

報告番号 甲 第 3388 号

不可逆熱力学構成式理論に基づく
連続体損傷力学の研究

早川 邦夫

不可逆熱力学構成式理論に基づく
連続体損傷力学の研究

1996年2月

早川 邦夫

名古屋大学図書	
和	1250140

目 次

第1章 緒 論	1
記 号	7
第2章 不可逆熱力学構成式理論に基づく損傷力学	11
2. 1 連続体の熱力学	11
2. 1. 1 局所状態の原理	11
2. 1. 2 熱力学第一法則	11
2. 1. 3 熱力学第二法則	14
2. 2 内部状態変数を用いた不可逆熱力学構成式理論	17
2. 2. 1 状態変数	17
2. 2. 2 不可逆熱力学過程の構成式	18
2. 2. 3 エネルギー散逸ポテンシャルと内部状態変数の発展式	20
2. 3 連続体損傷力学	21
2. 3. 1 材料損傷とその力学的表現	22
2. 3. 2 古典的な等方損傷理論	24
2. 3. 3 異方損傷への拡張	25
2. 4 不可逆熱力学構成式に基づく損傷理論	29
2. 4. 1 ひずみ等価性ならびにひずみエネルギー等価性の仮説	29
2. 4. 2 スカラー損傷理論に対する熱力学理論	30
2. 4. 3 ベクトル損傷理論に対する熱力学的理論	32
2. 4. 4 テンソル損傷理論に対する熱力学的理論	33
2. 5 本章のまとめ	35
第3章 弾性-脆性材料の構成式と損傷発展式に対する不可逆熱力学理論	36
3. 1 弾性-脆性材料に対する応用	36
3. 1. 1 構成式と損傷発展式の定式化	36
3. 1. 2 弾性-脆性材料の構成式	38
3. 1. 3 損傷の発展式	38
3. 2 高強度コンクリートの弾性-脆性損傷解析	40
3. 2. 1 単軸単調圧縮	40
3. 2. 2 単軸単調引張り	43

3.2.3	弾性-脆性損傷過程の応力経路依存性	45
3.3	本章のまとめ	48
第4章	弾塑性-損傷材料の構成式と異方損傷発展式	49
4.1	内部状態変数の選択	49
4.2	Helmholtzの自由エネルギー関数の定式化	50
4.3	散逸ポテンシャルの定式化	51
4.4	構成式の導出	53
4.4.1	弾性構成式と熱力学的共役力	53
4.4.2	塑性構成式	54
4.4.3	損傷発展式	54
4.5	具体的な適用	55
4.5.1	単軸引張り過程に対する適用	55
4.5.2	ねじり負荷過程に対する適用	57
4.6	実験結果との比較	58
4.6.1	単軸引張り試験	58
4.6.2	ねじり試験	60
4.7	本章のまとめ	62
第5章	弾塑性-損傷材料のモデル化と	
	多軸組合せ負荷における損傷面の実験的検討	64
5.1	試験片材料と試験方法	64
5.1.1	試験片材料と形状	64
5.1.2	試験システムとひずみ測定法	65
5.1.3	アコースティック・エミッションによる損傷計測	67
5.1.4	試験片材料の初期等方性の検討	68
5.1.5	AEと損傷発生しきい値の決定	69
5.2	単軸引張りとねじり試験	71
5.2.1	試験方法	71
5.2.2	単軸引張り試験の結果と検討	72
5.2.3	ねじり試験の結果と検討	74
5.3	引張り-ねじり組み合わせ応力空間における損傷面の実験的検討	76
5.3.1	初期損傷面の検討方法	76
5.3.2	後続損傷面の検討方法	77

5. 3. 3	損傷面に対する実験結果と考察	78
5. 4	本実験結果の熱力学的損傷理論への適用	83
5. 5	本章のまとめ	84
第6章	熱力学理論による弾塑性-損傷材料に対する構成式と 応力空間における損傷発展式の定式化	86
6. 1	弾塑性-損傷構成式に対する不可逆熱力学理論	86
6. 1. 1	内部状態変数	86
6. 1. 2	Gibbs の熱力学ポテンシャルを用いた定式化	87
6. 1. 3	Gibbs の熱力学ポテンシャルの定式化	88
6. 1. 4	弾性構成式と熱力学的共役力	90
6. 1. 5	内部状態変数の発展式	91
6. 1. 6	塑性散逸ポテンシャル	91
6. 1. 7	損傷散逸ポテンシャル	93
6. 2	単軸引張りと単純ねじりに対する構成式の展開	94
6. 2. 1	単軸引張り過程	94
6. 2. 2	単純ねじり過程	96
6. 3	実験結果との比較	98
6. 3. 1	材料定数	98
6. 3. 2	単軸引張り試験との比較	99
6. 3. 3	ねじり試験との比較	101
6. 3. 4	損傷面に対する計算	103
6. 4	Helmholtz の自由エネルギーによる定式化との比較	104
6. 5	本章のまとめ	104
第7章	結 論	106
謝 辞		109
参考文献		110

第1章 緒 論

近年、機械・構造物に対する安全性、信頼性等の要求は、高効率化、省エネルギー化等に対するそれとともにますます高くなっている。このような要求の実現のためには、機械・構造物に対する設計精度の向上が不可欠であるが、これは、機械・構造物に用いられる構造用材料の物理的非線形性 (Material non-linearity) を表現する非弾性構成モデルの適否に大きく依存する。

一般的な工業材料では、外力の作用によって巨視的な変形だけでなく不可逆な微視的内部構造変化を伴うことが多く、これが材料の物理的非線形性の主な原因となる。このような微視的内部構造変化のうち、材料中の微視的空げきの発生・成長は、単に巨視的き裂の発生と最終的な破断を引き起こすだけでなく、破壊に至る過程において、引張り強度、剛性、靱性の低下、あるいは残存寿命の減少などのような材料の劣化、すなわち材料損傷の原因となる[1-16]。また、このような微視的空げきの発生・成長は一般には応力の作用方向に依存し、材料損傷は顕著な異方性を示す[6-9]。

このような多数の分布空げきの発達とその力学的効果を議論する場合、個々の空げきの発達の詳細を記述するのは不可能である[6-9]。L. M. Kachanov は、1958年にこの問題に対する現実的な方法として、多数の微視的空げきの発生・成長やその力学的効果を連続的な力学的変数場によって記述し、これによって材料中の微視的分布空げきの発達と、空げきを含む材料の力学的挙動を連続体力学的観点から研究する方法を提案した[1, 17]。

L. M. Kachanov は、この方法を脆性的なクリープ破断時間の算定に適用した。このとき、彼は材料中の分布空げきが成長することによって、表面力を伝達する有効面積の減少による有効応力 (Effective stress) の増加とクリープ速度の増大がもたらされると考えた。この方法は、有理連続体力学の枠組みを通して3次元へ容易に拡張できる。またこの理論は、材料劣化の過程を微視的損傷機構を考慮した力学的内部変数とその発展式によって表現するから、種々の損傷-破壊過程に適用できる[6, 7]。

この方法は、後に連続体損傷力学 (Continuum damage mechanics, あるいは単に損傷力学) と呼ばれ、クリープ損傷[17-27]だけでなく、変形の進行に伴って発生・成長する微視的空げきによる弾性損傷ならびに弾塑性-損傷[28-39]、衝撃荷重の作用による均一な微小空げき分布に起因するスポール損傷[40-42]、繰返し負荷の下での表面微小き裂の発生・成長による疲労損傷[2-4, 13, 14]や高温繰返し負荷によるクリープ-疲労損傷[2, 43]、中性子や α 線の照射による原子のはじき出しに起因する照射損傷[44-47]など、多くの問題に対する応用の可能性が研究されている。

連続体損傷力学の大きな特徴の一つは、材料の微視的空げきによる損傷状態を平滑化

し、適当な力学的変数を用いてこの損傷状態を表現することによって、材料損傷による材料劣化やそれに伴う剛性の低下と変形の進行、あるいは微視的き裂の発生から最終破壊に至る過程を、通常連続体力学の枠組みの中で、統一的に取扱うことができる点である[7-10]。損傷状態を表す力学的変数は通常、損傷変数 (Damage variable) と呼ばれている。このような材料損傷・破壊に対する局所的解析法(Local approach)は、大域的破壊力学パラメータを基礎とする大域的解析法(Global approach)としての破壊力学[48, 49]では取扱いが困難であった問題、例えば複雑な荷重条件、き裂先端領域でのき裂発生過程、き裂進展における局所的材料損傷の効果、力学的損傷と物理化学的損傷の相互作用などを、より合理的・系統的に解析することが可能であり、これまでも多くの研究が行われている[50-55]。

損傷力学による構成式の定式化の手順は、次のような各段階に分けられる[7]。

- 1) 損傷変数の適切な選択
- 2) 損傷発展式の定式化
- 3) 損傷の効果を考慮した構成式の定式化
- 4) 初期値・境界値問題の解析

このうち、1) の段階においては、材料損傷をどのような数学的性質を持つ損傷変数で表現し、またどのように定量化するかということが重要である。最初に提案された等方損傷を表現するスカラー変数[17-22, 41]は、空げき形状に方向性のある場合、あるいは球形空洞でもその分布に方向性のある場合の損傷状態を適切に記述できない。そのため、より現実的である異方損傷状態の表現に対する理論的拡張が多くの研究者によって行われてきた。その主な研究として、ベクトル損傷変数による異方性の表現[23, 24, 27, 28, 32-35, 40]、さらに2階テンソル[25, 26, 29-31, 56-59]、4階テンソル[28]、8階テンソル[28]、あるいは偶数階の既約テンソルの集合で表現される損傷変数[60, 61]などが定義されている。またこれらの変数の定量化は、微視的空げきの配置そのものに基づく微視的規準と、損傷の存在によって影響を受ける適当な巨視的量的変化に基づいて行われなければならない[6-9, 62]。

段階 2) および 3) に関しては、これまでに多くの理論が提案されてきている。従来の多くの損傷理論では、損傷の力学的影響を有効応力で表現しようとしている。Kachanov [17]は、損傷発展を支配する主な要因は最大引張り応力であるとして損傷発展式を定式化した。その後 Rabotnov[18]は、微視的空げきによる内部荷重負担面積の減少によって拡大された有効応力が損傷発展を支配するとして理論を展開した。この有効応力を用いた損傷理論は、後の多くの損傷理論に用いられている。特に Lemaitre, Chaboche ら[2-4]は、損傷材料の構成式は、非損傷材料の構成式中の Cauchy 応力を対応する有効応力で置き換える、いわゆる“ひずみ等価性の仮説 (Hypothesis of strain equivalence)”によって得られ

ると仮定している。しかし、これら定式化のほとんどはそれぞれの材料に対しての先験的な仮定に基づいており、その理論的基礎は必ずしも明確ではない。したがって、損傷力学を一層精密化するためには、損傷材料に対する構成式と損傷発展式の系統的な定式化のための理論的枠組みの確立が不可欠である。

多結晶金属材料をはじめとする工業材料が外力の作用を受けている場合、転位密度変化、材料構造変化、微視的空げきの発生・成長などの不可逆な変化が生じるとともに、熱力学的に非均質で非平衡な状態にある。したがって熱力学的制約は、材料の力学的構成式や不可逆的内部状態変化をより一層精密に記述するために重要である。

このような連続体の不可逆的变化を表現する熱力学的枠組みとして、いわゆる“有理熱力学(Rational thermodynamics)”がColeman, Noll, Truesdellらによって熱的過程を含むより一般的な材料の構成式の定式化に対する理論的枠組みとして発達してきた[63-67]。この理論では、構成式は熱力学決定原理に基づき、物体点全体の運動と温度の履歴の汎関数として規定される。しかし、この理論は一般性と数学的厳密性を有するものの、工学的実用性のある具体的な構成式を導出することは容易ではない。このため、構成式を運動と温度の過去履歴の影響をパラメーターとして含むような、現在の状態値の関数として表現することにより、物理的考察に基づいた工学的に実用的な構成式を定式化するための方法が提案された[69-71]。この方法における過去履歴のパラメーターは、材料が変形と温度の履歴を受けたときの内部の微視的な構造変化を示す内部状態変数 (Internal state variable) に対応する[70-77]。

この内部状態変数を用いた不可逆熱力学構成式理論は、熱力学的制約条件である Clausius-Duhem の不等式の下で、適切な熱力学ポテンシャルならびに内部状態変数の熱力学的共役力空間内で規定される散逸ポテンシャルを適切に仮定することにより、構成式ならびに内部状態変数の発展式を統一的に表現できるという大きな特徴を有している。この枠組みは、従来の弾塑性あるいは弾粘塑性構成式で用いられてきた降伏面や等散逸ポテンシャル面を用いた定式化に対する熱力学的解釈を明らかにし、その後の非弾性変形に対する研究に大きな影響を与えた[13, 77, 78]。

一方、連続体損傷力学における損傷変数は微視的空げきによる材料の内部構造変化を力学的に記述するための巨視的変数であるから、不可逆熱力学構成式理論における内部状態変数に他ならない[6-9]。したがって、材料の内部状態変化である損傷を適切な内部状態変数で表現し、さらにその熱力学ポテンシャルと熱力学的共役力空間における散逸ポテンシャルを適切に規定することにより、損傷材料に対する統一的定式化が可能となる。また、損傷の他の内部状態変化を同時に考慮することにより、損傷と弾塑性、粘弾塑性、疲労などの連成をより系統的に扱うことが可能となる。

不可逆熱力学構成式理論に基づく損傷力学理論は以下のように展開される。

- (1)分布空げきの力学的効果を適切に表現できる内部状態変数，すなわち損傷変数（必要があれば，その他の不可逆変化を記述する内部状態変数も）を選択する。
- (2)これらの内部状態変数を用いて，適切な熱力学ポテンシャルを規定する。
- (3)内部状態変数に対する熱力学的共役力空間内の散逸ポテンシャルを規定する。

以上のような観点から，損傷材料に対する不可逆熱力学理論を用いた定式化がクリープ損傷[27, 79, 78]，弾性-脆性損傷[29-35, 38, 39, 92-95]あるいは弾塑性-損傷[36, 37, 80-91]などの材料損傷過程に対して行われてきた。(1)の手順については，従来の損傷力学における損傷変数の選択と同様に行うことができる。

(2)の手順は，損傷の効果を弾性構成式に反映させるための理論的枠組みとして重要である。M. L. Kachanov[30]は，微小平面き裂を含む線形弾性体のき裂密度を2階対称テンソル D で表現するとともに，Cauchy 応力テンソル σ と D の関数として表現した Gibbs の熱力学ポテンシャルを用いて損傷材料に対する弾性構成式を導き，弾性特性の損傷による影響を明らかにした。Cordebois と Sidoroff[36, 37]は，2階対称な損傷テンソルによって定義した有効応力を用いて決定した Helmholtz 自由エネルギーならびに Gibbs の熱力学ポテンシャルから弾性構成式を定式化し，材料の縦弾性係数，Poisson 比，および横弾性係数に対する損傷の影響を調べた。

Krajcinovic ら[12, 15, 27, 32-35]は，ベクトル損傷変数を用いて脆性材料に対する構成式と損傷発展式を不可逆熱力学理論により定式化し，単軸引張りと単軸圧縮の際の最大応力に垂直なへき開き裂の発達と，巨視的挙動に対するその影響を明らかにした。微小な平面き裂の分布を，その平面に垂直な方向のベクトル損傷変数によって表現することは幾何学的には明解である。しかし，ベクトル損傷変数は異なった方向の平面き裂の分布による損傷状態を，各々の損傷変数の加算によって表現できないという限界がある[8]。

また，Onat と Leckie[60, 61]も，彼らが提案した偶数階の既約テンソルの集合である損傷変数を用いて，損傷材料に対する熱力学ポテンシャルを定式化しようと試みているが，その具体形を示すには至っていない。

損傷挙動の不可逆熱力学的定式化においては，損傷挙動を有効応力を用いて表現するため，Helmholtz の自由エネルギーあるいは Gibbs の熱力学ポテンシャルに対するいわゆる“弾性ひずみエネルギー等価性の仮説 (Hypothesis of elastic strain energy equivalence)”に基づいた定式化が多くなされている[36, 37, 82-88]。この仮説は，“損傷材料の熱力学ポテンシャルは，非損傷材料における Cauchy 応力に対応する有効応力で置き換えたものに等しい”と表現される[36, 37]。しかし，一般には有効応力テンソルは非対称であり，ひずみエネルギーの表示式における対称性を満足しないという難点がある。Sidoroff ら[36, 37]は，いくつかの代表的な損傷変数と有効応力テンソルについて，熱力学理論に適合するための条件を検討している。しかし，有効応力を熱力学理論に適合させるためには，

何らかの対称化が必要となる[6-9].

Chaboche[28]は、初期非損傷状態における弾性係数テンソル E を損傷状態における $\bar{E}(D)$ へ変換するような4階の非対称損傷テンソル変数 D を提案した. この損傷テンソルは、直接熱力学理論に適合するという特性を持つものの、36個の成分を持つテンソルを扱わなければならないという困難がある.

最後に(3)の手順を踏むことにより、損傷発展式は、損傷変数に対する熱力学的共役力、すなわち損傷共役力空間における損傷ポテンシャル面に対する法線則によって規定される[10, 11, 13, 14]. この定式化は、理論的には明解である. しかし、実際の材料における損傷共役力空間の損傷ポテンシャル面の存在やその特性に対しての実験的検討は困難であり、その系統的な実験的研究はきわめて少ない[96, 97]. しかも、これらの実験は応力空間におけるものであり、さらに、これらの研究はいずれも損傷変数の発展則を明らかにしたものではなく、新しい損傷発達の可能性を規定する損傷面に関するものである.

このため、従来の不可逆熱力学構成式理論に基づいた損傷理論では、構成式の定式化のために、Helmholtzの自由エネルギーあるいはGibbsの熱力学ポテンシャルだけを規定し、損傷発展式は従来通り先験的な仮定に基づいて行っているもの[30, 36-38]や、定式化をより容易に行うため応力やひずみ空間による損傷ポテンシャル面によって損傷発展式を定式化している研究[31-33, 39, 82, 82-85, 90-95]が多い. したがって、従来の不可逆熱力学理論による損傷力学では、特に損傷発展式に対する熱力学的定式化における理論的定式化、およびその理論を裏づける実験的検討が十分行われているとは言い難い.

本研究では、これまで行われてきたような損傷力学における理論的曖昧さのない構成式と損傷発展式の系統的な定式化を行うため、不可逆熱力学構成式理論を厳密に適用した損傷力学を展開する. さらにその適用の可能性とその限界を検討するため、種々の特徴的な材料に対する損傷・変形過程のモデル化とその実験的検討を行う. 以下に各章の概要を示す.

第2章では、本研究の展開のための理論的枠組みとして、不可逆熱力学構成式理論の概念、理論的基礎、可能性ならびに限界について概説する. さらに、これまでに行われてきた損傷力学への不可逆熱力学理論の適用に対する研究、ならびにこれらの特徴と問題点を展望する.

第3章では、コンクリートや岩石等のように、弾性領域内で損傷が進行し、塑性変形を生ずることなく最終破断に至る弾性-脆性材料に対して、不可逆熱力学構成式理論による損傷力学理論を議論する. このとき内部状態変数として、応力の作用方向に依存した微視的き裂による異方的な損傷状態を2階対称損傷テンソル D で記述するとともに、損傷材料に対するHelmholtzの自由エネルギーを、弾性ひずみテンソル ϵ^e および損傷テンソル D の等方スカラー値関数として表現する. 一方、損傷発展を規定する散逸ポテンシヤ

ルは、損傷テンソル D に対する共役力テンソル Y の2次同次式によって表現する。得られた構成式および損傷発展式を高強度コンクリートの単軸負荷[32]、および組合せ応力経路に対する損傷挙動に適用し、本理論の妥当性や限界について検討する。

次に、第4章では、不可逆熱力学構成式理論に基づく本損傷理論を、弾塑性-損傷材料に対して展開する。内部状態変数には、損傷テンソル D のほかに、塑性変形による等方硬化を表現するスカラー変数 r および引き続き生ずる損傷を規定するスカラー変数 β を導入し、塑性挙動と損傷の非連成を仮定して Helmholtz の自由エネルギーおよび散逸ポテンシャルを規定する。続いて、得られた構成式と損傷発展式を球状黒鉛鑄鉄の単軸引張りならびにねじり試験に適用し、その妥当性を検討する。

不可逆熱力学構成式理論は、熱力学的許容な構成式および損傷発展式を定式化するための制約条件を与えるにすぎないから、具体的条件下での構成式の基本的特性の同定は実験に待たなければならない。そこで第5章では、球状黒鉛鑄鉄の薄肉円管試験片を用いて弾塑性-損傷材料における損傷面の存在と、その力学的特性に対する実験的検討を行った。

すなわち、第5章では、この材料の基本的な弾塑性-損傷挙動を調べるために、その初期等方性と単軸引張りおよび単純ねじり試験による弾塑性-損傷挙動を、弾性特性の変化によって調べる。次に、初期および後続損傷面の存在、形状、基本的特性などを明らかにするため、引張り-ねじり組合せ応力空間における初期および後続損傷面の存在と、その形状に対する実験的検討を行う。損傷の検出には、材料内部の微視的き裂の発生・成長に伴って発生する AE (Acoustic Emission) を用いる[109-111]。

延性破壊が生じる程度の大きな変形状態においては、損傷の発生・成長に対する静水応力依存性、塑性ひずみ依存性が現れる。また、損傷面に対する実験的検討の多くは応力空間において行われている。したがって、弾塑性-損傷材料挙動をより精密に表現するためには、損傷の発達に対する塑性ひずみの影響を考慮するとともに、上述の実験結果を構成式に適切に反映することが不可欠である。そこで、第6章では、Gibbs の熱力学ポテンシャルを用いた不可逆熱力学構成式理論を展開し、損傷共役力 Y を応力テンソル σ の関数として表現する。このとき、損傷ポテンシャル面に塑性ひずみに関連する等方硬化スカラー変数 r を導入する。また、修正応力テンソル $\bar{\sigma}$ を Gibbs の熱力学ポテンシャルに導入することにより、本材料の微視的き裂の開・閉口効果による損傷の応力方向依存性を表現する。さらに、得られた構成式および損傷発展式を、前述の球状黒鉛鑄鉄薄肉円管試験片による組合せ応力空間における損傷の実験結果に対して適用し、その妥当性ならびに限界について検討する。

第7章は、結論であって、本研究で得られた知見をまとめた。

記 号

A, A^*	: 材料断面の現在の見かけ上の面積, および有効面積
A	: 2階テンソルの異方硬化変数 α の熱力学的共役力
A_k	: 内部状態変数 V_k に対する熱力学的共役力
$dA(\mathbf{n})$: 方向 \mathbf{n} を持つ粒界上の微小面積
B	: 連続体の体積, または損傷発展を規定する内部状態変数に対する熱力学共役力, または材料定数
∂B	: 連続体の部分体積の表面
B_0	: 材料定数
$b^{(k)}$: き裂をはさんだ不連続変位
C_1, C_2, C_3, C_4	: 材料定数
c^r, c^p, c^d	: 材料定数
D	: 2階, あるいは4階損傷テンソル
D_1	: 最大主損傷
D_{ij}, D_i	: 2階対称損傷テンソルの成分, および主値
$D(\mathbf{x})$: 損傷場
d	: 変形速度テンソル
E, dE	: 系の全エネルギー, およびその増分
E	: 非損傷材料の4階の弾性定数テンソル
E_j	: j 方向の縦弾性係数
E_0	: 初期非損傷状態における縦弾性係数
$\bar{E}(D)$: 損傷材料の4階の弾性定数テンソル
F, F^p, F^d	: 散逸ポテンシャル, 塑性ポテンシャル, および損傷ポテンシャル
f	: 物体の体積力
f_c	: 最大圧縮強さ
G_{ij}	: 横弾性係数
G_0	: 初期非損傷状態における横弾性係数
g	: 温度こう配
$g(\boldsymbol{\sigma}, D)$: Gibbs の熱力学ポテンシャル
J, J_K	: 力学的流束ベクトル, およびその成分
K	: 運動エネルギー
L, L_{KM}	: 現象係数テンソル, または材料関数

$M(D), M_{ijkl}$: 2階の損傷テンソル D で表現される 4階テンソル
N	: AE発生率
N	: き裂面に垂直な単位方向ベクトル
N_0, N_{ij}, \dots	: 微小面積 $dA(\mathbf{n})$ 中の空げき数の偶数階のモーメントテンソル
$N(\mathbf{n}), V(\mathbf{n})$: 微小面積中の空げき数, およびその体積密度
\mathbf{n}	: 物体表面の外向き単位法線ベクトル
\mathbf{n}_i	: 2階対称損傷テンソル D の主方向
$\mathbf{n}^{(k)}$: k 番目のき裂のき裂形成前の単位法線ベクトル
$O-x_1x_2x_3$: 試験片座標系
$O-\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$: 主応力座標系
P	: 等方硬化を記述する変数の熱力学的共役力
PQR	: 現在損傷配置における面積要素
$P^*Q^*R^*$: 仮想非損傷配置における面積要素
p	: 塑性変形における等方硬化を記述する変数
Q, dQ	: 系に供給された熱, およびその増分
\mathbf{q}	: 熱流束ベクトル
R	: 等方硬化を表現する内部状態変数 r に対する熱力学共役力
R	: ベクトル損傷変数 ω に対する熱力学的共役力
R_∞, b, K_d	: 材料定数
r	: 物体内で発生する単位質量当たりの熱, または等方硬化を表現する内部状態変数
S, dS, s	: 系のエントロピー, その増分, および比エントロピー
$S_{(k)}$: k 番目のき裂のき裂形成前のき裂面
$S_g(V)$: 多結晶金属内部の粒界の全面積
$dS_g^{(k)}$: 微小体積 V 中の k 番目の空げきが占める粒界上の面積要素
dS_r, dS_i	: エントロピーの可逆部分, および物体内部からの生成
T	: 絶対温度
t	: 物体の表面力
U, u	: 系全体の内部エネルギー, および比内部エネルギー
V, dV	: 連続体内の微小体積, および微小体積要素
V_0, V_{ij}, \dots	: 微小面積 $dA(\mathbf{n})$ 中の空げきの体積密度の偶数階モーメントテンソル
V_k	: 内部状態変数の集合
\mathbf{v}	: 物質点の速度ベクトル
W, dW	: 系に供給された仕事, およびその増分

X, x	: 連続体内の物質点, およびその位置ベクトル
X, X_K	: 熱力学的共役力ベクトル, およびその成分
Y_0	: 損傷の進行とともに変化する損傷曲面
Y	: 損傷共役力テンソル
y	: スカラー損傷共役力
α	: クリープ硬化を表現する 2 階テンソルの異方硬化変数
α^p	: 材料定数
β	: 累積損傷の影響を表現する内部状態変数
$\Gamma, \Gamma^p, \Gamma^d$: 単位質量当たりの Gibbs の熱力学ポテンシャル, 等方硬化, および損傷発展による Gibbs の熱力学ポテンシャル
$\gamma, \gamma^e, \gamma^p$: 全せん断ひずみ, 弾性せん断ひずみ, および塑性せん断ひずみ
δ_{ij}	: Kronecker のデルタ
ϵ, ϵ_{ij}	: 全ひずみテンソル, およびその成分
ϵ^c	: クリープひずみ
$\epsilon^e, \epsilon^e_{ij}$: 弾性ひずみテンソル, およびその成分
ϵ^e_i	: 主弾性ひずみ
ϵ^e_1	: 最大主弾性ひずみ
$\bar{\epsilon}^e$: 修正弾性ひずみテンソル
$\epsilon^p, \epsilon^p_{ij}$: 塑性ひずみテンソル, およびその成分
ζ	: 材料定数
$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$: 材料定数
$\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$: 材料定数
$\Lambda, \Lambda^p, \Lambda^d$: 未定乗数
λ, μ	: Lamé の定数
ν	: 材料中の任意方向ベクトル
ν_{ij}	: i 方向に応力を受けるときの j 方向の伸びを示す Poisson 比
ν_0	: 初期非損傷状態における Poisson 比
$\nu dA, \nu^* dA^*$: 現在損傷配置と仮想非損傷配置における面積要素ベクトル
ρ	: 質量密度
σ	: 単軸引張り応力
σ, σ_{ij}	: Cauchy 応力テンソル, およびその成分
σ_D	: 単軸引張りにおける損傷発生の臨界応力
σ_{eq}, σ_{EQ}	: Mises の相当応力

σ_F	: 単軸引張り試験における破壊応力
σ_H	: 静水応力
σ_i	: Cauchy 応力テンソルの主値
σ_{\max}	: 最大応力
σ_Y	: 単軸状態における降伏応力
σ_ν	: 任意方向 ν の材料要素面に垂直な応力
$\tilde{\sigma}_d$: 有効損傷応力
$\bar{\sigma}$: 有効応力テンソル, または修正応力テンソル
τ	: せん断応力
τ_D	: ねじりにおける損傷発生の臨界せん断応力
τ_Y	: せん断降伏応力
ν	: 材料定数
Φ	: 単位質量当たりのエントロピー生成速度
ϕ^*	: 散逸ポテンシャル
Ψ	: 単位質量当たりの Helmholtz の自由エネルギーおよび Gibbs の熱力学ポテンシャル
ψ	: Kachanov のスカラー損傷変数, または単位質量当たりの Helmholtz の自由エネルギー
ψ^e, ψ^p, ψ^d	: 弾性損傷ひずみエネルギー, 塑性変形に関する Helmholtz の自由エネルギー, および損傷発展によってもたらされる自由エネルギー
ψ_ν	: 材料要素の損傷状態の大きさ
Ψ_ν	: ベクトル損傷変数
ω	: Rabotnov のスカラー損傷変数
$\boldsymbol{\omega}, \omega_m, \omega_0$: ベクトル損傷変数, その成分, およびき裂面積密度
$\text{tr}(\)$: 跡 (trace)
(\cdot)	: テンソルまたはベクトルの内積
$d(\)$: 微分または増分
$\partial(\)$: 偏微分
$(:)$: 2 階の縮約
$(\dot{\ })$: 時間微分
\otimes	: テンソル積
$\langle \ \rangle$: Macauley の括弧

第2章 不可逆熱力学構成式理論に基づく損傷力学

材料の変形，損傷ならびに破壊過程は，すべて系のエネルギーとエントロピーの変化を伴う．不可逆熱力学における熱力学第二法則は，熱力学的ならびに力学的過程の平衡条件と，それらの平衡の安定条件を与える．このため，材料の変形・損傷に伴う微視的構造変化を適切な内部状態変数で表現すれば，不可逆熱力学は熱力学的過程の進行に伴う変形の構成式と内部状態変数の発展式に対する制約を与える．

一般に，多結晶材料の変形に伴いその内部では転位の成長，粒界すべり，微視的き裂・微視的空洞の発生・成長等が生じるが，このような内部構造変化は熱力学的内部状態変数によって表現できるから，不可逆熱力学理論は材料の変形・損傷過程の構成式ならびに損傷発展式の定式化に対する系統的枠組みを与える．

本章では，はじめに不可逆熱力学構成式理論ならびに損傷力学を概説する．続いて，不可逆熱力学構成式理論に基づく損傷力学と，その発展について展望する．

2. 1 連続体の熱力学

2.1.1 局所状態の原理

連続体が外力を受けて変形する場合，内部のひずみ，温度等は一樣ではなく時間的に変化し，熱力学的に非均質・非平衡な状態にある．しかし，平衡状態の近傍において生じている非均質・非平衡な過程を対象とする場合には，連続体内部の微小部分を考えると，その部分の熱力学的状態は平衡状態にあると仮定する．この仮定を局所状態の原理(Principle of local state)という[13, 72, 75-77]．この原理に従えば，平衡状態で定義される温度，内部エネルギー，エントロピー等を各物体点における時間の関数として導入することができる．

このような扱いは，平衡状態近傍で生じている非平衡過程に対して適用できる．本論文では局所状態の原理が十分成立するような連続体の変形過程における熱力学理論を展開する．

2.1.2 熱力学第一法則

図2.1のように静止している正則面 ∂B で囲まれた連続体の部分体積 B を考える．このとき，物体 B に対する熱力学第一法則は

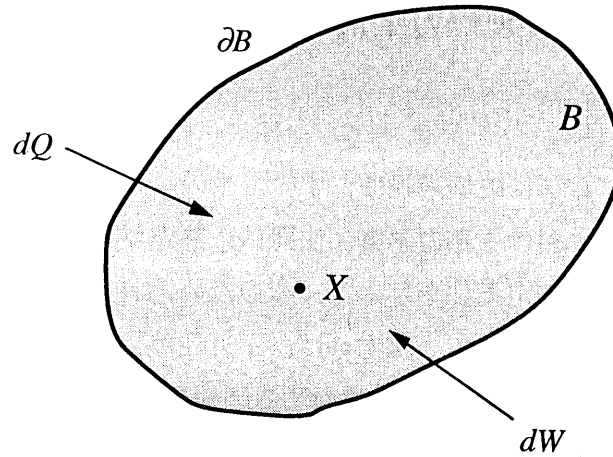


図 2.1 物体 B におけるエネルギー収支

$$dE = dW + dQ \quad (2.1)$$

$$E = U + K \quad (2.2)$$

のように表される[13, 65, 71, 72, 100]. ここで E は系の全エネルギーと呼ばれる状態変数, U は内部エネルギー, K は運動エネルギー, dW および dQ はこの系に供給された仕事および熱である. 物体が静止している場合には K は 0 である. E は状態変数であるから, 最初と最後の状態だけでその値が一意に決定される. しかし, dW および dQ は最初と最後の状態だけでなくその過程にも依存するため, 全微分ではない.

次にこの熱力学第一法則を, 運動する連続体 B に対して一般化する[13]. この連続体は局所状態の原理を十分満足する過程にあるとする. 物体 B の全エネルギーは

$$E = \int_B \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV \quad (2.3)$$

となる. ここで, ρ は物体 B の密度, u は比内部エネルギー, v は B における物質点 X における速度を表す. したがって, 全エネルギー E の時間変化 \dot{E} は式(2.3)から

$$\dot{E} = \int_B \rho (\dot{u} + v \cdot \dot{v}) dV \quad (2.4)$$

となる. ここで, $(\dot{\cdot})$ は時間微分, (\cdot) は内積を表す. 一方, 式(2.1)によれば全エネルギーの時間変化 \dot{E} は物体 B に作用する外力のなす仕事率 \dot{W} と外部から単位時間当たり流入するエネルギー量 \dot{Q} の和として次のように表される.

$$\dot{E} = \dot{W} + \dot{Q} \quad (2.5)$$

外力による仕事率 \dot{W} は、表面 ∂B に働く表面力 t による仕事率と体積力 f による仕事率に分けることができ

$$\dot{W} = \int_{\partial B} t \cdot v dA + \int_B \rho f \cdot v dV \quad (2.6)$$

となる。単位時間当りの熱によるエネルギー流量 \dot{Q} は、物体表面 ∂B を通して流入するものと、物体内から発生するものの和であって、次のように与えられる。

$$\dot{Q} = \int_B r dV - \int_{\partial B} q \cdot n dA \quad (2.7)$$

ここで、 r は物体 B 内での単位体積当りの熱発生であり、また q はエネルギー流出ベクトル、 n は物体表面 ∂B の外向き法線ベクトルである。 q が n と反対方向を向いているときはエネルギーが流入することになるため、式(2.6)の右辺第2項の符号は負になっている。式(2.4)、(2.6)および(2.7)より式(2.5)は

$$\int_B \rho(\dot{u} + v \cdot \dot{v}) dV = \int_{\partial B} t \cdot v dA + \int_B \rho f \cdot v dV + \int_B r dV - \int_{\partial B} q \cdot n dA \quad (2.8)$$

となる。式(2.8)の面積分を体積積分に変換し、Cauchyの公式 $t = \sigma \cdot n$ を用いて整理すると

$$\int_B [\rho\{\dot{u} + v \cdot (\dot{v} - f)\} - \text{div}(\sigma v - q) - r] dV = 0 \quad (2.9)$$

となる。ここで、 σ は Cauchy の応力テンソルである。物体 B は任意にとってよいから、被積分関数が連続ならば式(2.9)の被積分関数は0でなければならない。さらに運動量保存則[13, 71, 72, 100]

$$\rho \dot{v} = \rho f + \text{div} \sigma \quad (2.10)$$

を用いて式(2.8)を書き換えると、内部エネルギーの変化率 \dot{u} は次のように与えられる。

$$\rho \dot{u} = \text{tr}(\sigma \text{grad} v) - \text{div} q + r \quad (2.11)$$

ここで、 $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \cdot \text{div}\boldsymbol{\sigma} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \text{grad}^T \boldsymbol{v})$ なる関係式を用いた。次式の変形速度テンソル \boldsymbol{d}

$$\boldsymbol{d} = \frac{1}{2} [\text{grad}\boldsymbol{v} + \text{grad}^T \boldsymbol{v}] \quad (2.12)$$

を用いると、式(2.11)は次のように書ける。

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - \text{div}\boldsymbol{q} + r \quad (2.13)$$

特に、微小変形を仮定した場合、 $\boldsymbol{d} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ であるから、式(2.13)は

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \text{div}\boldsymbol{q} + r \quad (2.14)$$

となる。ここで $\boldsymbol{\epsilon}$ はひずみテンソルである。式(2.13)、(2.14)は、連続体に対するエネルギー保存則、すなわち熱力学的理論によって得られた連続体のエネルギー収支を表現している。

2.1.3 熱力学第二法則

前項で述べた熱力学第一法則は、連続体に対するエネルギー保存則を与える。しかし、その変化の方向については何も言及していない。一方、転位構造の変化に起因する塑性変形や内部での微視的空げきの発生等の材料内部の構造変化は、一度生じればそのままでは回復することはなく、不可逆的である。このことは、連続体の変形はエネルギー保存則だけでなく不可逆変化によるエントロピー生成についても考慮しなければならないことを意味する。そこで、本節では熱力学第二法則について概説する。

一般の熱力学過程に対しては、次式が成立する[13, 72, 75, 100-102]。

$$dS \geq \frac{dQ}{T} \quad (2.15)$$

ここで T は絶対温度であり、 dS は、図 2.2 のように、系がある平衡状態 1 から別の平衡状態 2 に移動したときのエントロピー増分を示す。式(2.15)において、等号が成り立つときは可逆過程であり、一方、不等号が成立するときは不可逆過程である。

この定理は次のように書くことができる。

$$dS = dS_r + dS_i \quad (2.16)$$

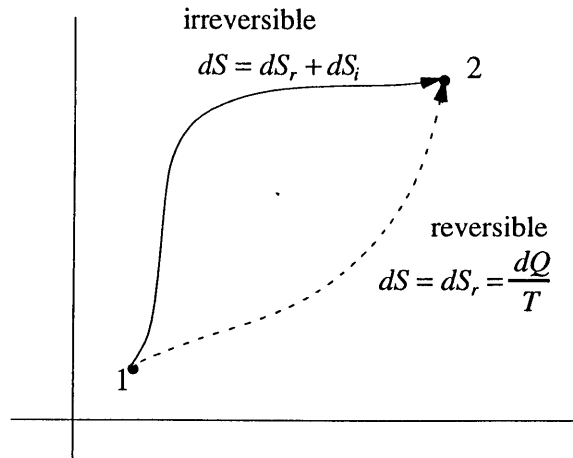


図 2.2 平衡状態 1 から平衡状態 2 への不可逆過程

ここで

$$dS_r = \frac{dQ}{T} \quad (2.17)$$

は S の可逆な増分であり、外部から吸収した熱によるエントロピー増分である。一方、式 (2.16) 中の

$$dS_i > 0 \quad (2.18)$$

は不可逆な増分であり、物体内部でのエントロピー生成と呼ばれる。エントロピー生成が 0 であるとき系は可逆であり、不可逆過程では物体内部でのエントロピー生成は常に正である。式 (2.18) は、不可逆過程における熱力学第二法則を表す。

次に、図 2.1 のような物体 B が平衡状態 1 から他の平衡状態 2 に至るような過程を行うと仮定したときの熱力学第二法則の表現を導く [13, 65, 71, 72, 75, 100]。この場合、過程の途中では平衡状態にあるとは限らないが、2.1.1 項で述べた局所状態の原理が成立すると仮定する。この仮定は、平衡状態の近傍にある過程に対して適用でき、またその結果はそのような過程に対しては有効である。

物体 B 全体のエントロピー S は、比エントロピー s を体積積分することにより

$$S = \int_B \rho s dV \quad (2.19)$$

となる。式 (2.7) を用いて、式 (2.15) を時間微分にかきかえると

$$\dot{S} \geq \int_B \frac{r}{T} dV - \int_{\partial B} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dA \quad (2.20)$$

を得る。式(2.19)および Gauss の発散定理を用いると、式(2.20)は次のように表現できる。

$$\int_B \left(\rho \dot{s} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{r}{T} \right) dV \geq 0 \quad (2.21)$$

物体 B は任意であるから、式(2.21)の被積分関数が連続ならば

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{r}{T} \geq 0 \quad (2.22)$$

と書ける。式(2.13)を r について解き、式(2.22)に代入すると

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{1}{T} (\rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{d}} + \operatorname{div} \mathbf{q}) \geq 0 \quad (2.23)$$

となる。ここで、 $\operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} = \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T^2}$ なる関係を用い、さらに両辺に T をかけることにより式(2.23)は

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{d}} + \rho(T\dot{s} - \dot{u}) - \mathbf{q} \cdot \frac{\operatorname{grad} T}{T} \geq 0 \quad (2.24)$$

のように表現できる。また単位質量当りの Helmholtz の自由エネルギー ψ

$$\psi = u - Ts \quad (2.25)$$

を式(2.24)に用いることにより、次式を得る。

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{d}} - \rho(\dot{\psi} + T\dot{s}) - \mathbf{q} \cdot \frac{\operatorname{grad} T}{T} \geq 0 \quad (2.26)$$

特に、微小変形を仮定すると式(2.26)は

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\psi} + T\dot{s}) - \mathbf{q} \cdot \frac{\operatorname{grad} T}{T} \geq 0 \quad (2.27)$$

のように表現できる.

