_1(\theta)}{\partial \theta} + K_2 f_2(\theta) \\ K_i f_i(\theta) &: \theta \text{ に関する任意関数} \end{aligned}$$

また変位と応力の関係より、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} a\frac{\partial u}{\partial x} &= a\varepsilon_x = \frac{a}{Et}(N_x - \nu N_\theta) \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} - w &= a\varepsilon_\theta = \frac{a}{Et}(N_\theta - \nu N_x) \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} + a\frac{\partial v}{\partial x} &= a\gamma_{x\theta} = 2(1+\nu)\frac{a}{Et}N_{x\theta} \end{aligned}$$

ただし、 $S = \frac{D}{a^2 B} \ll \frac{1}{a}$ であるから、 $S = 0$ としている。よって、変位は以下の式で計算される。

$$u = \frac{1}{Et} \int (N_x - \nu N_\theta) dx$$

$$v = 2(1 + \nu) \frac{1}{Et} \int N_{x\theta} dx - \frac{1}{a} \int \frac{\partial u}{\partial \theta} dx$$

$$w = \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{a}{Et} (N_\theta - \nu N_x)$$

変位は次のようになる。

$$u = -\frac{a}{Et} \left[\frac{1}{2} K_1 \frac{x^2}{a^2} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} - K_2 \frac{x}{a} f_2(\theta) - K_3 f_3(\theta) \right]$$

$$v = -\frac{a}{Et} \left[-2(1 + \nu) K_1 \frac{x}{a} f_1(\theta) - \frac{1}{6} K_1 \frac{x^3}{a^3} \frac{\partial^2 f_1(\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} K_2 \frac{x^2}{a^2} \frac{\partial f_2(\theta)}{\partial \theta} + K_3 \xi \frac{\partial f_3(\theta)}{\partial \theta} - K_4 f_4(\theta) \right]$$

$$w = \frac{a}{Et} \left[(2 + \nu) K_1 \frac{x}{a} \frac{\partial f_1(\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{6} K_1 \nu^3 \frac{\partial^3 f_1(\theta)}{\partial \theta^3} + \nu K_2 f_2(\theta) - \frac{1}{2} K_2 \frac{x^2}{a^2} \frac{\partial^2 f_2(\theta)}{\partial \theta^2} - K_3 \frac{x}{a} \frac{\partial^2 f_3(\theta)}{\partial \theta^2} + K_4 \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \right]$$

ここで $K_i f_i(\theta)$ を以下のようにおく。

$$K_1 f_1(\theta) = K_1^n \sin n\theta$$

$$K_2 f_2(\theta) = K_2^n \cos n\theta$$

$$K_3 f_3(\theta) = K_3^n \cos n\theta$$

$$K_4 f_4(\theta) = K_4^n \sin n\theta$$

結果として解は次のようになる。

$$N_x = (-K_1^n \frac{x}{a} n + K_2^n) \cos n\theta$$

$$N_\theta = 0$$

$$N_{x\theta} = K_1^n \sin n\theta$$

$$u = -\frac{a}{Et} \left[\frac{1}{2} K_1^n \frac{x^2}{a^2} n - K_2^n \frac{x}{a} - K_3^n \right] \cos n\theta$$

$$v = \frac{a}{Et} \left[2(1 + \nu) K_1^n \frac{x}{a} - \frac{1}{6} K_1^n \frac{x^3}{a^3} n^2 + \frac{1}{2} K_2^n \frac{x^2}{a^2} n + K_3^n \frac{x}{a} n + K_4^n \right] \sin n\theta$$

$$w = \frac{a}{Et} \left[(2 + \nu) K_1^n \frac{x}{a} n - \frac{1}{6} K_1^n \frac{x^3}{a^3} n^3 + \nu K_2^n + \frac{1}{2} K_2^n \frac{x^2}{a^2} n^2 + K_3^n \frac{x}{a} n^2 + K_4^n n \right] \cos n\theta$$

