

# アスペクト比が小さいテイラー渦 の実験的研究

戸 谷 順 信

図・本館

アスペクト比が小さいテイラー渦

の実験的研究

平成6年1月

戸谷 順信

名古屋大学図書
和 1168113

## 目 次

第 1 章	緒論	1
1. 1	研究の意義と目的	1
1. 2	過去の研究の概要	4
1. 2. 1	線形なテイラー渦流れの安定性	5
1. 2. 2	非線形なテイラー渦流れの安定性	9
1. 2. 3	有限長さの円筒間の流れに対する端面の影響	11
1. 2. 4	内外円管のレイノルズ数の変化における 各種のテイラー渦流れの安定性	15
1. 2. 5	その他の特殊な条件で発生するテイラー渦流れ	18
1. 3	本研究の概要	20
第 2 章	自由端と固定端の比較	23
2. 1	緒言	23
	第 2 章の主な記号	25
2. 2	実験装置と実験方法	26
2. 3	結果と考察	28
2. 3. 1	流れ場の構造	28
2. 3. 2	テイラー渦の形成過程とセル構造	28
2. 3. 3	レイノルズ数に対するセル高さの変化	31
2. 4	結言	33
第 3 章	テイラー渦の安定性	45
3. 1	緒言	45
	第 3 章の主な記号	46
3. 2	実験装置と実験方法	47
3. 3	結果と考察	48
3. 3. 1	波動テイラー渦分岐の臨界レイノルズ数の アスペクト比に対する変化	48

3. 3. 2	自由端の場合の奇数個のセル間における分岐	49
3. 3. 3	自由端の場合の奇数個と偶数個のセル間における分岐	50
3. 3. 4	アスペクト比と主モードの選択性	52
3. 4	結言	56
第4章	固定端の場合の流れの分岐	65
4. 1	緒言	65
	第4章の主な記号	66
4. 2	実験装置と実験方法	67
4. 3	結果と考察	69
4. 3. 1	正規モードの分岐	69
4. 3. 2	変異モードの分岐	70
4. 3. 3	流れの分岐	71
4. 3. 4	流れの相互関係	72
4. 4	結言	74
第5章	自由端の場合の流れの分岐	84
5. 1	緒言	84
	第5章の主な記号	85
5. 2	自由端の場合のテイラー渦の分類	86
5. 3	実験装置と実験方法	88
5. 4	結果と考察	89
5. 4. 1	2次変異モードの不安定性	89
5. 4. 2	流れの相互関係	89
5. 5	自由端と固定端の間の流れの分岐関係の比較	92
5. 6	結言	94



第 6 章	変異モードにおけるエクストラ渦とツイン渦の存在	106
6. 1	緒言	106
	第 6 章の主な記号	108
6. 2	小さい渦に関する分類	109
6. 3	実験装置と実験方法	110
6. 4	結果と考察	111
6. 4. 1	固定端の変異 1 セルモードに発生するツイン渦	111
6. 4. 2	固定端における変異 3 セルモード	112
6. 4. 3	固定端の変異セルの高さの変化	113
6. 4. 4	自由端における変異 2 セルモード	113
6. 4. 5	変異セルの流れ方向とエクストラ渦の独立性	114
6. 5	結言	117
第 7 章	多重解テイラー渦におけるモードの形成条件	132
7. 1	緒言	132
	第 7 章の主な記号	134
7. 2	実験装置と実験方法	135
7. 3	結果と考察	137
7. 3. 1	固定端の場合の各モードの発生頻度	137
7. 3. 2	自由端の場合の各モードの発生頻度	138
7. 3. 3	固定端の場合の情報エントロピー	139
7. 3. 4	自由端の場合の情報エントロピー	140
7. 3. 5	固定端の場合のモードの形成過程	141
7. 3. 6	自由端の場合のモードの形成過程	143
7. 3. 7	固定端と自由端の場合の比較	144
7. 4	結言	146
第 8 章	結論	160