連続体の変形過程では, 連続体内部に微視的な構造変化が生じ, その過程は不可逆である. よって熱力学的過程は, この不等式(2.26)あるいは(2.27)を恒等的に満足しなければならない. 式(2.26)および(2.27)は Clausius-Duhem の不等式とよばれ, 連続体の不可逆な熱力学的変化を考慮した構成式を定式化する際の出発点となる[13, 71, 72, 75].

2. 2 内部状態変数を用いた不可逆熱力学構成式理論

本節では, 2. 1節で展開した非平衡状態に対する不可逆熱力学理論を, 材料の力学的挙動を表現する構成式を定式化するための熱力学的制約として導入する. この理論は, 非弾性変形挙動を表現するための理論的枠組みとして, 粘弾性, 塑性, 弾粘塑性材料等に適用されている.

なお, 以下の議論では変形は微小であり, 全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は, 弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ と塑性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ の和として

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.28)$$

を仮定する. 微小変形から, 変形が微小とみなせない有限変形への拡張は, 通常の方法で行うことが可能である.

2.2.1 状態変数

連続体の変形ならびに損傷を伴う熱力学的過程を受けるとき, その不可逆の状態を記述するためには, いくつかの熱力学変数を用いることが必要である. そのうち, 直接観測が可能な変数として全ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ と温度 T を用いる. これらの変数は外部状態変数と呼ばれる[13].

一方, 不可逆的な内部構造変化を表現する場合, 転位密度, 結晶構造の変化, 微視的空げきの発生およびその配置等の局所的な内部構造を表現することが必要となる. これらは直接観測することはできないが, 観測可能な外部状態変数に影響を与える. そこで, 内部の微視的構造変化をある巨視的変数を用いて記述することにより, これらの効果を連続体の構成式に導入することが可能である. これらの変数は内部状態変数 (Internal state variable) と呼ばれている[13, 69-77]. このような性質を持った変数は, 等方あるいは移動硬化変数, または材料損傷を表現する損傷変数等, 従来の非弾性挙動に対する研究において用いられている変数と同様の意味を持っている.

2.2.2 不可逆熱力学過程の構成式

一般に、連続体が変形を受ける場合には種々の内部状態変化が生じ、その過程は不可逆である。このような不可逆過程に対する構成式の定式化においては、エントロピー生成が常に正であることを表現する Clausius-Duhem の不等式を、熱力学的制約条件として恒等的に満足しなければならない。

この理論によって構成式を導く場合、まず内部状態変数の選択が重要になる。材料の非弾性変形に対しては、この内部状態変数は、転位密度、材料組成変化、微視的き裂の配置状態等を適切に表現するものでなければならないが、これは一般には巨視的なスカラー、またはテンソル変数の集合

$$\{V_k; k=1, 2, \dots\} \quad (2.29)$$

によって表現できる[13].

不可逆過程においては、Helmholtz の自由エネルギー ψ は、非弾性ひずみや微視的き裂の発生等の内部構造変化により影響を受ける。このため不可逆過程における Helmholtz の自由エネルギー ψ は、全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ と温度 T のほかに、弾性ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 、非弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ および内部状態変数 V_k の関数として次のように表される。

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, V_k) \quad (2.30)$$

しかし、式(2.28)から $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^e$ の関係を考慮すると、式(2.30)は

$$\psi = \psi((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), T, V_k) = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, V_k, T) \quad (2.31)$$

となる。すなわち、不可逆過程における Helmholtz の自由エネルギー ψ は、弾性ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 、温度 T および内部状態変数 V_k の関数として表現できるとする。

式(2.31)の時間微分をとり、その結果を Clausius-Duhem の不等式(2.27)に代入すると次式となる。

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} : \dot{V}_k - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \text{grad} T \geq 0 \quad (2.32)$$

まず、等温および定常状態において弾性変形だけが生ずる場合

$$\dot{T} = 0, \quad \text{grad}T = 0 \quad (2.33)$$

となり，連続体内部での構造変化は生じないので

$$\dot{\epsilon}^p = 0, \quad \dot{V}_k = 0 \quad (2.34)$$

となる．このとき，式(2.32)は

$$\left(\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e} \right) : \dot{\epsilon}^e - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} \geq 0 \quad (2.35)$$

となる．この過程は可逆過程であるから，式(2.35)の左辺は常に 0 となる．これから以下の構成式が得られる．

$$\sigma = \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e} \right) \quad (2.36)$$

$$s = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \quad (2.37)$$

式(2.36)より，Helmholtz の自由エネルギー ψ を弾性ひずみテンソル ϵ^e で偏微分することにより，連続体の熱弾性構成式が得られることがわかる．熱力学的に言えば，応力 σ は弾性ひずみ ϵ^e の変化を引き起こす熱力学的共役力となっている．

以上の議論から，式(2.32)は

$$\rho \Phi = \sigma : \dot{\epsilon}^p + A_k : \dot{V}_k + q \cdot \frac{g}{T} \geq 0 \quad (2.38)$$

となる．ここで A_k および g は

$$A_k \equiv -\rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \quad (2.39)$$

$$g \equiv -\text{grad}T \quad (2.40)$$

で表現される，それぞれ内部状態変数 V_k の熱力学的共役力および温度こう配である．式(2.38)は，材料の内部構造変化によって引き起こされるエントロピー生成によるエネルギー

散逸を示している。すなわち、連続体の非弾性変形における内部状態変化によるエネルギー散逸は常に正である。

2.2.3 エネルギー散逸ポテンシャルと内部状態変数の発展式

さらに不可逆過程におけるエネルギー散逸過程を表現するためには、内部状態変数の発展式を定式化する必要がある。

式(2.38)のエントロピー生成速度 $\rho\Phi$ は、力学的流束 $\dot{\epsilon}^p$, \dot{V}_k , \mathbf{q} と、その熱力学的共役力 $\boldsymbol{\sigma}$, A_k , \mathbf{g}/T の内積の多項式になっている。したがって、力学的流束ベクトル \mathbf{J} とその熱力学的共役力ベクトル \mathbf{X} を

$$\mathbf{J} = \{ \dot{\epsilon}^p, \dot{V}_k, \mathbf{q} \} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{X} = \left\{ \boldsymbol{\sigma}, A_k, \frac{\mathbf{g}}{T} \right\} \quad (2.42)$$

のように定義すれば、式(2.38)は \mathbf{J} と \mathbf{X} の内積により次のように表現できる[34].

$$\rho\Phi = \mathbf{X} \cdot \mathbf{J} \geq 0 \quad (2.43)$$

この力学的流束ベクトル \mathbf{J} の成分 J_k の発展を定式化するにあたり、 J_k はその熱力学的共役力ベクトル \mathbf{X} のスカラー関数である散逸ポテンシャル $F(\mathbf{X}; V_k, T)$ から

$$J_k = \frac{\partial F(\mathbf{X}; V_k, T)}{\partial X_k} \quad (2.44)$$

のように求められると仮定する[13, 71-76]. ここで $F(\mathbf{X}; V_k, T)$ は、現在の内部状態にも依存するため、内部状態変数 V_k をパラメーターとして含む。記号(;)は、これよりも前にある記号は変数であり、これより後にある記号はパラメーターであることを意味する。式(2.44)を具体的に書くと

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{V}_k = \frac{\partial F}{\partial A_k}, \quad \mathbf{q} = \frac{\partial F}{\partial (\mathbf{g}/T)} \quad (2.45)$$

となり、非弾性構成式および内部状態変数に関する発展式ならびに熱流束ベクトル \mathbf{J} に対する構成式は、熱力学的共役力ベクトル \mathbf{X} で規定される散逸ポテンシャル面 $F(\mathbf{X}; V_k, T) = \text{const.}$ の外向き法線ベクトルとして与えられる。

式(2.44)のようなポテンシャル $F(\mathbf{X}; \mathbf{V}_k, T)$ が存在するためには, $J_k dX_k$ が完全微分である必要がある[72]. 不可逆熱力学構成式理論では, 以下の二つの特別な場合を仮定することで内部状態変数の発展式を定式化している.

その第一は, 一般に, 熱力学的流束 \mathbf{J} とその熱力学共役力 \mathbf{X} との関係は非線形であるが, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ で表現できる平衡状態の近傍を考え, \mathbf{J} と \mathbf{X} とを関係づける現象方程式には次のような線形関係が成立していると仮定する場合である[13, 27, 72, 100].

$$J_k = L_{KM} X_M \quad (2.46)$$

この線形現象方程式(2.46)は, 流束とその共役力との間の線形関係だけでなく, 一般にいくつかの現象が同時に起きるとき, これらの間の連成を仮定する. このとき, 現象係数 L_{KM} には, 対称性

$$L_{KM} = L_{MK} \quad (2.47)$$

が成立することが, Onsager により統計力学的に証明されている[13, 27, 72, 100, 101]. 式(2.46)および(2.47)が成立する場合には, $J_k dX_k$ は完全微分となり, 散逸ポテンシャル $F(\mathbf{X}; \mathbf{V}_k, T)$ は次のように表現できる.

$$F(\mathbf{X}; \mathbf{V}_k, T) = \frac{1}{2} L_{KM} X_k X_M \quad (2.48)$$

第二は, 現象方程式が現在の内部状態に対して, 力学的流束ベクトル \mathbf{J} の成分 J_k が, 以下のようにその熱力学的共役力 X_k のみに依存する場合である[72-74].

$$J_k = J_k(X_k; \mathbf{V}_k, T) \quad (2.49)$$

このとき, $J_k dX_k$ は完全微分となる. このように表現される材料の内部構造の変化に関する特性を局所依存性(Local dependence)と呼ぶ[72-74].

2. 3 連続体損傷力学

外力の作用によって生ずる微視的分布空げきの発達およびその力学的効果を議論する場合, 個々の空げきの発達の詳細を記述することは不可能である. この問題を取扱う有

効な方法の一つとして、多数の微視的分布空げきの力学的効果を平滑化し、この効果を損傷変数(Damage variable)と呼ばれる力学的変数を用いて記述する方法がL. M. Kachanov によってはじめて提案された[17]. この方法に従えば、特定の分布状態で特徴づけられている損傷状態は、適切な損傷変数によって表現され、連続体力学の枠組みの中で損傷材料の力学的挙動と損傷の発達に対する系統的な取扱いが可能となる. この手法は連続体損傷力学(Continuum damage mechanics, あるいは単に損傷力学)と呼ばれ、損傷材料の力学的挙動と材料の力学的挙動と材料の損傷・破壊過程の研究に対する有効な手段を与える.

2.3.1 材料損傷とその力学的表現

まず、損傷の力学的模型化を行うための連続体損傷力学の概念を模式的に示す. 図 2.3 のように、多数の微視的分布空げきを含む物体 B を考える. このとき、物体 B 中の任意の点 x のまわりに、空げきを十分多く含む程度に大きい V が存在するものとする. 損傷力学では、このような物体内の任意の点 x における微視的空げきの力学的効果が、適当な変数場 $D(x)$ で記述できると仮定する. このような損傷場の存在は、応力、ひずみあるいは温度場と同様な概念に基づくものである. このような変数は、材料の内部構造状態を力学的に記述する巨視的変数であり、不可逆熱力学構成式理論における内部状態変数に他ならない[6-9]. これらの仮定の下での、分布空げきが支配的である損傷問題に対する系統的な取扱いは、次のような手順を踏むことにより連続体力学の枠組み内で展開することができる. すなわち、

- 1) 微視的分布空げきの力学的効果を適切な力学変数、すなわち損傷変数で記述する.

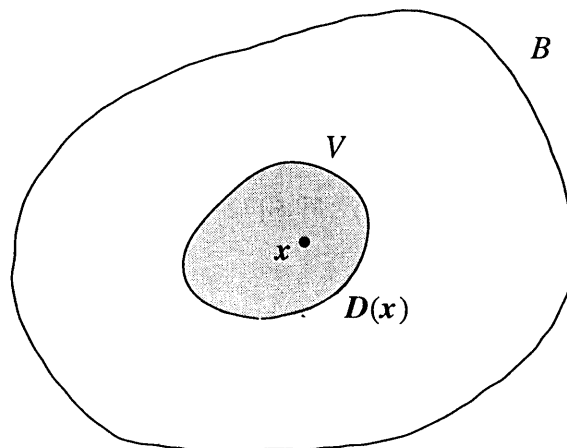


図 2.3 損傷材料における損傷変数の定義

表 2.1 材料損傷の定量化のための基準

基準	基準とされる物理量
微視的基準	(1) 空げきの数, 長さ, 面積, 体積 (2) 空げきの形状, 配列, 配向で決まる有効面積
巨視的基準	(3) 弾性特性, 応力あるいはひずみ振幅 (4) 降伏応力, 引張り強さ, 硬度 (5) クリープ速度, クリープ破断時間 (6) 破断伸び, 破壊靱性 (7) 質量密度 (8) 電気抵抗 (9) 超音波速度 (10) AE (アコースティック・エミッション)

- 2) これらの損傷変数を支配する発展式を定式化する。
- 3) 微視的分布空げきによって損傷を受けた材料の力学的挙動を記述する構成式を定式化する。
- 4) 最後に, これらの式を用いて初期値・境界値問題を解くことである[7]。

連続体損傷力学において材料の損傷状態を損傷変数で表現する場合, 次の二つの問題が生じる[6-9]。一つは損傷状態をどのような物理的あるいは数学的性質を持った変数で表現するかであり, もう一つはこのような損傷変数をどのように定量化するかである[7]。この二つの問題は表 2.1 で示すように, 空げきの配列等に基づく微視的基準と, 損傷材料の物理的特性の変化を損傷と関連づけ, これを巨視的に規定することによって損傷を定量化しようとする巨視的基準の二通りの方法によって議論されている。表 2.1 の基準のうち特に, (1) 空げきの数, 長さ, 面積, 体積, (2) 空げきの形状, 配列, 配向で定まる有効面積, (3) 弾性定数がよく用いられ, これによって損傷変数をスカラーおよび各種のテンソル変数としてモデル化する方法がいくつか提案されている[14, 25, 26, 29, 33, 36]。表 2.2 は, これまでに提案された主な損傷変数を示す。これらの損傷変数の多くは, 微視的分布空げき配置状態について定義されているが, その定量化は微視的分布空げきの存在によって影響を受ける巨視的変数によらねばならない。Lemaitre と Dufailly[62]は, スカラー損傷変数の場合, 損傷は代表体積要素における微視的分布き裂の面積密度であると定義し, 表 2.1 中の(2), (3)~(5)および(7)~(9)を用いた損傷変数の定量化について詳しく議論している。

表 2.2 損傷変数とそのテンソル的特性

損傷変数	文 献	適用した損傷材料
スカラー	Kachanov[17] Kachanov[19] Rabotnov[18] Martin - Leckie[20] Hayhurst - Leckie[21] Cozzarelli - Bernasconi[22] Davison, Steven and Kipp[41] Lemaitre[80]	クリープ クリープ (異方性) クリープ (異方性) クリープ (異方性) クリープ (異方性) クリープ スポーリング 弾塑性
ベクトル	Kachanov[23] Hayhurst - Stråkers[24] Davison - Stevens[40] Krajcinovic - Fonseca[32, 33] Krajcinovic - Selvaraj[27]	クリープ クリープ スポーリング 弾性-脆性 一般, クリープ
2 階テンソル	Vakulenko - Kachanov[29] Kachanov[30] Murakami - Ohno[25, 26] Murakami[56] 村上ら [57, 58] Betten[59] Cordebois - Sidoroff[36, 37]	弾性-脆性 弾性-脆性 クリープ 一般 一般 弾性, 弾塑性 弾塑性
4 階テンソル	Chaboche[28]	クリープ
8 階テンソル	Chaboche[28]	クリープ
偶数階テンソルの集合	Leckie - Onat[60, 61]	クリープ, 一般

2.3.2 古典的な等方損傷理論

損傷力学の概念は L. M. Kachanov によって最初に提案された[17]。彼は引張り棒の脆性的なクリープ破断時間を算定する目的から、クリープ損傷を受けていない初期状態を $\psi = 1$ 、完全に損傷した状態、すなわち破断状態を $\psi = 0$ とするようなスカラー損傷変数 ψ を導入した。さらにこのような材料損傷の発達を支配する主な要因は最大引張り応力 σ_{\max} と考え、この損傷変数 ψ の発展式を次のように与えた。

$$\dot{\psi} = -B \left(\frac{\sigma_{\max}}{\psi} \right)^v \quad (2.50)$$

ここで、 B と v は材料定数である。Kachanovの提案したスカラー変数は、その後の研究者により、与えられた材料断面の現在の見かけ上の面積 A と実際に内力を受けもつ有効面積 A^* との比

$$\psi = \frac{A^*}{A} \quad (1 \geq \psi \geq 0) \quad (2.51)$$

として解釈されている。Rabotnov[37]はこのような ψ から

$$\omega = 1 - \psi \quad (0 \leq \omega \leq 1) \quad (2.52)$$

という新しいスカラー変数 ω を導入したが、これは材料断面内の空げきによる荷重負担有効面積の減少量として解釈される。さらに、損傷の発達を支配する主要因として有効面積の減少によって拡大された応力の効果

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\psi} = \frac{\sigma}{1 - \omega} \quad (2.53)$$

を導入した。この変数は通常、有効応力 (Effective stress) あるいは実質応力 (Net stress) と呼ばれている。

さらにRabotnov[18]は、加速クリープを表現するためにL. M. Kachanovの理論を拡張し、式(2.52)の損傷変数を用いてクリープ損傷の構成式と発展式を次のような関数形によって表現した。

$$\dot{\varepsilon}^c = F(\sigma, \omega) \quad (2.54a)$$

$$\dot{\omega} = H(\sigma, \omega) \quad (2.54b)$$

以上の理論はKachanov-Rabotnovのクリープ損傷理論と呼ばれ、今日までに提案された多くの損傷理論の原形であり、連続体損傷力学の発達の基礎となっている。

2.3.3 異方損傷への拡張

材料が変形を受ける場合に発達する微視的空げきの形状、配列、ならびにその力学的効果は一般には異方的である。しかしKachanov-Rabotnovによって提案されたスカラー損傷変数は、損傷の異方性を表現することはできない。

そこで L. M. Kachanov[19]は、材料中の任意方向 ν の材料要素を考え、この要素面に垂直な応力 σ_ν が働くものとし、この材料要素の損傷状態を大きさ ψ_ν 、方向 ν のベクトル ψ_ν によって規定した。しかしこの理論では、材料中の一点の損傷状態を完全に記述するためには、この点におけるベクトル ψ_ν のあらゆる方向の完全な分布を必要とするが、これは一般の損傷状態を議論する際、著しい困難をもたらす。

Krajcinovic と Fonseka [32, 33] も微小き裂の平面分布を仮定し、き裂面の損傷ベクトルをき裂面に垂直な方向 N と、き裂面積密度 ω_0 を用いて

$$\omega = \omega_0 N \quad \text{あるいは} \quad \dot{\omega} = \dot{\omega}_0 N + \omega_0 \dot{N} \quad (2.55)$$

のように表現した。この方法は幾何学的には明解であるが、このとき複数の損傷ベクトル ω の和は、一般に損傷面とは異なる面上の損傷を表し、複数の平面き裂による材料損傷を、個々の損傷ベクトルの和によっては表現できないという限界がある。

以上のように損傷の異方性は、スカラーやベクトル変数によって適切に表現することはできない。これに対して異方損傷のテンソル変数による表現は、その数学的構造の複雑さにもかかわらず、微視的空げきの配置状態とその力学的特性をより高い精度で表現できるため、さまざまな理論が提案されている。

Vakulenko と M. L. Kachanov[29]は、損傷材料中の空げき配置に着目して転位密度テンソルと類似な 2 階テンソルを用い、多数の微視的分布き裂による材料損傷状態の定義を試みた。すなわち、彼らは物体中の任意の微小体積 V を考え、その中の k 番目のき裂のき裂形成前のき裂面を $S_{(k)}$ とし、その単位法線ベクトルを $\mathbf{n}^{(k)}$ 、き裂発生による $S_{(k)}$ 上の点の変位の不連続量を $\mathbf{b}^{(k)}$ とし、き裂形状の特徴を 2 階のき裂密度テンソル

$$\mathbf{D} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \int_{S_{(k)}} \mathbf{b}^{(k)} \otimes \mathbf{n}^{(k)} dS_{(k)} \quad (2.56)$$

で表されると仮定した。しかし、式(2.56)の定義が材料中のき裂配置のこのような典型的な特徴を表現するにも拘わらず、材料内部の損傷状態を適切に表しているかどうかは不明である。例えば、き裂面の両側で相対変位のない平面き裂は $\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{0}$ であるが、このとき式(2.56)は非損傷状態 $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ となり、不合理となる。また、この定義は、材料損傷というよりも、損傷状態の変化を表現しているという指摘もなされている[32]。この困難を克服するため、M. L. Kachanov[30]は、 $\mathbf{b}^{(k)}$ をき裂開口の大きさを表現しないものとして修正を加え

$$D = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N (S_{(k)})^{1/2} \int_{S_{(k)}} \mathbf{n}^{(k)} \otimes \mathbf{n}^{(k)} dS_{(k)} \quad (2.57)$$

と表現した。

村上と大野[25, 26]は，損傷による材料の微視的構造変化は主に空けきの発生と成長に起因するという観点に基づき，損傷の主要な効果を微視的空けきの3次元的分布による有効面積の減少と考えた。このとき彼らは，多結晶金属材料中に微小体積 V を考え， V 中の k 番目の空けきが占める粒界上の面積要素 $dS_g^{(k)}$ ，その単位法線ベクトル $\mathbf{n}^{(k)}$ として，材料の損傷状態を次の2階対称テンソルで表現した。

$$\begin{aligned} D &= \frac{3}{S_g(V)} \sum_{k=1}^N \int_{S_g^{(k)}} \mathbf{n}^{(k)} \otimes \mathbf{n}^{(k)} dS_g^{(k)} \\ &= \sum_{i=1}^3 D_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \end{aligned} \quad (2.58)$$

ここで $S_g(V)$ は V 中の粒界の全面積であり，また D_i と \mathbf{n}_i は，損傷の主値と主方向である。

その後村上[56, 57]は，図2.4のような仮想非損傷配置の概念を導入するとともに，損傷状態を現在損傷配置 B_i から仮想非損傷配置 B_f への仮想変形こう配 \mathbf{G} を定義して，有限変形をも含む一層系統的な異方損傷理論を展開し，式(2.58)と同じ形で表現できる2階対称な損傷テンソルを導いている。さらに彼は，一般の損傷状態に関する有効応力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ を，図2.4(b)の仮想非損傷配置における任意の面積要素 $P^*Q^*R^*$ ，すなわち減少した荷重負担面積 $\nu^* dA^*$ に，図2.4(a)の現在損傷配置における対応した面積要素 PQR と同じ表面力ベクトルが作用するとき，仮想非損傷配置にもたらされる拡大した応力として次式で表現した。

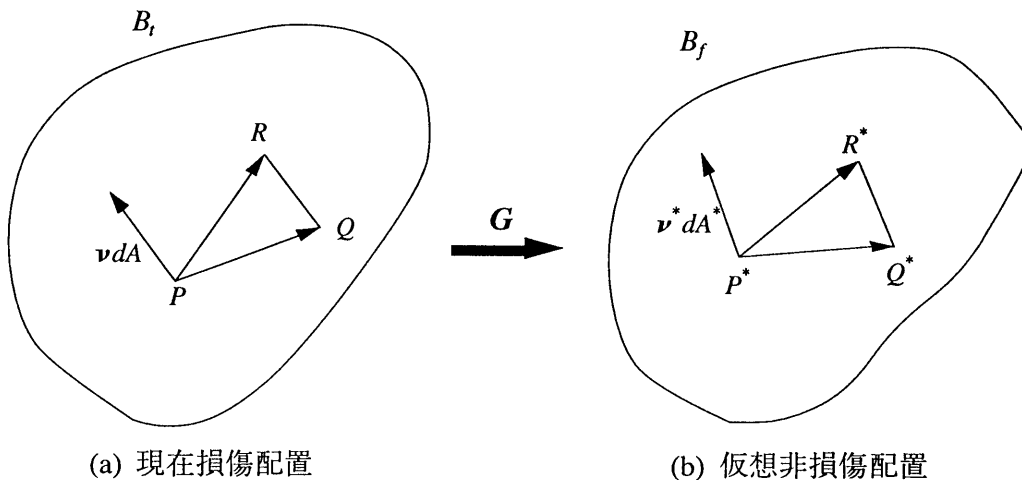


図2.4 損傷状態の定義

$$\bar{\sigma} = (I - D)^{-1} \sigma \quad (2.59)$$

この理論は、空げき発生によってもたらされる一般の損傷状態を対象として、材料の損傷状態が微小空げきの存在による荷重負担有効面積の減少によって規定されるという、より限定の少ない仮定を基礎とし、系統的な理論を展開しているところに特徴がある。しかし、式(2.59)の有効応力は一般に非対称であり、これらの有効応力の適当な対称化が必要となるが、対称化に対する物理的意味の議論はまだ十分ではない。また最近村上ら[58]は、仮想非損傷配置中の非損傷面積要素は不適合な回転を除外することによって3次元 Riemann 多様体を形成するという観点から、この理論を一層精密化している。

Betten [59]は、村上らとは逆に、損傷配置の Cauchy 四面体から仮想非損傷配置への面積要素の変換から出発して損傷変数を定義し、さらに損傷の発達によっても法線方向が変化しないような面積要素が材料中に存在すると仮定して式(2.58)の形で表現される2階対称な損傷テンソル D を導いている。

2階対称テンソルによる損傷の表現は、直交異方性よりも複雑な対称性を持つ材料損傷状態は記述できないという限界はあるが、その数学的取扱の容易さから多くの異方損傷理論で用いられている。

Onat と Leckie[60, 61]は、損傷材料中の空げきの数とその体積を損傷の尺度とし、方向 n を持つ粒界上の微小面積 $dA(n)$ 中の空げき数とその体積密度を $N(n)$, $V(n)$ とし、これから偶数階のモーメントテンソル

$$N_0 = \int_s N(n) dA(n), \quad N_{ij} = \int_s N(n) n_i n_j dA(n), \quad \dots \quad (2.60a)$$

$$V_0 = \int_s V(n) dA(n), \quad V_{ij} = \int_s V(n) n_i n_j dA(n), \quad \dots \quad (2.60b)$$

を作り、これらを損傷変数としてクリープ構成式と損傷の発展式を定式化した。彼らの理論は、微視的観察結果を忠実に反映しようとするところに特徴があるが、これらのテンソルが実際の微視的構造変化にどのような寄与をするのかは明らかにされていない。

Lemaitre と Chaboche ら[13, 28]は、材料の損傷状態はその弾性定数の変化によって記述できると考えて、クリープ損傷を含む一般の損傷に対する現象論的理論を展開している。彼等は損傷変数 D は、非損傷材料の4階の弾性定数テンソル E を損傷材料の別の4階の弾性定数テンソル $\bar{E}(D)$ へ変換する8階のテンソルであると考えた。しかし、8階の損傷テンソルを扱う複雑さを避けるため、Chaboche[28]は損傷テンソル D が、 E から $\bar{E}(D)$ への変換

$$\bar{E}(D) = (I - D) : E \quad (2.61)$$

を定義するような4階非対称テンソルであると仮定した。ここで、 I は4階の恒等テンソルであり、また $(:)$ は2階の縮約を表す。このとき、損傷テンソル D と有効応力テンソル $\bar{\sigma}$ は

$$D = I - \bar{E}(D) : E^{-1}, \quad \bar{\sigma} = (I - D)^{-1} : \sigma \quad (2.62)$$

となり、損傷テンソル D は、損傷材料の弾性定数テンソルを知ることによってただちに規定できる。この理論は、一般の不可逆熱力学理論の枠内に組み込みうるという優れた特性を有するが、最大36個の成分を持つ4階非対称テンソルを扱うという困難さがある[7]。

2. 4 不可逆熱力学構成式理論に基づく損傷力学

従来の損傷材料の構成式および損傷発展式の定式化においては、個々の材料に対する実験的観察結果あるいは先験的な仮定によるものがほとんどである。したがって、損傷力学を一層精密化するためには、損傷材料に対する構成式と損傷発展式の系統的な定式化のための理論的枠組みの確立が不可欠である。

2.3.1項で述べたように、損傷変数は材料の内部構造状態を力学的に記述する巨視的変数であるから、熱力学構成式理論における内部状態変数である[6-9]。したがって、2.2節における不可逆熱力学理論の枠組みの下で損傷材料の力学的挙動を定式化することは、損傷理論の精密化に対して不可欠である。

本節では、これまで行われてきた、不可逆熱力学構成式理論による損傷理論の特徴や問題点を明らかにする。

2.4.1 ひずみ等価性ならびにひずみエネルギー等価性の仮説

不可逆熱力学構成式理論に基づく損傷力学では、損傷を考慮した熱力学ポテンシャルの定式化が重要となる。従来の多くの損傷理論では、材料損傷を何らかの損傷変数で記述するとともに、損傷の力学的効果を有効応力を用いて表現しようとしている。特にLemaitreは、損傷材料の構成式は、非損傷材料の構成式中のCauchy応力テンソルを、対応する有効応力で置き換えることによって得られる、“ひずみ等価性の仮説 (Hypothesis of strain equivalence)”を提案している[2-4, 28]。しかし、このような操作によって得られ

た構成関係式は，一般にひずみエネルギーの表示式における対称性を満足しない．Sidoroffら[36, 37]は，いくつかの代表的な損傷変数と有効応力テンソルについて，熱力学理論と適合するための条件を検討している．式(2.62)の4階の損傷テンソル \mathbf{D} はこの条件を満足する．2階対称損傷テンソルの場合には，有効応力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ を2階の損傷テンソル \mathbf{D} で表現される4階テンソル $\mathbf{M}(\mathbf{D})$ を用いて

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.63)$$

のように表される場合，この条件を満足する．ここで， $\mathbf{M}(\mathbf{D})$ は次のような対称を持っている．

$$M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{ijlk} \quad (2.64)$$

また，彼らは，損傷材料のひずみエネルギーの定式化においては，損傷の効果は，式(2.63)のような有効応力を，Cauchy 応力と置き換えることにより導入されるという仮定を提案した．この仮定は，“弾性ひずみエネルギー等価性の仮説 (Hypothesis of elastic energy equivalence)” とよばれている．しかし，この仮説は，弾性ひずみを用いて弾性ひずみエネルギーを記述する際に熱力学的厳密性を欠くことが，Hansen と Schreyer[103]によって明らかにされている．Hansen らはまた，ひずみ等価性および弾性ひずみエネルギー等価性の仮説を用いた場合に，それぞれの仮説から得られる有効応力には顕著な差が生じることにも言及している．このことは，熱力学理論による損傷力学に対する有効応力の適用の限界を示している．

2.4.2 スカラー損傷理論に対する熱力学的理論

Lemaitre[80]は，延性材料に対して，内部状態変数にスカラー損傷変数 D と塑性変形における等方硬化を記述する変数 p を導入し，材料の弾塑性-損傷挙動を熱力学理論を用いて定式化した．

はじめに彼は，Helmholtz の自由エネルギー ψ を次式のように弾性と塑性，塑性と損傷の非連成を仮定して

$$\psi = \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, D) + \psi^p(T, p) \quad (2.65)$$

と表した．このうち $\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, D)$ については，次のように表現した．

$$\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, D) = \frac{1}{2\rho} \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e (1-D) \quad (2.66)$$

式(2.66)は、ひずみ等価性の仮説を用いて求められており、これから弾性構成式ならびに損傷共役力 y を導いた。さらに、この損傷共役力 y を Mises の相当応力 σ_{eq} および静水応力 σ_H を用いて

$$-y = \frac{\sigma_{eq}}{2E(1-D)^2} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \quad (2.67)$$

の形で表現することにより、損傷共役力の静水応力依存性を明らかにした。さらに、損傷の発展式 \dot{D} を、散逸ポテンシャル $\varphi^*(y, \dot{p}, T)$ の法線則によって

$$\dot{D} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = \left(\frac{-y}{S_0} \right)^{s_0} \dot{p} \quad (2.68)$$

のように表し、延性損傷の静水応力および塑性変形依存性を、陽な形で表現している。

彼はこの理論を用いて、種々の金属材料の弾塑性変形挙動における縦弾性係数の低下から損傷変数の発展の様子および臨界値 D_{cr} を求めた。しかし、金属材料の延性変形においては、損傷の影響によって縦弾性係数だけでなく Poisson 比も低下することが実験的に確かめられているが[36, 37]、スカラー損傷変数では、このような Poisson 比の低下は表現できない[104]。さらに、散逸ポテンシャル $\varphi^*(y, \dot{p}, T)$ が現在の内部状態だけでなく塑性変形速度 \dot{p} にも依存するという不合理さもある。

Mazars[39]は、脆性材料であるコンクリートを対象として、Lemaitre と同様なスカラー損傷変数 D を用い、式(2.66)と同様な形の Helmholtz の自由エネルギーを仮定し、熱力学的損傷理論を展開している。さらに彼は、損傷の発生規準を表す損傷面を、脆性材料に顕著な微視的き裂の開・閉口による損傷の応力方向依存性を考慮して

$$f(D) = \tilde{\varepsilon} - K(D) \quad (2.69a)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad (2.69b)$$

で表現した。ここで $K(D)$ は、損傷限界の大きさを表す。しかし、彼の理論では、(2.69)は損傷発生の限界を示すだけで、損傷発展式は先験的な仮定によって導いており、損傷発展に対する熱力学的理論を満足しているかどうかは不明である。

その他、Ladeveze[38]も2つのスカラー損傷変数を用いて、脆性材料における損傷の引

張り と 圧縮 に対する 顕著な 差異， すなわち 損傷 の 応力 方向 依存性 を 表現 できる ような 熱力学 理論 を 展開 している． しかし， 彼も 損傷 発展式 に対しては， 熱力学 制約 を 考慮 して いない 先験的 な 定式化 に とどまっ ている．

2.4.3 ベクトル損傷理論に対する熱力学的理論

Krajcinovic と Fonseka[32, 33]は，脆性材料である強化コンクリートの損傷挙動を表現するため，材料内部で発生・成長する微視的平面き裂による損傷を，式(2.55)で表現されるベクトル損傷変数 ω を用いて表現した．この場合，導入した式(2.29)の内部状態変数は，

$$V_k = \{\omega\} \quad (2.70)$$

となる．

彼らは，Helmholtz の自由エネルギー $\psi(\epsilon^e, \omega, T)$ を弾性ひずみテンソル ϵ^e とベクトル損傷変数 ω の基本不変量からなる多項式

$$\begin{aligned} \rho\psi = & \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\epsilon_{kk}^e \epsilon_{ll}^e - \mu(\epsilon_{kk}^e \epsilon_{ll}^e - \epsilon_{kl}^e \epsilon_{lk}^e) \\ & + C_1(\omega_p \omega_p)^{-1/2} \epsilon_{kl}^e \epsilon_{mm}^e \omega_k \omega_l + C_2(\omega_p \omega_p)^{-1/2} \epsilon_{kl}^e \epsilon_{lm}^e \omega_k \omega_m \end{aligned} \quad (2.71)$$

より，弾性構成式および損傷共役力ベクトル R を導いている．ここで， λ および μ は Lamé の定数， C_1 ， C_2 は温度 T を引数とする材料関数である．しかし，この理論では，損傷の発展式を規定する損傷ポテンシャルは，損傷共役力空間ではなく，弾性ひずみ空間で実験的結果をもとに決定されているが，これが熱力学的制約を満足しているかどうかの議論はなされていない．

その後 Krajcinovic[34]は，損傷発展式に対しても熱力学的制約を満足するように，損傷共役力 R による損傷ポテンシャル面 F を

$$F = L_{mn} R_m R_n - R_0^2 \quad (2.72)$$

のように表現し，損傷発展式 $\dot{\omega}_m$ を式(2.72)の法線則によって次式で記述した．

$$\dot{\omega}_m = 2\Lambda L_{mn} R_n \quad (2.73)$$

ここで Λ は，式(2.72)の損傷ポテンシャル面に対する適合条件によって定まる未定乗数で

ある。

さらに Krajcinovic と Selvaraj[27]は、この理論をクリープ損傷にも拡張した。このとき彼らは、クリープ硬化を表現する2階テンソルの異方硬化変数 α と等方硬化スカラー変数 p を用いて

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi^{(e)}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\omega}, T) + \psi^{(c)}(\boldsymbol{\alpha}, p, \boldsymbol{\omega}, T) \\ F &= F_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{A}, P; \boldsymbol{\omega}) + F_2(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{\omega}) \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

のような自由エネルギーと散逸ポテンシャルを仮定して議論を展開している。ここで \boldsymbol{A} と P は、 $\boldsymbol{\alpha}$ と p の熱力学的共役力である。

Krajcinovic らの理論では、Helmholtz の自由エネルギーをテンソルとベクトルからなる不変量の多項式で表現しているが、この方法は種々の材料に対しても適用できる汎用性を有している。しかし、2.3.3項でも述べたように、ベクトル損傷変数は、異なった方向の平面き裂を損傷変数の単なる加算によっては表現できず、さらに、空げきの方向性と大きさは記述できても空げきの形状の効果は表せない欠点がある。