軸圧縮が作用する場合の解 以上の解に $n = 0$ を代入すると軸圧縮が作用した場合のシェル理論解となる。

$$N_x = K_2$$

$$N_\theta = N_{x\theta} = 0$$

$$u = -\frac{a}{Et} \left[-K_2 \frac{x}{a} - K_3 \right]$$

$$v = 0$$

$$w = \frac{a}{Et} \nu K_2$$

せん断力、曲げモーメントが作用する場合の解 また、先の解に $n = 1$ を代入するとせん断力、曲げモーメントが作用した場合のシェル理論解となる。

$$N_x = \left(-K_1 \frac{x}{a} + K_2 \right) \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
N_\theta &= 0 \\
N_{x\theta} &= K_1 \sin \theta \\
u &= -\frac{a}{Et} \left[\frac{1}{2} K_1 \frac{x^2}{a^2} - K_2 \frac{x}{a} - K_3 \right] \cos \theta \\
v &= \frac{a}{Et} \left[2(1+\nu) K_1 \frac{x}{a} - \frac{1}{6} K_1 \frac{x^3}{a^3} + \frac{1}{2} K_2 \frac{x^2}{a^2} + K_3 \frac{x}{a} + K_4 \right] \sin \theta \\
w &= \frac{a}{Et} \left[(2+\nu) K_1 \frac{x}{a} - \frac{1}{6} K_1 \frac{x^3}{a^3} + \nu K_2 + \frac{1}{2} K_2 \frac{x^2}{a^2} + K_3 \frac{x}{a} + K_4 \right] \cos \theta
\end{aligned}$$

$n \geq 2$ の場合 $n \geq 2$ のものは日置により、曲げ応力解の小さい複素数解をべき級数展開したものであると証明されている [37]。

ねじり 円筒の軸回りのねじりを受ける円筒シェルのシェル理論解は次のようになる。

$$\begin{aligned}
u &= w = 0 \\
v &= K_1 x + K_2 \\
N_{x\theta} &= Gt K_1
\end{aligned}$$

D.1.3.2 軸方向にフーリエ展開した場合のシェル理論解

せん断変形 面内せん断を受ける円筒シェルのシェル理論解は次のようになる。

$$\begin{aligned}
u &= K_1 \theta + K_2 \\
v &= w = 0 \\
N_{x\theta} &= G \frac{t}{a} K_1
\end{aligned}$$

剛体変位 円筒シェルの剛体変位のシェル理論解は次のようになる。

$$\begin{aligned}
u &= 0 \\
v &= K_1 \sin \theta + K_2 \cos \theta \\
w &= K_1 \cos \theta - K_2 \sin \theta
\end{aligned}$$

純曲げを受ける円弧梁 純曲げを受ける円弧梁の基礎式は次のようになる

$$\begin{aligned}
M_\theta &= M_o = -\frac{D}{a^2} (w_{,\theta\theta} + w) = -\frac{D}{a^2} w \\
N_\theta &= \frac{B}{a} (v_{,\theta} - w) = 0
\end{aligned}$$

よって、解は以下のようにになる。

$$\begin{aligned}
u &= 0 \\
v &= K_1 \theta + K_2 \\
w &= K_1 \\
M_\theta &= -\frac{D}{a^2} K_1
\end{aligned}$$

せん断を受ける円弧梁 せん断を受ける円弧梁の基礎式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}N_{\theta,\theta} - \frac{1}{a}Q_{\theta} &= 0 \\ \frac{1}{a}N_{\theta} + \frac{1}{a}Q_{\theta,\theta} &= 0 \\ \frac{1}{a}M_{\theta,\theta} + Q_{\theta} &= 0 \\ N_{\theta} &= \frac{B}{a}(v_{\theta,\theta} - w) & M_{\theta} &= -\frac{D}{a^2}w_{,\theta\theta}\end{aligned}$$

よって、解は以下のようになる。

$$\begin{aligned}u &= 0 \\ v &= \frac{a}{B}(-K_1 \cos \theta - K_2 \sin \theta) + \frac{a^3}{D}(K_1 \cos \theta + K_2 \sin \theta) \\ w &= \frac{a^3}{D}(-K_1 \sin \theta + K_2 \cos \theta) \\ Q_{\theta} &= K_1 \cos \theta + K_2 \sin \theta \\ N_{\theta} &= K_1 \sin \theta - K_2 \cos \theta \\ M_{\theta} &= -aK_1 \sin \theta + aK_2 \cos \theta\end{aligned}$$

D.1.4 曲げ応力解

曲げ応力を考慮した釣合式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}N_x + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \theta}N_{x\theta} + X &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}N_{x\theta} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \theta}N_{\theta} - \frac{1}{a}Q_{\theta} + Y &= 0 \\ \frac{1}{a}N_{\theta} + \frac{\partial}{\partial x}Q_x + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \theta}Q_{\theta} + Z &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}M_x + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \theta}M_{\theta x} + Q_x &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}M_{x\theta} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \theta}M_{\theta} + Q_{\theta} &= 0\end{aligned}$$

