報告番号	※乙第 **4391** 号

主論文の要旨

題名 Acceleration methods for slowly convergent sequences and their applications
(収束の遅い数列の加速法とその応用)

氏名 長田直樹

主 論 文 の 要 旨

報告番号	※ 乙 第　　　　号	氏 名	長田直樹

自然科学や工学の問題を数学的に扱うとき，収束する数列がしばしば登場する．それらの数列の中には，収束の速度がたいへん遅いものがあり，その極限値を得るには，収束の加速が必要になる．

数列 (s_n) の収束の速さは，誤差の比の極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_{n+1}-s}{s_n-s}=\lambda,\quad -1\leqq\lambda\leqq 1$$

が (存在するときには，この値が) 参考になる．一般に，$|\lambda|$ が 0 に近いときは収束は速く，$|\lambda|$ が 1 に近いときは収束は遅い．$-1\leqq\lambda<0$ または $0<\lambda<1$ のとき数列 (s_n) は線型収束するといい，$\lambda=1$ のとき対数収束するという．

任意の線型収束数列は Aitken のδ^2法により加速される (Henrici) が，対数収束数列についてはこのような加速法は存在しない (Delahaye and Germain-Bonne) ことが証明されている．したがって，対数収束数列の加速を考えるには，対数収束以外の別の条件をつけ加える必要がある．本論文では，数列の第 n 項を漸近展開したときの漸近列 (必ずしも収束しないある種の関数項級数に展開することを漸近展開するといい，展開に表れる関数列を漸近列という) により，線型収束列と対数収束列をさらに細かく分類し，加速法を考察する．

数列の加速法は，級数の和，非線型方程式の反復解法，数値積分，常微分方程式の初期値問題など広範に適用できる．本論文では，漸近展開が比較的容易に決定できる級数の部分和を数値例に取り，加速効果を調べる．また，加速法を数値積分 (無限積分と広義積分) へ応用する．

序文では，まず数列変換と加速について定式化する．加速は通常，収束する数列を別の数列へ変換することにより得られるからである．ついで，およそ 300 年前に関孝和が円周率の計算の際に用いた方法 (今日 Aitken のδ^2法と呼ばれて

主論文の要旨

報告番号	※ 乙第　　　　号	氏名	長田直樹

いる) を例に取り，加速法の有用性を示し，若干の理論的解説を行う．本論文で取り上げる多くの数列変換は，数列の極限値を未知数とする方程式を解くことにより得られるが，このような数列変換の導き方について簡単な説明を行う．その後，本論文の主題である漸近展開を利用する数列変換について，18 世紀前半から現在までの小史を概観する．最後に，論文全体の構成を述べる．

第 I 章では，収束の遅い数列に対する漸近的方法を扱う．第 I 章第 1 節において，漸近的方法として必要になる，Landau の O 記号や漸近展開，Bernoulli 数や Euler-Maclaurin の公式について説明する．第 2 節では，収束の速さに関する 2 つの指標を与える．第一は，収束の位数，第二は線型収束と対数収束である．第 3 節では，無限級数の部分和の漸近展開について述べる．扱う級数は，交代級数と対数収束級数で，いくつかの例も取り上げる．第 4 節は，数値積分の漸近展開に当てる．扱う積分は，収束の遅い 3 つの型の積分，つまり被積分関数が単調減少な半無限積分，半無限振動積分，端点に特異性がある広義積分であり，それぞれ典型的例を与える．第 3 節と第 4 節で取り上げた例は，第 II 章で加速法の適用対象として用いる．

第 II 章では，数列の加速法を扱う．第 5 節は第 II 章に対する序論の性格を有し，加速法の基礎概念である数列変換，収束の加速，および補外について述べた後，加速法を，計算に利用できるデータにより 3 通りに分類する．第 II 章第 6 節から第 13 節までは個々の加速法 (数列変換やそれを計算するための算法) を取り上げる．それぞれの加速法の導出を行った後，加速定理 (ある条件を満たす数列に加速法を適用すると収束が加速されるという定理) や漸近評価 (加速された数列と極限値との差は，n が大きくなったとき，どの様な n の関数で近似できるか) を述べる．既知の定理や評価式は引用にとどめ，筆者が与えた定理や評価式

主 論 文 の 要 旨

報告番号	※乙第　　　号	氏 名	長田直樹

については証明を付ける．また，それぞれの加速法 (E-算法を除く) を典型的な数列に適用し，その数値結果を与える．第 6 節から第 9 節で取り上げる加速法は，数値例と 7.1 節の Richardson 補外の誕生を除くとすべて既知の結果であるが，10 節以降の加速法との比較のために本論文に収録した．第 10 節から第 13 節までは，筆者が漸近評価を与えたり，一般化や自動化を行った加速法を扱っている．