2.4.4 テンソル損傷理論に対する熱力学的理論

M. L. Kachanov[30]は、熱力学理論に基づき、特定の微視的分布き裂を含む線形弾性体のき裂密度を、式(2.57)のような2階対称テンソル \boldsymbol{D} で表し、その材料の Gibbs の熱力学ポテンシャル g を、Cauchy の応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ と \boldsymbol{D} の等方テンソル関数で表現して、等方弾性材料が微視的き裂による損傷を受けた場合の脆性的な挙動について議論した。

彼は、この材料の Gibbs の熱力学ポテンシャル $g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D})$ を、応力テンソルについては2次同次式、損傷テンソルについては1次式となる等方テンソル関数を考え、さらに、き裂面に平行な方向における縦弾性係数への平行き裂の効果はないものとして、次の関数形を仮定した。

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D}) = -\frac{\nu_0}{2E_0}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 + \frac{1+\nu_0}{2E_0}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) + \eta_1\text{tr}\boldsymbol{\sigma}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{D}) + \eta_2\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{D}) \quad (2.75)$$

ここで、 E_0 、 ν_0 はそれぞれ初期非損傷状態における縦弾性係数および Poisson 比であり、また η_1 、 η_2 は実験から求められる材料定数である。式(2.75)から、損傷主方向の縦弾性係数 E_j 、 i 方向に引張り（圧縮）応力を受けるときの j 方向の伸び（収縮）を示す Poisson 比 ν_{ij} 、および横弾性係数 G_{ij} は

$$E_j = \frac{E_0}{1 + 2E_0 D_j (\eta_1 + \eta_2)} \quad (2.76a)$$

$$\nu_{ij} = \frac{\nu_0 - E_0 \eta_1 (D_i + D_j)}{1 + 2E_0 D_i (\eta_1 + \eta_2)} \quad (2.76b)$$

$$G_{ij} = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0) + 2E_0 \eta_2 (D_i + D_j)} \quad (2.76c)$$

のように求められる。しかし、彼の理論では、損傷発展を規定する散逸ポテンシャルおよび損傷発展式についての議論はなされていない。

Chow と Wang[82, 83, 85]は、村上と大野[25, 26, 56]が提案した2階対称損傷テンソル D を用いて、弾塑性-損傷材料に対する不可逆熱力学理論を展開している。彼らは、内部状態変数として D のほかに、等方硬化を表現する変数 r および累積損傷の影響を表現する変数 β を導入し、損傷と塑性の非連成を仮定した Helmholtz の自由エネルギーあるいは Gibbs の熱力学ポテンシャルを、等価弾性ひずみエネルギー仮説を用いて定式化している。さらに彼らは、塑性ポテンシャルおよび損傷ポテンシャルを

$$\left. \begin{aligned} F^p(\bar{\sigma}, R) &= 0 \\ F^d(Y, B) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

のように独立に規定した。ここで、 $\bar{\sigma}$ は式(2.63)で表現される有効応力である。また、 Y , R および B はそれぞれ D , r および β に対する熱力学的共役力である。塑性構成式ならびに損傷発展式は、それぞれのポテンシャルに対する法線則によって求めている。さらに彼らは、この理論をアルミニウム合金の単軸引張り試験における縦弾性係数と Poisson 比の変化、ならびに有限要素法による延性破壊に対する計算に適用している。しかし、彼らは実際の定式化に対しては、損傷発展を規定する損傷面 $F^d = 0$ を損傷共役力空間ではなく応力空間で定義した有効損傷応力 $\tilde{\sigma}_d$ による損傷面

$$F^d(\tilde{\sigma}_d, B) = 0 \quad (2.78a)$$

$$\tilde{\sigma}_d = \left(\frac{1}{2} \tilde{\sigma} : \mathbf{J} : \tilde{\sigma} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2} \sigma : \tilde{\mathbf{J}} : \sigma \right)^{1/2} \quad (2.78b)$$

を用いて定式化した。ここで、 $\tilde{\mathbf{J}}$ は、損傷面の形状を規定する4階のテンソルであり、Chow らはそれが満足すべき条件についても詳しく論じている。しかし、この定式化が熱力学的制約を満たすかどうかはさらに議論の余地がある。さらにこの理論では、応力方向による損傷効果の違いを表現できないという欠点もある。

Voyiadjis と Kattan[90, 91]は、前述の Chow らと同様な塑性および損傷ポテンシャル面を用いた理論を移動硬化を含む形に拡張し、さらにこの理論を用いて、単純せん断を受けるとき裂平板の有限弾塑性変形における損傷過程を解析している。しかし、彼らの論文でも、損傷テンソルの共役力として先験的に応力を用いているという限界がある。

2. 5 本章のまとめ

以上の展望より、不可逆熱力学構成式理論を厳密に適用した損傷力学理論に対するこれまでの研究は、実験的結果との比較の困難さ等の理由により、十分に行われているとは言いがたい。しかし、損傷力学の一層の精密化のためには、熱力学的制約を満足するような定式化が望まれる。

本章では、本研究の理論的基礎として、連続体の不可逆熱力学理論および、不可逆熱力学理論より導かれた Clausius-Duhem の不等式を熱力学的制約条件とする内部状態変数不可逆熱力学構成式理論について概説した。続いて、連続体損傷力学の発達とその熱力学理論への適用に対する理論的展開について展望し、その特徴と問題点を明らかにした。

次章では、本章で述べた不可逆熱力学構成式理論に基づく損傷力学を、岩石、コンクリート等の弾性-脆性材料に適用する。

第3章 弾性-脆性材料の構成式と損傷発展式に 対する不可逆熱力学理論 [105, 106]

本章では、前章の不可逆熱力学構成式理論に基づく損傷力学の具体的な応用として、微小分布空隙による材料の異方損傷状態を、村上と大野[25, 26, 56]の提案した2階対称な損傷テンソル \mathbf{D} を用いて記述し、セラミックス、コンクリート、岩石等のような弾性-脆性材料の構成式と損傷発展式を導く。続いて、導かれた構成式により弾性-脆性材料の変形と損傷の発達ならびにその負荷履歴依存性について検討する。

3. 1 弾性-脆性材料に対する応用

3.1.1 構成式と損傷発展式の定式化

非弾性変形を生じることなく、ある値以上の応力で損傷が急激に進行し最終破壊に至る材料は、一般に弾性-脆性材料と呼ばれている。このような材料では、内部状態変数のうち、非弾性変形に関する変数は無視できるが[32-35]、応力の負荷とともに材料内部に多数の微視的空隙が発生し、その方向に依存した異方的な内部損傷が引き起こされる。したがって、このような異方損傷状態を表す内部状態変数として、村上と大野[25, 26, 56]が提案した、式(2.58)の2階対称テンソル \mathbf{D} を採用する。この場合、内部状態変数 \mathbf{V}_k とそれに対応する熱力学共役力 \mathbf{A}_k はそれぞれ

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{D}, \quad \mathbf{A}_k = -\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}} \right) \equiv \mathbf{Y} \quad (3.1)$$

となる。ここで、損傷変数の熱力学的共役力 \mathbf{Y} は、損傷の進行に伴う自由エネルギーの変化を表し、破壊力学におけるエネルギー解放率に相当する[10, 86]。さらに、この材料の変形過程における熱発生と熱流入は小さく、この過程は等温的であるとすると

$$\dot{T} = 0, \quad \mathbf{q} = 0 \quad (3.2)$$

となり、力学的流束ベクトル \mathbf{J} および共役力ベクトル \mathbf{X} の成分のうち、熱と温度に関する成分を無視できる。また、非弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^p$ に対応する共役力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ も上の仮定により無視でき、用いる力学的流束ベクトル \mathbf{J} および共役力 \mathbf{X} の成分は、それぞれ \mathbf{D} およ

び Y だけとなる。

以上の議論により、この材料の Helmholtz の自由エネルギー $\rho\psi$ は、弾性ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ と損傷テンソル \boldsymbol{D} の関数として

$$\rho\psi = \rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{D}) \quad (3.3)$$

のように表される。式(3.3)のテンソル値スカラー関数の最も一般的な表現は、非線形代数における表現定理[65,6 7]により、2つの対称テンソル $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ および \boldsymbol{D} の10個の基本不変量

$$\begin{aligned} & \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e, \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2, \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^3, \text{tr}\boldsymbol{D}, \text{tr}(\boldsymbol{D})^2, \text{tr}(\boldsymbol{D})^3 \\ & \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e \boldsymbol{D}), \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e \boldsymbol{D}^2), \text{tr}\{(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 \boldsymbol{D}\}, \text{tr}\{(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 \boldsymbol{D}^2\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

の関数として与えられる。この弾性-脆性材料は、初期非損傷状態では等方線形弾性体であるとする、自由エネルギーは弾性ひずみに関しては2次同次式となる。さらに、この自由エネルギーは内部の微視的分布空隙による損傷 \boldsymbol{D} の発達によっても減少する。この損傷 \boldsymbol{D} の影響の定式化は、材料挙動を適切に表現するように行わなければならないが、ここでは理論の煩雑さを避けるため、この影響は \boldsymbol{D} に対して線形的であるとし、式(3.3)を次の各項の線形結合で与える。

$$\begin{aligned} & (\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2, \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2, (\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 \text{tr}\boldsymbol{D}, \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 \text{tr}\boldsymbol{D} \\ & \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e \boldsymbol{D}), \text{tr}\{(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 \boldsymbol{D}\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

岩石やコンクリート等の弾性-脆性材料は、圧縮応力をうける場合には内部の微視的き裂の閉口を伴うため引張りの場合と異なった応答を示し、圧縮応力における材料損傷の効果は引張り応力の場合よりも小さくなる[38, 39, 92, 98, 99, 104]。したがって、微視的き裂閉口効果を表現するため、次のような修正ひずみテンソル $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ を導入する[38, 56, 57]。

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^e \rangle - \zeta \langle -\boldsymbol{\varepsilon}^e \rangle \quad (0 \leq \zeta \leq 1) \quad (3.6a)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^e \rangle = \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_1^e \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \varepsilon_2^e \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \varepsilon_3^e \rangle \end{bmatrix}, \quad \langle -\boldsymbol{\varepsilon}^e \rangle = \begin{bmatrix} \langle -\varepsilon_1^e \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle -\varepsilon_2^e \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle -\varepsilon_3^e \rangle \end{bmatrix} \quad (3.6b)$$

ここで $\langle \cdot \rangle$ は Macauley の括弧であり, ε_i^e ($i=1,2,3$) は $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ の主値である. 主値の符号については, 初期形状に比べて主値方向に引張られているときを正, 逆に圧縮されているときを負とする. また, ζ は圧縮によるき裂閉口の度合を示す材料定数である.

本章では, 弾性-脆性材料に対する Helmholtz の自由エネルギーを, 式(3.6)を用いて次のように表現する.

$$\begin{aligned} \rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{D}) = & \left(\frac{1}{2}\lambda + C_1 \text{tr}\boldsymbol{D} \right) (\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 + (\mu + C_2 \text{tr}\boldsymbol{D}) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 \\ & + C_3 \text{tr}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \boldsymbol{D}) + C_4 \text{tr}\left\{ (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)^2 \boldsymbol{D} \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここで, λ と μ は Lamé の定数であり, $C_1 \sim C_4$ は材料定数である. 式(3.7)においては, 微視的き裂閉口の効果は異方的なエネルギー減少に影響を及ぼすと仮定し, C_3 および C_4 の項に $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ を用いて定式化した.

3.1.2 弾性-脆性材料の構成式

式(3.7)および(2.36)から, 損傷材料の構成式は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e} = & (\lambda + 2C_1 \text{tr}\boldsymbol{D}) (\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e) \boldsymbol{I} + (2\mu + 2C_2 \text{tr}\boldsymbol{D}) \boldsymbol{\varepsilon}^e \\ & + C_3 \left\{ \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \boldsymbol{D}) \frac{\partial(\text{tr}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e} + \text{tr}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \left(\frac{\partial\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e} : \boldsymbol{D} \right) \right\} + C_4 (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \boldsymbol{D} + \boldsymbol{D} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e) : \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e} \end{aligned} \quad (3.8)$$

のように書ける. ここで材料定数 λ , μ , ならびに $C_1 \sim C_4$ および式(3.6a)の ζ は, それぞれ非損傷材料と損傷材料の弾性試験によって定められる.

3.1.3 損傷の発展式

損傷変数テンソル \boldsymbol{D} の熱力学的共役力 \boldsymbol{Y} は, 式(3.7)および(2.39)から

$$\boldsymbol{Y} = -\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial\boldsymbol{D}} = -C_1 (\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 \boldsymbol{I} - C_2 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e) \boldsymbol{I} - C_3 (\text{tr}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - C_4 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (3.9)$$

となる.

一方, 散逸ポテンシャル関数 $F(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{Y}, T)$ は, 熱力学的制約を満足するように, 共役力空間での凸曲面を仮定して

$$F = \frac{1}{2}(\mathbf{Y}:\mathbf{L}:\mathbf{Y}) - Y_0(\mathbf{D}) = 0 \quad (3.10)$$

とする。ここで $Y_0(\mathbf{D})$ は、損傷の進行とともに変化する損傷曲面の大きさを表す定数であり、また4階テンソル $\mathbf{L}(\mathbf{D})$ は実験結果から決定される。

損傷変数 \mathbf{D} の発展式は、式(3.10)の散逸ポテンシャル F により

$$\dot{\mathbf{D}} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}} = \Lambda \mathbf{L}:\mathbf{Y} \quad (3.11)$$

のように求められる。ここで、 Λ は未定乗数であり、式(3.10)の適合条件によって次のように与えられる。すなわち、損傷共役力 \mathbf{Y} が散逸ポテンシャル面 $F=0$ 上にあるとき、法線方向の損傷速度ベクトル $\dot{\mathbf{D}}$ が生じる。さらに $\dot{\mathbf{D}}$ が継続して生じるためには、 \mathbf{Y} は常に面上 $F=0$ になければならないから、式(3.10)の適合条件は、

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}}:\dot{\mathbf{Y}} - \frac{\partial Y_0}{\partial \mathbf{D}}:\dot{\mathbf{D}} = 0 \quad (3.12)$$

と書ける。式(3.11)、(3.12)から Λ は

$$\Lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}}:\dot{\mathbf{Y}}}{\frac{\partial Y_0}{\partial \mathbf{D}}:\dot{\mathbf{D}}} \quad (3.13)$$

となり、したがって、式(3.11)の Λ の符号は次の負荷-徐荷条件によって与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda \neq 0, \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}}:\dot{\mathbf{Y}} > 0 \\ \Lambda = 0, \quad F < 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}}:\dot{\mathbf{Y}} \leq 0 \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

また、材料の破断の条件として、損傷テンソル \mathbf{D} の成分のいずれかの値が1に達したとき、材料が破断するものとする。

3. 2 高強度コンクリートの弾性-脆性損傷解析

3.2.1 単軸単調圧縮

前章で定式化した構成式(3.8)および損傷発展式(3.11)の妥当性を調べるために、高強度コンクリートの弾性変形と脆性損傷破壊過程を解析する。

はじめに高強度コンクリートの柱状試験片の単軸圧縮過程を解析し、対応する実験結果[33,3 4]と比較することにより、式(3.6)、(3.7)の材料定数を決定する。このとき、試験片の軸方向とそれに直交する2方向に直角座標系 $O-x_1x_2x_3$ をとる。ここで試験片の軸方向の座標軸を x_1 とする。単軸試験のひずみ成分は ε_{11}^e 、 ε_{22}^e および ε_{33}^e となり、ひずみの主軸は座標軸と一致する。さらに、単軸単調圧縮の場合は $\varepsilon_{11}^e < 0$ および ε_{22}^e 、 $\varepsilon_{33}^e > 0$ であるから、式(3.6)の $\bar{\varepsilon}^e$ は次のようになる。

$$[\bar{\varepsilon}^e] = \begin{bmatrix} \zeta \varepsilon_{11}^e & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^e & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^e \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

また応力テンソルは、軸方向の圧縮応力を $\sigma_{11}(\leq 0)$ とすると

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

となる。

式(3.15)および(3.16)を用い、構成式(3.7)を各成分に対して書き下すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & [\lambda + 2\mu + 2(C_1 + C_2)D_{mm} + 2(C_3 + C_4)\zeta^2 D_{11}] \varepsilon_{11}^e \\ & + [\lambda + 2C_1 D_{mm} + C_3 \zeta (D_{11} + D_{22})] \varepsilon_{22}^e + [\lambda + 2C_1 D_{mm} + C_3 \zeta (D_{11} + D_{33})] \varepsilon_{33}^e \end{aligned} \quad (3.17a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = 0 = & [\lambda + 2C_1 D_{mm} + C_3 \zeta (D_{11} + D_{22})] \varepsilon_{11}^e \\ & + [\lambda + 2\mu + 2(C_1 + C_2)D_{mm} + 2(C_3 + C_4)D_{22}] \varepsilon_{22}^e \\ & + [\lambda + 2C_1 D_{mm} + C_3 (D_{22} + D_{33})] \varepsilon_{33}^e \end{aligned} \quad (3.17b)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} = 0 = & \left[\lambda + 2C_1 D_{mm} + C_3 \zeta (D_{11} + D_{33}) \right] \varepsilon_{11}^e \\
& + \left[\lambda + 2C_1 D_{mm} + C_3 (D_{22} + D_{33}) \right] \varepsilon_{22}^e \\
& + \left[\lambda + 2\mu + 2(C_1 + C_2) D_{mm} + 2(C_3 + C_4) D_{33} \right] \varepsilon_{33}^e
\end{aligned} \tag{3.17c}$$

ここで $D_{mm} = D_{11} + D_{22} + D_{33}$ である。

一方、損傷共役力 Y の成分は式(3.9)より

$$\begin{aligned}
Y_{11} = & -C_1 (\varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{33}^e)^2 - C_2 (\varepsilon_{11}^{e^2} + \varepsilon_{22}^{e^2} + \varepsilon_{33}^{e^2}) \\
& - C_3 (\zeta \varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{33}^e) \zeta \varepsilon_{11}^e - C_4 \zeta^2 \varepsilon_{11}^{e^2}
\end{aligned} \tag{3.18a}$$

$$\begin{aligned}
Y_{22} = & -C_1 (\varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{33}^e)^2 - C_2 (\varepsilon_{11}^{e^2} + \varepsilon_{22}^{e^2} + \varepsilon_{33}^{e^2}) \\
& - C_3 (\zeta \varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{33}^e) \varepsilon_{22}^e - C_4 \varepsilon_{22}^{e^2}
\end{aligned} \tag{3.18b}$$

$$\begin{aligned}
Y_{33} = & -C_1 (\varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{33}^e)^2 - C_2 (\varepsilon_{11}^{e^2} + \varepsilon_{22}^{e^2} + \varepsilon_{33}^{e^2}) \\
& - C_3 (\zeta \varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{33}^e) \varepsilon_{33}^e - C_4 \varepsilon_{33}^{e^2}
\end{aligned} \tag{3.18c}$$

となる。

損傷散逸ポテンシャル $F(Y)$ は、熱力学的拘束を満足するように Y についての 2 次同次式

$$F = \frac{1}{2} (L_{1111} Y_{11}^2 + L_{2222} Y_{22}^2 + L_{3333} Y_{33}^2) - Y_0(D) = 0 \tag{3.19}$$

で表現できるとする。式(3.19)および(3.11)より、損傷の各成分の発展式は次のようになる。

$$\dot{D}_{11} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial Y_{11}} = \Lambda L_{1111} Y_{11} \tag{3.20a}$$

$$\dot{D}_{22} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial Y_{22}} = \Lambda L_{2222} Y_{22} \tag{3.20b}$$

$$\dot{D}_{33} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial Y_{33}} = \Lambda L_{3333} Y_{33} \tag{3.20c}$$

式(3.20)の損傷テンソルの成分のいずれかの値が 1 に達したときに、材料は破断すると仮定する。

この高強度コンクリートの非損傷状態における弾性係数 E_0 、Poisson 比 ν_0 および最大圧縮強さ f_c は、文献[32]に従って次の値を用いた。

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= 21.4 \text{ GPa} \\ \nu_0 &= 0.2 \\ f_c &= 50.3 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} \quad (3.21a)$$

また、式(3.17)-(3.20)の材料定数 $C_1 \sim C_4$ 、 $L_{1111} \sim L_{3333}$ および ζ を決定するためには、損傷による弾性特性の変化に対する実験結果が必要である。しかし、対象とする高強度コンクリートのこのような実験結果は報告されていないので、本章では図 3.1 の○印で示す高強度コンクリートの単軸単調圧縮実験結果[32]を表現できるように、次のように決定した。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -50 \text{ MPa}, \quad C_2 = -800 \text{ MPa}, \\ C_3 &= -50 \text{ MPa}, \quad C_4 = -7.5 \text{ GPa}, \\ L_{1111} &= L_{2222} = L_{3333} = 1.5 \times 10^{-4}, \quad \zeta = 0.1 \end{aligned} \right\} \quad (3.21b)$$

なお、損傷ポテンシャル関数 $F=0$ の係数 L_{ijkl} の式(3.21b)以外の値は 0 とする。また、式(3.21b)の ζ は引張りと圧縮における材料挙動の違いによって定められる材料定数であるが、図 3.1 に対応する引張り試験結果は報告されていないので、ここでは一例として $\zeta=0.1$ を選んだ。また、実際の高強度コンクリートの最終破断は局所的に生じるが、このような不均一変形が認められるのは破断の直前に限られる。本章では、最終的な損傷状態は除

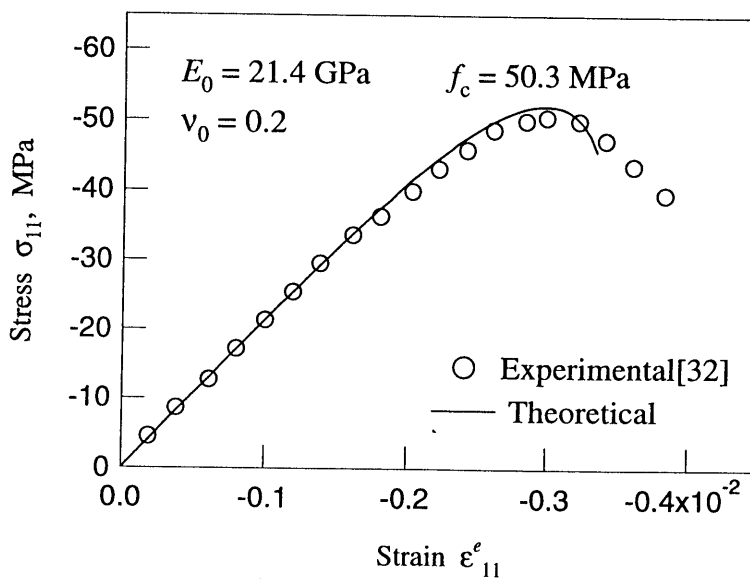


図 3.1 単軸圧縮における応力-ひずみ曲線 (高強度コンクリート)

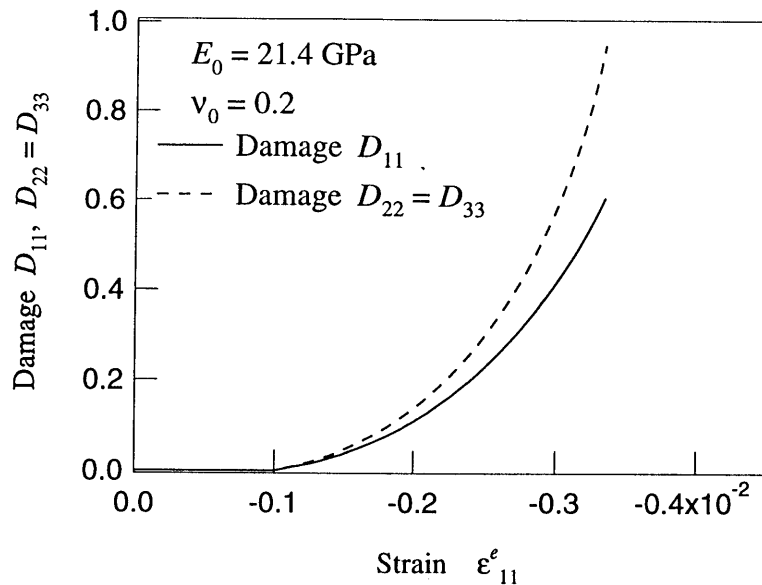


図 3.2 単軸圧縮における損傷-ひずみ曲線（高強度コンクリート）

外し，材料損傷は均一に発生するとして計算を行った。

図 3.1 の実線は，材料定数(3.21)を用い，ひずみ制御負荷過程によって構成式(3.17)および損傷発展式(3.20)を計算したときの応力-ひずみ曲線を示す。この図にみられるように，この材料ではひずみが増加するにつれて，損傷の発達により剛性が低下する。応力 σ_{11} は，ひずみ ϵ^e が約 -0.3×10^{-2} のときに最大となり，さらに，ひずみが増加するにつれて減少するが，本章の計算結果は実験結果をよく表現している。このような応力の減少は，ひずみ制御試験によるものであって，応力制御試験では，図 3.1 の最大応力に達すると急激に破断し，応力の減少は見られない。

図 3.2 は，図 3.1 と同じ単軸単調圧縮の場合の損傷変数の各成分の発達の様子を示す。荷重軸に垂直な損傷成分 D_{22} ， D_{33} の値は同じであり，この損傷材料は横等方性を有している。また，実験によれば単軸圧縮の場合には，荷重方向に垂直なき裂面をもつ微視的き裂が支配的である[31]が，図 3.2 によれば，損傷変数の発達は荷重軸方向の損傷成分 D_{11} よりも荷重軸に垂直な方向の損傷を表現する D_{22} ， D_{33} の方が大きい。したがって，本理論は実際の弾性-脆性材料である高強度コンクリートの損傷状態の異方的特性を，適切に表現していることがわかる。

3.2.2 単軸単調引張り

次に，以上で決定した材料定数(3.21)と構成式(3.8)，損傷発展式(3.11)を用いて，同一コンクリート材料の単軸単調引張りにおける弾性-脆性挙動を計算する。単軸引張りの場合，軸方向に垂直なひずみテンソル ϵ_{22}^e と ϵ_{33}^e は負になるので，修正ひずみテンソル $\bar{\epsilon}^e$ は次のようになる。

$$[\bar{\epsilon}^e] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^e & 0 & 0 \\ 0 & \zeta \epsilon_{22}^e & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \epsilon_{33}^e \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

ここでは、式(3.22)を式(3.8), (3.9)に代入し、この材料の引張りにおける弾性-脆性材料の挙動を、単軸圧縮の場合と同様にひずみ制御によって計算する。

図3.3と図3.4は、このような計算によって得られた応力-ひずみ曲線と損傷-ひずみ曲線である。実験によれば、引張りをうける弾性-脆性材料は、圧縮に比べてより小さなひず

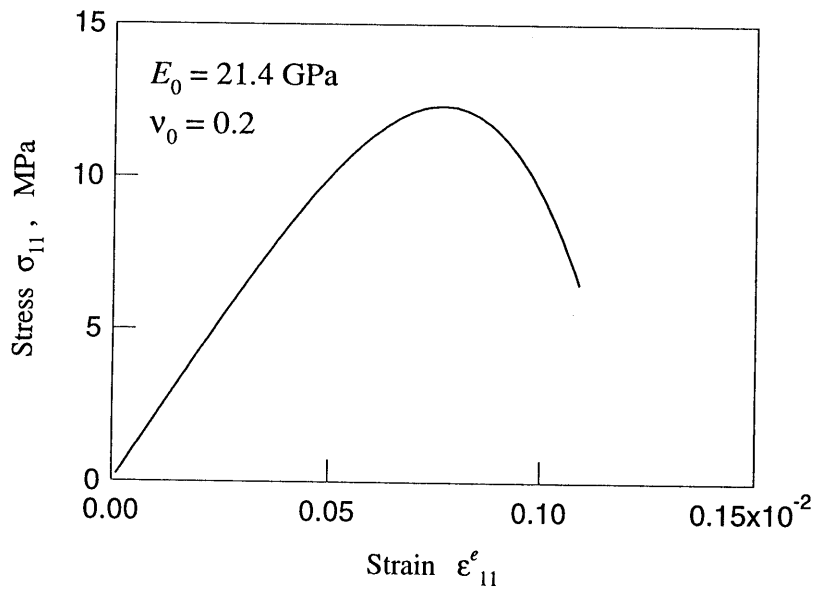


図3.3 単軸引張りにおける応力-ひずみ曲線（高強度コンクリート）

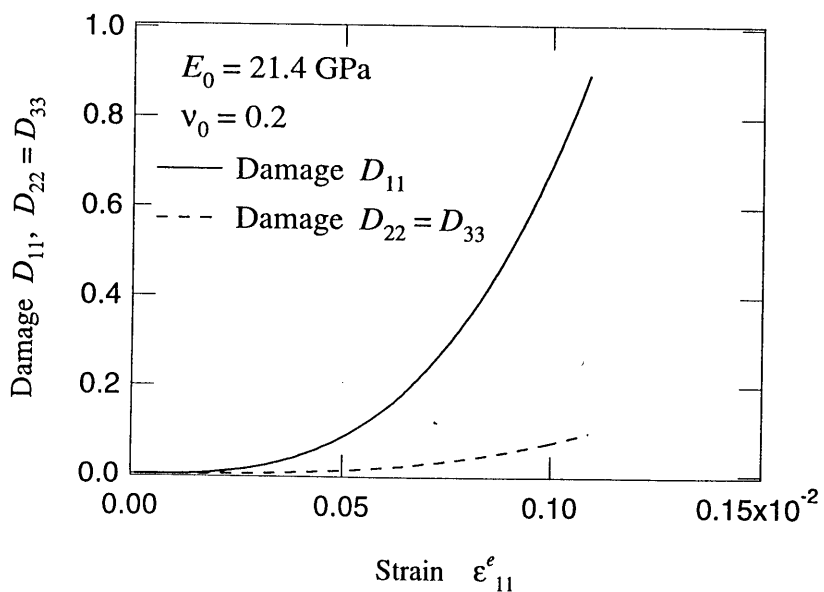


図3.4 単軸引張りにおける損傷-ひずみ曲線（高強度コンクリート）

みで破断する[31, 38, 39]. すでに述べたように, 式(3.6a)の材料定数 ζ は引張りと圧縮に対する材料挙動の差異を記述するように決定する必要がある. しかし, 図 3.1 の材料に対応する材料の引張り試験の結果は報告されていないので, 図 3.3 の結果は式(3.21b)の ζ の値と式(3.8)および(3.11)を用いて計算した値である.

この場合, 図 3.3 と図 3.1 を比較すると, 破断するときのひずみの比は約 3 となっており, 応力の符号によるこの材料の挙動の違いを表現している.

次に図 3.4 に示す損傷成分の発達の様子をみると, 図 3.2 とは異なり, 荷重軸方向の損傷成分 D_{11} が支配的であり, 実際の弾性-脆性材料の挙動を表現している. また, 図 3.2 と図 3.4 を比較すればわかるように, 図 3.4 の場合の損傷の発達の異方性は著しく, D_{11} が 1 に到達したときでも D_{22} , D_{33} の値はごく小さな値にとどまっており, 軸圧縮と軸引張りによる損傷状態は, 大きく異なっていることがわかる.

3.2.3 弾性-脆性損傷過程の応力経路依存性

続いて, 組合せ応力下での高強度コンクリートの応力経路の違いによる弾性-脆性挙動の違いを検討する. ここでは一例として, 平面応力状態における 2 軸引張り-せん断組合せ応力に対して図 3.5 のような 3 種類の応力経路 1, 2 および 3 を選び, 以上と同様な計算を行なった.

図 3.6 は, 図 3.5 の各応力経路に対応するひずみ経路を示す. いずれの応力経路も最終的には同じ応力状態 P に到達するが, 最終的なひずみ状態は大きく異なっている. 特に経路 1 と経路 3 を比較すると, 経路 3 の P_3 における引張りひずみ ϵ_{11}^e とせん断ひずみ ϵ_{12}^e の値は, 経路 1 の P_1 におけるそれぞれの値の約 2 倍および約 1.5 倍になっている. このことから, 先行するせん断応力経路 OB によって, 損傷した材料がさらに後続の引張り応力経路 BP を受ける場合, 非損傷材料が同一の引張り応力経路 OA を受ける場合に比べて著しく

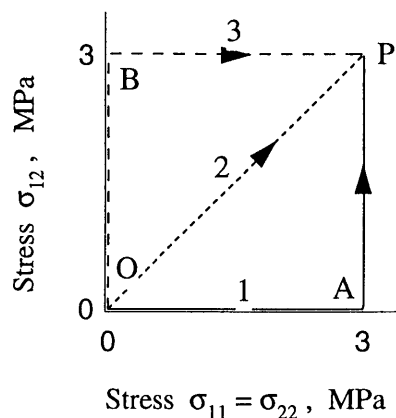


図 3.5 組合せ応力経路

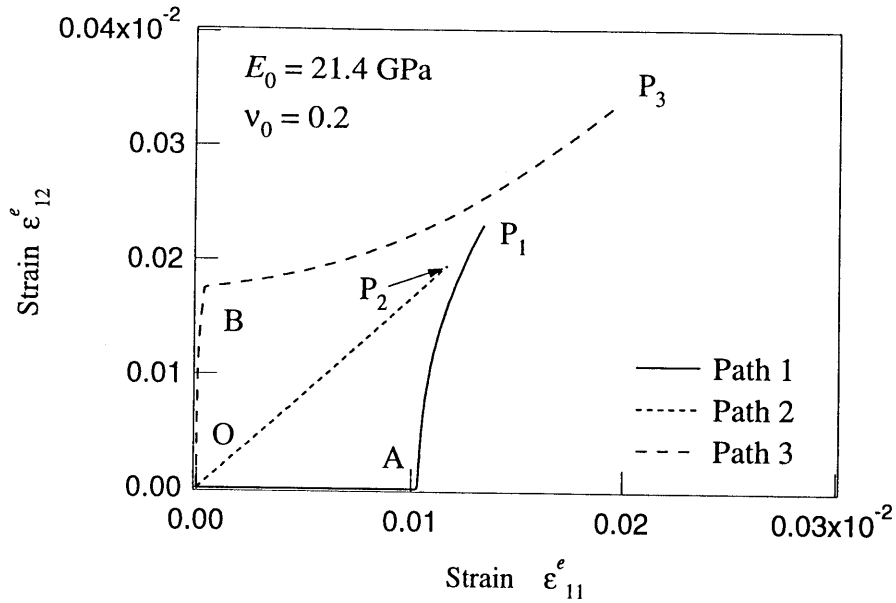


図 3.6 図 3.5 の各応力経路に対するひずみ経路

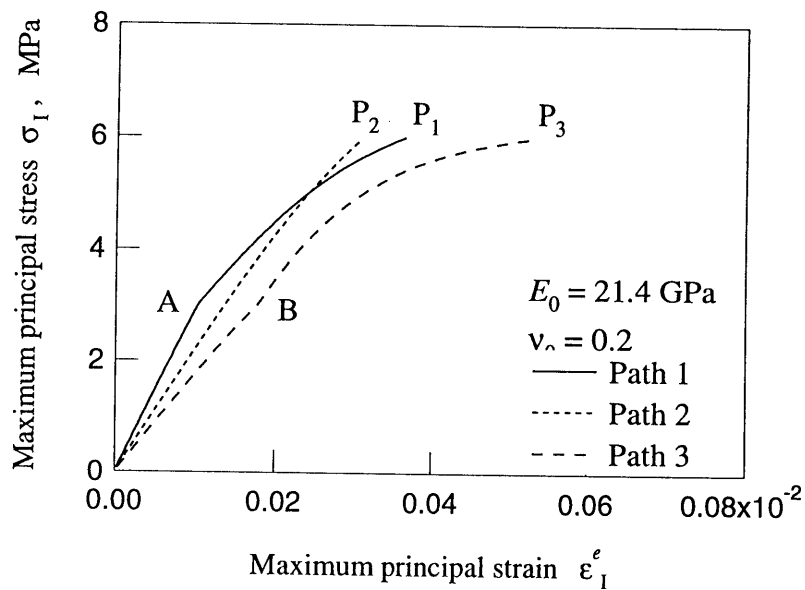


図 3.7 各応力経路に対する最大主応力-最大主ひずみ曲線

大きい引張りひずみを生じるだけではなく、同時に大きなせん断ひずみも生じることがわかる。さらにこの非比例負荷の場合の後続の応力経路 BP の効果は、先行引張り経路 OA の後に作用するせん断応力経路 AP の効果よりも著しく大きい。この傾向は、先行引張り応力に比べて先行せん断応力はより大きく材料の剛性を低下させることを意味する。また、比例負荷経路である経路 2 と非比例負荷経路である経路 1, 3 を比較してみると、経路 2 における P₂ は、最終的なひずみ状態が最も小さくなっており、比例負荷経路の方が非比例負荷経路に比べて損傷による剛性低下が小さくなっている。

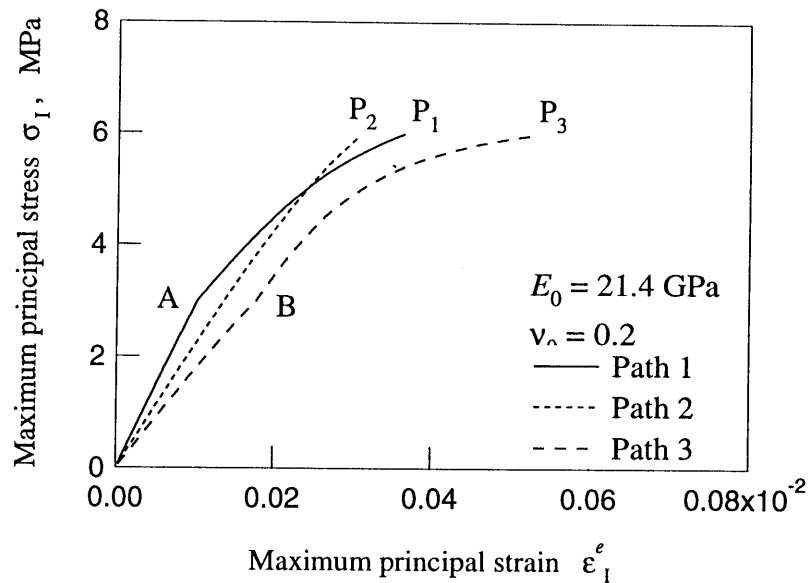


図 3.8 各応力経路に対する最大主損傷-最大主ひずみ曲線

次に図 3.7 は、図 3.5 の各応力経路における最大主応力-最大主ひずみ曲線を示す。この図から、各応力経路での損傷による材料の剛性低下の様子の違いを知ることができる。経路 3 における最終状態の主ひずみは約 0.06×10^{-2} となっており、最もひずみの小さい経路 2 との差は約 0.03×10^{-2} である。非比例負荷経路 1, 3 では、比例負荷経路 2 に比べて大きく剛性が低下していることはこの図から明らかである。経路 2 は、損傷の発達あまり大きくないため著しい材料軟化は見られない。

最後に図 3.8 は、各応力経路に対する最大主損傷-最大主ひずみ曲線である。この図を見ると、比例負荷である経路 2 の損傷が最も小さく、また、非比例負荷経路 3 の損傷が最も大きいことがわかる。さらに経路 1 と経路 3 を比較してみると、図 3.8 では応力点 A, B に対応する損傷はほとんど等しいが、その後の損傷の発達は経路 3 の方が経路 1 よりも大きくなり、この挙動の差異が、図 3.6 における両者のひずみ経路の違いになっている。