変位に対し、次のように変数分離を行う。

$$\begin{aligned}u &= u_0 e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}} \\ v &= -iv_0 e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}} \\ w &= w_0 e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}}\end{aligned}$$

先の釣合式を変位で表すと次のようになる。

$$\left[\begin{array}{c} a_{ij} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{array} \right\} = -\frac{a^2}{B} \left\{ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}a_{11} &= \omega^2 - \frac{1-\nu}{2}(1+S)n^2 & a_{12} &= \frac{1+\nu}{2}\omega n & a_{13} &= \left(-\nu + \frac{1-\nu}{2}Sn^2\right)\omega + S\omega^3 \\ a_{21} &= -a_{12} & a_{22} &= -n^2 + \frac{1-\nu}{2}(1+3S)\omega^2 & a_{23} &= n - \frac{3-\nu}{2}kn\omega^2 \\ a_{31} &= -a_{13} & a_{32} &= a_{23} & a_{33} &= -1 - S\omega^4 + 2Sn^2\omega^2 + S(2n^2 - n^4 - 1)\end{aligned}$$

上記の行列の行列式 ($|a_{ij}|$) を零とする特性値 ω を求める。行列式 (特性方程式) は、文献 [37] によった。特性方程式は $S \ll 1$ であるので、1 に対して S を無視することにより次のように導かれる。

$$\begin{aligned} \text{特性方程式 } \omega^8 - (4\nu^2 - 2\nu)\omega^6 + \left(6n^4 - 6n^2 + \frac{1 - \nu^2}{S}\right)\omega^4 \\ - (4n^2 - 4 + 2\nu)n^2(n^2 - 1)\omega^2 + n^4(n^2 - 1)^2 = 0 \\ S = \frac{t^2}{12a^2} \end{aligned}$$

特に $n = 0$ の場合には次のようになる。

$$\omega^4 + 2\nu\omega^2 + \frac{1 - \nu^2}{S} = 0$$

この行列式は ω^2 の 4 次式であるから、理論計算は可能である。しかし非常に複雑な式であるので、正確には解かれていない。そこで、本論文では数値計算によって求めている。この特性方程式は、整数 n を与えると周方向にフーリエ展開した場合の特性方程式となり、 $n = 0$ の場合には複素数特性値が 4 個、 $n = 1$ の場合には複素数特性値が 4 個、 $n \geq 2$ の場合には複素数特性値が 8 個得られる。

また、特性方程式を n について整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} n^8 - 2(2\omega^2 + 1)n^6 + (6\omega^4 + 8\omega^2 - 2\omega^2\nu + 1)n^4 \\ + 2(-2\omega^4 - 3\omega^2 + \nu - 2)\omega^2 n^2 + \left(\omega^4 + 2\omega^2\nu + \frac{1 - \nu^2}{S}\right)\omega^4 = 0 \end{aligned}$$

この特性方程式に純虚数 $\omega = \omega_0 i$ を与えると軸方向にフーリエ展開された場合の特性方程式となり、 $\omega_0 = 0$ の場合には $n = 0, \pm 1$ となり、 $\omega_0 \neq 0$ の場合には複素数特性値が 8 個得られる。

なお、周方向にフーリエ展開した場合について応力関数法を用いて計算を行うと次のように特性値が得られる [38]。

$$\begin{aligned} \omega &= \pm(\alpha_1 - \beta_1 i) \quad \omega = \pm\alpha_2\beta_2 \\ \alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1^2 + \tau_1^2}} \\ \alpha_2 &= \frac{1}{\sqrt{12}}\sqrt{\sigma_2 + \sqrt{\sigma_2^2 + \tau_2^2}} \\ \beta_1 &= \sqrt{\frac{\tau_1}{2}} \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{\tau_2}{2}} \\ \rho_n &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\frac{n^4}{\kappa^4}}} \quad \kappa = \sqrt[3]{3(1 - \nu^2)}\sqrt{\frac{a}{t}} \\ \sigma_1 &= n^2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\rho_n}\right) \quad \tau_1 = \kappa^2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\rho_n}\right) \\ \sigma_2 &= n^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\rho_n}\right) \quad \tau_2 = \kappa^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\rho_n}\right) \end{aligned}$$