第 6 節では，Brezinski の E-算法を導出し，基本定理と漸近評価を紹介する．第 7 節では Richardson 補外を扱う．7.1 節で Richardson 補外の起源にふれた後，7.2 節で Richardson 補外を導出し，漸近評価を与え，数値積分を用いて誤差の漸近評価の妥当性を調べる．7.3 節では Richardson 補外を 2 通りに拡張し，それぞれ数値積分あるいは無限級数に適用した数値結果を与える．第 8 節では，Wynn のϵ-算法を扱う．8.1 節で Shanks 変換を導いた後，8.2 節と 8.3 節でϵ-算法の定義と漸近的性質を紹介し，8.4 節で交代級数による数値例を与える．第 9 節では，Levin 変換を取り上げる．9.1 節で Levin 変換を導出し，E-算法による Levin 変換の計算方法を与える．ついで，9.2 節で Levin 変換の収束定理を述べ，無限級数に適用した数値結果を与える．9.3 節では，Levin 変換の拡張である Levin と Sidi の d-変換を導出し，E-算法による計算方法と数値例を与える．

第 10 節では，Aitken のδ^2法とその変形を扱う．10.1 節においてδ^2法の導出と，δ^2法がすべての線型収束数列を加速するという Henrici の定理を述べる．ついで，反復 Aitken δ^2法を定義し，ある種の線型収束数列に適用したさいの漸近評価と数値例を与える．10.2 節では，漸近展開を用いて Bjørstad 等による変形 Aitken δ^2法を導出し，彼らが与えた漸近公式を紹介し，数値例を与える．変形 Aitken δ^2法は，ある種の対数収束数列に有力な加速法であるが，対象となる数列の漸

主論文の要旨

報告番号	※乙第　　　号	氏名	長田直樹

近展開のべき指数が必要になるので，10.3 節では，べき指数を自動的に計算しながら変形 Aitken δ^2法を適用する算法と数値例を与える．この算法は，筆者の考案によるもので自動的変形 Aitken δ^2法と名づけ FORTRAN によるプログラムを付録に載せる．第 11 節では，Lubkin の W変換を扱う．11.1 節では，W変換を導出し，W変換と変形 Aitken δ^2法の関係を述べる．11.2 節において，W変換が真値を与えるための必要十分条件を紹介する．ついで，W変換により加速されるための十分条件を述べる．11.3 節では，反復 W変換と，その漸近公式を述べる．漸近公式は，Sablonnière が 1992 年になって与えたが，彼の示した係数に誤りがあるので，正しい係数と証明を付録に載せる．第 12 節では，Wynn のρ算法を扱う．12.1 節では，逆差分を用いてρ算法の導出を行う．12.2 節ではρ算法の漸近挙動について述べる．ρ算法が有効に働くための必要十分条件は筆者が与えたものである．第 13 節では，一般化ρ算法について述べる．13.1 節では，原数列の第 n 項の誤差がある種の漸近展開により表されるときρ算法が有効に働くように，ρ算法の一般化を行い，漸近公式も与える．一般化ρ算法は，変形 Aitken δ^2法と同様に対象となる数列の漸近展開のべき指数が必要になるので，13.2 節では，べき指数を自動的に計算しながら一般化ρ算法を適用する算法と数値例も示す．この算法は，筆者の考案によるもので自動的一般化ρ算法と名づけ FORTRAN によるプログラムを付録に載せる．

第 II 章第 14 節では，無限級数の部分和を用いて，8 節から 13 節で取り上げた加速法の比較を行う．14.1 節では，数列を漸近展開の型により分類し，7 個の数列の集合を定義し，14.2 節で，それぞれの集合から 1 ないし 2 個の典型的級数を取り上げる．14.3 節では，漸近展開の型が未知であっても適用できる 11 通りの加速法を，14.2 節の 12 個の級数に適用し，得られる有効桁数により比較を

主 論 文 の 要 旨

報告番号	※乙第　　　号	氏名	長田直樹

行う．14.4 節では対数収束数列から線型収束する部分列を抜き出し，5 通りの加速法を適用する．14.5 節に数値実験による結論をまとめた．もっとも広範な数列に有効な加速法は，$d^{(2)}$変換と $d^{(3)}$変換であるが，ある種の漸近展開をもつ数列に対しては，筆者の提案した自動的一般化ρ算法が最良である．対数収束数列から線型収束する部分列を抜き取りそれをϵ算法で加速する 14.4 節で考察した方法は，多くの項を必要とするが，高精度の結果が得られることが多い．

第 II 章第 15 節では，加速法の数値積分への応用を述べる．15.1 節で概観した後，15.2 節で半無限積分に適用する．被積分関数が単調減少の場合は，積分区間を等間隔に分割すると正項級数になるので，それに加速法を適用する．被積分関数が振動減衰の場合は，積分区間を被積分関数の零点で分割すると，交代級数が得られるので，それに加速法を適用する．前者では 3 つの積分，後者では 5 つの積分を取り数値実験を行ったところ，実用に使えるものと判断できる．15.3 節では，端点が代数的または対数的特異性を持つ場合の広義積分を扱う．数値積分公式として，2^nパネル中点則をとると，線型収束列が得られるので，これに加速法を適用する．4 つの積分を用いた数値実験では，倍精度計算で許容誤差を 10^{-6}としたときには，目的の結果が得られた．

結論では，数列を漸近展開の型で分類し，それぞれに対する最適な加速法を一覧表に示した．最後に，今後の研究課題を 4 つあげた．