Krajcinovic と Fonseka[32, 33]は、ベクトル損傷変数を用いて本章と同様な熱力学理論による解析を行っている。しかし、彼らはベクトル変数によって損傷を表現する際の前章で述べたような不都合に加え、高強度コンクリートの引張りと圧縮に応じて生ずる微視的き裂の開・閉口による損傷特性の差異を表現する方法として、発生する損傷ベクトル成分を先験的に限定して解析を行っているため、応力の符号が変化するような場合には適用できない。これに対して本章では、2 階対称テンソルを用いて損傷を表現し、さらに応力方向の変化による損傷特性を、修正弾性ひずみテンソルを用いて表現することで、より広範な応力経路に対して適用できる定式化を行った。また、損傷発展式を定式化するための損傷ポテンシャル面は、損傷共役力空間で規定されており、熱力学制約を満足している。

3. 3 本章のまとめ

本章では、損傷の異方性を2階対称テンソルで表現し、不可逆熱力学的構成式理論に基づいて非弾性-損傷材料の構成式および損傷発展式の統一的な定式化を試みるとともに、その応用として高強度コンクリートの弾性-脆性損傷に対して構成式と発展式を具体化し、種々の組合せ応力経路に対するその変形と損傷破壊過程を解析した。すなわち、まず微小き裂の閉口の効果を考慮した修正ひずみテンソル $\bar{\epsilon}^e$ を導入し、これと2階対称な損傷テンソル D によって Helmholtz の自由エネルギーを表現するとともに損傷テンソルの共役力 Y によってエネルギー散逸ポテンシャルを表現した。これから導かれた構成式と発展式の材料定数を、高強度コンクリートの単軸単調圧縮に対する実験から決定した。導かれた式は、材料中での損傷の発達に伴う剛性低下の様子、圧縮と引張りにおけるこの材料の損傷状態の違い等を適切に記述できることがわかった。さらに、異なる組合せ応力経路に対する解析により、損傷の発達の応力経路依存性ならびにせん断応力の引張りひずみに対する連成効果を明らかにすることができた。

次章では、本章で展開した弾性-脆性材料に対する熱力学的損傷理論を、多結晶金属材料に対して拡張する。

第4章 弾塑性-損傷材料の構成式と異方損傷発展式 [107, 108]

多結晶金属材料においては、負荷の作用によって弾塑性変形を生じるとともに、微視的空げきの発達による材料損傷が引起こされる場合が少なくない[1, 6-9, 13, 14]. このような材料損傷の発達は、材料の弾性特性と塑性変形特性に影響を与え、しかもその発達は応力やひずみの作用方向に大きく依存し、顕著な異方性を示す[6-9]. 一方、塑性変形に伴う転位構造変化は、材料の変形挙動だけではなく損傷の発達にも著しい影響を与える。したがって、このような金属材料の非弾性挙動を精密に表現するためには、転位の運動による塑性挙動と微視的空げきの発達による異方損傷、ならびに両者の相互作用を同時に考慮する必要がある。

本章では、前章で行った弾性-脆性材料に対する熱力学理論[105, 106]を拡張し、弾塑性材料の損傷・破壊の発達と、損傷した材料の弾塑性変形に対する不可逆熱力学構成式理論を展開する。続いて、導かれた構成式を球状黒鉛鋳鉄の薄肉円管試験片に対する単軸ならびにねじり負荷実験の結果[108]に適用することにより、その妥当性を検討する。

4.1 内部状態変数の選択

弾塑性-損傷材料の構成式および損傷発展式を不可逆熱力学構成式理論によって定式化するためには、この材料の不可逆な内部状態変化を適切に記述できる内部状態変数を導入しなければならない。

弾塑性-損傷材料の非弾性変形は、主に転位の運動による転位構造の変化と、微視的空げきの発達による材料の内部損傷をもたらす。このうち特に損傷に伴う内部構造変化は応力の作用方向に依存し、一般に著しい異方性を示すだけでなく、材料の弾性変形、塑性変形ならびに破壊特性に大きな影響を与える[6-9]. 本章では、構成式の内部状態変数として、塑性変形に対する等方硬化スカラー変数 r 、微視的空げきによる材料の異方損傷状態を記述する2階対称損傷テンソル \mathbf{D} [25, 26, 57]、ならびに引き続いて生じる損傷の発展を規定するスカラー変数 β [82-86]を導入し

$$V_k = \{r, \mathbf{D}, \beta\} \quad (4.1)$$

とする。なお、材料の損傷状態は損傷テンソル \mathbf{D} によって決まるが、上式の変数 β は、引き続いて生じる損傷の発展に対する現在の損傷状態の影響を規定するものであり、塑性

変形の等方硬化変数 r に対応する。

さらに、式(4.1)の各内部状態変数に対する熱力学的共役力を

$$A_k = \{-R, Y, -B\} \quad (4.2)$$

と表す。ここで、 r および β の共役力の負号は、Helmholtz の自由エネルギーと内部状態変数の発展が正であるとき共役力もまた正になるよう選んである。また、以降の議論ではこの材料は等温過程にあり ($\dot{T}=0$)、熱の流出入もなく ($q=0$)、密度 ρ の変化も非常に小さく無視できるものとする。

以上で導入した内部状態変数及びその共役力を用いて、Clausius-Duhem の不等式から得られるエントロピー散逸を、2章の式(2.41)~(2.43)を用いて表現すると次のようになる。

$$\rho \dot{\Phi} = J \cdot X \geq 0 \quad (4.3a)$$

$$J = \rho \{\dot{\epsilon}^p, \dot{r}, \dot{D}, \dot{\beta}\}, \quad X = \{\sigma, -R, Y, -B\} \quad (4.3b)$$

4. 2 Helmholtz の自由エネルギーの定式化

一般に、材料の弾性特性、したがって弾性ひずみエネルギーは損傷の発達によって影響を受ける。一方、転位構造変化と微小空げきの発達に伴う主な自由エネルギーとしては、それぞれ主に転位構造による結晶格子のひずみエネルギーと空げき生成の表面エネルギーがあるが、これらに対する損傷の影響は小さい。したがって、Helmholtz の自由エネルギー関数 $\rho\psi$ は次の形に表現できる[82-85, 90, 91]。

$$\rho\psi(\epsilon^e, D, r, \beta) = \rho\psi^e(\epsilon^e, D) + \rho\psi^p(r) + \rho\psi^d(\beta) \quad (4.4)$$

ここで、 $\rho\psi^e(\epsilon^e, D)$ は損傷テンソル D の弾性挙動に対する影響を考慮した材料の弾性-損傷ひずみエネルギーであり、また $\rho\psi^p(r)$ および $\rho\psi^d(\beta)$ はそれぞれ等方硬化および損傷発達によってもたらされる自由エネルギーを表す。

次に、弾性-損傷ひずみエネルギー $\rho\psi^e(\epsilon^e, D)$ について考える。材料が非損傷状態において等方的であるとすれば、この関数は、2つの対称テンソル ϵ^e および D によるテンソル値スカラー等方関数で表現できる。2つの対称テンソル ϵ^e および D によるテンソル値

スカラー等方関数の最も一般的な表現は、非線形代数学における表現定理により、 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ と \boldsymbol{D} の 10 個の基本不変量の関数として与えられる[65, 67]。この弾塑性-損傷材料における弾性挙動は初期の非損傷状態では等方線形的であるとする、 $\rho\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{D})$ はひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ に関しては 2 次同次式となる。さらに $\rho\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{D})$ は、損傷テンソル \boldsymbol{D} の発達によって減少するが、これは損傷発達による剛性低下に起因するが、本章では損傷はそれほど大きくない場合を考え、この減少は \boldsymbol{D} に対して線形的であるとする[30, 32, 34]。

このとき、圧縮応力による微視的き裂閉口効果、およびき裂の開・閉口の際に応力とひずみの不連続が生じないための条件[98, 99]を考慮し、弾性-損傷ひずみエネルギー $\rho\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{D})$ を次式のように表現する。

$$\begin{aligned} \rho\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{D}) = & \frac{1}{2}\lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 + \mu\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e\boldsymbol{\varepsilon}^e) \\ & + \eta_1\text{tr}\boldsymbol{D}(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 + \eta_2\text{tr}\boldsymbol{D}\text{tr}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e) + \eta_3\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^e\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e\boldsymbol{D}) + \eta_4\text{tr}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e\boldsymbol{D}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで、 λ および μ は Lamé の定数を表し、また $\eta_1 \sim \eta_4$ は材料定数である。また、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ は応力方向による微視的き裂閉口効果を記述するために導入した、3 章の式(3.6)と同様な修正弾性ひずみテンソルである[105,106]。

一方 $\rho\psi^p(r)$ については、一般的な金属材料の単軸引張りによる等方硬化を適切に表現する形とし、また $\rho\psi^d(\beta)$ については、内部状態変数 β とその共役力 B の線形関係を考え、それぞれ次のように表す。

$$\rho\psi^p(r) = R_\infty \left[r + \frac{1}{b} \exp(-br) \right] \quad (4.6)$$

$$\rho\psi^d(\beta) = \frac{1}{2} K_d \beta^2 \quad (4.7)$$

ここで R_∞ , b および K_d は材料定数である。

4. 3 散逸ポテンシャルの定式化

塑性構成式および内部状態変数の発展式を導くためには、散逸ポテンシャル関数を適切に表現する必要がある。塑性変形における主な散逸は応力の作用による転位運動によるが、損傷による散逸は微視的空げきの発生・成長による内部エネルギーの解放が支配的である。したがって、本章ではこの両者の散逸機構の違いを考慮し、この関数を塑性

に関する塑性散逸ポテンシャル F^p と損傷に関する損傷散逸ポテンシャル F^d との和の形として

$$F(\boldsymbol{\sigma}, Y, R, B; \mathbf{D}, r, \beta) = F^p(\boldsymbol{\sigma}, R; \mathbf{D}) + F^d(Y, B) \quad (4.8)$$

のように書けるとする。しかし、一般に損傷による空げきの発展は材料中で応力を支える有効面積の減少と空げき周辺への応力集中によって応力の効果を拡大し、これによって材料の剛性低下を引き起こす。このため、損傷の発達には塑性変形に対しては降伏面の縮小をもたらす。このことを考慮するため、式(4.8)の F^p は損傷テンソル \mathbf{D} をパラメータとして含む。

また本章では、時間非依存な塑性挙動を考えるから、塑性散逸ポテンシャル F^p は、降伏面 $F^p(\boldsymbol{\sigma}, R; \mathbf{D}) = 0$ と一致する。ここでは、比較的単純な負荷履歴を対象としており、Mises の降伏条件を損傷材料に拡張し、次のような等方硬化降伏面を仮定する。

$$F^p(\boldsymbol{\sigma}, R; \mathbf{D}) = \sigma_{eq} - (\sigma_Y + R) = 0 \quad (4.9a)$$

$$\sigma_{eq} = \left[\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{M}(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\sigma}' \right]^{1/2} \quad (4.9b)$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}'$ は $\boldsymbol{\sigma}$ の偏差成分、 σ_Y は単軸状態における降伏応力である。さらに $\mathbf{M}(\mathbf{D})$ は、損傷テンソル \mathbf{D} を引数とする 4 階対称テンソルであり、損傷の発生・成長の、塑性降伏面に対する影響を表現する。この影響は、損傷がそれほど大きくないときには損傷テンソル \mathbf{D} の線形関数で表現できると考え、 $\mathbf{M}(\mathbf{D})$ を

$$[\mathbf{M}(\mathbf{D})]_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{1}{2} \alpha^p (\delta_{ik} D_{jl} + D_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} D_{jk} + D_{il} \delta_{jk}) \quad (4.10)$$

と表す。ここで α^p は、材料定数である。この降伏面は、Mises の降伏条件を損傷材料に拡張した形となっている。

一方、損傷変数 \mathbf{D} の発展は損傷散逸ポテンシャル $F^d(Y, B)$ によって規定される。岩石やコンクリートに対する実験によれば、応力あるいはひずみ空間内に、その内部では損傷が発達しない有限な領域があることが明らかにされている[96, 97]。したがって、本章では損傷の発展に関しても塑性の場合と同様に、損傷共役力空間内に損傷ポテンシャル面 $F^d = 0$ が存在し、損傷発展はこの損傷ポテンシャル面により規定されると考える。また、この面の形状に対する実験結果はこれまで報告されていないから、本章では、最も簡単

な凸曲面として、共役力の2次同次式

$$F^d(\mathbf{Y}, \mathbf{B}; \mathbf{D}) = Y_{eq} - (B_0 + B) = 0 \quad (4.11a)$$

$$Y_{eq} = \left[\frac{1}{2} \mathbf{Y} : \mathbf{L}(\mathbf{D}) : \mathbf{Y} \right]^{1/2} \quad (4.11b)$$

を仮定する．ここで $\mathbf{L}(\mathbf{D})$ は、損傷テンソル \mathbf{D} をパラメーターとする4階のテンソルであり、損傷の発達による損傷面の形状の変化を表現する．また、 B_0 は初期損傷ポテンシャル面の大きさを表す材料定数である．ここでは、損傷ポテンシャル面 $F^d = 0$ は、損傷共役力 \mathbf{Y} の各成分に対する対称関数であると考え

$$L_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.12)$$

を用いる．

4. 4 構成式の導出

4. 4. 1 弾性構成式と熱力学的共役力

損傷材料の弾性構成式は、式(4.5)より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\rho\psi^e)}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^e} &= (\lambda + 2\eta_1 \text{tr}\mathbf{D})(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}^e)\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}^e + 2\eta_2(\text{tr}\mathbf{D})\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^e : \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^e}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^e} \\ &+ \eta_3[\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e\mathbf{D})\mathbf{I} + (\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}^e)\mathbf{D}] + \eta_4(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^e\mathbf{D} + \mathbf{D}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^e) : \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^e}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^e} \end{aligned} \quad (4.13)$$

のように与えられる．また、内部状態変数 \mathbf{D} 、 r および β に対する熱力学的共役力は、式(4.5)~(4.7)からそれぞれ次式のように導かれる．

$$\mathbf{Y} \equiv -\frac{\partial(\rho\psi^e)}{\partial\mathbf{D}} = -\left[\eta_1(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}^e)^2 + \eta_2 \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^e \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^e) \right] \mathbf{I} - \eta_3(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}^e)\boldsymbol{\epsilon}^e - \eta_4 \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^e \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (4.14)$$

$$R \equiv \frac{\partial(\rho\psi^p)}{\partial r} = R_\infty [1 - \exp(-br)] \quad (4.15)$$

$$B \equiv \frac{\partial(\rho\psi^d)}{\partial\beta} = K_d\beta \quad (4.16)$$

4.4.2 塑性構成式

式(4.9)の降伏面より，塑性ひずみ ϵ^p ならびに等方硬化変数 r の発展式は次のようになる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}^p \frac{\partial F^p}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{3}{2} \dot{\lambda}^p \frac{M_{ijkl} \sigma'_{kl}}{\sigma_{eq}} \quad (4.17)$$

$$\dot{r} = \dot{\lambda}^p \frac{\partial F^p}{\partial(-R)} = \dot{\lambda}^p \quad (4.18)$$

ここで， $\dot{\lambda}^p$ は塑性変形に関する未定乗数であり，降伏面の適合条件 $\dot{F}^p = 0$ によって次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^p &= \left(\frac{\partial F^p}{\partial \sigma'_{ij}} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{\partial F^p}{\partial D_{ij}} \dot{D}_{ij} \right) \bigg/ \left(\frac{dR}{dr} \right) \\ &= \left[\frac{1}{\sigma_{eq}} \left(\frac{3}{2} M_{ijkl} \dot{\sigma}'_{ij} \sigma'_{kl} + \frac{3}{4} \frac{\partial M_{klmn}}{\partial D_{ij}} \dot{D}_{ij} \sigma'_{kl} \sigma'_{mn} \right) \right] \bigg/ \left(\frac{dR}{dr} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

また，式(4.9)の負荷・除荷条件は，Kuhn-Tucker の関係

$$\dot{\lambda}^p \geq 0, \quad F^p \leq 0, \quad \dot{\lambda}^p F^p = 0 \quad (4.20)$$

のいずれの式も同時に満足される条件として与えられる[92, 93, 103].

4.4.3 損傷発展式

損傷テンソルの発展式 \dot{D} および $\dot{\beta}$ は，式(4.11)の損傷ポテンシャル面 $F^d = 0$ に対する法線則から

$$\dot{D} = \dot{\lambda}^d \frac{\partial F^d}{\partial Y} = \dot{\lambda}^d \frac{L:Y}{2Y_{eq}} \quad (4.21)$$

$$\dot{\beta} = \dot{\lambda}^d \frac{\partial F^d}{\partial(-B)} = \dot{\lambda}^d \quad (4.22)$$

のように与えられる。ここで、 $\dot{\Lambda}^d$ は損傷発展に関する未定乗数であり、式(4.11)に対する適合条件 $\dot{F}^d = 0$ により次式のように求められる。

$$\dot{\Lambda}^d = \left(\frac{\partial F^d}{\partial Y_{ij}} \dot{Y}_{ij} \right) / \left(\frac{dB}{d\beta} \right) = \left(\frac{L_{ijkl} Y_{ij} \dot{Y}_{kl}}{2Y_{eq}} \right) / \left(\frac{dB}{d\beta} \right) \quad (4.23)$$

また、損傷発展に対する負荷・除荷条件は塑性の場合と同様にKuhn-Tuckerの関係式

$$\dot{\Lambda}^d \geq 0, \quad F^d \leq 0, \quad \dot{\Lambda}^d F^d = 0 \quad (4.24)$$

のいずれの式も同時に満足される条件として与えられる[92, 93, 103].

4. 5 具体的な適用

4. 5. 1 単軸引張り過程に対する適用

以上で定式化した弾性構成式(4.13)、塑性構成式(4.17)および損傷発展式(4.21)を、球状黒鉛鑄鉄薄肉円管試験片の弾塑性損傷に適用するため、これを単軸引張りとなねじり負荷過程に対して具体化する。座標系には、局所的直角座標系 $O-x_1x_2x_3$ を選び、軸方向を座標軸 x_1 、それに直交する円周方向と半径方向をそれぞれ x_2 、 x_3 とする。

単軸引張りの場合、弾性ひずみの主軸は座標軸に一致するから、Voigtの表示法を用いると、弾性構成式(4.13)は次式のように書ける。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (4.25a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}(>0) \\ \sigma_{22}(=0) \\ \sigma_{33}(=0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^e(>0) \\ \varepsilon_{22}^e(<0) \\ \varepsilon_{33}^e(<0) \end{Bmatrix} \quad (4.25b)$$

$$E_{11} = \lambda + 2\mu + 2(\eta_1 + \eta_2)\text{tr}\mathbf{D} + 2(\eta_3 + \eta_4)D_{11} \quad (4.25c)$$

$$E_{ii} = \lambda + 2\mu + 2(\eta_1 + \eta_2\zeta^2)\text{tr}\mathbf{D} + 2(\eta_3 + \eta_4\zeta^2)D_{ii} \quad (i = 2, 3, \text{ no sum.}) \quad (4.25d)$$

$$E_{ij} = \lambda + 2\eta_1\text{tr}\mathbf{D} + \eta_3(D_{ii} + D_{jj}) \quad (i \neq j, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \text{ no sum.}) \quad (4.25e)$$

式(4.25c)～(4.25e)によれば，弾性挙動に対する損傷の影響は，Laméの定数に対する付加項として，材料の剛性変化をもたらしていることがわかる．

次に，損傷テンソル成分の発展式(4.21)は次式のように与えられる．

$$\dot{D}_{ii} = \dot{\Lambda}^d \frac{Y_{ii}}{2Y_{eq}} \quad (i=1,2,3, \text{ no sum.}) \quad (4.26)$$

この式から明らかなように，損傷の発展は損傷共役力によって規定されるが，単軸引張り過程に対する損傷共役力 Y は式(4.14)より

$$Y_{ii} = -\eta_1 (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 - \eta_2 \text{tr} (\varepsilon_{11}^{e^2} + \zeta^2 \varepsilon_{22}^{e^2} + \zeta^2 \varepsilon_{33}^{e^2}) - \eta_3 (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e) \varepsilon_{ii}^e - \eta_4 (\bar{\varepsilon}_{ii}^e)^2 \quad (i=1,2,3, \text{ no sum.}) \quad (4.27)$$

と与えられる．式(4.27)を見ると， $i=1,2,3$ の各場合において，右辺第1，第2項はいずれの式も同一であるのに対して，右辺第3，第4項は弾性ひずみテンソル成分 ε_{ii}^e に依存し， $i=1,2,3$ の場合にそれぞれ異なった値をとる．したがって，右辺第1，第2項は材料損傷の等方的な発展に寄与し，右辺第3，第4項は，異方的な損傷発展を表現することがわかる．

最後に，塑性ひずみ構成式(4.17)は

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p = \frac{\dot{\Lambda}^p}{\sigma_{eq}} (1 + 2\alpha^p D_{11}) \sigma_{11} \quad (4.28a)$$

$$\dot{\varepsilon}_{22}^p = -\frac{\dot{\Lambda}^p}{2\sigma_{eq}} (1 + 2\alpha^p D_{22}) \sigma_{11} \quad (4.28b)$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}^p = -\frac{\dot{\Lambda}^p}{2\sigma_{eq}} (1 + 2\alpha^p D_{33}) \sigma_{11} \quad (4.28c)$$

となる．ここで，式(4.19)から計算される $\dot{\Lambda}^p$ は降伏面に対する負荷・除荷条件(4.20)を満足する．式(4.28)より $\alpha^p > 0$ とすれば，塑性ひずみ増分は材料の損傷によって拡大する．また塑性体積ひずみ増分 $\dot{\varepsilon}_{kk}^p$ は，損傷が等方的な場合 ($D_{11} = D_{22} = D_{33}$) は 0 となるが，異方損傷の場合は $\dot{\varepsilon}_{kk}^p \neq 0$ となり，損傷発展による不可逆な体積変化を表現できる．

4.5.2 ねじり負荷過程に対する適用

つぎに、ねじり負荷過程に対しては、式(4.6)が弾性ひずみの主方向に対して与えられているため、主方向1を引張りとした純せん断状態に変換して定式化する。式(4.13)から、純せん断負荷過程に対する主軸方向の弾性構成式は次のようになる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (4.29a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33}(=0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^e (> 0) \\ \varepsilon_{22}^e (= -\varepsilon_{11}^e) \\ \varepsilon_{33}^e (\leq 0) \end{Bmatrix} \quad (4.29b)$$

$$E_{11} = \lambda + 2\mu + 2(\eta_1 + \eta_2)\text{tr}\mathbf{D} + 2(\eta_3 + \eta_4)D_{11} \quad (4.29c)$$

$$E_{ii} = \lambda + 2\mu + 2(\eta_1 + \eta_2\zeta^2)\text{tr}\mathbf{D} + 2(\eta_3 + \eta_4\zeta^2)D_{ii} \quad (i=2,3, \text{ no sum.}) \quad (4.29d)$$

$$E_{ij} = \lambda + 2\eta_1\text{tr}\mathbf{D} + \eta_3(D_{ii} + D_{jj}) \quad (i \neq j, i=1,2,3, j=1,2,3, \text{ no sum.}) \quad (4.29e)$$

ここで、式(4.29b)において $\varepsilon_{33}^e \leq 0$ である理由は次の通りである。すなわち、この材料が非損傷状態にある場合には、 $E_{13} = E_{23}$ より $\varepsilon_{33}^e = 0$ である。しかし、損傷状態においては、引張り方向の損傷が圧縮方向よりも大きい ($D_{11} \geq D_{22}$) ため、 $E_{13} > E_{23}$ となり、したがって $\varepsilon_{33}^e \leq 0$ である。

損傷発展式および損傷共役力は、単軸引張りの場合と同じく式(4.21)および(4.27)となる。

さらに、塑性ひずみ増分 $\dot{\varepsilon}_{ii}^p (i=1,2,3)$ は、式(4.17)から

$$\dot{\varepsilon}_{11}^p = \frac{\dot{\Lambda}^p}{2\sigma_{eq}} (1 + 2\alpha^p D_{11}) (2\sigma_{11} - \sigma_{22}) \quad (4.30a)$$

$$\dot{\varepsilon}_{22}^p = \frac{\dot{\Lambda}^p}{2\sigma_{eq}} (1 + 2\alpha^p D_{22}) (2\sigma_{22} - \sigma_{11}) \quad (4.30b)$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}^p = -\frac{\dot{\Lambda}^p}{2\sigma_{eq}} (1 + 2\alpha^p D_{33}) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (4.30c)$$

のように書ける。ここで、式(4.19)から計算される $\dot{\Lambda}^p$ は降伏面に対する負荷・除荷条件(4.20)を満足する。

4. 6 実験結果との比較

前章で定式化した弾塑性-損傷材料の構成式と損傷発展式の妥当性を調べるため、後述の5章における球状黒鉛鋳鉄の薄肉円管試験片に対する単軸引張り、およびねじり負荷試験の結果(4.23)と、計算結果とを比較・検討する。

4. 6. 1 単軸引張り試験

式(4.26)~(4.28)の材料定数は、図4.1、4.2および4.3の球状黒鉛鋳鉄の単軸単調引張り実験結果[109]を表現できるように次のように決定した。

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= -35000 \text{ MPa}, \quad \eta_2 = -20000 \text{ MPa}, \\
 \eta_3 &= -35000 \text{ MPa}, \quad \eta_4 = -50000 \text{ MPa}, \\
 \alpha^p &= 1.0, \quad K^d = 5.0, \quad B_0 = 0.144, \quad \zeta = 0.1, \\
 \sigma_Y &= 293 \text{ MPa}, \quad R_\infty = 255 \text{ MPa}, \quad b = 18
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

この材料定数は、図4.1の応力-ひずみ曲線および図4.2の縦弾性係数の変化を表現できるように決定し、さらに図4.3のPoisson比の変化を表現できるように修正したものである。なお、以下の実験結果における応力、ひずみは真応力と対数ひずみである。

図4.1の実線と破線は、球状黒鉛鋳鉄に対する単軸引張り試験の応力-ひずみ曲線と式(4.26)~(4.28)による計算結果を示す。この実験の破断ひずみは約0.15であったが、試験片のくびれは見られなかった。これは、材料の塑性変形に伴って、フェライト基地と球

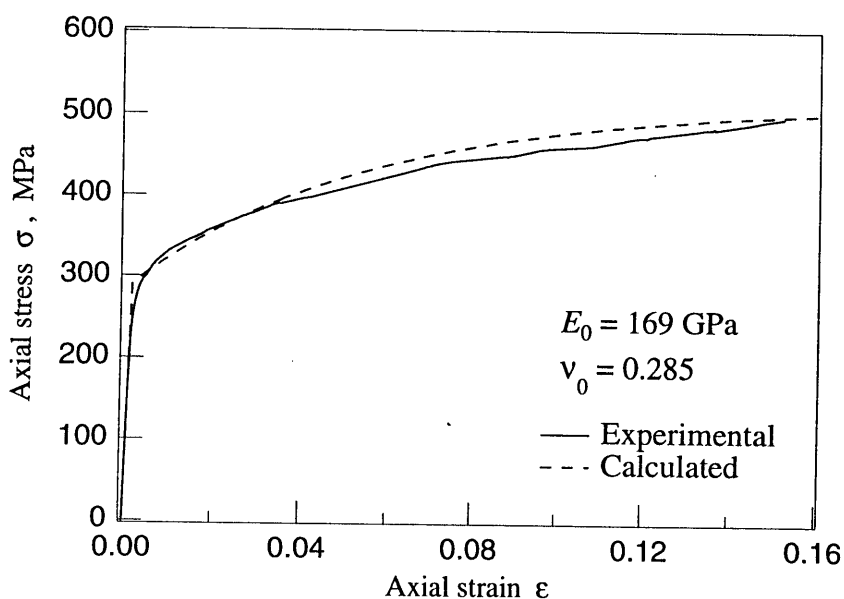


図4.1 単軸引張りにおける応力-ひずみ曲線に対する実験結果および計算結果

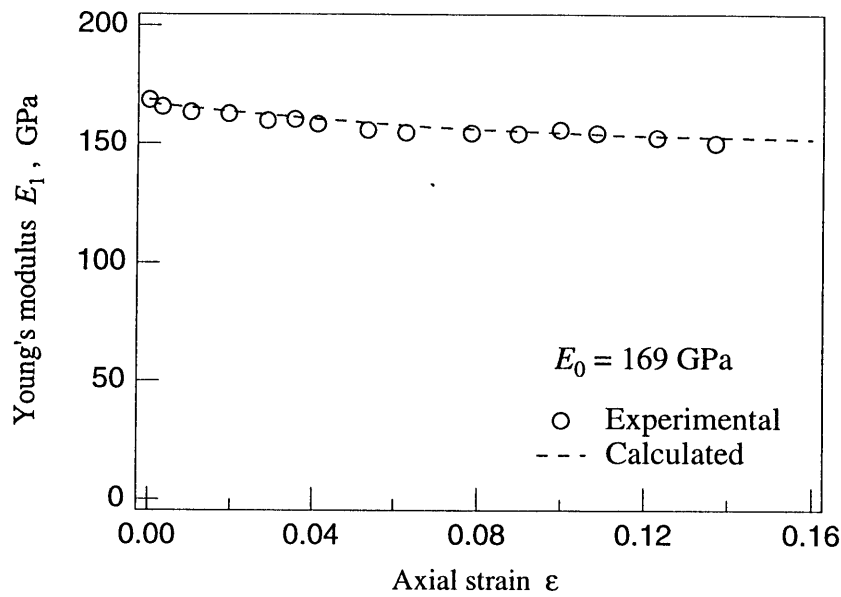


図 4.2 単軸引張りにおける縦弾性係数の変化に対する実験結果および計算結果

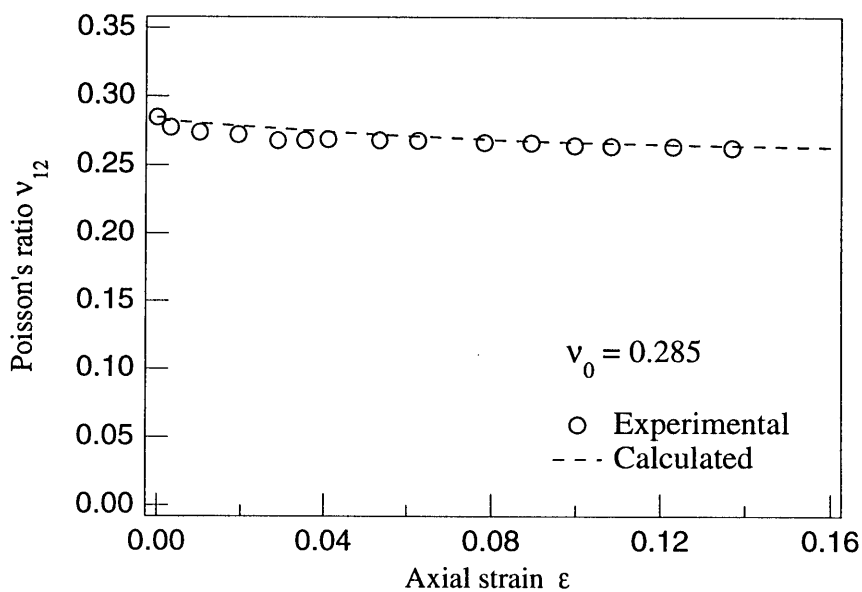


図 4.3 単軸引張りにおける Poisson 比の変化に対する実験結果および計算結果

状黒鉛粒子との剥離が生じ、このため損傷の発達によっても、大きな断面積変化が生じなかったためである。また、計算結果は実験結果を非常によい精度で表現していることがわかる。

次に図 4.2 および 4.3 は、損傷の発達に伴う荷重軸方向の縦弾性係数 E_1 と、荷重軸方向引張りによる横方向変形の Poisson 比 ν_{12} に対する実験ならびに計算結果を示す。図 4.2 のように、内部損傷の発達のために縦弾性係数 E_1 は漸減し、破断時の値は非損傷時の約 90%となっている。図の破線は、式(4.26)~(4.28)による計算結果を示す。図 4.3 の Poisson

比 ν_{12} の変化は、弾性係数の変化と同様に損傷の発達とともに減少するが、これは荷重方向だけでなく、それに垂直な方向にも材料劣化を受けているためである。等方損傷理論では、損傷が進行に伴う Poisson 比の変化は表現できない[104]。これに対して、異方損傷を考慮した本構成式は、実験による Poisson 比の減少を精度よく表現しうることがわかる。

図 4.4 は、このように定めた式(4.30)の材料定数を用いて計算した損傷変数の発達を示す。この図のように、荷重軸方向の損傷 D_{11} のほうが D_{22} 、 D_{33} よりも大きく、損傷の発達は顕著な異方性を示す。また、この計算によれば $D_{22} = D_{33}$ であり、球状黒鉛鋳鉄は損傷発達によって横等方性となることを示している。

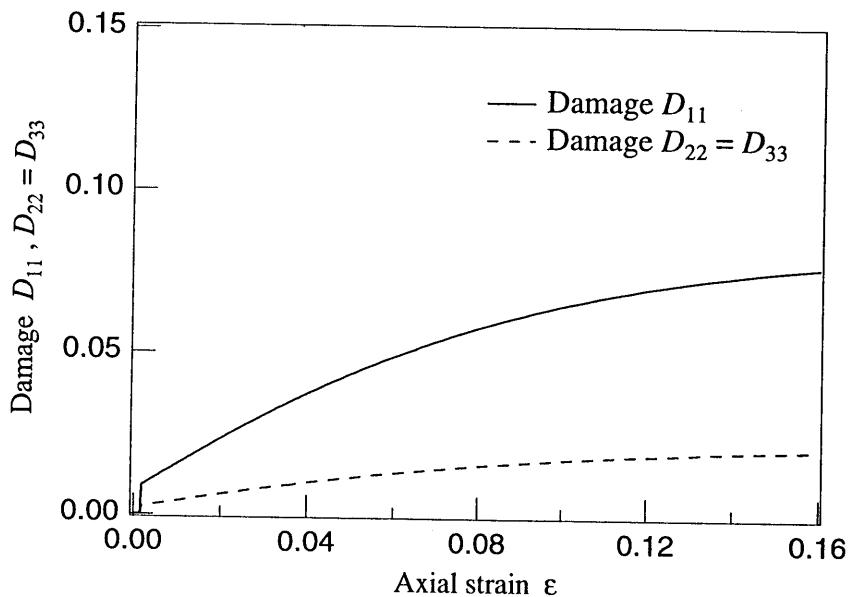


図 4.4 単軸引張りにおける損傷の発達に対する実験結果および計算結果

4.6.2 ねじり試験

続いて、ねじり負荷過程に対する弾性-損傷構成式(4.29)、塑性ひずみ発展式(4.30)および損傷発展式(4.22)を球状黒鉛鋳鉄のねじり試験に対して適用する。以下の計算には、すべて単軸引張り試験によって定めた式(4.31)の材料定数を用いた。

図 4.5 は、せん断応力-せん断ひずみ曲線の測定結果と、式(4.29)、(4.30)および(4.22)による計算結果の比較を示す。この図から、せん断降伏応力は約 170MPa であるが、これは引張りにおける降伏応力の約 $1/\sqrt{3}$ であり、この材料の初期降伏は、式(4.9)の Mises の降伏条件によって記述できることがわかる。計算結果は、ねじり負荷に対する弾性変形と、降伏後の損傷を伴う塑性変形をもよく表現している。

つぎに図 4.6 は、式(4.29)、(4.30)および(4.22)から計算した損傷変数の発達を示す。本

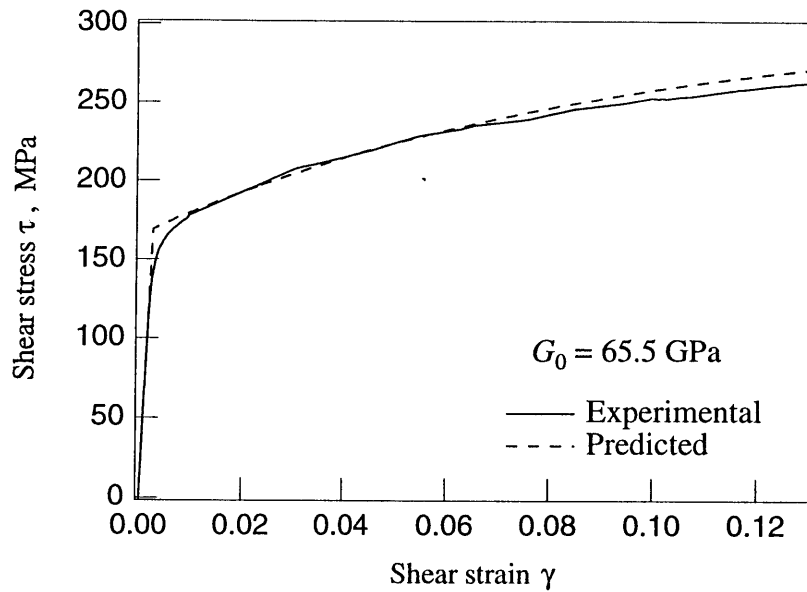


図 4.5 ねじり試験におけるせん断応力-せん断ひずみ曲線に対する実験結果および計算結果

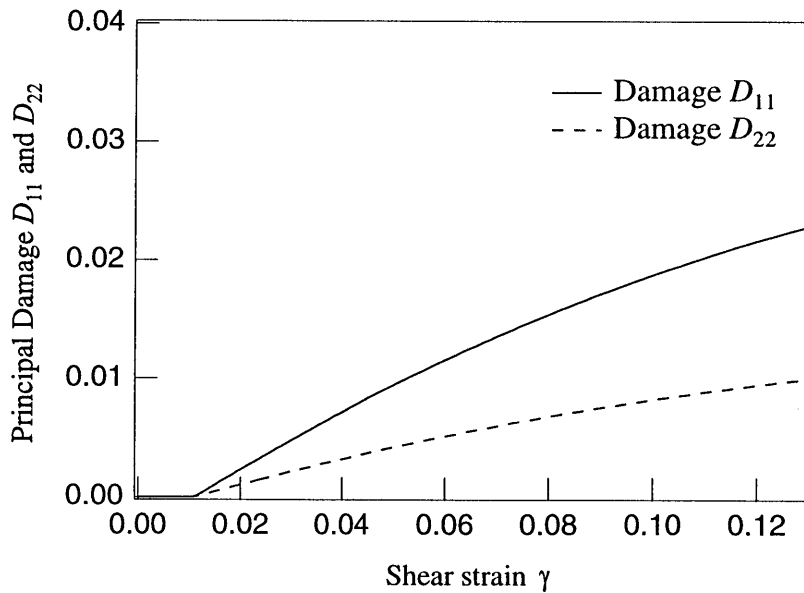


図 4.6 ねじり試験における損傷発展

計算の場合、損傷は主に主方向 1 に作用する主引張り応力によって発生する微視的空げきが原因であるが、計算結果を見るとこの方向の損傷テンソル成分 D_{11} は D_{22} よりも大きくなっており、実際の材料の挙動を適切に表現している。

最後に図 4.7 は、横弾性係数 G_{12} の測定結果と計算結果との比較を示す。この図を見ると、損傷の影響は横弾性係数にも現われ、破断時の横弾性係数は、初期横弾性係数 G_0 の約 93% になっている。本構成式は、このような、ねじりにおける弾性特性の劣化を適切