応力関数法による特性値の内、減衰の小さいものは膜理論解に含まれるものとして、減衰の大きなものを簡素化して示すと次のようになる。

$$\omega = \pm\kappa(1 \pm i)$$

D.1.4.1 周方向にフーリエ展開した場合

周方向にフーリエ展開した場合 $n = m\pi, m = 0, 1, 2, \dots$ として未定定数の総数は次のようになる。

	膜応力解 (D.1.3節)	曲げ応力解 ($e^{i\omega \frac{x}{L}}$)	
		減衰大	減衰小
$m = 0$	2	4	なし
$m = 1$	4	4	なし
$m \geq 2$	なし	4	4

D.1.4.2 軸方向にフーリエ展開した場合

軸方向にフーリエ展開した場合、 $\omega = \frac{\pi}{L}mi, m = 0, 1, 2, \dots$ として、8 個の複素数解が得られる。よって、未定定数の総数は次のようになる。

	べき級数, 三角関数で表される解 (D.1.3節)	曲げ応力解 ($e^{in\theta}$) (複素数解)
$m = 0$	6	なし
$m \neq 0$	なし	8

D.2 せん断変形を考慮したシェル理論 (曲げ応力解)

平均せん断変形を考慮した場合の曲げ応力解を求める。法線保持の仮定を用いた場合と同様の座標系を採って、釣合式は a を中立面半径、 t をシェル厚、 X, Y, Z を外荷重として次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} N_x + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} N_{x\theta} - \frac{1}{2a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} M_{x\theta} + X &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} N_{x\theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} N_\theta - \frac{1}{a} Q_\theta + \frac{1}{2a^2} M_{x\theta} + Y &= 0 \\ \frac{1}{a} N_\theta + \frac{\partial}{\partial x} Q_x + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} Q_\theta + Z &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} M_x + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} M_{\theta x} + Q_x &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} M_{x\theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} M_\theta + Q_\theta &= 0 \end{aligned}$$

中立面変位を u, v, w, β_x を x 一定断面の x 方向の平均回転角、 β_θ を θ 一定断面の θ 方向の平均回転角とする。

中立面での歪は次のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{a} v_{,\theta} - \frac{w}{a} \\ \varepsilon_x &= u_{,x} \\ \gamma_{x\theta} &= v_{,x} + \frac{1}{a} u_{,\theta} \\ \gamma_x &= w_{,x} - \beta_x \\ \gamma_\theta &= \frac{1}{a} w_{,\theta} + \frac{1}{a} v - \beta_\theta \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{a} \beta_{\theta,\theta} \\ \kappa_x &= \beta_{x,x} \\ \kappa_{x\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} \beta_{x,\theta} + \beta_{\theta,x} \right) - \frac{1}{4a} \left(\frac{1}{a} u_{,\theta} - v_{,x} \right) \end{aligned}$$

また、断面内における変位と応力分布を次のように定める。

$$\begin{aligned}
 u_z &= u - z\beta_x & v_z &= \left(1 - \frac{z}{a}\right)v - \frac{z}{a}\beta_\theta & w_z &= w \\
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial\beta_x}{\partial x} & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial\theta} - \frac{1}{a}w - \frac{z}{a}\frac{\partial\beta_\theta}{\partial\theta} & \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{z}{a}\frac{\partial\beta_x}{\partial\theta} - z\frac{\partial\beta_\theta}{\partial x} \\
 \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta) & \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x) & \sigma_z &= 0 \\
 \tau_{x\theta} &= G\gamma_{x\theta} & \tau_{xz} &= \frac{3Q_x}{2t}\left\{1 - \left(\frac{2z}{t}\right)^2\right\} & \tau_{\theta z} &= \frac{3Q_\theta}{2t}\left\{1 - \left(\frac{2z}{t}\right)^2\right\}
 \end{aligned}$$

k を平均せん断角に関する断面係数として、断面力は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 N_\theta &= \frac{Et}{1-\nu^2}\{\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x\} \\
 N_x &= \frac{Et}{1-\nu^2}\{\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta\} \\
 N_{x\theta} &= \frac{Et}{2(1+\nu)}\gamma_{x\theta} \\
 M_\theta &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\{\kappa_\theta + \nu\kappa_x\} \\
 M_x &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\{\kappa_x + \nu\kappa_\theta\} \\
 M_{x\theta} &= \frac{Et^3}{12(1+\nu)}\kappa_{x\theta} \\
 Q_\theta &= \frac{1}{k}\frac{Et}{2(1+\nu)}\gamma_\theta \\
 Q_x &= \frac{1}{k}\frac{Et}{2(1+\nu)}\gamma_x
 \end{aligned}$$