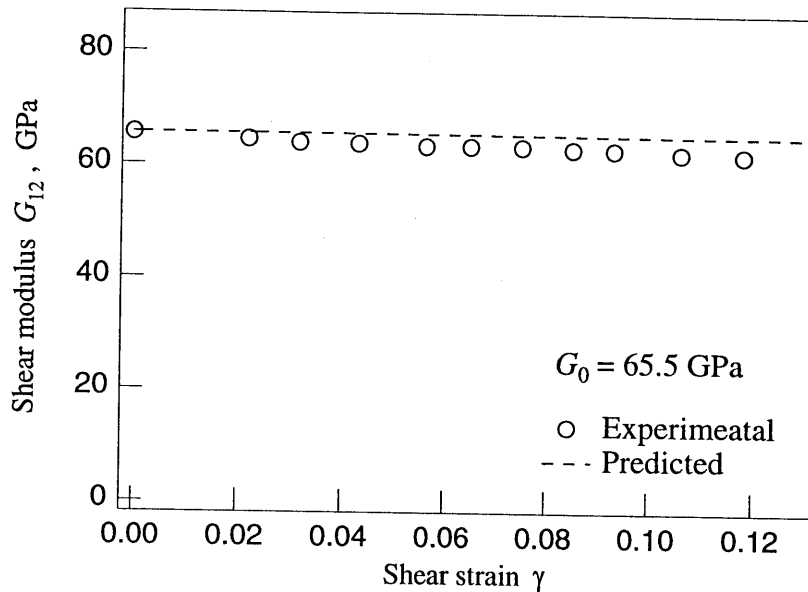


図4.7 ねじり試験における横弾性係数の変化
に対する実験結果および計算結果

に予測することができる。

4. 7 本章のまとめ

本章では、不可逆熱力学理論により弾塑性-損傷材料に対する構成式ならびに損傷発展式の定式化を行い、その力学的特性と妥当性を検討した。はじめに、塑性変形に対する等方硬化スカラー変数 r 、異方損傷テンソル D 、ならびに後続負荷に対する損傷発展を規定するスカラー変数 β によって材料の内部状態を記述するとともに、塑性変形ならびに損傷の発達を支配する内部構造変化とその微視的機構を詳細に検討することによって、Helmholtzの自由エネルギーと散逸ポテンシャルを定式化し、これらから損傷材料の弾塑性構成式と損傷発展式を統一的に導いた。この際、材料内部の微視的き裂の発達とその開・閉口に対する応力方向依存性を考慮するため、修正弾性ひずみテンソル $\bar{\epsilon}^e$ を導入した。

続いて、定式化した構成式を球状黒鉛鑄鉄薄肉円管試験片に対する単軸引張りとなじり試験結果に適用し、その妥当性を検討した。この結果、塑性変形に伴って発展する損傷の影響を考慮することにより、弾塑性-損傷材料の応力-ひずみ関係だけではなく、引張りにおける縦弾性係数 E_1 とPoisson比 ν_{12} 、ならびにせん断における横弾性係数 G_{12} の変化を適切に表現できることがわかった。また、修正弾性ひずみテンソル $\bar{\epsilon}^e$ の導入により、ねじり試験の主応力方向による損傷発生の違いを適切に表現することができた。

しかし、本章で用いた損傷ポテンシャル面 F^d は熱力学的制約は満足するものの、実験的検討は行っておらず、したがって、より精密な構成式および損傷発展式の定式化のためには、個々の材料に対する損傷ポテンシャル面に対する実験が必要となる。

次章では、弾塑性-損傷材料である球状黒鉛鋳鉄を用いた損傷面に関する実験的検討について議論する。

第5章 弾塑性-損傷材料のモデル化と多軸組合せ 負荷における損傷面の実験的検討 [109, 110]

不可逆熱力学理論に基づく損傷力学では、損傷発展式は熱力学第二法則を満足するような損傷ポテンシャル面に対する法線則によって与えられ、またこの損傷ポテンシャル面は、新しい損傷の発展を規定する共役力空間の限界面、すなわち損傷面をも与える。しかし、不可逆熱力学理論は熱力学的に許容な構成式および損傷発展式を定式化するための制約条件を与えるにすぎないから、具体的条件下での構成式の基本的特性の同定は実験に待たなければならない。

損傷ポテンシャル面の存在は、塑性変形における塑性ポテンシャル面と同様に、損傷発展式の統一的定式化のための有力な枠組みを与える。しかし、その存在、形状、大きさ、発展の様子等を実験的に明らかにするためには、材料に生じている損傷の測定が不可欠である。これまで、その方法として主に単軸引張り試験における縦弾性係数や Poisson 比の変化[36, 37, 62, 80]、または微視的き裂発生の際の弾性波の放出、すなわちアコースティック・エミッション (AE) 等が用いられ、複合材料[96]や脆性材料[97]に対していくつかの研究が行なわれている。しかし、これらの研究はいずれも損傷変数の発展ではなく、新しい損傷発達の可能性を規定する損傷面に関するものである。

本章では、弾塑性-損傷材料に対する不可逆熱力学の適用の可能性を検討するため、球状黒鉛鋳鉄薄肉円管試験片を用い、多軸応力空間における損傷面の基本的特性について検討する。すなわち、はじめにこの材料の弾塑性-損傷特性を検討するため、単軸およびねじり試験により各変形過程に伴う AE 信号発生と、その状態における材料の縦弾性係数、Poisson 比、ならびに横弾性係数を計測する。続いて、引張り-ねじり組合せ応力空間におけるいくつかの応力経路に対し、初期ならびに後続損傷面を AE によって検出し、損傷面の存在、形状および発展の様子を調べる。さらに、損傷面における負荷、除荷および中立負荷に対する挙動についても明らかにし、弾塑性-損傷材料に対する不可逆熱力学損傷理論の適用の可能性を検討する。

5. 1 試験片材料と試験方法

5.1.1 試験片材料と形状

弾塑性-損傷挙動の実験的観察のためには、以下のような試験片材料が適している。すなわち

- 1) 初期異方性がない。
- 2) 比較的小さなひずみ範囲において内部損傷が発生し始める。
- 3) その後の弾塑性変形に伴って損傷が顕著に発達する。
- 4) 破断に至るまでに試験片形状があまり大きく変化せず、また急激な破断を示さない。

本章では、このような材料として基地組織がフェライトとパーライトとからなる JIS 規格 FCD400 の球状黒鉛鑄鉄を用いた。この材料には焼きなまし熱処理を行ない、鑄造の際に生じた微小介在物周辺の残留ひずみを除去してある。この試験片の金属顕微鏡による組織写真を図 5.1 に、また、化学成分を表 5.1 に示す。図 5.1 において、黒い円形の部分は黒鉛、その周りの白く見える部分はフェライト基地である。この球状黒鉛鑄鉄の微視的な破壊様式は、主に黒鉛-フェライト基地境界のはく離による微視的き裂の発生・成長と、これらの微視的き裂の発達と塑性変形によって引起こされるフェライト部分の延性破壊からなる[111]。したがって、この材料の変形過程ではフェライトの延性的挙動（塑性変形）、界面のはく離による損傷、ならびにその両者の相互作用を同時に考慮する必要がある。

本実験では、組合せ応力試験を行うため、図 5.2 のような薄肉円管試験片を用いた。この試験片の標線間における肉厚は 1mm であるが、図 5.1 の球状黒鉛粒子の平均直径は約 30 μ m であり、試験片の標線間内の肉厚方向にも十分連続体とみなせることがわかる。

5.1.2 試験システムとひずみ測定

試験機には、油圧サーボ式軸力-ねじり複合負荷疲労試験機（島津製作所サーボパルサ

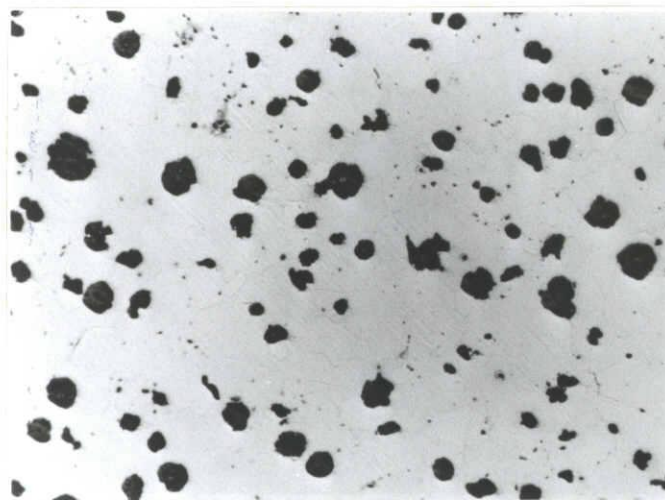


図 5.1 球状黒鉛鑄鉄内部組織顕微鏡観察写真（ $\times 150$ ）

表 5.1 試験片の化学組成 (重量%)

C	Si	P	S	Mn	Mg	Cu	Cr	Fe
3.69	2.15	0.016	0.011	0.34	0.028	0.019	0.027	Balance

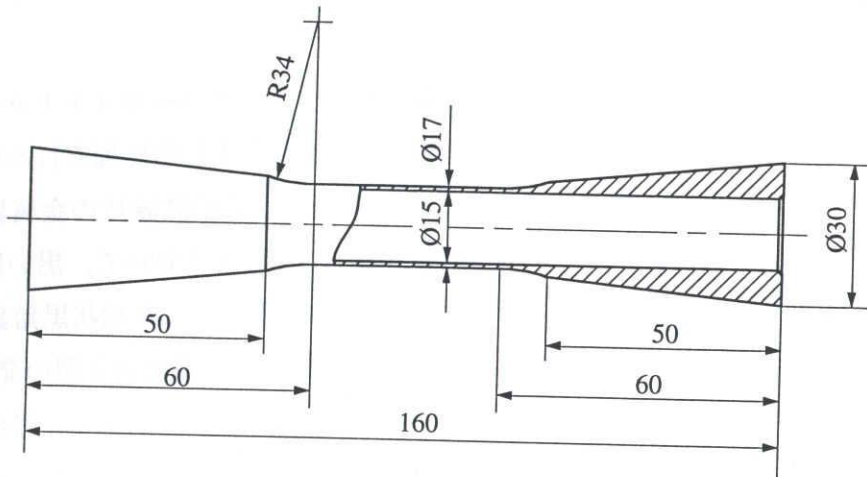


図 5.2 薄肉円管試験片

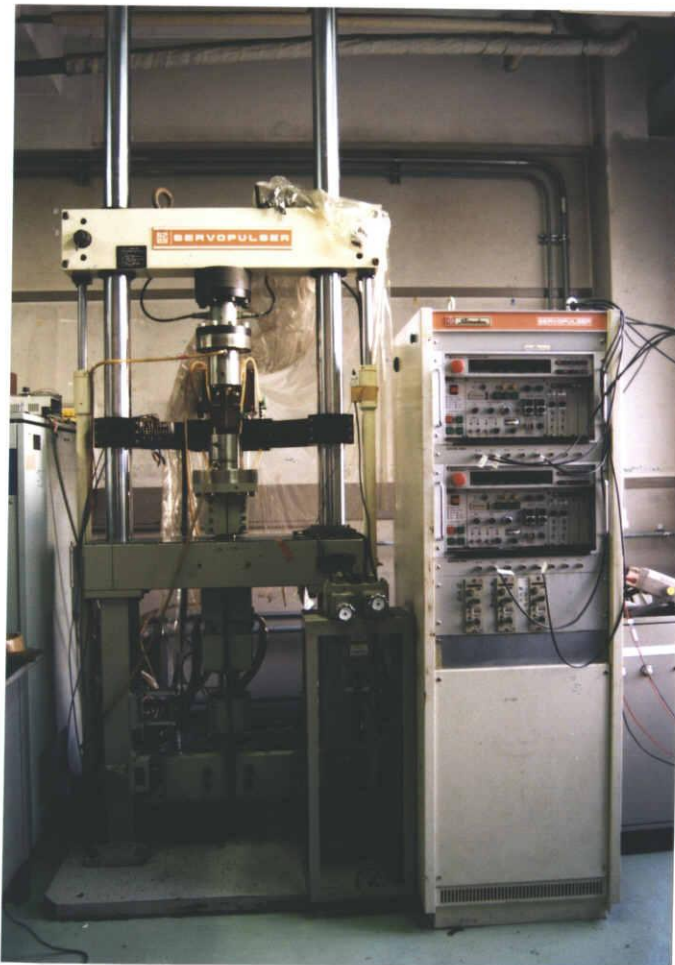


図 5.3 軸力-ねじり複合試験機 (島津サーボパルサー)

EFH-EB-10/TQ1-20L 型)を用いた。実験は、任意の軸およびねじり負荷を同時に独立に負荷することができる試験機付属のファンクションジェネレータによる荷重制御で行ない、ロードセルからの荷重出力をマイクロコンピュータに取込み整理した。図 5.3 に試験機の全景を示す。

また、本実験におけるひずみ計測には、ゲージ長 5mm のロゼット型ひずみゲージ（共和電業製 KFG-5-120-D17-11）を試験片に貼付し、出力を動ひずみ計を介してマイクロコンピュータに取込んだ。またひずみゲージは、変形が大きくなるとゲージ特性の非線形性が著しくなるので、約3%を基準として新しいゲージに貼り替えた。

5.1.3 アコースティック・エミッションによる損傷計測

材料損傷においては、微視的空げきの発生・成長に伴い、蓄積した弾性エネルギーの大部分は空げきの新たな表面を形成するために費やされ、残りのエネルギーは光、熱、音あるいは弾性波などに変換されて解放される[112-114]。アコースティック・エミッション（AE）は、このような材料内部の微視的空げきの発生成長によって発生する弾性波動をとらえるものである。したがって AE 信号を計測することにより、初期損傷の発生から最終的な破壊に至る過程を即時的・連続的に観測することができる[112-114]。

本実験では、AE 計測システム（日鉄テクノス社 N.A.I.S.-5000A）を用い、損傷の検出を試みる。



図 5.4 AE 計測システム（日鉄テクノス N.A.I.S.-5000A）

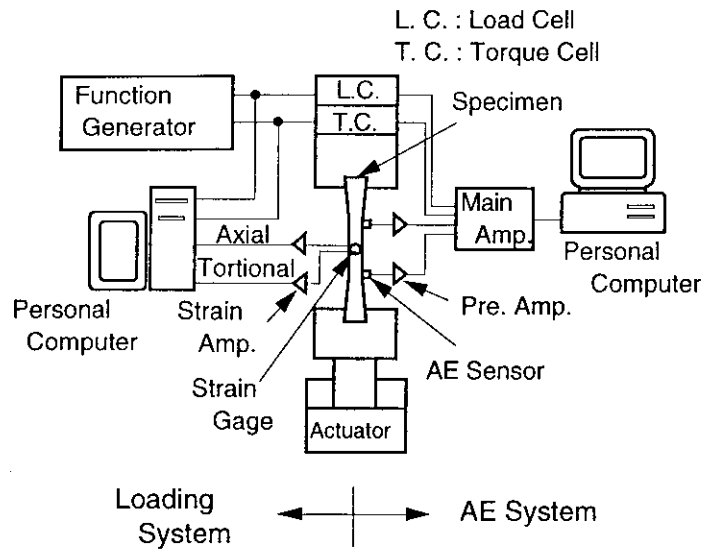


図 5.5 試験システムのブロックダイアグラム

AE 信号の計測には、試験片の標線間とつかみ部との境界 2 カ所を平らに削って 2 つのセンサーを取付け、これによって検出した信号をプリアンプで 40db まで増幅した。さらに、この信号を 100Hz から 10kHz のバンドパスフィルターに通し、再びメインアンプで総合利得 40db まで増幅した。図 5.4 には AE 計測システムを示し、また図 5.5 は本試験システムのブロックダイアグラムを示す。

5.1.4 試験片材料の初期等方性の検討

本実験では、初期等方な弾塑性-損傷材料の異方損傷による変形挙動を検討するから、この材料の初期等方性を明らかにする必要がある。そこで、図 5.2 の薄肉円筒試験片のつかみ部から、軸および円周方向に長手方向を持つ試験片（寸法 $2 \times 2 \times 4$ mm）A および

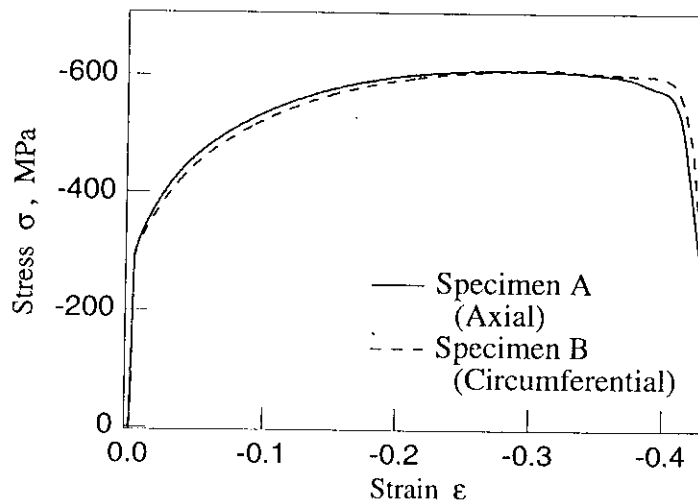


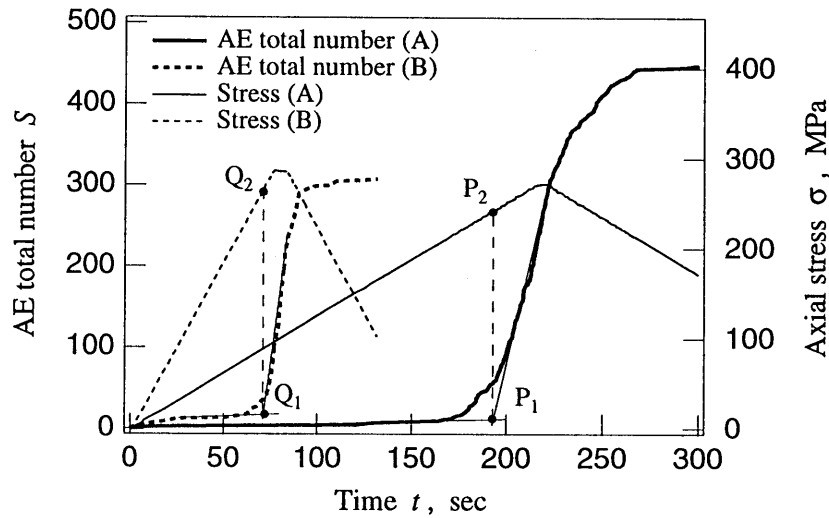
図 5.6 単軸圧縮による応力-ひずみ曲線

Bをそれぞれ2本ずつ切り出し、それらを用いて単軸圧縮試験を行なった。応力速度は、いずれの試験でも $\dot{\sigma} = -2 \text{ MPa/sec}$ を選んだ。

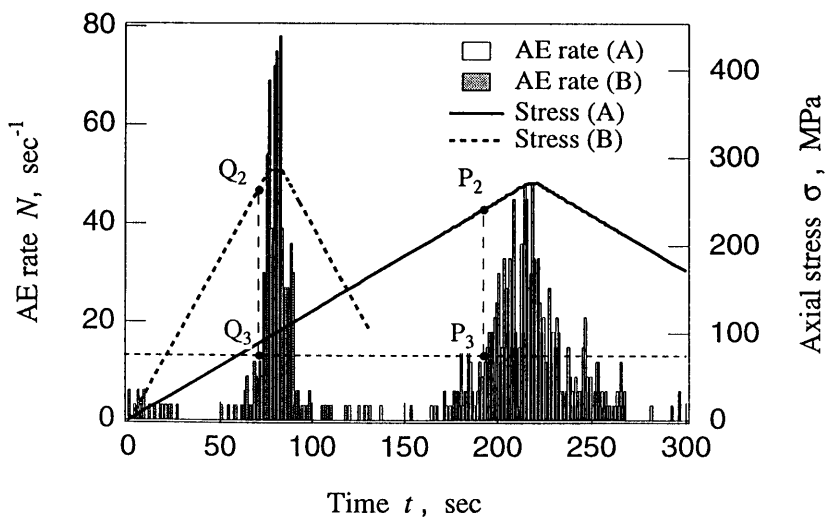
図 5.6 は、試験片AおよびBに対する圧縮試験の応力-ひずみ曲線を示す。両者の縦弾性係数、降伏応力、最大圧縮応力ならびに破断ひずみには、いずれも顕著な差異はなく、この材料はほぼ初期等方であることが確かめられた。

5.1.5 AEと損傷発生しきい値の決定

AEによって損傷発生を検出するためには、応力の変化とAE発生の変化との関連を明らかにする必要がある。この目的のために、図 5.2 の球状黒鉛鑄鉄の薄肉円管試験片を用



(a) AE発生総数

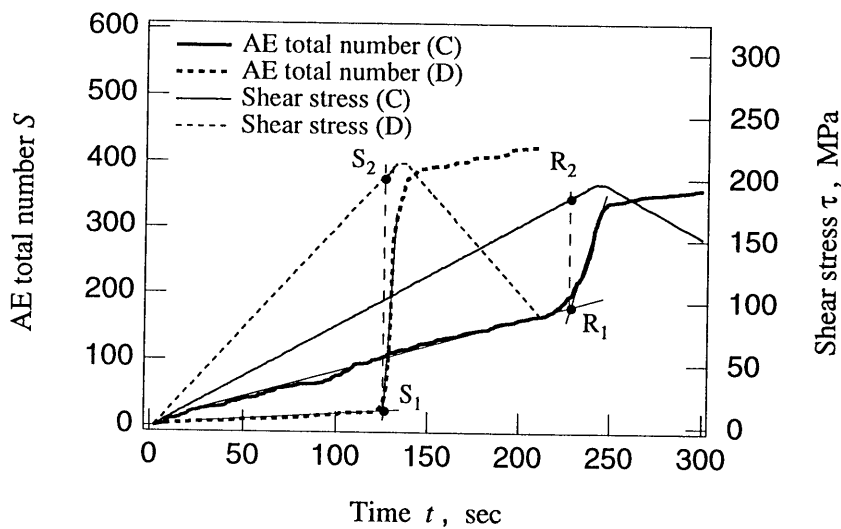


(b) AE発生率

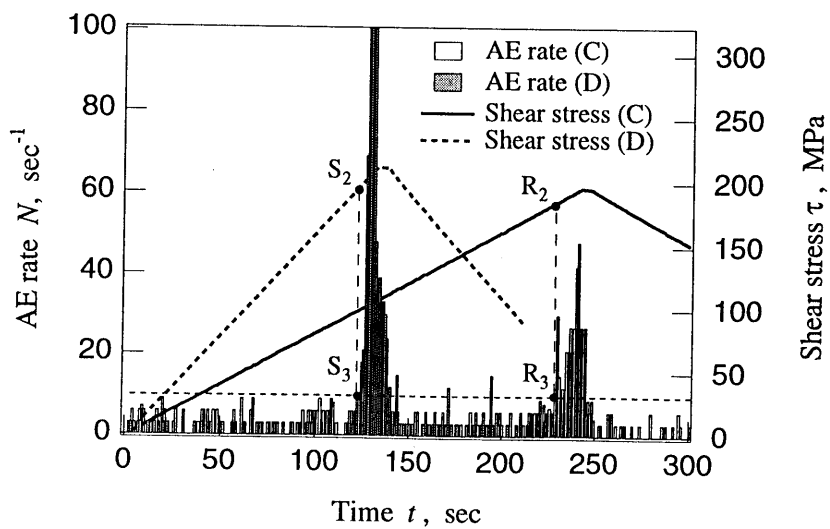
図 5.7 単軸引張りでのAEによる損傷発生試験結果

いて単軸引張りと単純ねじり試験を行い、そのときの AE を検出した。ここでは、応力速度の AE 発生に対する影響も調べるため、単軸引張りおよび単純ねじり試験に対して、それぞれ 2 種類の応力速度による試験 A (1.0MPa / sec), B (2.0 MPa / sec), および C (1.0MPa / sec), D (2.0 MPa / sec) の 4 種類の実験を行った。

図 5.7(a)は、2 種類の応力速度による単軸引張り試験の A, B に対し、応力 σ と AE 発生総数 S の時間変化を示す。それぞれの AE 発生総数 S を見ると、いずれも傾きが急激に増加するところが存在し、この付近から損傷が発生し始めることがわかる。ここでは、損傷発生時間を決定するため、図 5.7(a)のように損傷発生時間付近の AE 発生総数 S の傾きの変化を 2 直線で近似し、その交点 P_1, Q_1 に対応する応力値 P_2, Q_2 を損傷発生時の応



(a) AE 発生総数



(b) AE 発生率

図 5.8 ねじり試験での AE による損傷発生試験結果

力と定義する。

AE 発生総数 S の傾きの変化を定量的に見るために、AE 発生率 N と応力値の時間変化を示したものを図 5.7(b)に示す。それぞれの応力速度 AB の損傷発生時の応力 P_2 および Q_2 に対応する AE 発生率 N の値 P_3 、 Q_3 を見ると、いずれも約 10sec^{-1} となっている。

図 5.8(a)および(b)は、2種類の応力速度による単純ねじり試験 C、D に対するせん断応力 τ と AE 発生総数 S 、およびせん断応力と AE 発生率 N の時間変化を示す。この図から、ねじり試験のいずれの応力速度においても AE 発生総数 S の傾きが急激に増加していることがわかる。ねじり試験においても、単軸引張りの場合と同様にそれぞれの応力速度 C、D の AE 発生総数 S を 2 直線で近似し、それぞれの交点 R_1 、 S_1 に対応する応力値 R_2 、 S_2 を損傷発生時の応力と定義する。 R_2 および S_2 に対応する AE 発生率 N は、図 5.8(b)の R_3 および S_3 であるが、そのときの AE 発生率 N は、いずれも約 10sec^{-1} である。

以上の結果から、本実験においては応力速度に拘わらず AE 発生率 N の値 10sec^{-1} を損傷発生のしきい値とし、そのときの応力値を損傷発生時の応力と定義する。なお、以降の各実験の応力速度は、後出の式(5.4)で定義される Mises の相当応力 σ_{EQ} に対し、いずれの場合にも $\dot{\sigma}_{EQ} \approx 2\text{MPa/sec}$ となるように選んだ。

5. 2 単軸引張りとねじり試験

5.2.1 試験方法

弾塑性-損傷材料における損傷の力学的効果は、材料の弾性特性の変化として観察することができる。本実験では、球状黒鉛鋳鉄における損傷の効果を調べるため、単軸引張りによる軸方向の縦弾性係数 E_1 と Poisson 比 ν_{12} の変化、ならびにねじり試験による横弾性係数 G_{12} の変化を測定した。ここで、記号 E_1 、 ν_{12} および G_{12} の添字は、材料損傷によって弾性特性に異方性が生じる可能性を考慮して付けてある。また、これと同時に材料損傷の進行と AE の発生を関連づけるため、これら単軸およびねじり試験における AE を計測した。

単軸引張り試験における縦弾性係数 E_1 と Poisson 比 ν_{12} の測定に際しては、軸ひずみの約 1.5%ごとに軸荷重を基本荷重 50kgf まで除荷した。そしてこの荷重を基準として、400kgf から 800kgf まで 100kgf ずつ増加させて 5 回の弾性試験を行ない、各試験の 5 つの除荷側の真応力-軸方向対数ひずみ、ならびに軸方向対数ひずみ-円周方向対数ひずみ関係から求めた値の平均とした。真応力と対数ひずみを用いたのは、弾塑性変形における試験片形状変化が縦弾性係数 E_1 と Poisson 比 ν_{12} に与える影響を除去するためである。ただし、縦弾性係数決定の際の弾性ひずみは非常に小さく、対数ひずみと公称ひずみとの差

はほとんどない。

ねじり試験の各変形段階における横弾性係数 G_{12} の計測方法も、単軸引張りの場合と同様にして行なった。すなわち、ひずみゲージによるせん断ひずみ（工学ひずみ）の約 1.5% ごとに、ねじり荷重を基本荷重 0.4kgf-m まで除荷した。この状態から、2.0kgf-m から 2.8kgf-m まで 0.2kgf ずつ増加させて 5 回の弾性試験を行ない、そのときの各試験の除荷側のせん断応力-せん断ひずみ関係から求めた横弾性係数の平均とした。

5.2.2 単軸引張り試験の結果と検討

図 5.9 は、単軸引張り試験の真応力-対数ひずみ曲線を示す。この材料の破断ひずみは約 0.15 であったが、試験片のくびれは見られなかった。これは、材料の塑性変形に伴っ

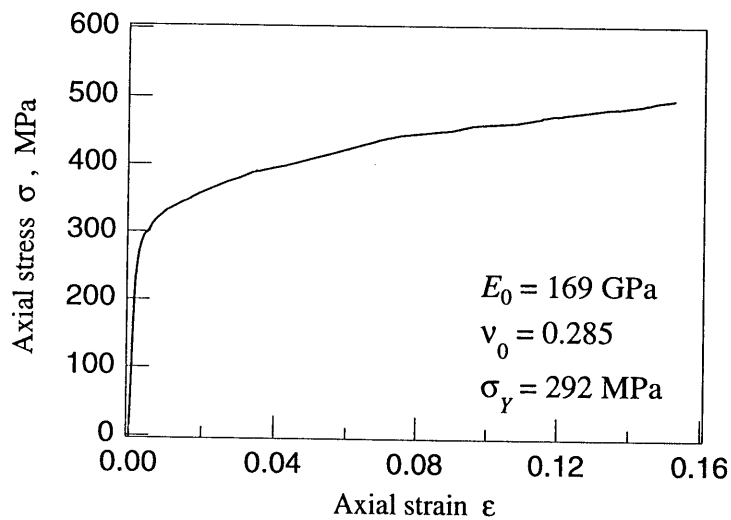


図 5.9 単軸引張り試験における応力-ひずみ曲線

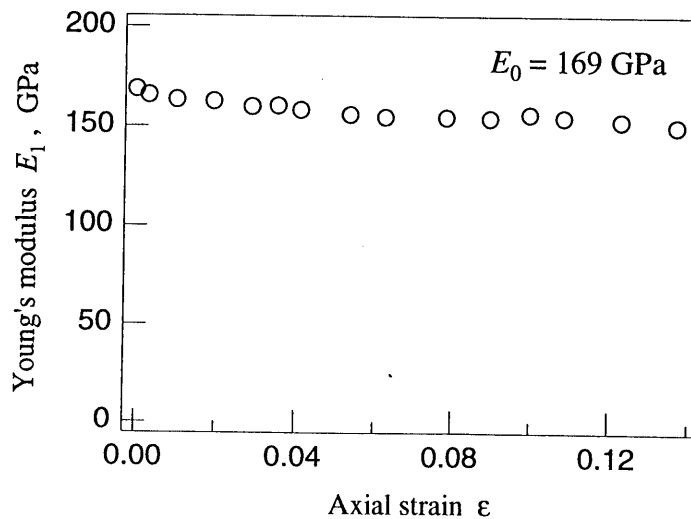


図 5.10 単軸引張り試験における縦弾性係数の変化

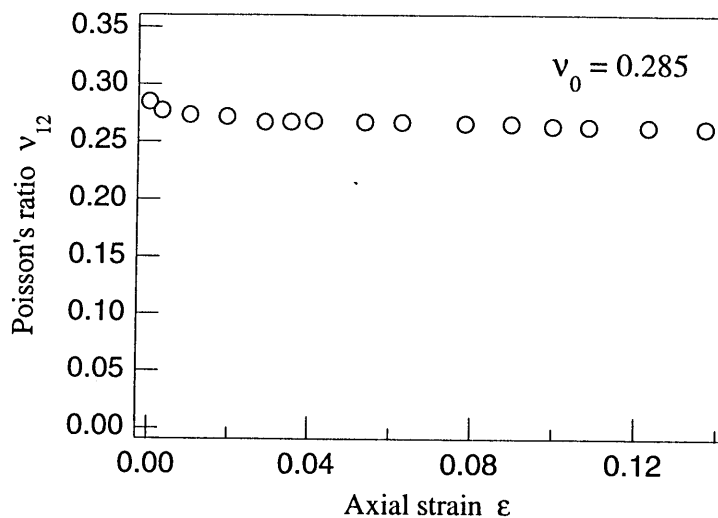


図 5.11 単軸引張り試験における Poisson 比の変化

て主にフェライト基地-球状黒鉛粒子境界にはく離が生じ、このため、横断面においては大きな断面積変化が生じなかったためである。また降伏点（ここでは 0.2%耐力）は、 $\sigma_y = 292\text{MPa}$ であった。

図 5.10 および図 5.11 は、上述の単軸引張り試験における縦弾性係数 E_1 と Poisson 比 ν_{12} の変化を示す。本実験の測定結果は、各試験とも一本の試験片によって求められたものであるが、そのばらつきは非常に小さく、いずれの測定点においても 1%以下であった。

図 5.10 では、非損傷状態における初期縦弾性係数 E_0 は 169GPa であったが、破断直前では 151GPa となり、約 11%の減少が見られた。この減少は主にフェライト基地-球状黒鉛粒子境界のはく離によって起こされた材料損傷による剛性低下と考えられる。

続いて図 5.11 を見ると、初期 Poisson 比 ν_0 は 0.285 であったが破断直前では 0.263 となり、約 8%減少した。このことは、この材料の損傷による弾性係数変化は等方的でなく、異方的な損傷が生じたことを意味する。すなわち、このような材料の弾塑性-損傷挙動を損傷力学によって表現するためには、適切な異方損傷変数を導入する必要がある[104]。

図 5.12 は、単軸引張り試験における応力 σ と AE 発生率 N の時間変化を示す。負荷の初期段階で、AE 発生率 N が若干増大しているが、これは、試験片とつかみ具との間の摩擦により生じたものであって、損傷によるものではない。その後、AE 発生率は 5.1.5 項で定義した損傷発生のしきい値である AE 発生率 10sec^{-1} 以下の値で推移し、120sec のあたりからこのしきい値を超えて急激に増大している。この急激な AE 発生率の増加は、材料内部に微視的き裂が多数発生あるいは成長したことを意味している。このとき単軸引張りにおける損傷発生の臨界応力は $\sigma_D = 240\text{MPa}$ であったが、この値は、図 5.9 の初期降伏応力 $\sigma_y = 292\text{MPa}$ の約 80%であった。

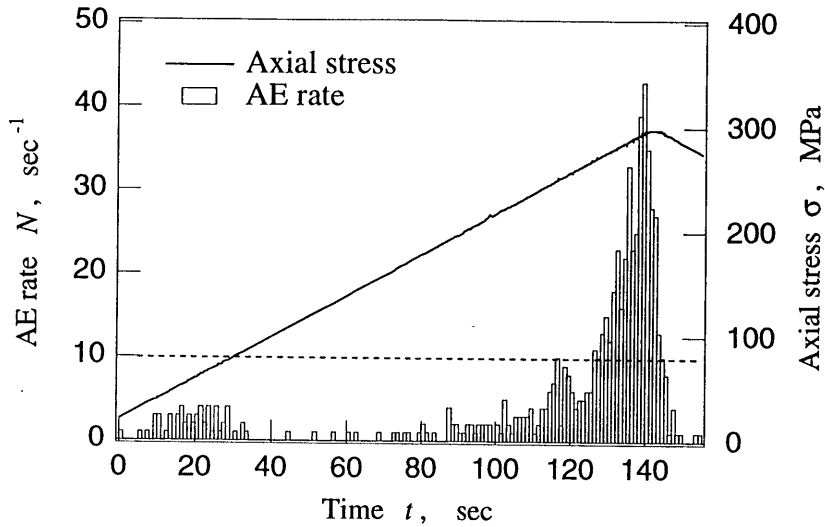


図 5.12 単軸引張り試験における AE 発生状況

5.2.3 ねじり試験の結果と検討

はじめに図 5.13 は、せん断応力 τ -せん断ひずみ γ (工学ひずみ) 関係の実験結果を示す。図のように、せん断降伏応力 τ_y (ここでは $0.2\sqrt{3}$ %耐力) は 169MPa であるが、これは引張り降伏応力の約 $1/\sqrt{3}$ であり、この材料の初期降伏は Mises の降伏条件によってほぼ記述できることがわかる。

次に、ねじり試験に伴う横弾性係数 G_{12} の変化を図 5.14 に示す。単軸引張り試験と同様に、各変形段階での弾性試験から求めた G_{12} の値のばらつきは非常に小さく、いずれの場合も 1%以下であった。この図のように、初期横弾性係数 G_0 は 65.5GPa であったが、これは初期非損傷状態で等方材料として、図 5.10 および 5.11 に示す縦弾性係数 E_1 と Poisson

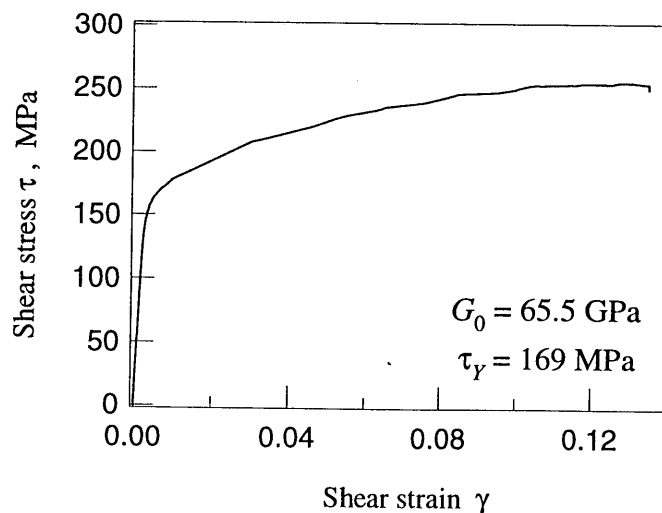


図 5.13 ねじり試験におけるせん断応力-せん断ひずみ曲線

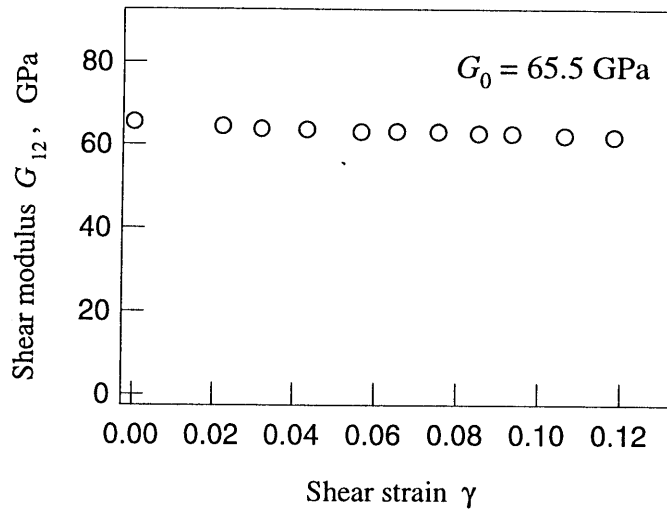


図 5.14 ねじり試験における横弾性係数の変化

比 ν_0 から得られる横弾性係数

$$\frac{E_0}{2(1+\nu_0)} = 65.4 \text{ GPa} \quad (5.1)$$

に非常に近い値であり、したがって本試験片は、初期非損傷状態ではほぼ等方的であることがわかる。しかし、破断直前では G_{12} は 61.9 GPa となり、約 6% の減少を示した。これは、主に引張り主応力によってフェライト基地-球状黒鉛粒子界面のはく離が生じ、剛性が低下したためと考えられる [111]。

図 5.15 は、ねじり試験で測定された AE 発生率 N の時間変化を示す。5.1.5 項で定義した損傷発生のしきい値 10 sec^{-1} を用いると、損傷発生応力は $\tau_D = 167 \text{ MPa}$ であり、図 5.14

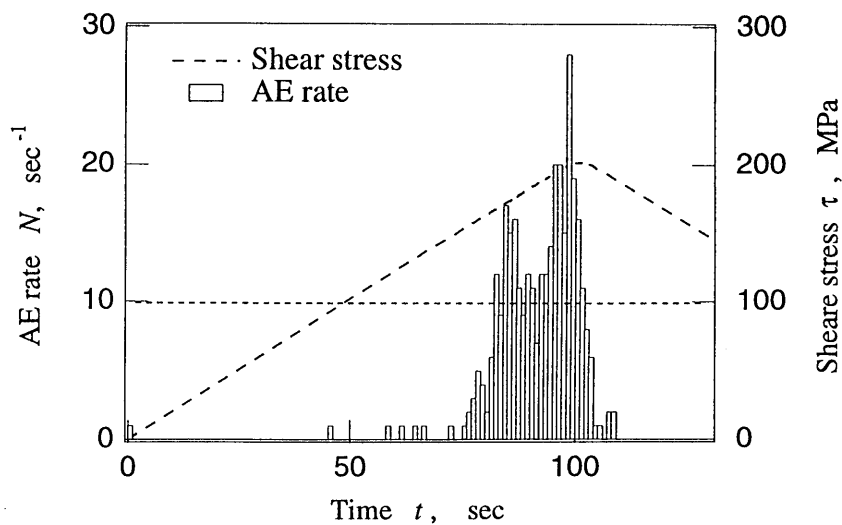


図 5.15 ねじり試験における AE 発生状況

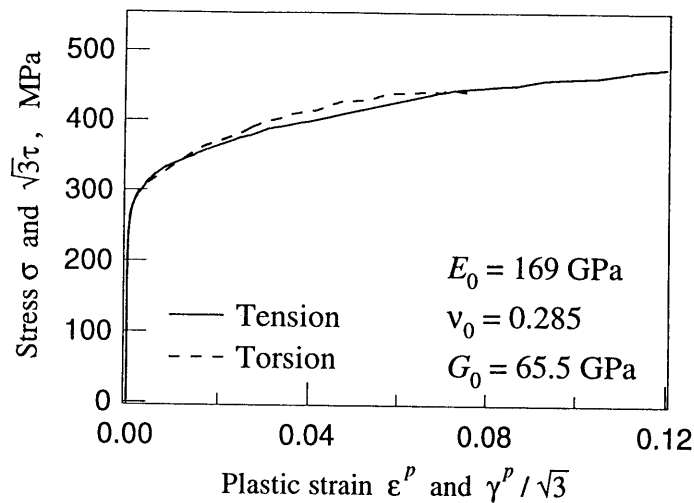


図 5.16 相当応力-相当塑性ひずみ曲線

の初期降伏応力 τ_y とほとんど等しい。

最後に図 5.16 は、単軸引張りおよびねじり試験の相当応力-相当塑性ひずみ関係を示す。ただし、ここでは相当応力と相当塑性ひずみは Mises の基準によって計算した。

5. 3 引張り-ねじり組合せ応力空間における損傷面の実験的検討

弾塑性-損傷材料に対する不可逆熱力学構成式理論によれば、損傷変数の発展はその共役力空間で定義される散逸ポテンシャル関数によって規定される[13, 14]。多くの場合、この共役力空間において損傷の発展が生じないような領域が存在すると仮定し、この領域を散逸ポテンシャルと関連した閉曲面で表現し、これを損傷面と呼ぶことが多い[32-35, 39, 81-94, 98, 99, 105-108]。

損傷力学では、損傷変数としてどのような変数を選び、またその共役力として何を用いるかについては大きな任意性がある。本章では、弾塑性-損傷過程における AE 信号の発生を損傷の発達とするとともに、応力空間における損傷発生の限界面を損傷面と考え、引張り-ねじり組合せ負荷における損傷面の存在とその基本的特性について検討する。

5.3.1 初期損傷面の検討方法

まずはじめに、引張り-ねじり組合せ負荷による初期損傷面の形状を検討するため、図 5.2 のような 4 本の球状黒鉛鋳鉄の薄肉円管試験片 A~D を用いて、図 5.17 に示す 4 種類の負荷経路

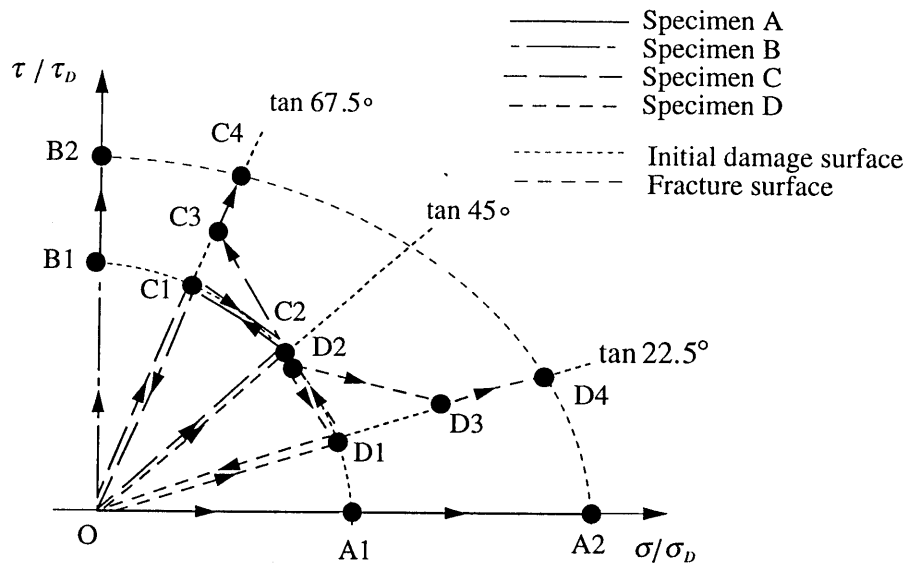


図 5.17 初期損傷面検出のための応力経路

- 1) O-A1-A2
- 2) O-B1-B2
- 3) O-C1-O-C2-C1-C2-C3-C4
- 4) O-D1-O-D2-D1-D2-D3-D4

の実験を行ない、それぞれの弾塑性過程における AE 信号を測定した。これらの経路のうち、1) と 2) は先に行なった単軸引張りならびにねじり試験である。これに対し、経路 3) および 4) の O-C1, O-D1 および O-C2 (または O-D2) は、横軸および縦軸を単軸引張りおよびねじりにおける初期損傷発生応力 A1 および B1 で正規化した引張り-ねじり応力空間における角度がそれぞれ 67.5° 、 22.5° および 45° の比例負荷経路である。図中の応力点 A1, B1, C1, D1 は、前章の単軸引張りならびにねじり試験の場合と同じく、5.1.5 項で定義したしきい値 (AE 発生率 10sec^{-1}) によって決定した損傷発生応力点である。また、C2 および D2 は、同じ経路上の点であり、試験片 C および D により、それぞれ C1 および D1 を決定した後にこれらの応力経路上で決定した初期損傷発生時の応力状態であり、これら 2 点の比較により、実験結果の再現性が検討できる。

さらに、初期損傷面に対して、中立負荷による損傷発生状況を検討するため、面上の応力経路 C2-C1 および D2-D1 のほか、面の外側に向かう応力経路 C2-C3, D2-D3 で AE を計測した。最後に、損傷面と破壊面を比較するため、各応力経路での破壊時の応力点 A2, B2, C4 および D4 を決定した。

5.3.2 後続損傷面の検討方法

次に、得られた初期損傷面を超えて応力を作用させたときの後続損傷面の発展を調べ

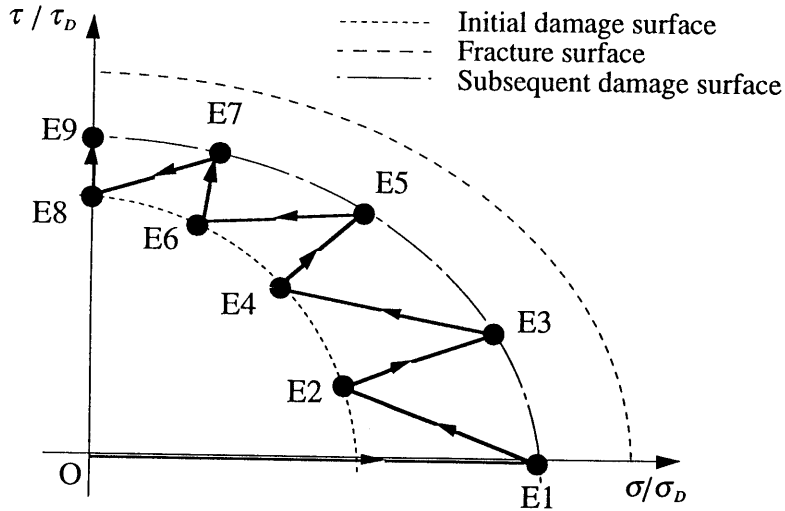


図 5.18 後続損傷面検出のための応力経路

るため、試験片 E を用いて、図 5.18 の応力経路 E1~E9 にしたがって負荷し、そのときの AE 信号の変化を観察した。すなわち、まず点 E1 ($\sigma_{E1} = 370 \text{ MPa}$) まで初期損傷面を超えた負荷を与え、そのときの損傷面形状を測定した。この図において E2, E4, E6 および E8 はそれぞれ図 5.17 における D1, D2 (または C2), C1 および B1 に対応している。応力状態 E3, E5, E7 および E9 は、5. 1. 5 項で定義した損傷発生のしきい値 (AE 発生率 10 sec^{-1}) を用いて決定した。

5. 3. 3 損傷面に対する実験結果と考察

初めに、図 5.19(a)~(d)は図 5.17 の引張り-ねじり比例負荷応力経路 O-C1, O-D1, O-C2 または O-D2 に対する AE の発生状況を示す。図 5.19 を見ると、単軸引張りおよびねじり負荷による単純応力状態での AE 発生図 5.12, 5.15 と同様に、いずれの経路においても応

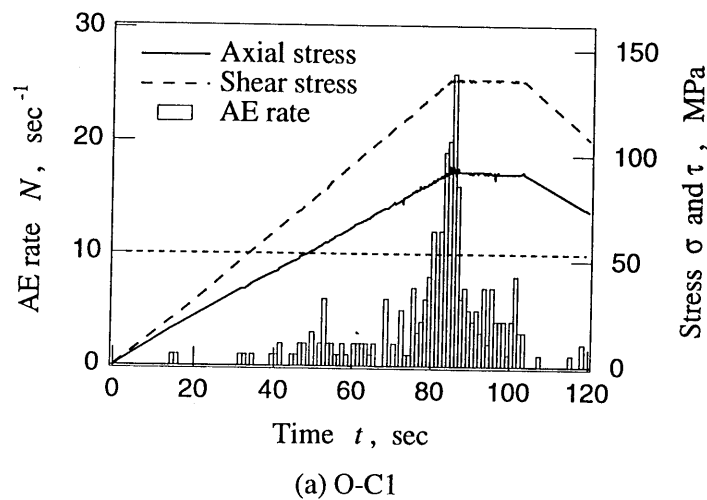
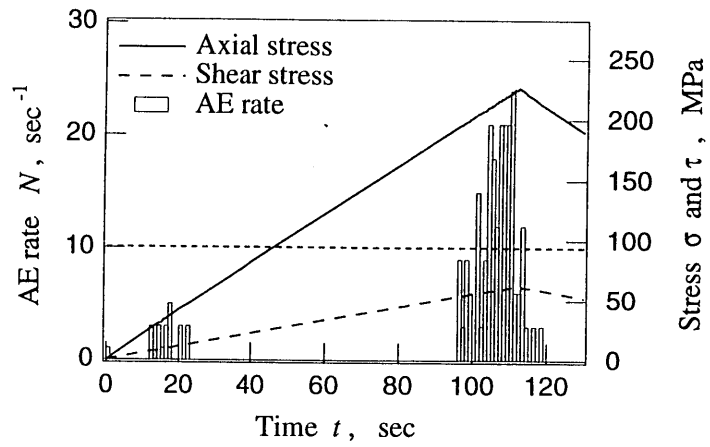
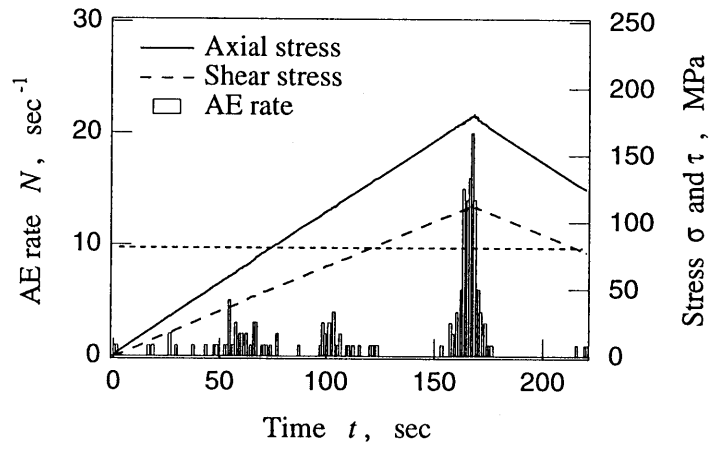


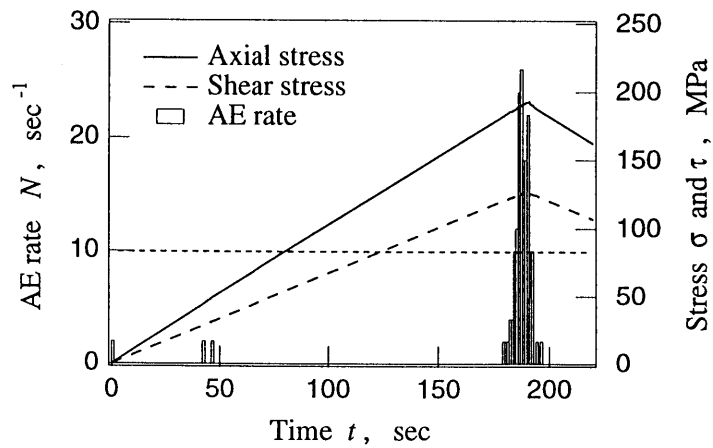
図 5.19 比例負荷経路に対する AE 発生状況



(b) O-D1



(c) O-C2



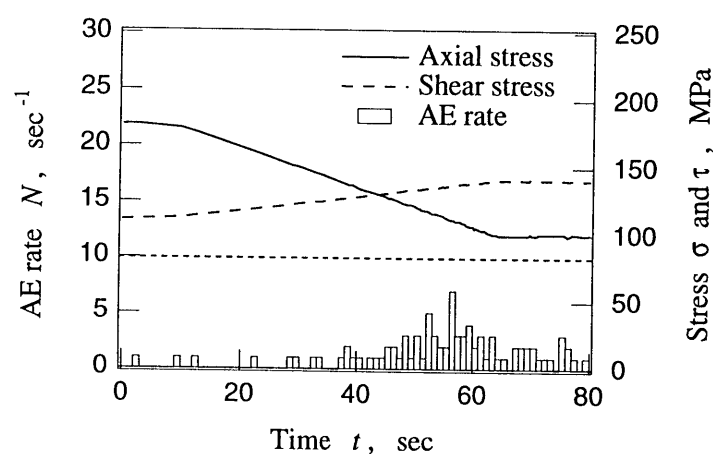
(d) O-D2

図 5.19 比例負荷経路に対する AE 発生状況

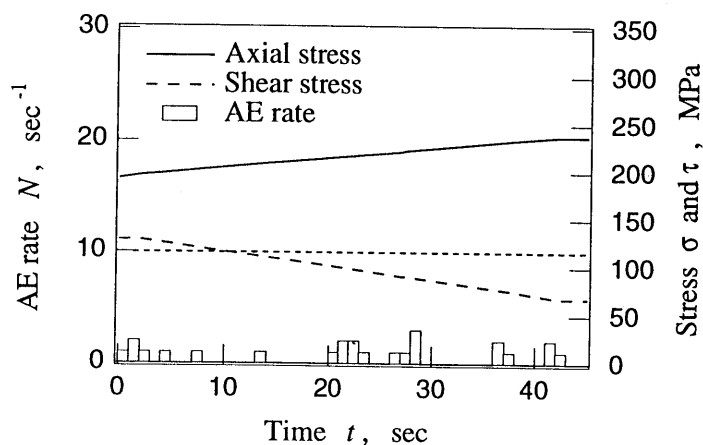
力が小さいときは AE 信号はほとんど発生していないが、応力がある大きさに達したときに急激な増加を示す。これらの結果から、図 5.12, 5.15 の場合と同じく損傷発生のしきい値である AE 発生率 10sec^{-1} を用いて後出図 5.21 の初期損傷面の応力点を決定した。また、図 5.19(a)-(d) からわかるように、いずれの経路においても除荷過程では AE 発生率 N はしきい値を超えることはなく、したがって、球状黒鉛鋳鉄にはある応力状態以下では損傷が発生しない限界面、すなわち初期損傷面が存在することが確かめられた。

次に、図 5.20(a) および (b) は、以上で定めた損傷面上を移動する応力経路 C2-C1 および D2-D1 に対する AE の発生状況を示す。これらの図を見ると、比例負荷経路に対する図 5.19(a)~(d) に比べて、AE 発生率は非常に小さく、いずれの負荷経路においでもしきい値 10sec^{-1} 以下であり、これらの経路では、負荷により損傷は進行しないことがわかる。

続いて、図 5.20(c) および (d) は試験片 C および D による損傷面上からの後続非比例負荷経路 C2-C3 および D2-D3 による AE 発生率 N の時間変化を示す。いずれの図においても、

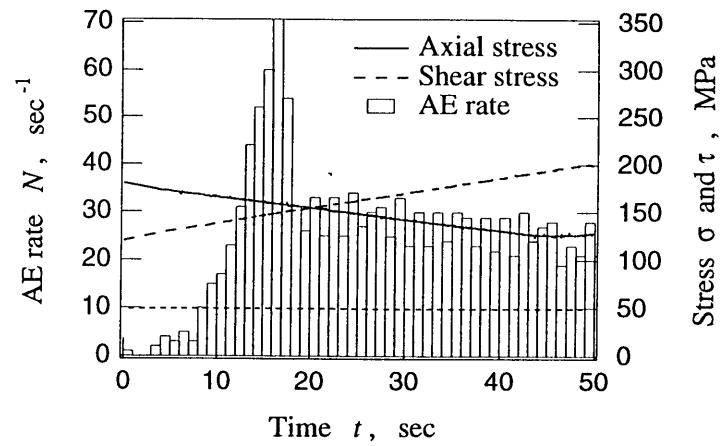


(a) C2-C1

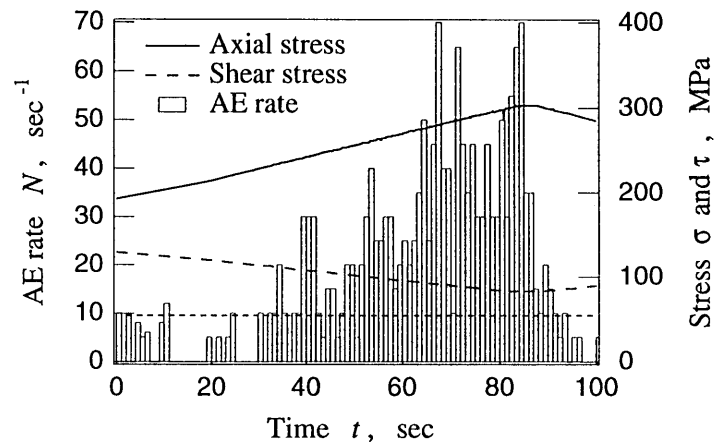


(b) D2-D1

図 5.20 非比例負荷経路に対する AE 発生状況



(c) C2-C3



(d) D2-D3

図 5.20 非比例負荷経路に対する AE 発生状況

損傷面から外側に向かう後続負荷経路における AE 発生率 N は非常に大きく、したがって、後続負荷によって損傷はさらに進展することがわかる。なお、これらの図では AE 信号の発生開始に若干の時間遅れがみられるが、これは応力点 C2, D2 を決定する際に損傷の進展を確かめるため、これらの応力点を若干超えて応力を負荷したことが原因である。

以上の結果を要約すれば、この実験で用いた球状黒鉛鋳鉄に対しては、次の知見が成り立つ。

- 1) 応力空間内に、損傷発生の限界を規定する損傷面が存在する。
- 2) 損傷面の内部あるいは損傷面からの除荷ならびに中立負荷に対しては、損傷は進行しない。
- 3) 損傷面からの外向きの負荷経路に対しては、新しい損傷が発生し、これに伴って損傷面の形状、大きさが変化する。

図 5.21 は、以上の実験により得られた初期損傷面と後続損傷面の形状を示す。同図に

はまた、比較のためにこの材料の初期降伏面および破壊面の実験結果と、これに対する計算結果を示す。この図において、横軸と縦軸はそれぞれ単軸引張りとなねじり試験によって得られた初期損傷発生応力の値 σ_D , τ_D (図 5.17 中の A1 および B1 における応力値) を用いて正規化した値を用いた。初期降伏面および破壊面の計算には、いずれも Mises 型の降伏条件

$$\sigma_{EQ} - \sigma_Y = 0 \quad (5.2)$$

および破壊条件

$$\sigma_{EQ} - \sigma_F = 0 \quad (5.3)$$

を用いた。ここで σ_{EQ} は、Mises の相当応力

$$\sigma_{EQ} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad (5.4)$$

を表す。ここで σ'_{ij} は偏差応力である。また、 σ_Y と σ_F はそれぞれ単軸引張り試験における降伏応力および破壊応力である。図中の点線および破線は、式(5.2)および(5.3)による Mises 型の初期降伏面と破壊面を示しているが、この材料の降伏と破壊は非常によい精度

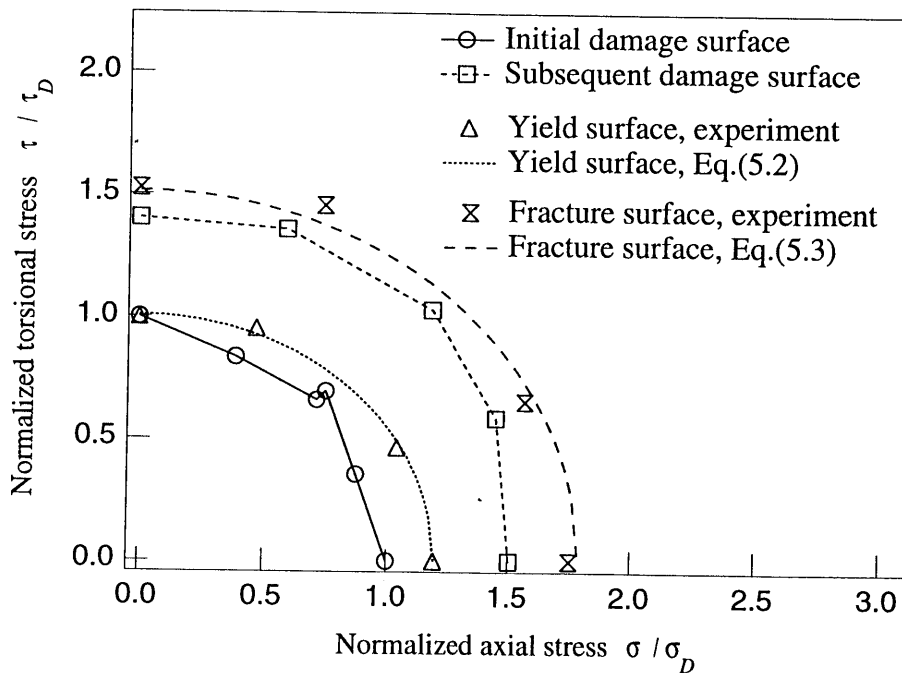


図 5.21 球状黒鉛鑄鉄の初期および後続損傷面

でこれらの式によって記述できることがわかる。

これに対し、図 5.21 の実線で示される初期損傷面は、正規化された空間で円形であり（アスペクト比 1.0）、Mises 型の初期降伏面の楕円形状（アスペクト比 1.18）とは若干異なっている。この両者の形状の違いは、降伏には応力の偏差成分だけが影響するが、微視的き裂の発生・成長による損傷に対しては、静水引張り成分の影響が無視できず、したがって損傷発生に対する単軸引張り応力の効果は、ねじりの効果よりも大きくなるのが原因と考えられる。また、図 5.17 の点 C2, D2 に対応する応力値の差は $\pm 5\%$ 以内であることから、この実験の再現性は良好であるといえる。

次に後続損傷面を見ると、この曲面のアスペクト比は 1.07 であり、初期損傷面と比較すると後続損傷面の方がより Mises の条件に近い形状をしている。これは、この材料は変形が進むにつれてフェライト基地の塑性変形が支配的となり、最終的にその延性破壊によって破断に至ることが原因と考えられる。したがって、本試験片の損傷は変形が小さいときにはフェライト基地-黒鉛境界の剥離が支配的であるが、変形が大きくなるにつれて剥離による損傷よりもフェライトの塑性破壊が主原因となるものと考えられる。

以上の図 5.21 に見られた初期損傷面ならびに後続損傷面の特性は、損傷力学理論における損傷発展式の定式化の際の重要な知見を与える。

5. 4 本実験結果の熱力学的損傷理論への適用

本実験では、AE 発生を損傷の進行と考え、損傷発生の限界面、すなわち損傷面を応力空間で規定した。不可逆熱力学理論による一般的な定式化では、損傷面は適切に選択した損傷変数の共役力空間で規定される[13, 34]。

しかし、以上の本実験で得られた応力空間での損傷面が損傷ポテンシャル面となりうるかどうかは、損傷面上の所定の損傷状態からの損傷状態の変化を検出する必要があり、今後の研究に待たなければならない。

従来の不可逆熱力学理論による損傷力学では、損傷変数ならびに損傷共役力の選択、弾塑性-損傷連成の影響による損傷面の形状変化や、その発達等を精密に表現できる定式化はなされていない。

Chow ら[82, 83]は、エネルギー等価性の仮説を用いた不可逆熱力学理論により構成式および損傷発展式を導いている。しかし、彼らは異方損傷を表現する損傷テンソル D に対する共役力として応力テンソル σ を用いており、上で述べたようにこのときの損傷面が損傷ポテンシャルとなりうるかどうかは不明である。

Lubarda と Krajcinovic[115]は、損傷変数として 4 階の剛性テンソル L あるいはコンプラ

イアンズ・テンソル M を選べば、それらの共役力 G あるいは F は応力 σ あるいはひずみ ϵ の簡単な形で記述でき、損傷変数の選択によっては、損傷面を応力あるいはひずみ空間で記述できることを示した。しかし、彼らが具体的に提案した損傷面は、損傷の発達に伴う曲面形状の変化を表現できない。

Yazdani[116]もまた、コンプライアンス・テンソルを損傷変数として選ぶことにより損傷共役力を応力テンソルの比較的単純な関数として定め、具体的な損傷面を応力空間内で表現している。しかし彼は、コンプライアンス・テンソルの変化をスカラー変数 k の変化で表現しており、このため、本実験でみられた損傷面形状の変化を表現できない。また、剛性テンソルあるいはコンプライアンス・テンソルそのものを損傷変数に選ぶ方法は、塑性挙動に対する損傷の影響を表現するために、さらに他の損傷変数を新たに導入しなければならない。

一方、3章および4章[105-108]で展開した理論では、弾性-脆性材料および弾塑性-損傷材料に対する熱力学的定式化において、2階対称な損傷テンソル D に対する共役力テンソル Y の空間内で損傷面を規定した。この方法によれば、 Y 空間内の損傷面を本実験で得られた応力空間内の損傷面形状やその発達を適切に表現できるように選ぶことにより、より精密な損傷発達の記述が可能である。

5. 5 本章のまとめ

不可逆熱力学構成式理論に基づく弾塑性-損傷理論は、実験によってその妥当性を検討する必要がある。そこで本章では、球状黒鉛鋳鉄の薄肉円管試験片を用いて、弾塑性-損傷材料における損傷面の存在とその力学的特性に対する実験的検討を行った。

まずはじめに、この材料の基本的な弾塑性-損傷挙動を調べるために、その初期等方性と単軸引張りおよびねじり試験による弾塑性-損傷挙動を、弾性特性の変化によって調べた。

次に、初期および後続損傷面の存在、形状、基本的特性などを明らかにするため、引張り-ねじり組合せ応力空間における初期および後続損傷面に対する実験的検討を行った。損傷の検出には、材料内部の微視的き裂の発生・成長に伴う AE を用いた。これらの実験の結果、以下の知見を得た。

- (1) 初期等方である球状黒鉛鋳鉄は、引張りおよびねじり負荷に伴って発生・成長する損傷により、縦弾性係数、Poisson 比および横弾性係数がともに減少し、その弾性特性は異方的となる。
- (2) 応力空間内に、損傷発生の限界を規定する損傷面が存在する。損傷面の形状は、応

力の静水圧成分に依存し、Mises型では表現できない。

- (3) 初期損傷面上の後続負荷に対しては損傷の発生がみられるが、除荷および中立負荷に対しては損傷は発生せず、負荷、除荷および中立負荷が成り立つ。
- (4) 応力空間内における損傷面を、損傷ポテンシャル面として取り扱うことができるかどうかは、さらに適切な実験的検討が必要である。

次章では、本章で明らかになった損傷面の形状や性質を適切に表現でき、さらに、延性材料の損傷において支配的となる塑性ひずみの効果を考慮した弾塑性-損傷材料の構成式および損傷発展式を熱力学理論の枠組みで定式化する。続いて、導かれた理論の妥当性を本章の実験結果と比較することにより検討する。

第6章 熱力学理論による弾塑性-損傷構成式と応力空間における損傷発展式の定式化[117]

第3章および第4章で展開した不可逆熱力学構成式理論による損傷力学では、損傷発展式は損傷共役力空間内で規定された損傷ポテンシャル面に対する法線則によって定式化されている。しかし、不可逆熱力学は構成式と発展式に対する一般的枠組みを与えるにすぎず、個々の材料に対するこのような損傷ポテンシャル面の定式化は、詳細な実験的検討に待つ必要がある。これまでいくつかの研究が報告されている[96, 97]ものの未だ十分とは言い難い。

そのため第5章では、弾塑性-損傷材料の多軸応力空間における損傷面の存在と、その形状や特性に対する詳細な実験的検討を行い、不可逆熱力学理論による弾塑性-損傷材料の構成式ならびに損傷発展式の定式化のための重要な知見を明らかにした[109]。

特に著しい延性を示す弾塑性-損傷材料においては、損傷の発生・成長は偏差応力だけではなく顕著な静水応力依存性と塑性ひずみ依存性が現れる[13, 14, 80]。したがって、弾塑性-損傷材料の力学的挙動を一層精密に記述するためには、損傷の発達に対する静水圧ならびに塑性ひずみの影響を考慮するとともに、上述の実験的結果を構成式に適切に反映することが不可欠である。本章では、この目的のため、弾塑性-損傷材料に対してGibbsの熱力学ポテンシャルを用いた不可逆熱力学構成式理論を展開する。

6.1 弾塑性-損傷構成式に対する不可逆熱力学理論

6.1.1 内部状態変数

多結晶金属における弾塑性-損傷材料の非弾性変形は、主に転位構造の変化、ならびに結晶粒の変形と回転等の他に、応力の作用方向に依存した微視的空げきの発生・成長による材料の内部損傷を引起す。このような損傷過程においては、微視的空げきの発生・成長によってもたらされる損傷は著しい異方性を示すだけでなく、弾性変形ならびに塑性変形に対するその効果にも明瞭な異方性が現れる[6-8, 82, 83, 107, 108]。

このため、このような弾塑性-損傷材料の変形・損傷過程を定式化するための内部状態変数として、第4章[107, 108]と同様に塑性変形に対する等方硬化スカラー変数 r 、微視的空げき発生による異方損傷状態を記述する2階対称損傷テンソル D [25, 26, 56]ならびに損傷の発展を規定するスカラー変数 β [37, 82, 83, 107]を導入する。この変数 β は、引き続いて生じる損傷の発展に対する現在の損傷状態の影響を表現するものであり、損傷面

の大きさを規定する。これは、塑性変形の等方硬化変数 r に対応する[107]。

6.1.2 Gibbs の熱力学ポテンシャルを用いた定式化

Helmholtz の自由エネルギーを用いた弾塑性-損傷材料に対する定式化によれば、損傷発展式は弾性ひずみの関数である損傷共役力の関数として表現される[27, 32-34, 105-108]。しかし、弾塑性-損傷材料では実験によって直接弾性ひずみを測定することが困難であるだけでなく、弾性特性が損傷によって影響を受けるため、弾性ひずみは応力値だけでは決定できないという問題が生ずる。

このため、損傷面に対する従来の実験的研究の多く[96, 97]は応力空間におけるその形状と特性を検討している。このため、弾塑性-損傷材料挙動をより精密に表現するためには、このような実験的検討を構成式に適切に反映できるような定式化が望まれる。

本章では、損傷面に関するこのような難点を除くための方法の一つとして、Helmholtz の自由エネルギーと双対な Gibbs の熱力学ポテンシャルを用いて、構成式および損傷発展式の定式を行う。

本章の以下の議論では、第4章[107, 108]の議論と同様にひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ と塑性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ の和で表現できるとする。また、この材料は等温過程にあり、熱の流出入はないものとする。このとき、材料は非弾性変形過程において、熱力学的制約条件である Clausius-Duhem の不等式[13, 69-75]

$$\boldsymbol{\sigma} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) - \dot{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \mathbf{D}, \beta) \geq 0 \quad (6.1)$$

を常に満足しなければならない。ここで、 $\dot{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \mathbf{D}, \beta)$ は単位体積当りの Helmholtz の自由エネルギーであり、括弧の中の変数の関数として表される。

弾塑性-損傷材料における単位質量当たりの Gibbs の熱力学ポテンシャル $\Gamma(\boldsymbol{\sigma}, r, \mathbf{D}, \beta)$ は、以下のように表現できる[72, 73, 88, 100]。

$$\Gamma(\boldsymbol{\sigma}, r, \mathbf{D}, \beta) = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e - \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \mathbf{D}, \beta) \quad (6.2)$$

式(6.2)を式(6.1)に代入することにより、Clausius-Duhem の不等式は次のようになる。

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\varepsilon}^e \right) + \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} \dot{\beta} \geq 0 \quad (6.3)$$

式(6.3)が常に成立する条件から、弾性構成式は

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6.4)$$

となり，またエントロピー散逸速度 Φ は次のように表現できる．

$$\Phi = \mathbf{X} \cdot \mathbf{J} \geq 0 \quad (6.5a)$$

$$\mathbf{X} = \{\boldsymbol{\sigma}, R, Y, B\}, \quad \mathbf{J} = \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{r}, \dot{\mathbf{D}}, \dot{\beta}\} \quad (6.5b)$$

ここで， R ， Y および B は Gibbs の熱力学ポテンシャル $\Gamma(\boldsymbol{\sigma}, r, \mathbf{D}, \beta)$ を用いて次のように定義した内部状態変数 r ， \mathbf{D} および β に対する熱力学的共役力である．

$$R \equiv \frac{\partial \Gamma}{\partial r}, \quad Y \equiv \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{D}}, \quad B \equiv \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} \quad (6.6)$$

力学的流束ベクトル \mathbf{J} の成分 J_m の発展式は，常にエントロピー散逸速度に対する条件式(6.5)を満足するとともに，対応する熱力学的共役力 X_m および現在の内部状態に依存するような散逸ポテンシャル面 $F(X_m; r, \mathbf{D}, \beta) = 0$ の存在を仮定することにより

$$J_m = \dot{\Lambda} \frac{\partial F}{\partial X_m} \quad (6.7)$$

のように表現できる．ここで， $\dot{\Lambda}$ は散逸ポテンシャル面 $F=0$ に対する適合条件から決定される未定乗数である．さらに，記号(;)は，これより前にある記号は変数であり，また後ろにある記号はパラメーターであることを示す．

式(6.2)で表される Gibbs の熱力学ポテンシャル Γ を用いることにより，独立変数を弾性ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ から応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ に変更することができ，定式化された構成式および損傷発展式の実験的検討が容易となる．

6.1.3 Gibbs の熱力学ポテンシャルの定式化

はじめに，Gibbs の熱力学ポテンシャル $\Gamma(\boldsymbol{\sigma}, r, \mathbf{D}, \beta)$ の各引数に対する関数形の適切な表現について検討する．第4章[107, 108]と同様に，材料の弾性特性は損傷の発達によって影響を受けるが，塑性変形へのその影響は小さいと考える．一方，Gibbs の熱力学ポテンシャルに対する転位構造変化と微小空げきの発達の効果としては，それぞれ主に転位構造の発達による結晶格子のひずみエネルギーと，空げき生成の表面エネルギーがあるが，

これらに対する損傷の直接的な影響は大きくない。したがって、この材料における Gibbs の熱力学ポテンシャル Γ は、次の形に表現できる。

$$\Gamma(\boldsymbol{\sigma}, r, \mathbf{D}, \beta) = \Gamma^e(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) + \Gamma^p(r) + \Gamma^d(\beta) \quad (6.8)$$

ここで $\Gamma^e(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ は、弾性挙動に対する損傷テンソル \mathbf{D} の影響を考慮した材料の弾性-損傷補足エネルギーであり、また $\Gamma^p(r)$ および $\Gamma^d(\beta)$ は、それぞれ等方硬化および損傷発展によってもたらされる Gibbs の熱力学ポテンシャルを表す。

次に、弾性-損傷補足エネルギー $\Gamma^e(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ について考える。第 5 章の実験結果[109, 110]によれば、この材料は非損傷状態において等方的であり、損傷が発達するにつれて異方的な弾性特性の低下が生じ、それによって補足エネルギーが変化する。したがって、この関数は 2 つの対称テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ および \mathbf{D} によるテンソル値スカラー等方関数で表現できる。このようなテンソル値スカラー等方関数の最も一般的な表現は、第 3 および第 4 章と同様に、非線形代数学における表現定理により 2 つの対称テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ および \mathbf{D} の組合せで構成される 10 個の基本不変量の関数として与えられる[65-67]。この材料における弾性挙動は、初期非損傷状態では線形等方的であるとすると、 $\Gamma^e(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ は応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ に関しては 2 次同次式となる。一方、損傷テンソル \mathbf{D} の $\Gamma^e(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ に対する影響に関しては、損傷はあまり大きくないものとして線形関数で表現できるとする。

さらに、弾塑性-損傷材料は岩石、コンクリートなどの脆性材料に見られるように、圧縮の際に生ずる微視的き裂閉口によって、損傷効果が減少する。したがって、本章では圧縮応力による微視的き裂の開・閉口効果、ならびにき裂の開・閉口の際の応力とひずみの不連続が生じないための条件[98, 99]を弾塑性-損傷材料に適用し、弾性-損傷補足エネルギーを次式のように表現する。

$$\begin{aligned} \Gamma^e(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) = & -\frac{\nu_0}{2E_0}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 + \frac{1+\nu_0}{2E_0}\text{tr}\boldsymbol{\sigma}^2 \\ & + \vartheta_1\text{tr}\mathbf{D}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 + \vartheta_2\text{tr}\mathbf{D}\text{tr}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \vartheta_3\text{tr}\boldsymbol{\sigma}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}) + \vartheta_4\text{tr}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^2\mathbf{D}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

ここで、 E_0 および ν_0 は初期非損傷状態における縦弾性係数と Poisson 比を表し、また $\vartheta_1 \sim \vartheta_4$ は材料定数である。さらに、 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ は応力方向による微視的き裂閉口効果を記述するために導入した修正応力テンソル[38, 39, 56]であり、次のように定義する。

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle - \zeta \langle -\boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (6.10a)$$

$$[\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle] = \begin{bmatrix} \langle \sigma_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \sigma_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \sigma_3 \rangle \end{bmatrix}, \quad [\langle -\boldsymbol{\sigma} \rangle] = \begin{bmatrix} \langle -\sigma_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle -\sigma_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle -\sigma_3 \rangle \end{bmatrix} \quad (6.10b)$$

ここで、 $\langle \rangle$ は Macauley の括弧であり、 σ_i ($i=1, 2, 3$)は $\boldsymbol{\sigma}$ の主値である。また、 ζ ($0 \leq \zeta \leq 1$)は圧縮によるき裂閉口の程度を示す材料定数であり、損傷の効果が圧縮により完全に消失する場合には $\zeta=0$ であり、このような効果がない場合には $\zeta=1$ となる。