変位を次のように仮定する。

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}} \\
 v &= -iv_0 e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}} \\
 w &= w_0 e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}} \\
 \beta_x &= \beta_{x0} e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}} \\
 \beta_\theta &= -i\beta_{\theta0} e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}}
 \end{aligned}$$

歪は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\theta &= \left(\frac{n}{a}v_0 - \frac{1}{a}w_0\right) e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}} \\
 \varepsilon_x &= \frac{\omega}{a}u_0 e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}} \\
 \gamma_{x\theta} &= -i\left(\frac{\omega}{a}v_0 - \frac{n}{a}u_0\right) e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}} \\
 \gamma_\theta &= -i\left(-\frac{n}{a}w_0 + \frac{1}{a}v_0 - \beta_{\theta0}\right) e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}} \\
 \gamma_x &= \left(\frac{\omega}{a}w_0 - \beta_{x0}\right) e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}} \\
 \kappa_\theta &= \frac{n}{a}\beta_{\theta0} e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}} \\
 \kappa_x &= \frac{\omega}{a}\beta_{x0} e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}} \\
 \kappa_{x\theta} &= -i\left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{n}{a}\beta_{x0} + \frac{\omega}{a}\beta_{\theta0}\right) - \frac{1}{4a}\left(-\frac{n}{a}u_0 - \frac{\omega}{a}v_0\right)\right\} e^{in\theta} e^{\omega \frac{x}{a}}
 \end{aligned}$$

断面力は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 N_\theta &= \frac{Et}{1-\nu^2} \{\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x\} = \frac{Et}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{\omega}{a} u_0 + \frac{n}{a} v_0 - \frac{1}{a} w_0 \right] e^{in\theta} e^{\frac{x}{a}} \\
 N_x &= \frac{Et}{1-\nu^2} \{\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta\} = \frac{Et}{1-\nu^2} \left[\frac{\omega}{a} u_0 + \nu \frac{n}{a} v_0 - \frac{\nu}{a} w_0 \right] e^{in\theta} e^{\frac{x}{a}} \\
 N_{x\theta} &= \frac{Et}{2(1+\nu)} \gamma_{x\theta} = -i \frac{Et}{2(1+\nu)} \left[\frac{\omega}{a} v_0 - \frac{n}{a} u_0 \right] e^{in\theta} e^{\frac{x}{a}} \\
 M_\theta &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \{\kappa_\theta + \nu\kappa_x\} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{n}{a} \beta_{\theta 0} + \nu \frac{\omega}{a} \beta_{x 0} \right] e^{in\theta} e^{\frac{x}{a}} \\
 M_x &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \{\kappa_x + \nu\kappa_\theta\} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left[\nu \frac{n}{a} \beta_{\theta 0} + \frac{\omega}{a} \beta_{x 0} \right] e^{in\theta} e^{\frac{x}{a}} \\
 M_{x\theta} &= \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \kappa_{x\theta} = -i \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \left[-\frac{n}{2a} \beta_{x 0} + \frac{\omega}{2a} \beta_{\theta 0} + \frac{n}{4a^2} u_0 + \frac{\omega}{4a^2} v_0 \right] e^{in\theta} e^{\frac{x}{a}} \\
 Q_\theta &= \frac{1}{k} \frac{Et}{2(1+\nu)} \gamma_\theta = -i \frac{1}{k} \frac{Et}{2(1+\nu)} \left[-\frac{n}{a} w_0 + \frac{1}{a} v_0 - \beta_{\theta 0} \right] e^{in\theta} e^{\frac{x}{a}} \\
 Q_x &= \frac{1}{k} \frac{Et}{2(1+\nu)} \gamma_x = \frac{1}{k} \frac{Et}{2(1+\nu)} \left[\frac{\omega}{a} w_0 - \beta_{x 0} \right] e^{in\theta} e^{\frac{x}{a}}
 \end{aligned}$$