一方、 $\Gamma^p(r)$ については一般的な金属材料の単軸引張りによる等方硬化を適切に表現する形とし、また $\Gamma^d(\beta)$ については内部状態変数 β とその共役力 B との線形関係を考え、それぞれ次のように表わす[107, 108].

$$\Gamma^p(r) = R_\infty \left[r + \frac{1}{b} \exp(-br) \right] \quad (6.11)$$

$$\Gamma^d(\beta) = \frac{1}{2} K_d \beta^2 \quad (6.12)$$

ここで、 R_∞ 、 b および K_d は材料定数である。

6.1.4 弾性構成式と熱力学的共役力

弾性構成式は、式(6.4)および(6.9)から

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\partial \Gamma^e}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = & -\frac{\nu_0}{E_0} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} + \frac{1+\nu_0}{E_0} \boldsymbol{\sigma} \\ & + 2\vartheta_1 (\text{tr} \mathbf{D} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} + 2\vartheta_2 (\text{tr} \mathbf{D}) \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ & + \vartheta_3 [\text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}) \mathbf{I} + (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{D}] + \vartheta_4 (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D} + \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad (6.13)$$

のように与えられる。また、内部状態変数 \mathbf{D} 、 r および β に対する熱力学的共役力 \mathbf{Y} 、 R 、 B は、式(6.6)、(6.11)および(6.12)により次のように表現される。

$$\mathbf{Y} \equiv \frac{\partial \Gamma^e}{\partial \mathbf{D}} = \left[\vartheta_1 (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})^2 + \vartheta_2 \text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^2 \right] \mathbf{I} + \vartheta_3 (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\sigma} + \vartheta_4 \bar{\boldsymbol{\sigma}}^2 \quad (6.14)$$

$$R \equiv \frac{\partial \Gamma^p}{\partial r} = R_\infty [1 - \exp(-br)] \quad (6.15)$$

$$B \equiv \frac{\partial \Gamma^d}{\partial \beta} = K_d \beta \quad (6.16)$$

Gibbs の熱力学ポテンシャル Γ を用いることにより，損傷共役力 Y を応力の関数として表現でき，これまで応力空間内で行われてきた損傷発展に対する実験的研究と，不可逆熱力学理論における損傷共役力空間内での損傷ポテンシャル面との関連を一層明確にすることができる。

6.1.5 内部状態変数の発展式

材料の非弾性変形に伴う内部状態変数の発展は，熱力学的制約条件式(6.5)を常に満足しなければならない。このような内部状態変数の発展式は，熱力学的共役力空間で規定され，連続かつ凸である散逸ポテンシャル関数を導入することにより決定できる。

塑性変形における主な散逸は応力の作用による転位運動が原因であるが，一方損傷による散逸は微視的空げきの発生・成長による内部エネルギーの解放が支配的である。したがって，本章では両者の散逸機構の違いを考慮し，この関数を塑性に関する塑性散逸ポテンシャル F^p と損傷に関する損傷散逸ポテンシャル F^d との和の形として

$$F(\boldsymbol{\sigma}, Y, R, B; \mathbf{D}, r, \beta) = F^p(\boldsymbol{\sigma}, R; \mathbf{D}) + F^d(Y, B; \mathbf{D}, r) \quad (6.17)$$

のように表す。式(6.17)では，損傷による空げきの発展は材料中で応力を支える有効面積の減少と，空げき周辺への応力集中によって応力の効果を拡大し，これによって材料の剛性低下を引き起こす。このため，損傷の発達には塑性変形に対しては降伏面の縮小をもたらす。このことを表現するため，式(6.17)の $F^p(\boldsymbol{\sigma}, R; \mathbf{D})$ は損傷テンソル \mathbf{D} をパラメータとして含む形を仮定している。

一方，損傷散逸ポテンシャル $F^d(Y, B; \mathbf{D}, r)$ については，損傷の発達により損傷面の形状が変化する。これを表現するため，損傷テンソル \mathbf{D} をパラメータとして加えてある。さらに，損傷の発展は塑性変形にも依存するため，塑性変形による等方効果を表す内部状態変数 r もパラメータとして導入する。

6.1.6 塑性散逸ポテンシャル

本章では，連合流れ則を仮定し，塑性散逸ポテンシャル $F^p(\boldsymbol{\sigma}, R; \mathbf{D})$ は降伏面と一致させる。またここでは，比較的単純な負荷履歴に限定し，Mises の降伏条件を損傷材料に拡張し，次のような等方硬化降伏面を仮定する。

$$F^p(\boldsymbol{\sigma}, R; \mathbf{D}) = \sigma_{eq} - (\sigma_Y + R) = 0 \quad (6.18a)$$

$$\sigma_{eq} = \left[\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{M}(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\sigma}' \right]^{1/2} \quad (6.18b)$$

ここで、 σ' は応力テンソル σ の偏差成分である。また $M(D)$ は、損傷テンソル D を引数とする4階対称テンソルであるが、これは塑性降伏面に対する損傷の発生・成長の影響を表現する。

この降伏面および式(6.7)により、塑性ひずみ ϵ_{ij}^p と等方硬化変数 r の発展式は次のようになる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\Lambda}^p \frac{\partial F^p}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{3}{2} \dot{\Lambda}^p \frac{M_{ijkl} \sigma'_{kl}}{\sigma_{eq}} \quad (6.19)$$

$$\dot{r} = \dot{\Lambda}^p \frac{\partial F^p}{\partial (-R)} = \dot{\Lambda}^p \quad (6.20)$$

ここで $\dot{\Lambda}^p$ は塑性変形に対する未定乗数であり、降伏面の適合条件 $\dot{F}^p = 0$ によって次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}^p &= \left(\frac{\partial F^p}{\partial \sigma'_{ij}} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{\partial F^p}{\partial D_{ij}} \dot{D}_{ij} \right) \bigg/ \left(\frac{dR}{dr} \right) \\ &= \left[\frac{1}{\sigma_{eq}} \left(\frac{3}{2} M_{ijkl} \dot{\sigma}'_{ij} \sigma'_{kl} + \frac{3}{4} \frac{\partial M_{klmn}}{\partial D_{ij}} \dot{D}_{ij} \sigma'_{kl} \sigma'_{mn} \right) \right] \bigg/ \left(\frac{dR}{dr} \right) \end{aligned} \quad (6.21)$$

また、式(6.21)の負荷・除荷条件はKuhn-Tuckerの関係[92-94, 103]

$$\dot{\Lambda}^p \geq 0, \quad F^p \leq 0, \quad \dot{\Lambda}^p F^p = 0 \quad (6.22)$$

のすべての式を、同時に満足する条件として与えられる。

さらに、 $M(D)$ を損傷による応力効果の拡大の影響を表現するように決定する必要がある。ここでは、第4章と同様に、この影響は損傷テンソル D の線形関数で表現できると考え

$$[M(D)]_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{1}{2} c^p (\delta_{ik} D_{jl} + D_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} D_{jk} + D_{il} \delta_{jk}) \quad (6.23)$$

と表わす。ここで c^p は、降伏面に対する損傷の効果を表す材料定数である。

6.1.7 損傷散逸ポテンシャル

第5章で詳述した弾塑性-損傷材料の損傷面に対する著者らの実験[109, 110]によれば、応力空間内に損傷発達の限界を表す損傷面が存在し、その面上においては負荷、除荷および中立負荷条件が成立する。一方、不可逆熱力学構成式理論によれば、損傷変数 \mathbf{D} の発展式が損傷共役力 \mathbf{Y} とそのときの損傷状態だけに依存する場合には、損傷散逸ポテンシャル F^d の存在を証明することができ[72-74]、損傷発展式 $\dot{\mathbf{D}}$ は F^d に対する法線則によって与えられる。

本章では、損傷の発展に関しても塑性変形の場合と同様に、連合流れ則を仮定する。また、損傷面を応力の関数として直接表現するのではなく、応力の2次同次式である式(6.14)の損傷共役力を用いて表現する。これによって熱力学的制約を満足するような損傷発展式の定式化が可能となる。

現象論的には、延性破壊を生ずるような大きな変形を受ける材料は、内部に塑性変形および静水応力に依存したボイドの発生・成長が見られる。したがって、弾塑性-損傷材料の損傷発展式を一層精密に定式化するためには、以上の熱力学的制約と物理的現象を同時に満足することが必要となる。

以上を考慮し、本章では損傷面 F^d を次のように表現する。

$$F^d(\mathbf{Y}, \mathbf{B}; \mathbf{D}, r) = Y_{eq} + c^r r(1 - \text{tr} \mathbf{D}) \text{tr} \mathbf{Y} - (B_0 + B) = 0 \quad (6.24a)$$

$$Y_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{Y} : \mathbf{L}(\mathbf{D}) : \mathbf{Y}} \quad (6.24b)$$

ここで B_0 は、損傷面の初期の大きさであり、また $\mathbf{L}(\mathbf{D})$ は、損傷テンソル \mathbf{D} をパラメータとする4階のテンソルであって、損傷の発達による損傷面の形状の変化を表現する材料定数である。さらに c^r は、塑性ひずみに依存する損傷発展の程度を表現する材料定数である。

式(6.24)の損傷面は、損傷共役力の1次同次式であるから、応力テンソルの2次同次式となっている。テンソル $\mathbf{L}(\mathbf{D})$ は、損傷面に対する実験結果を適切に表現できるように決定しなければならないが、第4章で見たように弾塑性-損傷材料の損傷はあまり大きくない。したがって、本章ではテンソル $\mathbf{L}(\mathbf{D})$ は損傷テンソルの線形関数で十分表現できると考え

$$[\mathbf{L}(\mathbf{D})]_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{1}{2} c^d (\delta_{ik} D_{jl} + D_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} D_{jk} + D_{il} \delta_{jk}) \quad (6.25)$$

を用いる。ここで c^d は、損傷面に対する損傷変数の効果を記述する材料定数である。式

(6.24), (6.25)により, 損傷テンソル \mathbf{D} および損傷発展を規定するスカラー変数 β の発展式は

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\Lambda}^d \frac{\partial F^d}{\partial \mathbf{Y}} = \dot{\Lambda}^d \left[\frac{\mathbf{L} : \mathbf{Y}}{2Y_{eq}} + c_r r (1 - \text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{I} \right] \quad (6.26)$$

$$\dot{\beta} = \dot{\Lambda}^d \frac{\partial F^d}{\partial (-B)} = \dot{\Lambda}^d \quad (6.27)$$

のように与えられる. ここで, $\dot{\Lambda}^d$ は損傷に対する未定乗数であり, 式(6.24)に対する適合条件により次式のように求められる.

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}^d &= \left(\frac{\partial F^d}{\partial \mathbf{Y}} : \dot{\mathbf{Y}} + \frac{\partial F^d}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} + \frac{\partial F^d}{\partial r} \dot{r} \right) / \left(\frac{\partial B}{\partial \beta} \right) \\ &= \left[\frac{1}{4Y_{eq}} \left(2L_{ijkl} Y_{ij} \dot{Y}_{kl} + \frac{3}{4} \frac{\partial L_{ijkl}}{\partial D_{mn}} \dot{D}_{mn} Y_{ij} Y_{kl} \right) \right. \\ &\quad \left. + r(1 - D_{mm}) \dot{Y}_{nn} + c_r \dot{r} (1 - D_{mm}) Y_{nn} - c_r r \dot{D}_{mm} Y_{nn} \right] / K_d \end{aligned} \quad (6.28)$$

また損傷発展に対する負荷・除荷条件は, 塑性の場合と同様に Kuhn-Tucker の関係式 [92-94, 103]

$$\dot{\Lambda}^d \geq 0, \quad F^d \leq 0, \quad \dot{\Lambda}^d F^d = 0 \quad (6.29)$$

によって与えられる.

式(6.26)を見ると, 損傷発展式 $\dot{\mathbf{D}}$ は, 損傷共役力 \mathbf{Y} に依存する項と等方硬化を表現するスカラー変数 r の依存性を表現する項からなることがわかる.

6. 2 単軸引張りと単純ねじりに対する構成式の展開

6. 2. 1 単軸引張り過程

以上で定式化した弾性構成式(6.13), 塑性構成式(6.19)および損傷発展式(6.26)を, 第5章で行った球状黒鉛鋳鉄薄肉円管試験片の弾塑性損傷試験に適用するため, はじめにこれらの関係式を単軸引張りに対して具体化する. 座標系には, 図 6.1 のような局所的直角座標系 (試験片座標系) $O-x_1x_2x_3$ を選び, 荷重軸方向を座標軸 x_1 , それに直交する円周方向と半径方向をそれぞれ x_2, x_3 とする. Voigt の表示法を用いると, 弾性構成式(6.13)

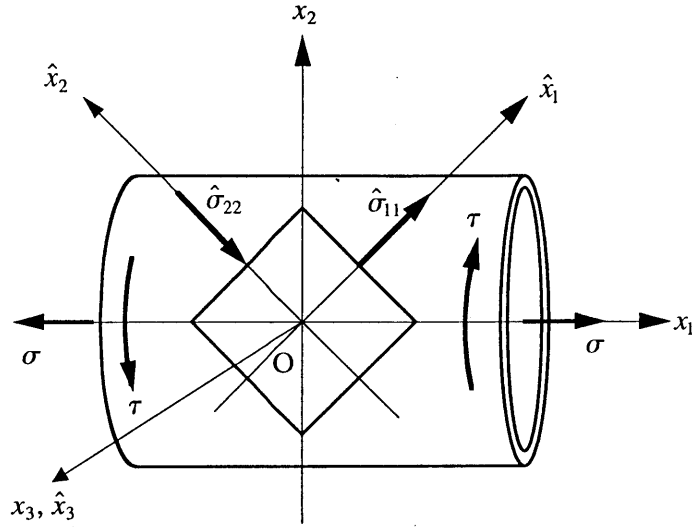


図 6.1 薄肉円管試験片における試験片および主応力座標系

は次式のように書ける.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{S}(\mathbf{D}) : \boldsymbol{\sigma} \quad (6.30a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \varepsilon_{33}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ & S_{22} & S_{23} \\ \text{sym.} & & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} (> 0) \\ \sigma_{22} (= 0) \\ \sigma_{33} (= 0) \end{Bmatrix} \quad (6.30b)$$

$$S_{ii} = 1/E_0 + 2(\vartheta_1 + \vartheta_2)\text{tr}\mathbf{D} + 2(\vartheta_3 + \vartheta_4)D_{ii} \quad (i = 1, 2, 3, \text{ no sum.}) \quad (6.30c)$$

$$S_{ij} = -(\nu_0/E_0) + 2\vartheta_1\text{tr}\mathbf{D} + \vartheta_3(D_{ii} + D_{jj}) \quad (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, i \neq j, \text{ no sum.}) \quad (6.30d)$$

式(6.30c)~(6.30d)から, x_1 方向の縦弾性係数 E_1 , および x_1 方向と x_2 方向の弾性ひずみの比を表す Poisson 比 ν_{12} は次のように与えられる.

$$E_1 = \frac{1}{S_{11}} = \frac{E_0}{1 + 2E_0\{(\vartheta_1 + \vartheta_2)\text{tr}\mathbf{D} + (\vartheta_3 + \vartheta_4)D_{11}\}} \quad (6.31)$$

$$\nu_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}} = \frac{\nu_0 - E_0\{2\vartheta_1\text{tr}\mathbf{D} + \vartheta_3(D_{11} + D_{22})\}}{1 + 2E_0\{(\vartheta_1 + \vartheta_2)\text{tr}\mathbf{D} + (\vartheta_3 + \vartheta_4)D_{11}\}} \quad (6.32)$$

塑性構成式は, 式(6.19)により

$$\dot{\epsilon}_{11}^p = \dot{\Lambda}^p \frac{\sigma_{11}(1+2c^p D_{11})}{\sigma_{eq}} \quad (6.33a)$$

$$\dot{\epsilon}_{22}^p = \dot{\epsilon}_{33}^p = -\dot{\Lambda}^p \frac{\sigma_{11}(1+2c^p D_{22})}{2\sigma_{eq}} \quad (6.33b)$$

となる。ここで、式(6.21)から計算される $\dot{\Lambda}^p$ は、降伏面に対する負荷・除荷条件(6.22)を満足する。式(6.33)より、 $c^p > 0$ とすれば塑性ひずみ増分は材料の損傷によって拡大する。また塑性体積ひずみ増分 $\dot{\epsilon}_{kk}^p$ は、損傷が等方的な場合($D_{11} = D_{22} = D_{33}$)は0となるが、異方損傷の場合は $\dot{\epsilon}_{kk}^p \neq 0$ となり、損傷発展による不可逆な体積変化を表現できる。

最後に、損傷の発展式は、式(6.26)により次式で与えられる。

$$\dot{D}_{ii} = \dot{\Lambda}^d \left[\frac{Y_{ii}(1+2c^d D_{ii})}{2Y_{eq}} + c^r r(1-\text{tr}D) \right] \quad (i = 1, 2, 3, \text{no sum.}) \quad (6.34)$$

ここで、 $\dot{\Lambda}^d$ は式(6.28)から計算される損傷面に対する負荷・除荷条件(6.29)を満足する未定乗数である。

さらに、上式中の損傷共役力 Y は式(6.14)より

$$Y_{11} = (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4)\sigma_{11}^2 \quad (6.35a)$$

$$Y_{22} = Y_{33} = (\vartheta_1 + \vartheta_2)\sigma_{11}^2 \quad (6.35b)$$

と与えられる。

式(6.34)を見ると、損傷の発達には式(6.35)の損傷共役力 Y_{ii} ($i = 1, 2, 3, \text{no sum.}$) に依存する異方的な損傷発達、および等方硬化スカラー変数 r に依存する等方的な損傷発達からなることがわかる。また、損傷共役力は静水応力を含む形をしており、したがって、損傷発展式(6.34)は損傷の静水応力依存性も同時に考慮した形となっている。

6.2.2 単純ねじり過程

式(6.10)の修正応力テンソル $\bar{\sigma}$ が主応力に対して与えられているため、ねじり負荷過程の解析に対しては試験片座標系の代わりに、図 6.1 のような主応力座標系 $O-\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$ に対する純せん断として定式化する。

主応力座標系 $O-\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$ における弾性構成式は、次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathcal{E}}_{11}^e \\ \hat{\mathcal{E}}_{22}^e \\ \hat{\mathcal{E}}_{33}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{12} & \hat{S}_{22} \\ \hat{S}_{13} & \hat{S}_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{11} (> 0) \\ \hat{\sigma}_{22} (= -\hat{\sigma}_{11}) \end{Bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_{33} = 0 \quad (6.36a)$$

$$\hat{S}_{11} = 1/E_0 + 2(\vartheta_1 + \vartheta_2)\text{tr}\mathbf{D} + 2(\vartheta_3 + \vartheta_4)\hat{D}_{11} \quad (6.36b)$$

$$\hat{S}_{22} = 1/E_0 + 2(\vartheta_1 + \vartheta_2\zeta^2)\text{tr}\mathbf{D} + 2(\vartheta_3 + \vartheta_4\zeta^2)\hat{D}_{22} \quad (6.36c)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{ij} &= -(v_0/E_0) + 2\vartheta_1\text{tr}\mathbf{D} + \vartheta_3(\hat{D}_{ii} + \hat{D}_{jj}) \\ &\quad (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, i \neq j, \text{ no sum.}) \end{aligned} \quad (6.36d)$$

一方、塑性構成式(6.19)は、

$$\dot{\hat{\mathcal{E}}}_{11}^p = \dot{\Lambda}^p \frac{3\hat{\sigma}_{11}(1+2c^p\hat{D}_{11})}{2\sigma_{eq}} \quad (6.37a)$$

$$\dot{\hat{\mathcal{E}}}_{22}^p = \dot{\Lambda}^p \frac{3\hat{\sigma}_{22}(1+2c^p\hat{D}_{22})}{2\sigma_{eq}} = -\dot{\Lambda}^p \frac{3\hat{\sigma}_{11}(1+2c^p\hat{D}_{22})}{2\sigma_{eq}} \quad (6.37b)$$

$$\dot{\hat{\mathcal{E}}}_{33}^p = 0 \quad (6.37c)$$

となる。ここで $\dot{\Lambda}^p$ は、式(6.21)から計算され、降伏面に対する負荷・除荷条件(6.22)を満足する。

最後に、損傷の発展式は次式で与えられる。

$$\dot{\hat{D}}_{ii} = \dot{\Lambda}^d \left[\frac{\hat{Y}_{ii}(1+2c^d\hat{D}_{ii})}{2Y_{eq}} + r(1-\text{tr}\mathbf{D}) \right] \quad (i = 1, 2, 3, \text{ no sum.}) \quad (6.38)$$

ここで、 $\dot{\Lambda}^d$ は式(6.28)から計算され、損傷面に対する負荷-除荷条件(6.29)を満足する未定乗数である。さらに、上式の損傷共役力 \hat{Y} は、式(6.14)より次のように表現できる。

$$\hat{Y}_{11} = \vartheta_2 \left\{ \hat{\sigma}_{11}^2 + (\zeta\hat{\sigma}_{22})^2 \right\} + \vartheta_4 \hat{\sigma}_{11}^2 \quad (6.39a)$$

$$\hat{Y}_{22} = \vartheta_2 \left\{ \hat{\sigma}_{11}^2 + (\zeta\hat{\sigma}_{22})^2 \right\} + \vartheta_4 (\zeta\hat{\sigma}_{22})^2 \quad (6.39b)$$

$$\hat{Y}_{33} = \vartheta_2 \left\{ \hat{\sigma}_{11}^2 + (\zeta\hat{\sigma}_{22})^2 \right\} \quad (6.39c)$$

主応力座標系 $O-\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3$ から試験片座標系 $O-x_1x_2x_3$ への変換によって、以下の各関係式を得る。

$$\tau = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22}) = \hat{\sigma}_{11} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}^e + \dot{\gamma}^p \\ &= (\dot{\hat{\epsilon}}_{11}^e - \dot{\hat{\epsilon}}_{22}^e) + \dot{\Lambda}^p \frac{3\tau}{\sigma_{eq}} \{1 + 2c^p(\hat{D}_{11} + \hat{D}_{22})\} \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$Y_{11} = Y_{22} = \frac{1}{2}(\hat{Y}_{11} + \hat{Y}_{22}), \quad Y_{12} = \frac{1}{2}(\hat{Y}_{11} - \hat{Y}_{22}) \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{D}_{11} = \dot{D}_{22} &= \frac{1}{2}(\dot{\hat{D}}_{11} + \dot{\hat{D}}_{22}) \\ &= \dot{\Lambda}^d \left[\frac{1}{2Y_{eq}} \{Y_{11}(1 + 2c^d D_{11}) + 2c^d D_{12} Y_{12}\} + r(1 - \text{tr} \mathbf{D}) \right] \end{aligned} \quad (6.43a)$$

$$\dot{D}_{12} = \frac{1}{2}(\dot{\hat{D}}_{11} - \dot{\hat{D}}_{22}) = \frac{\dot{\Lambda}^d}{2Y_{eq}} \{Y_{12}(1 + 2c^d D_{11}) + 2c^d D_{12} Y_{11}\} \quad (6.43b)$$

$$G_{12} = E_0 / \{2(1 + \nu_0) + 2E_0 \chi(\mathbf{D})\} \quad (6.44a)$$

$$\chi(\mathbf{D}) = \vartheta_2(1 + \zeta^2) \text{tr} \mathbf{D} + \vartheta_4 \{ (1 + \zeta^2) D_{11} + (1 - \zeta^2) D_{12} \} \quad (6.44b)$$

6. 3 実験結果との比較

前章で具体化した構成式および損傷発展式を、第5章で行った球状黒鉛鋳鉄薄肉円筒試験片の弾塑性-損傷挙動に対する著者らの実験結果[109]に適用し、その妥当性を検討する。

6. 3. 1 材料定数

式(6.30)-(6.44)の材料定数は、後出図6.2～図6.5の単軸引張り実験における応力-ひずみ曲線、縦弾性係数 E_1 、Poisson比 ν_{12} 、ならびに図6.9の組合せ応力空間における初期損傷面の形状を適切に表現できるように、次のように決定した。

$$\begin{aligned} E_0 &= 169 \text{ GPa}, \quad \nu_0 = 0.285, \\ \vartheta_1 &= -8.64 \times 10^{-8} \text{ MPa}^{-1}, \quad \vartheta_2 = 2.88 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_3 &= -8.64 \times 10^{-8} \text{ MPa}^{-1}, \quad \vartheta_4 = 2.30 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-1}, & (6.45) \\
b &= 15, \quad R_0 = 293.0 \text{ MPa}, \quad R_\infty = 250.0 \text{ MPa}, \quad c^p = 0.8, \\
K_d &= 280.0, \quad B_0 = 0.273, \quad c^d = -15.0, \quad c^r = 20.0
\end{aligned}$$

なお、以下に用いる応力、ひずみはそれぞれ真応力、対数ひずみである。

6.3.2 単軸引張り試験との比較

図 6.2 の実線と破線は、球状黒鉛鋳鉄に対する単軸引張り試験の応力-ひずみ曲線と式 (6.33)~(6.35) による計算結果を示す。計算結果は実験結果を非常によく精度で記述できることがわかる。

次に図 6.3 と図 6.4 は、式(6.31)から計算した損傷の発達に伴う荷重軸方向の縦弾性係数 E_1 の変化と、式(6.32)による Poisson 比 ν_{12} の変化に対する実験ならびに計算結果を示す。図 6.3 の実験結果を見ると、縦弾性係数 E_1 は漸減し、破断時の値は非損傷時の約 90% となっている。この減少は、主にフェライト基地-球状黒鉛粒子境界の剥離、ならびに塑性ひずみの増加による微視的ボイドの発生・成長によるものである。一方、図 6.3 の破線は式 (6.31) による計算結果を示す。

図 6.4 の Poisson 比 ν_{12} の変化は、縦弾性係数 E_1 と同様に、損傷の発達とともに減少するが、これは微視的ボイドの発生・成長により、荷重方向だけではなくそれに垂直な方向にも損傷による材料劣化が生じているためである。その減少は約 8% であり、縦弾性係数の減少率よりも小さい。式(6.31)および(6.32)を見れば、この実験結果を適切に表現するためには、材料定数 ϑ_1 および ϑ_3 が負でなければならないことがわかる。

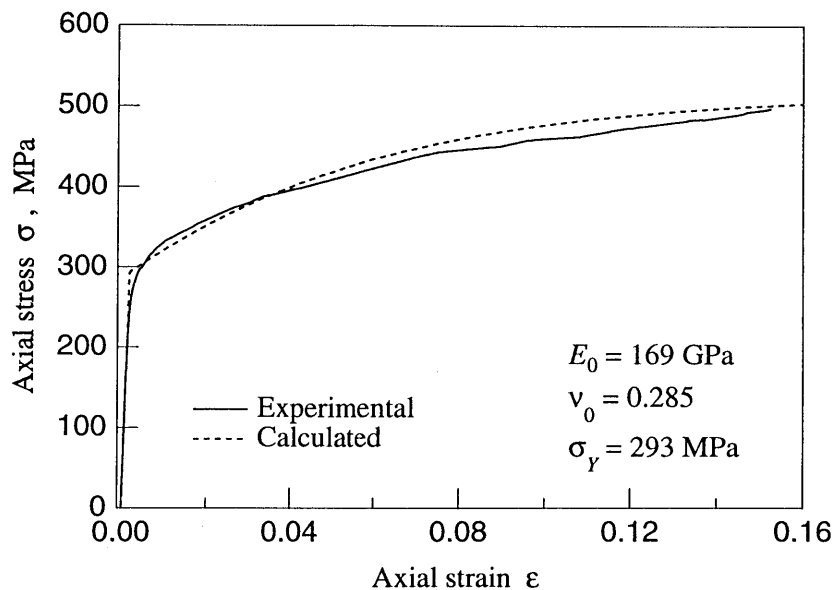


図 6.2 単軸引張り過程における応力-ひずみ曲線

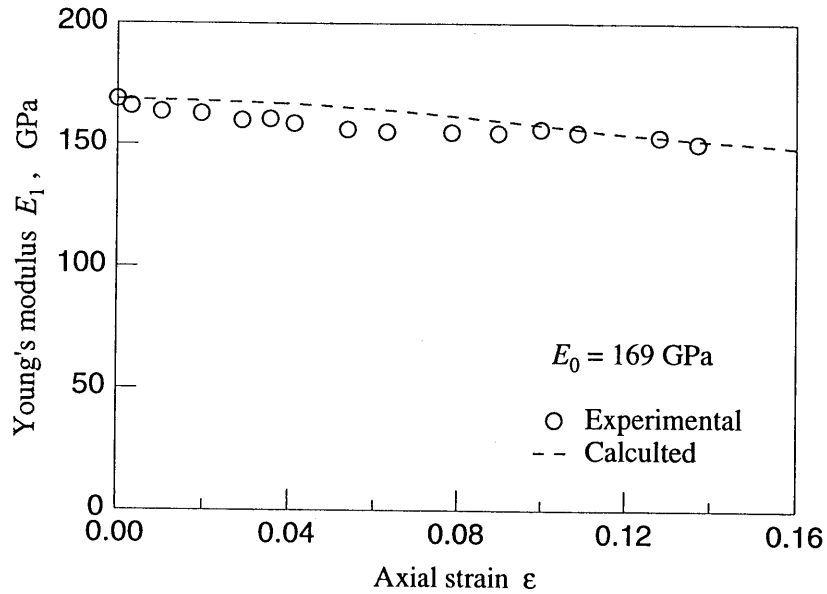


図 6.3 縦弾性係数 E_1 の変化

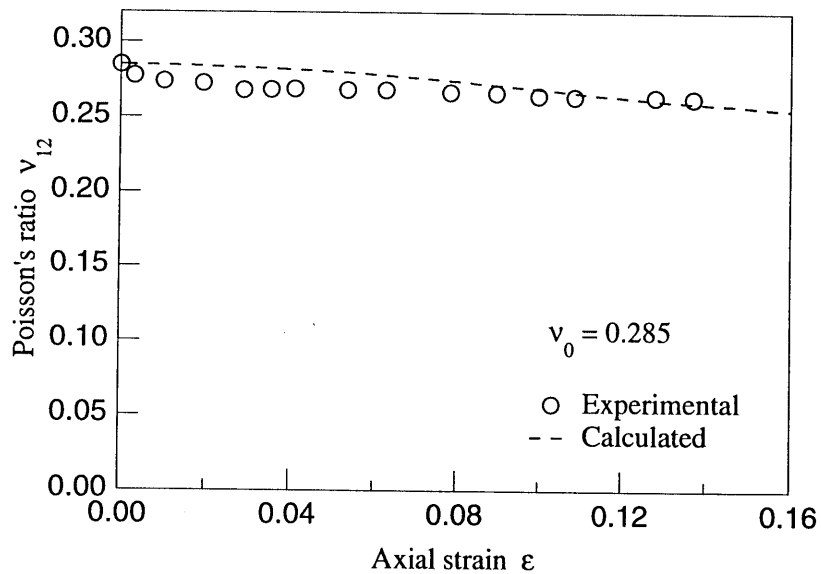


図 6.4 Poisson 比 ν_{12} の変化

一方、図 6.4 の破線は計算結果を示す。等方損傷理論では、損傷の進行に伴う Poisson 比 ν_{12} の変化は表現できない[104]のに対して、異方損傷を考慮した本構成式は、実験による Poisson 比 ν_{12} の減少を精度よく表現しうることがわかる。

図 6.5 は、式(6.34)を用いて計算した損傷変数の発達を示す。図中の実線は荷重軸方向の損傷 D_{11} を、また破線は、それに垂直な方向の損傷 D_{22} を示す。図 6.5 を見ると、 D_{11} と D_{22} との間には、顕著な差は生じず、損傷の発達の異方性はそれほど大きくないことがわかる。これは、損傷発展に静水圧依存性および塑性ひずみ依存性を考慮したことによる。

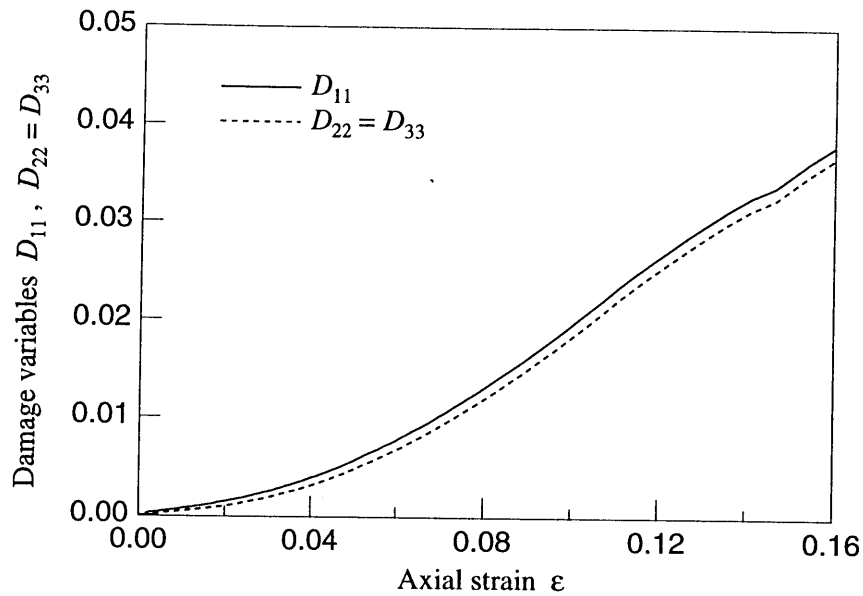


図 6.5 単軸引張り過程における損傷の発展

6.3.3 ねじり試験との比較

続いて、ねじり負荷過程に対しては、計算は、主応力方向に対する弾性損傷構成式(6.36)、塑性構成式(6.37)および損傷発展式(6.38)を用いて行い、その結果を式(6.40)～(6.44)によって座標変換した。なお、以下の計算には、すべて単軸引張り試験によって定めた式(6.45)の材料定数を用いた。

図 6.6 は、せん断応力-せん断ひずみ曲線の測定結果と、式(6.36)、(6.40)および(6.41)に

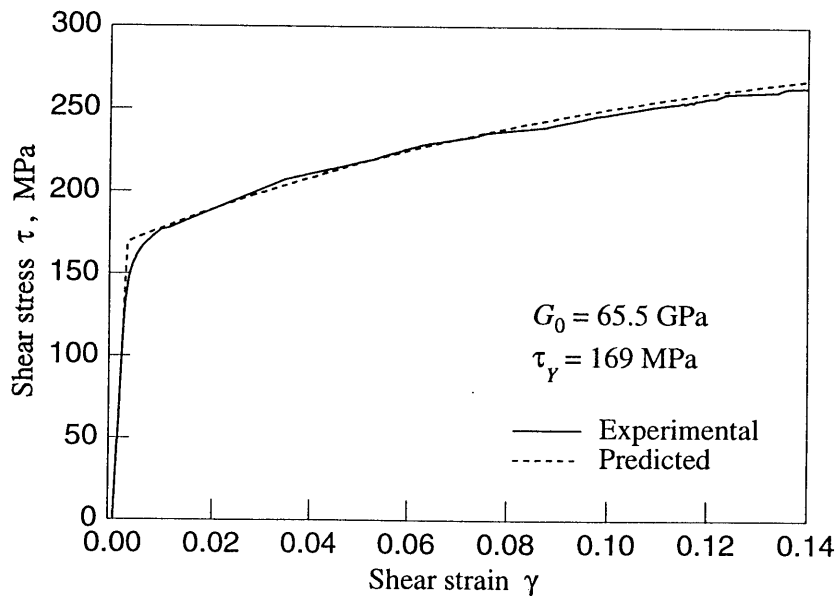


図 6.6 ねじり過程におけるせん断応力-せん断ひずみ曲線

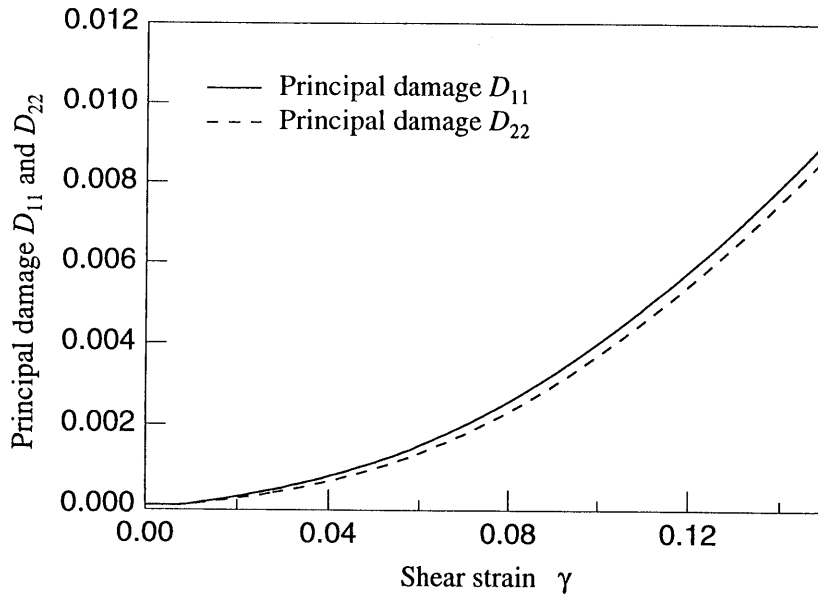


図 6.7 ねじり過程における損傷の発展

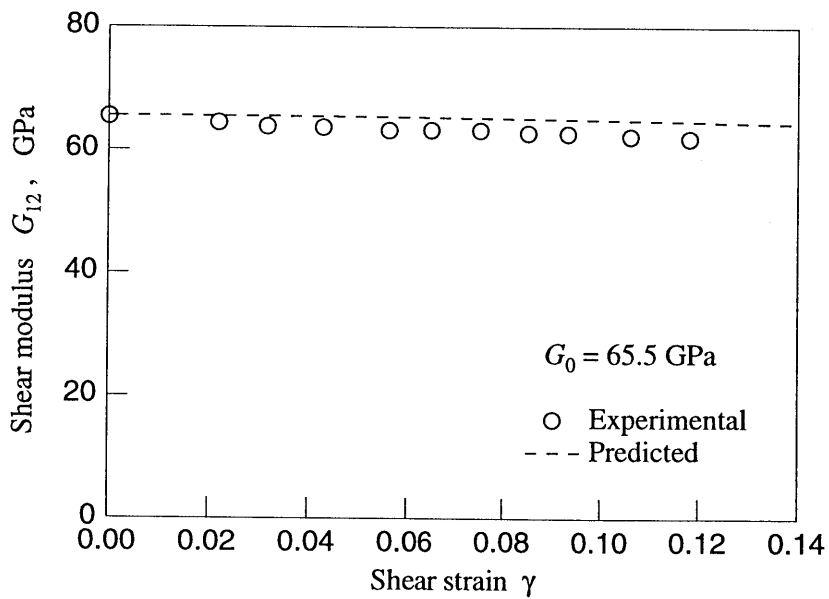


図 6.8 横弾性係数 G_{12} の変化

よる計算結果の比較を示す。この図を見ると、せん断降伏応力は約 169MPa であるが、これは引張りにおける降伏応力の約 $1/\sqrt{3}$ である。これから、この材料の初期降伏は Mises の降伏条件によって記述できることがわかる。計算結果は、ねじり負荷に対する弾性変形と降伏後の損傷を伴う塑性変形もよく表現している。

次に図 6.7 は、式(6.38)から計算した損傷変数の発展を示す。この図に関しては、損傷挙動をわかりやすく表示するため、主応力方向における損傷値を示してある。本計算の場合、主引張り応力方向の損傷 D_{11} の方が主圧縮応力方向の損傷 D_{22} よりも若干大きく、