結果として釣合式は変位成分を用いては次のように表される。

$$\left[\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \\ a_{25} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ a_{34} \\ a_{35} \\ a_{41} \\ a_{42} \\ a_{43} \\ a_{44} \\ a_{45} \\ a_{51} \\ a_{52} \\ a_{53} \\ a_{54} \\ a_{55} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \beta_{x 0} \\ \beta_{\theta 0} \end{array} \right\} = -\frac{a^2}{B} \left\{ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \omega^2 - \frac{1-\nu}{2} \left(1 + \frac{S}{4} \right) n^2 & a_{12} &= \left(1 - \frac{1-\nu}{2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{S}{4} \right) n\omega \\
 a_{13} &= -\nu\omega & a_{14} &= \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{2} S a n^2 \\
 a_{15} &= -\frac{1}{2} \frac{1-\nu}{2} S a n \omega & & \\
 a_{21} &= -\left(1 - \frac{1-\nu}{2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{S}{4} \right) n\omega & a_{22} &= \frac{1-\nu}{2} \left(1 + \frac{S}{4} \right) \omega^2 - n^2 - \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{k} \\
 a_{23} &= n + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{k} n & a_{24} &= -\frac{1}{2} \frac{1-\nu}{2} S a n \omega \\
 a_{25} &= \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{2} S a \omega^2 + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{k} a & & \\
 a_{31} &= \nu\omega & a_{32} &= n + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{k} n \\
 a_{33} &= \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{k} \omega^2 - \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{k} n^2 - 1 & a_{34} &= -\frac{1-\nu}{2} \frac{1}{k} a \omega \\
 a_{35} &= -\frac{1-\nu}{2} \frac{1}{k} a n & & \\
 a_{41} &= \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{2} S a n^2 & a_{42} &= \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{2} S a n \omega \\
 a_{43} &= \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{k} a \omega & a_{44} &= S a^2 \omega^2 - \frac{1-\nu}{2} S a^2 n^2 - \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{k} a^2 \\
 a_{45} &= \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \right) S a^2 n \omega & & \\
 a_{51} &= \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{2} S a n \omega & a_{52} &= \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{2} S a \omega^2 + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{k} a \\
 a_{53} &= -\frac{1-\nu}{2} \frac{1}{k} a n & a_{54} &= -\left(1 - \frac{1-\nu}{2} \right) S a^2 n \omega \\
 a_{55} &= \frac{1-\nu}{2} S a^2 \omega^2 - S a^2 n^2 - \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{k} a^2 & &
 \end{aligned}$$

特性方程式は $S \ll 1$ として、1 に対して S を無視することにより次のように得られる。

$$\begin{aligned} \text{特性方程式 } & Sk\omega^{10} - (5Sn^2k + 1)\omega^8 + \{10Skn^4 + 4n^2 + (3 - \nu)(1 + \nu)k\}\omega^6 \\ & - \left\{ 10Skn^6 + 6n^4 + \{(3 + 2\nu - \nu^2)k - 6\}n^2 + \frac{1 - \nu^2}{S} \right\} \omega^4 \\ & + (5Skn^8 + 4n^6 - 8n^4)\omega^2 - (Sn^6k + (n^2 - 1)^2)n^4 = 0 \\ & S = \frac{t^2}{12a^2}, k = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

特に $n = 0$ の場合には次のようになる。

$$\omega^4 - 2k(1 + \nu)\omega^2 + \frac{1 - \nu^2}{S} = 0$$

この特性方程式は、整数 n を与えると周方向にフーリエ展開した場合の特性方程式となり、 $n = 0$ の場合には複素数特性値が 4 個、 $n = 1$ の場合には複素数特性値が 4 個、実数特性値が 2 個、 $n \geq 2$ の場合には複素数特性値が 8 個、実数特性値が 2 個得られる。

また、特性方程式を n について整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} -Skn^{10} + (5Skn^2 - 1)n^8 + 2(-5Skn^4 + 2\omega^2 + 1)n^6 + (10SK\omega^6 - 6\omega^4 - 8\omega^2 - 1)n^4 \\ + (-5Skn^4 + 4\omega^4 + (\nu^2 - 2\nu - 3)k + 6)\omega^4 n^2 + \left(Sk\omega^6 - \omega^4 + (1 + \nu)(3 - \nu)k\omega^2 - \frac{1 - \nu^2}{S} \right) \omega^4 = 0 \end{aligned}$$