球状黒鉛鋳鉄の損傷に対する応力方向依存性を示している。

最後に図 6.8 は、式(6.44)から得られた横弾性係数 G_{12} の変化を示す。この図から、損傷の影響は横弾性係数 G_{12} にも現れ、破損時の横弾性係数は、初期横弾性係数 G_0 の約 93% になっている。本構成式は、ねじりにおける弾性特性の劣化を適切に予測することができる。

6.3.4 損傷面に対する計算

図 6.9 の各記号○、□および△は、実験によって得られた球状黒鉛鋳鉄の引張り-ねじり応力空間における損傷面を示す。また実線と2種類の破線は、引張り-ねじり応力状態における損傷面(6.24)に対する計算結果である。計算による損傷面は、単軸引張りに対して計算した $B_0 + B$ に対して、式(6.24)を満たすような引張り応力 σ およびせん断応力 τ を求め、それを図中にプロットした。

図 6.9 の記号○と実線で示される初期損傷面の実験および計算の結果は、引張り-ねじり組合せ応力空間内で楕円によって表現でき、損傷面(6.27)を損傷共役力 Y の1次同次式で表現したことの妥当性を示している。また、そのアスペクト比 σ/τ は 1.46 であり、静水応力成分を考慮していない Mises 型の楕円形状 (アスペクト比 $\sigma/\tau = \sqrt{3}$) とは若干異なる値を示している。すなわち、損傷の発生・成長に対しては、静水応力成分の影響が無視できない。

次に後続損傷面を見ると、この曲面のアスペクト比 σ/τ は 1.62 であり、初期損傷面と

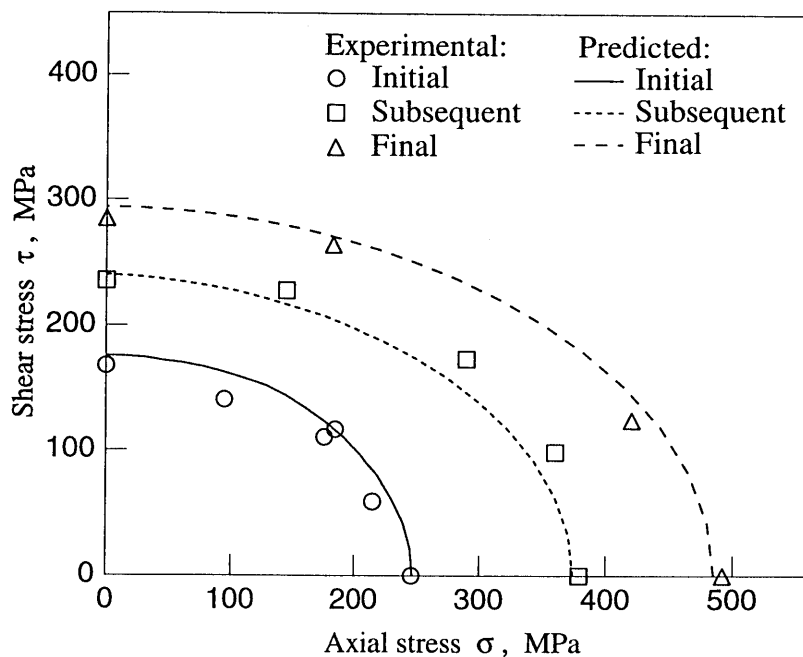


図 6.9 組合せ応力空間における損傷面

比較すると後続損傷面の方がより Mises の条件に近い形状をしている。これは、この材料は変形が進むにつれて、フェライト基地の塑性変形が支配的となり、最終的にその延性破壊によって破断に至ることが原因と考えられる。すなわち、損傷が発展するに従って塑性変形に依存した損傷が支配的となる。

最終破壊面のアスペクト比はほぼ $\sqrt{3}$ であった。本章で定式化した損傷面(6.27)とその法線則によって得られる発展式(6.29)は、以上の実験結果によく一致しており、損傷発展に対する静水応力および塑性ひずみ依存性を適切に反映したモデルとなっている。

6. 4 Helmholtz の自由エネルギーによる定式化との比較

著者らは第4章[107, 108]において、Helmholtz の自由エネルギーを用い、本章と同様な弾塑性-損傷材料の構成式と損傷発展式を定式化し、その結果を実験的に検討した。しかし、その際に導かれた損傷材料の弾性特性は式(6.31), (6.32), (6.44)のように簡単な形で表現することは困難であり、数値計算によらねばならなかった。さらに第4章[107, 108]の理論では、損傷共役力は弾性ひずみの関数であるため、損傷面に対する理論と実験結果の比較は、与えられた応力状態から得られる弾性ひずみによらなければならない。しかし、損傷材料では弾性定数は損傷の発展と共に変化するため、弾性ひずみを独立変数とするのは、若干の困難さがある。

これに対して、Gibbs の熱力学ポテンシャルを用いた本章では、損傷共役力が応力の関数となるため、応力空間での損傷面に対する実験結果を適切に表現するような関数を、損傷共役力の関数として表現することがより容易になる。

さらに、両理論による計算結果を比較すると、両者とも単軸引張りならびに単純ねじり試験に対する実験結果をよく表現しているが、損傷変数の発展については明らかな違いが見られる。すなわち、第4章[107, 108]では、損傷の塑性ひずみ依存性を考慮していないため、本章の図 6.5 および図 6.7 より異方性が大きくなっている。また、損傷の発達速度はひずみが大きくなるにつれて小さくなるという不自然さが認められた。しかし、本章では損傷発展の異方性はそれほど著しくないものの、塑性ひずみの増加と共に増大する損傷の様子を適切に表現している。

6. 5 本章のまとめ

延性破壊が支配的となる弾塑性-損傷においては、損傷の発生・成長に対する静水応力

依存性，塑性ひずみ依存性が重要な因子となる．また，損傷面に対する従来の実験的検討の多くは，応力空間において行われている．

本章では，損傷共役力 Y を応力テンソル σ の関数として表現するため，Gibbs の熱力学ポテンシャルを用いた不可逆熱力学構成式理論を展開するとともに，得られた構成式および損傷発展式を，球状黒鉛鋳鉄の薄肉円管試験片による組合せ応力弾塑性-損傷挙動に関する著者らの実験結果と比較することによって，その妥当性を検討した．すなわち，導かれた構成式に基づき単軸引張り試験における応力-ひずみ曲線，縦弾性係数および Poisson 比の変化，ならびに初期損傷面を表現できるように定めた材料定数を用いて，ねじり試験におけるせん断応力-せん断ひずみ曲線，横弾性係数，後続損傷面，ならびに最終損傷面を計算したところ，いずれの結果も実験結果とよい一致を示した．また計算によって得られた損傷の発達は，単軸引張り，ねじり試験ともに静水応力と塑性ひずみに対する顕著な依存性により，ほぼ等方的な挙動を示した．

続いて，Gibbs の熱力学ポテンシャルに基づいて展開した本理論を，Helmholtz の自由エネルギーを用いて定式化した著者らの第 4 章[107, 108]における理論と比較したところ，本理論は応力空間で行われる弾塑性-損傷材料の損傷挙動の実験結果を反映させることがより容易であることがわかった．

第7章 結 論

工業用材料では、負荷の作用によって弾塑性変形を生じるとともに、微視的空げきの発生・成長により材料損傷の引き起こされる場合が少なくない。また、このような微視的空げきの発生・成長は一般には応力の作用方向に依存し、材料損傷は顕著な異方性を示す。このような多数の分布空げきを連続的な力学変数、すなわち損傷変数によって記述し、この変数によって材料中の微視的空げきの発達と、空げきを含む材料の力学的挙動を連続体力学的観点から研究する連続体損傷力学は、材料損傷による材料劣化、微視的き裂の発生から最終破壊に至る過程を、統一的に取り扱うことのできる解析手法として大きな発展を遂げてきた。

しかし、従来の大部分の研究では損傷の発展式は変形の構成式とは独立に、先験的な仮定によって定式化しておりその理論的基礎は必ずしも明確ではない。したがって、損傷力学による定式化を一層精密化するためには、損傷材料に対する構成式と損傷発展式の系統的な定式化のための理論的枠組みの確立が不可欠である。

現在の非線形連続体力学では、非弾性変形を統一的に記述するための枠組みとして、内部状態変数を用いた不可逆熱力学構成式理論が提案されており、これまでに多くの研究がなされている。したがって、材料の内部状態変化である損傷を適切な内部状態変数で表現することができれば、この理論によって損傷力学における構成式および損傷発展式の統一的定式化が可能となる。しかし、従来の不可逆熱力学理論による損傷力学に対する理論的および実験的研究は、十分に行われているとは言い難い。

本研究では、損傷力学に対する従来の熱力学理論の曖昧さを除き、構成式と損傷発展式の系統的な定式化を行うため、不可逆熱力学構成式理論を厳密に適用した損傷力学を展開した。さらに、その適用の可能性と限界を検討するため、種々の特徴的な材料に対する損傷・変形過程のモデル化とその実験的検討を行った。本研究の内容、ならびに本研究で得られた主な結果を各章毎に要約すると以下ようになる。

第2章では、本研究の展開のための理論的枠組みとして、不可逆熱力学構成式理論の概念、理論的基礎、可能性ならびに限界と、連続体損傷力学へのその応用の可能性を概説した。ここでは特に、これまでに提案されてきた熱力学理論に基づく損傷力学理論を展望し、損傷発展式の定式化に対しては必ずしも熱力学的制約を満足しているとは言えない理論が多いことを指摘した。

第3章では、第2章で展望した内部状態変数不可逆熱力学構成式理論を、コンクリートや岩石等のように、弾性領域内で損傷が進行し、塑性変形を生ずることなく最終破断に至る弾性-脆性材料に対して適用した。このとき内部状態変数として、応力の作用方向

に依存した微視的き裂による異方的な損傷状態を2階対称損傷テンソル D で記述するとともに、損傷材料に対する Helmholtz の自由エネルギーを、弾性ひずみテンソル ϵ^e および損傷テンソル D の等方スカラー値関数として表現した。また、微視的き裂の開・閉口の影響を考慮するため、Helmholtz の自由エネルギーに修正ひずみテンソル $\bar{\epsilon}^e$ を導入することによってこの効果を表現した。一方、損傷発展を規定する散逸ポテンシャルは、損傷テンソル D に対する共役力テンソル Y の2次同次式によって表現した。続いて、得られた構成式と損傷発展式の妥当性を検討するため、この理論を高強度コンクリートの弾性-損傷過程に適用した。材料定数は、高強度コンクリートの単軸単調圧縮試験結果から決定した。導かれた式は、損傷の発達に伴う材料の剛性低下の様子をよく記述するとともに、修正ひずみテンソルの導入によって圧縮と引張りにおける材料挙動の違い、ならびにこれを支配する損傷テンソル成分の差異を明らかにした。この結果は、実際の高強度コンクリートの変形・破壊過程を適切に表現していることを確かめた。

さらに、いくつかの異なる組合せ応力経路に対する損傷解析を行い、損傷の発達の応力経路依存性ならびにせん断応力の引張りひずみに対する連成効果も明らかにした。

次に、第4章では、不可逆熱力学構成式理論に基づく損傷力学理論を、弾塑性-損傷材料に対して展開した。内部状態変数には、2階対称な損傷テンソル D のほかに、塑性変形による等方硬化を表現するスカラー変数 r と引き続き生ずる損傷を規定するスカラー変数 β を導入し、さらに塑性挙動と損傷の非連成を仮定して Helmholtz の自由エネルギーおよび散逸ポテンシャル面を規定した。ここでも、微視的き裂の開・閉口効果による損傷の応力方向依存性を考慮するため、修正ひずみテンソル $\bar{\epsilon}^e$ を Helmholtz の自由エネルギーに導入した。塑性構成式および損傷発展式は、塑性ポテンシャル面および損傷ポテンシャル面に対する法線則によって与えられることを示した。得られた構成式と損傷発展式を球状黒鉛鑄鉄の単軸引張りならびにねじり試験に適用し、その妥当性を検討した。この結果、塑性変形に伴って発展する損傷の影響を考慮することにより、弾塑性-損傷材料の応力-ひずみ関係だけではなく、引張りにおける縦弾性係数 E_1 、Poisson 比 ν_{12} 、ならびにねじり試験における横弾性係数 G_{12} の変化を適切に表現することができた。さらに、修正ひずみテンソル $\bar{\epsilon}^e$ の導入により、ねじり試験の主方向の応力の符号による損傷発展の差異を適切に表現できることも明らかにした。

不可逆熱力学理論は、熱力学的に許容な構成式および損傷発展式を定式化するための制約条件を与えるにすぎないから、具体的条件下での構成式の基本的特性の同定は実験に待たなければならない。そこで第5章では、球状黒鉛鑄鉄の薄肉円管試験片を用いて、弾塑性-損傷材料における損傷面の存在とその力学的特性に対する実験的検討を行った。

すなわち、第5章では、この材料の基本的な弾塑性-損傷挙動を調べるために、その初期等方性と単軸引張りおよび単純ねじり試験による弾塑性-損傷挙動を、弾塑性特性の変化

によって調べた。次に、初期および後続損傷面の存在、形状、基本的特性などを明らかにするため、引張り-ねじり組合せ応力空間における初期および後続損傷面の存在とその形状に対する実験的検討を行った。損傷の検出には、材料内部の微視的き裂の発生・成長に伴って発生する AE (Acoustic Emission)を用いた。これらの実験の結果、初期等方である球状黒鉛鋳鉄では、損傷の発生・成長によって縦弾性係数 E_1 、Poisson 比 ν_{12} および横弾性係数 G_{12} がともに減少し、その弾性特性は異方的となることがわかった。また、引張り-ねじり組合せ応力空間内に損傷発生の限界を規定する損傷面が存在し、その形状は応力の静水圧成分に依存し、Mises 型では表現できないことを明らかにした。さらに、初期損傷面上の後続負荷に対しては損傷の継続的な発生が見られるが、除荷および中立負荷に対しては損傷は発生せず、負荷、除荷および中立負荷が成り立つことを確かめた。しかし、応力空間内における損傷面が、熱力学的な散逸ポテンシャル面として取り扱うことができるかどうかは、さらに適切な実験的検討が必要である。

延性破壊が生じる程度の大きな変形状態においては、損傷の発生・成長に対する静水応力依存性、塑性ひずみ依存性が現れる。また、損傷面に対する実験的検討の多くは応力空間において行われている。このため、弾塑性-損傷材料挙動をより精密に表現するためには、損傷の発達に対する塑性ひずみの影響を考慮するとともに、上述の実験的結果を構成式に適切に反映することが不可欠である。そこで、第6章では Gibbs の熱力学ポテンシャルを用いた新しい不可逆熱力学構成式理論を展開し、損傷共役力 Y を応力テンソル σ の関数として表現した。このとき、損傷ポテンシャル面に塑性ひずみに関連する等方硬化スカラー変数 r を導入した。また、修正応力テンソル $\bar{\sigma}$ を Gibbs の熱力学ポテンシャルに導入することにより、本材料の微視的き裂の開・閉口効果による損傷の応力方向依存性を表現した。

第6章ではさらに、得られた構成式および損傷発展式を、第5章の球状黒鉛鋳鉄円管試験片による組合せ応力空間における損傷の実験結果に対して適用した。単軸引張り試験における縦弾性係数 E_1 と Poisson 比 ν_{12} の変化、ならびに初期損傷面を表現できるように定めた材料定数を用いて、ねじり試験におけるせん断応力-せん断ひずみ曲線、横弾性係数 G_{12} 、後続損傷面、ならびに最終損傷（破壊）面を計算したところ、いずれの結果も理論とよい一致を示した。また、計算によって得られた損傷変数の発達は、単軸引張り、ねじり試験ともに、静水応力と塑性ひずみに対する顕著な依存性により、ほぼ等方的な挙動を示すことを明らかにした。

本論文では、材料内部の界面はく離が損傷の主原因であるような高強度コンクリートおよび球状黒鉛鋳鉄に対して不可逆熱力学構成式理論の適用を試みた。この理論によれば、損傷の物理的機構を適切に表現できるような損傷変数を導入することにより、一層広範囲の非弾性変形挙動の合理的な定式が可能となる。

謝 辞

本研究を遂行するにあたり、終始懇切なご指導とご鞭撻を賜った名古屋大学工学部 村上澄男教授，ならびに本論文の内容に関して、有益なご教示とご批判を賜った同工学部 田中啓介教授，大野信忠教授に心から御礼申し上げます。

また、本研究の実施にあたり、終始行き届いたご指導とご支援を賜った名古屋大学工学部 機械工学教室 田中英一助教授，金川靖助教授，劉彦助手，ならびに多大なご助力を頂いた玉置一雄技官をはじめとする弾塑性学講座の皆様へ深く感謝いたします。

なお、本研究で用いた球状黒鉛鋳鉄試験片の調製については、トヨタ自動車株式会社 山内康仁取締役ならびに同明知工場 藤尾俊一室長に格別のご高配を賜りました。ここに厚く御礼申し上げます。

最後に、終始あたたかい激励を頂いた妻 真紀に感謝します。

1996年1月

名古屋大学大学院工学研究科
機械工学及び機械工学第二学科専攻

早 川 邦 夫

参 考 文 献

- [1] Kachanov, L. M., Introduction to Continuum Damage Mechanics., Martinus-Nijhoff, 1986.
- [2] Lemaitre, J. and Chaboche, J. -L., “Aspect Phénoménologique de la Rupture par Endommagement”, *J. Méc. Appl.*, **2**(1978), pp.317.
- [3] Chaboche, J. -L., “Continuous Damage Mechanics - A Tool to Describe Phenomena Before Crack Initiation”, *Nucl. Engng. Des.*, **64-2**(1981), pp.233.
- [4] Chaboche, J. -L., “Anisotropic Creep Damage in the Framework of Continuum Damage Mechanics”, *Nucl. Engng. Des.*, **79-3**(1984), pp.309.
- [5] Krajcinovic, D. and Lemaitre, J. (ed.), Continuum Damage Mechanics -Theory and Applications., Springer, 1986.
- [6] Murakami, S., “Progress of Continuum Damage Mechanics”, *JSME. Int. Journal*, **30-263**(1987), pp.701.
- [7] 村上澄男, “損傷力学－材料の損傷と破壊への連続体的アプローチ”, *材料*, **31**(1982), pp.1.
- [8] 村上澄男, “損傷力学とその最近の発達”, *日本機械学会論文集*, **A-51**(1985), pp.1651.
- [9] Murakami, S. “Anisotropic Damage in Metals” in Failure Criteria of Structured Media (Boehler, J. P. ed.), A. A. Balkema, 1993, pp.99.
- [10] Chaboche, J. -L., “Continuum Damage Mechanics. Part I”, *J. Appl. Mech.*, **55**(1988), pp.59.
- [11] Chaboche, J. -L., “Continuum Damage Mechanics. Part II”, *J. Appl. Mech.*, **55**(1988), pp.65.
- [12] Krajcinovic, D., “Damage Mechanics”, *Mech. Mat.*, **8** (1989), pp.117.
- [13] Lemaitre, J. and Chaboche, J. -L., Mechanics of Solid Materials, Cambridge University Press, 1990.
- [14] Lemaitre, J., A Course on Damage Mechanics, Springer-Verlag, 1992.
- [15] Krajcinovic, D., “Continuum Damage Mechanics”, *Appl. Mech. Rev.*, **37-1** (1984), pp.1.
- [16] Murakami, S., “Notion of Continuum Damage Mechanics and Its Application to Anisotropic Creep Damage Theory”, *Trans. ASME, J. Engng Mar. Tech.*, **105** (1983), pp.99.
- [17] Kachanov, L. M., “On Rupture Time Under Condition of Creep”, *Izv. Acad. Nauk SSSR, Otd. Tekh. Nauk*, **8**(1958), pp.26. (in Russian)
- [18] Rabotnov, Yu. N., Creep Problems in Structural Members, North-Holland, Amsterdam, 1969.

- [19] Kachanov, L. M., "On the Continuum Theory of Media with Crack", *Mekh, Tverdogo Tiela*, **2**(1972), pp.26 (in Russian).
- [20] Martin, J. B. and Leckie, F. A., "On The Creep Rupture of Structure", *J. Mech. Phys.*, **20** (1972), pp.223.
- [21] Hayhurst, D. R. and Leckie, F. A., "The Effect of Creep Constitutive and Damage Relationships Upon the Rupture Time of a Solid Circular Torsion Bar", *J. Mech. Phys. Solids*, **21** (1973), pp.431.
- [22] Cozzarelli, F. A. and Bernasconi, G., "Non-linear Creep Damage under One-Dimensional Variable Tensile Stress", *Int. J. Non-linear Mech.*, **16-1**(1981), pp.11.
- [23] Kachanov, L. M., *Foundations of Fracture Mechanics*, Moscow, Nauk, 1974.
- [24] Hayhurst, D. R. and Storåkers, B., "Creep Rupture of the Andrade Shear Disk", *Phil. Trans. Royal Soc. London, Ser. A***349** (1976), pp.369.
- [25] Murakami, S. and Ohno, N., "A Constitutive Equation of Creep Damage in Metals" in *Euromech Symposium 111, Constitutive Equation in Inelasticity*.
- [26] Murakami, S. and Ohno, N., "A Continuum Theory of Creep and Creep Damage" in *Creep in Structures 1980, 3rd IUTAM Symposium on Creep in Structures.*, Springer, 1981, pp.422
- [27] Krajcinovic, D. and Selvaraj, S., "Creep Rupture of Metals - An Analytical Model", *Trans. ASME., J. Engng Mat. Tech.*, **106**(1984), pp.405.
- [28] Chaboche, J. -L., "The Concept of Effective Stress Applied to Elasticity and Anisotropic Damage" in *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids* (Boehler, J. P. ed.), The Hague (Martinus-Nijhoff), 1982, pp.737.
- [29] Vakulenko, A. A. and Kachanov, L. M., "Continuum Theory of Media with Cracks", *Mekh. Tverdogo Tiela*, **4** (1971), pp.59. (in Russian)
- [30] Kachanov, M. L., "Continuum Model of Medium with Crack", *Trans. ASCE., J. Engng. Mech. Div.*, **106-EM5**(1980), pp.1039.
- [31] Dragon, A. and Mróz, Z., "A Continuum Model for Plastic-Brittle Behaviour of Rock and Concrete", *Int. J. Engng. Sci.*, **17**(1979), pp.121.
- [32] Krajcinovic, D. and Fonseka, G. U., "The Continuous Damage Theory of Brittle Materials Part I, General Theory", *Trans. ASME., J. Appl. Mech.*, **48**(1981), pp.809.
- [33] Fonseka, G. U. and Krajcinovic, D., "The Continuous Damage Theory of Brittle Materials Part II, Uniaxial and Plane Response Modes", *Trans. ASME., J. Appl. Mech.*, **48**(1981), 819
- [34] Krajcinovic, D., "Constitutive Equation for Damaging Materials", *Trans. ASME., J. Appl.*

- Mech.*, **50**(1983), pp.355.
- [35] Ilankamban, R. and Krajcinovic, D. "A Constitutive Theory for Progressively Deteriorating Brittle Solids", *Int. J. Solids Struct.*, **23**(1987), pp.1521.
- [36] Cordebois, J. P. and Sidoroff, F., "Damage Induced Anisotropy" in Mechanical Behavior of Anisotropic Solids (Boehler, J. P. ed.), The Hague (Martinus-Nijhoff), 1982, pp.737.
- [37] Cordebois, J. P. and Sidoroff, F., "Endommagement Anisotrope en Elasticité et Plasticité", *J. Méc. Théor. Appl., Numéro Spécial* (1982), pp.45.
- [38] Ladeveze, P. and Lemaitre, J., "Damage Effective Stress in Quasi-Unilateral Conditions", The 16th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 1984.
- [39] Mazars, J., Pijaudier-Cabot, G., "Continuum Damage Theory - Application to Concrete", *Trans. ASCE., J. Engng. Mech.*, **115-2**(1989), pp.345.
- [40] Davison, L. and Stevens, A. L., "Thermodynamical Constitution of Spalling Elastic Bodies", *J. Appl. Phys.*, **44**(1973), pp.668.
- [41] Davison, L., Stevens, A. L. and Kipp, M. E., "Theory of Spall Damage Accumulation in Ductile Metals", *J. Mech. Phys. Solids*, **25**(1977), pp.11.
- [42] 村上澄男, 榎田努, 滝澤宙, 伊東雅晴, "損傷力学によるスポール損傷の軸対称解析", 日本機械学会論文集, A-**61**(1995), pp.1383.
- [43] Lemaitre, J. and Chaboche, J. -L., "A Non-Linear Model of Creep-Fatigue Damage Cumulation and Interaction" in Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies(Hult, J. ed.), Springer, Berlin, 1975, pp.291.
- [44] Gittus, J., Irradiation Effects in Crystalline Solids, Applied Science Publishers, 1978.
- [45] 村上澄男, 水野衛, 岡本俊昭, "照射損傷条件下における照射クリープとスエリングの構成式", 材料, **39** (1990), pp.1353.
- [46] Murakami, S. and Mizuno, M., "A Constitutive Equation of Creep, Swelling and Damage under Neutron Irradiation Applicable to Multiaxial and Variable States of Stress", *Int. J. Solids Structures*, **29-19** (1992), pp.2319.
- [47] Murakami, S., Hayakawa, K. and Mizuno, M., "Application of Double Cantilever Beam Model to the Analysis of Creep Crack Growth under Neutron Irradiation", *Eur. J. Mech., A/Solids*, **12-2** (1993), pp.249.
- [48] 村上裕則, 大南正瑛, 破壊力学入門, オーム社, 1979.
- [49] 青木繁ほか (大路清嗣編), 破壊強度学, オーム社, 1985.
- [50] Leckie, F. A. and Hayhurst, D. R., "Constitutive Equation for Creep Rupture", *Acta Metall.*, **25**(1977), pp.1059.
- [51] Saanouni, K., Chaboche, J. -L. and Bathias, C., "On The Creep Crack Growth Prediction

- by a Local Approach”, *Engng. Fract. Mech.*, **25-5/6**(1986), pp.677.
- [52] Lemaitre, J., “Local Approach to Fracture”, *Engng. Fract. Mech.*, **25**(1986), pp.523.
- [53] Murakami, S. and Liu, Y., “Mesh-Dependence in Local Approach to Creep Fracture”, *Int. J. Damage Mech.*, **4**(1995), pp.230.
- [54] Liu, Y., Murakami, S. and Kanagawa, Y., “Mesh-Dependence and Stress Singularity in Finite Element Analysis of Creep Crack Growth by Continuum Damage Mechanics Approach”, *Eur. J. Mech., A/Solids*, **13-3**(1994), pp.395.
- [55] Murakami, S., Kawai, M. and Rong, H., “Finite Element Analysis of Creep Crack Growth by a Local Approach”, *Int. J. Mech. Sci.*, **30**(1988), pp.491.
- [56] Murakami, S., “Mechanical Modeling of Material Damage”, *Trans. ASME., J. Appl. Mech.*, **55**(1988), 280
- [57] 村上澄男, “連続体損傷力学における損傷変数と有効応力”, 日本機械学会論文集, **A-54**(1988), pp.831.
- [58] Radayev, Yuri N., 村上澄男, 早川邦夫, “連続体損傷力学における異方損傷状態の数学的モデル化”, 日本機械学会論文集, **A-60**(1994), pp.2750.
- [59] Betten, J., “Damage Tensor in Continuum Mechanics”, *J. Méc. Théor. Appl.*, **2**(1983), pp.13.
- [60] Leckie, F. A. and Onat, E. T., “Tensorial Nature of Damage Measuring Internal Variables” in *Physical Non-Linearities in Structural Analysis* (Hult, J. and Lemaitre, J. eds.), Springer, Berlin, 1981, pp.140.
- [61] Onat, E. T. and Leckie, F. A., “Representation of Mechanical Behavior in the Presence of Changing Internal Structure”, *Trans. ASME., J. Appl. Mech.*, **55**(1988), pp.1.
- [62] Lemaitre, J. and Dufailly, J., “Damage Measurements”, *Engng. Fract. Mech.*, **28**(1987), pp.643.
- [63] Coleman, B. D. and Noll, W., “The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **13**(1963), pp.167.
- [64] Coleman, B. D., “Thermodynamics of Materials with Memory”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **17**(1964), pp.1.
- [65] Truesdell, C. and Noll, W., “The Non-Linear Field Theories of Mechanics”, in *Encyclopedia of Physics* (Flügge, S., ed.), III/3, Springer-Verlag, 1965.
- [66] Truesdell, C. A., *Rational Thermodynamics*, McGraw-Hill, 1969.
- [67] Leigh, D. C., *Nonlinear Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, 1968.
- [68] Malvern, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall(1969)

- [69] Coleman, B. D. and Gurtin, M. E., "Thermodynamics with Internal State Variables", *J. Chem. Phys.*, **47-2**(1967), pp.597.
- [70] Lubliner, "On the Thermodynamic Foundation of Non-linear Solid Mechanics", *Int. J. Non-linear Mech.*, **7**(1972), pp.237.
- [71] Germain, P., Nguyen, Q. S. and Suquet, P., "Continuum Thermodynamics", *Trans. ASME., J. Appl. Mech.*, **50**(1983), pp.1010.
- [72] 北川 浩, 弾・塑性力学, 裳華房, 1987.
- [73] Rice, J. R. "Inelastic Constitutive Relations for Solids: An Internal Variable Theory and Its Application to Metal", *J. Mech. Phys. Solids*, **19**(1971), pp.433.
- [74] Rice, J. R., "Continuum Mechanics and Thermodynamics of Plasticity in Relation to Microscale Deformation Mechanisms" in *Constitutive Equations Plasticity* (Argon, A. S. ed.), The MIT Press, 1975.
- [75] Maugin, G. A., *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*, Cambridge University Press, 1992.
- [76] Maugin, G. A. and Muschik, W., "Thermodynamics with Internal Variables, Part I. General Concepts", *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, **19** (1994), pp.217.
- [77] Maugin, G. A. and Muschik, W., "Thermodynamics with Internal Variables, Part II. Applications", *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, **19**(1994), pp.250.
- [78] Perzyna, P., "Thermodynamic Theory of Viscoplasticity", *Advan. Appl. Mech.*, **11**(1971), pp.313.
- [79] Cocks, A. C. F. and Leckie, F. A., "Creep Constitutive Equation for Damaged Materials", *Advan. Appl. Mech.*, **25**(1985), pp.239.
- [80] Lemaitre, J., "A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture", *Tans. ASME., J. Engng Mat. Tech.*, **107**(1985), pp.83
- [81] Saanouni, K., Forster, Ch. and Harita, F. Ben, "On the Anelastic Flow with Damage", *Int. J. Damage Mech.*, **3** (1994), pp.141.
- [82] Chow, C. L. and Wang, J., "An Anisotropic Theory of Continuum Damage Mechanics for Ductile Fracture", *Engng. Fract. Mech.*, **27-5**(1987), pp.547.
- [83] Chow, C. L. and Wang, J., "A Finite Element Analysis of Continuum Damage Mechanics For Ductile Fracture", *Int. J. Fract.*, **38**(1988), pp.83.
- [84] Chow, C. L. and Lu, T. J., "On Evolution Laws of Anisotropic Damage", *Engng. Fract. Mech.*, **34-3**(1989), pp.679.
- [85] Chow, C. L. and Wang, J., "A Continuum Damage Mechanics Model for Crack Initiation in Mixed Ductile Fracture", *Int. J. Fract.*, **47**(1991), pp.145.

- [86] Lu, T. J. and Chow, C. L., "On Constitutive Equations of Inelastic Solids with Anisotropic Damage", *Theor. Appl. Fract. Mech.*, **14**(1990), pp.187.
- [87] Chow, C. L. and Yang, F., "On One-Parameter Description of Damage State for Brittle Materials", *Engng. Fract. Mech.*, **40-2**(1991), pp.335.
- [88] Chow, C. L. and Lu, T. J., "An Analytical and Experimental Study of Mixed-Mode Ductile Fracture under Nonproportional Loading", *Int. J. Damage. Mech.*, **1**(1992), pp.191.
- [89] Chow, C. L., Liu, Y. J. and Asundi, A., "An Incremental Stress-Based Constitutive Modeling on Anisotropic Damaged Materials", *Int. J. Fract.*, **64**(1993), pp.299.
- [90] Voyiadjis, G. Z. and Kattan, P. I., "A Coupled Theory of Damage Mechanics and Finite Strain Elasto-Plasticity—I. Damage and Elastic Deformations", *Int. J. Engng. Sci.*, **28-5**(1990), pp.421.
- [91] Kattan, P. I. and Voyiadjis, G. Z., "A Coupled Theory of Damage Mechanics and Finite Strain Elasto-Plasticity—II. Damage and Finite Strain Plasticity", *Int. J. Engng., Sci.*, **28-6**(1990), pp.505.
- [92] Simo, J. C. and Ju, J. W., "Strain- and Stress-Based Constitutive Damage Models - I. Formulation", *Int. J. Solids Structures*, **23-7**(1987), pp.821.
- [93] Ju, J. W., "On Energy-Based Coupled Elastoplastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspects", *Int. J. Solids Structures*, **25-7**(1989), pp.803.
- [94] Simo, J. C. and Ju, J. W., "Strain- and Stress-Based Constitutive Damage Models - II. Computational Aspects", *Int. J. Solids Structures*, **23-7**(1987), pp.841.
- [95] Yazdani, S. and Schreyer, H.L., "Combined Plasticity and Damage Mechanics Model for Plain Concrete", *Trans. ASCE., J. Engng. Mech.*, **116-2**(1990), pp.1435.
- [96] Curtis, P. T., Bader, M. G. and Bailey, J. E., "The Stiffness and Strength of a Polyamid Thermoplastic Reinforced with Glass and Carbon Fiber", *J. Mat. Sci.*, **13**(1978), pp.377.
- [97] Holcomb, D. J. and Costin, L. S., "Detecting Damage Surfaces in Brittle Materials Using Acoustic Emissions", *Trans. ASME., J. Appl. Mech.*, **53**(1986), pp.536.
- [98] Chaboche, J. -L., "Damage Induced Anisotropy: On the Difficulties Associated with the Active / Passive Unilateral Condition", *Int. J. Damage Mech.*, **1**(1992), pp.148.
- [99] Chaboche, J. -L., "Development of Continuum Damage Mechanics for Elastic Solids Sustaining Anisotropic and Unilateral Damage", *Int. J. Damage Mech.*, **2**(1993), pp.311.
- [100] Becker, E. and Bürger, W. (田中喜久昭, 田中正隆訳), 連続体力学-熱力学的基礎とその応用-, 森北出版, 1982.
- [101] 妹尾 学, 不可逆過程の熱力学, 東京化学同人, 1964.
- [102] 小野周, 槌田敦, 室田武, 八木江理編, 熱学第2法則の展開, 朝倉書店, 1990.

- [103] Hansen, N. R. and Schreyer, H. L., "A Thermodynamically Consistent Framework for Theories of Elastoplasticity Coupled with Damage", *Int. J. Solids Structures*, **31**(1994), pp.359.
- [104] Ju, J. W., "Isotropic and Anisotropic Damage Variables in Continuum Damage Mechanics", *Trans. ASCE, J. Engng. Mech.*, **116-12**(1990), pp.2764.
- [105] 村上澄男, 早川邦夫, "弾性-脆性材料の構成式と損傷発展式に対する不可逆熱力学理論", 日本機械学会論文集, A-59(1993), pp.1917.
- [106] Hayakawa, K. and Murakami, S., "Irreversible Thermodynamic Theory for Elastic-Brittle-Damage Materials", *Int. J. Mat. Sci.* (投稿中).
- [107] 早川邦夫, 村上澄男, "熱力学構成式理論による弾塑性-損傷材料の構成式と異方損傷発展式", 材料, **45-2**(1996) (印刷中)
- [108] Hayakawa, K., Murakami, S. and Liu, Y., "Irreversible Thermodynamics Theory for Elastic-Plastic-Damaging Materials", *Eur. J. Mech., A/Solids* (投稿中)
- [109] 早川邦夫, 村上澄男, "弾塑性-損傷材料のモデル化に対する実験的検討(多軸組合せ負荷における損傷面の検討)", 材料, **45**(1996) (印刷中)
- [110] Murakami, S., Hayakawa, K. and Liu, Y., "Damage Evolution and Damage Surface of Elastic-Plastic-Damaging Materials Under Multiaxial Loading", *Int. J. Damage Mech.* (投稿中)
- [111] 京極秀樹, 益川庄司, 森きよみ, 杉林俊雄, 鈴木寛, 篠原和充, "球状黒鉛鑄鉄の組合せ応力下における変形挙動と強度特性", 日本機械学会論文集, A-58(1992), pp.465.
- [112] 大津政康, *アコースティック・エミッションの特性と理論 - 構造物の稼働時の非破壊検査法*, 森北出版, 1988.
- [113] 岸 輝雄, "AEによる材料強度の評価 (I)", 材料, **29**(1980), pp.765.
- [114] 岸 輝雄, "AEによる材料強度の評価 (II)", 材料, **29**(1980), pp.908.
- [115] Lubarda, V. A. and Krajcinovic, D., "Constitutive Structure of Rate Theory of Damage in Brittle Elastic Solids", *Appl. Mech. Comput.*, **67**(1995), pp.81.
- [116] Yazdani, S., "On a Class of Continuum Damage Mechanics Theories", *Int. J. Damage Mech.*, **2** (1993), pp.162.
- [117] 早川邦夫, 村上澄男, "弾塑性-損傷材料に対する熱力学理論と応力空間における損傷発展式の定式化", 材料 (投稿中)

発 表 論 文

(学位論文に関するもの)

No.	論 文 題 目	発表雑誌などの名称 および発表時期	共同研究者
1	弾性-脆性材料の構成式と損傷発展式に対する不可逆熱力学理論	日本機械学会論文集, A 編, 59 巻 564 号 pp.1917 - 1924, (1993)	村上 澄男
2	熱力学構成式理論による弾塑性-損傷材料の構成式と異方損傷発展式	材料, 45 巻 2 号, pp. 176 - 182, (1996)	村上 澄男
3	弾塑性-損傷材料のモデル化に対する実験的検討 (多軸組合せ負荷における損傷面の検討)	材料, 45 巻 5 号, (1996) (掲載決定)	村上 澄男
4	Constitutive and Evolution Equations on Elastic-Brittle Materials Based on Irreversible Thermodynamics	International Journal of Mechanical Sciences, (1996) (掲載決定)	S. Murakami
5	Irreversible Thermodynamics Theory for Elastic-Plastic-Damaging Materials	European Journal of Mechanics, A/Solids (投稿中)	S. Murakami Y. Liu
6	Damage Evolution and Damage Surface of Elastic-Plastic-Damaging Materials Under Multiaxial Loading	International Journal of Damage Mechanics (投稿中)	S. Murakami Y. Liu
7	弾塑性-損傷材料に対する熱力学的理論と応力空間における損傷発展式の定式化	材料 (投稿中)	村上 澄男
8	Thermodynamic Theory for Constitutive and Evolution Equations of Materials with Anisotropic Damage	Proceedings of Asian Pacific Conference on Fracture and Strength '93, pp. 793 - 798, (1993)	S. Murakami
9	Anisotropic Damage Theory Based on Irreversible Thermodynamics	Proceedings of International Seminar on Microstructures and Mechanical Properties of New Engineering Materials, pp. 465 - 472, (1993)	S. Murakami
10	Observation of Elastoplastic Damage of Metals Under Combined State of Stress and Its Mechanical Modeling	Proceedings of Plasticity '95, pp. 771 - 774, (1995)	S. Murakami