この特性方程式に純虚数 $\omega = \omega_0 i$ を与えると軸方向にフーリエ展開された場合の特性方程式となり、 $\omega_0 = 0$ の場合には $n = 0, \pm 1$ となり、 $\omega_0 \neq 0$ の場合には複素数特性値が 8 個、純虚数特性値が 2 個得られる。

D.2.0.3 周方向にフーリエ展開した場合

周方向にフーリエ展開した場合、 $n = m\pi, m = 0, 1, 2, \dots$ として、未定定数の総数を表すと次のようになる。なお、膜応力解は D.1.3 節で得られたものであり、円筒のねじりに関する未定定数を含めていない。

	膜応力解	曲げ応力解 ($e^{\omega \frac{x}{a}}$)		
		減衰大	減衰小	実数
$m = 0$	2	4	なし	なし
$m = 1$	4	4	なし	2
$m \geq 0$	なし	4	4	2

D.2.0.4 軸方向にフーリエ展開した場合

軸方向にフーリエ展開した場合、 $\omega = \frac{\pi}{L}mi, m = 0, 1, 2, \dots$ とすると解は 8 々の複素数解と 2 々の虚数解が得られる。よって、未定定数の総数は次のようになる。なお、膜応力解は D.1.3 節で得られたものであり、面内せん断変形に関する未定定数は含めていない。

	べき級数, 三角関数で表される解	曲げ応力解 ($e^{in\theta}$)	
		複素数	虚数
$m = 0$	6	なし	なし
$m \neq 0$	なし	8	2

付録 E

幾何学的非線形性を考慮した三次元理論 解析における円筒の楕円化の種類

幾何学的非線形性を考慮した三次元解析における周方向フーリエ展開次数 $n = 2$ の変位に示される楕円化は、円筒断面が傾くことにより楕円に見える場合と円筒断面が変形して楕円になる場合の2種類が考えられる。

- 1) 断面の傾きによる断面の”見かけの楕円化” (円形の断面が傾くことにより円が楕円に見える場合)

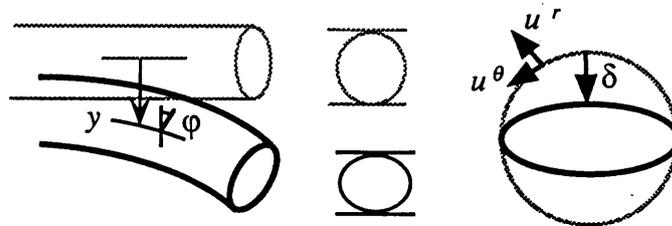


図 E.1: 見かけの楕円化

いま、円筒中心軸のたわみを y 、円筒断面の傾きを ϕ ($\phi = y'$)、図 E.1 に示す変位量を δ とすると、次の式が導かれる。

$$\begin{aligned}\delta &= r_0(1 - \cos \phi) = 2r_0 \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ &\simeq 2r_0 \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 = r_0 \frac{\phi^2}{2} = r_0 \frac{y'^2}{2}\end{aligned}$$

また、”見かけの楕円化”を発生する変位は次式で示される。

$$r \text{ 方向変位: } u^r = U_0 + U_2 \cos 2\theta$$

$$\theta \text{ 方向変位: } u^\theta = V_2 \sin 2\theta$$

$$\text{ただし } U_0 = -\frac{\delta}{2}, U_2 = -\frac{\delta}{2}, V_2 = \frac{\delta}{2}$$

従って、周方向フーリエ展開次数 $n = 2$ の変位は円筒の中心軸のたわみ y を用いて次のように表される。

$$u^r = -r_0 \frac{y'^2}{4} \cos 2\theta$$

$$u^\theta = r_0 \frac{y'^2}{4} \sin 2\theta$$

2) 断面の”真の楕円化” (円筒断面が変形して楕円になる場合)

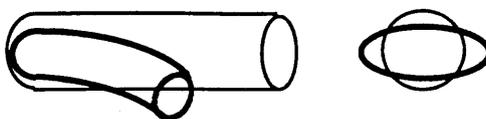


図 E.2: 真の楕円化

真の楕円化は、円周方向の伸び ε_θ が0であると仮定する。この場合次の式が導かれる。

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r_0}(u_{,\theta}^\theta + u^r) = 0$$

従って変位は C を定数として次のように計算される。

$$\begin{aligned} u^r &= C \cos 2\theta \\ u^\theta &= -\frac{C}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$