謝辭	164
文献	165
付録	184

## 第1章 緒論

### 1.1 研究の意義と目的

回転二重円筒間の流れは1923年の Taylor の古典的研究以来、流れの1つの代表とみなされ工学的には滑り軸受け、溶融加工法にも関連して膨大な研究がなされてきた。その1つの方向は流れの安定性の問題として、線形範囲から非線形領域での分岐、カオスへの過程を理論的、数值的、実験的に調べるものであり、他は実際問題に関連して軸流、粗面等の影響を解明する研究である。

テイラー渦流れに関して、なぜこのように多くの研究者に70年以上にも渡って興味を抱かせ続け、膨大な研究成果が得られているのだろうか？。それは何と云っても、その系が閉じられた単純なものであり、実験装置が誰にでも簡単に製作することができること、初期の研究ではインク（染料）の注入により、その後の可視化技術の改良でアルミ粉、カリロスコープ、ポリスチレン粒などを使用した注入トレーサ法や化学反応トレーサ法により驚異的、魅惑的な流れのパターンが観察できるからである。また、円筒の回転を高精度で制御することにより実験の精確性、再現性が良いことが挙げられる。それに対してレイリー・ベナード対流は、テイラー渦流れと同じく流れの安定性に関して非常に多くの研究がなされているが、実質的に温度の管理の難しさからパラメータの制御がしにくいとされる。

Taylor(1-1) は線形安定性理論において円筒の端面が流れ場に及ぼす影響を無視する必要性から二重円筒が無限に長いとして研究を行ったが、その後の理論的、実験的研究においても無限長さ、または無限長さに見なしてもよいほど円筒が長い場合の研究がほとんどであった。また、円筒の長さが比較的短いと考えられる実験においても、それは意識的に端面の影響をなくすために短くしたのではなかった。しかし、実際面から考えてみると円筒の長さは有限であり、円筒の両端面が固定面であるか、または片側端面が固定面で他方は自由表面である境界条件を持っている。基本的な安定論の確立を目的とした見地から、理想とされる境界条件で検討することは重要なことであるが、逆に端面の影響がある場合の流れの構造と安定性は実際的にはどのようなものかについても当然興味のあるところである。また、従来から知られているテイラー渦流れの非一意性について考えてみると、無限長さの円筒におけるおそらく数え切れないほどの存在可能な流れの構造安定性、分岐

関係を調べることで、端面の影響という要因が増えるという問題を考慮しても比較的短いために有限個、それも十分検討可能な数が存在可能な流れの構造安定性、分岐関係を明らかにすることがその解明への近道といえるだろう。

最近になって、テイラー渦流れの安定性の研究に拍車をかけたのはクエット・テイラー渦流れは非線形偏微分方程式によって記述される系の安定性の理論を実証するパラダイムとして注目されたことによる。非一意性を持つテイラー渦流れにおいて、パラメータに対する流れ状態としての解の挙動、解の分岐関係を明らかにしようとする研究は、流体力学者ばかりでなく非線形力学系全般における解の安定性問題、分岐問題、さらには最近注目されているカオス化等を研究する工学、理学、医学、社会学者にとってもテイラー渦流れがこれらの問題の実際的なモデルとして存在するという意味において新しい方向を示したといえる。その意味で1976年から Benjamin が抽象数学的理論を自ら示して、その理論をテイラー渦の実験に適用し、従来の理論では説明のつかない新しい現象を示したのは円筒は無限に長いという概念にとらわれていたテイラー渦流れにおいて新しい領域を切り開いたといえるだろう。

現在までに、有限長さ円筒における実験的、理論的研究が数多く報告されているが、重要なパラメータのうち動的パラメータであるレイノルズ数と幾何学的パラメータであるアスペクト比と半径比に対して存在するすべての流れのパターン（モード）は明らかにはなっておらず、それらの相互関係についても不明の点が多い。それは流れ領域の幾何学的条件の多様さもさることながら、レイノルズ数の値に依存してテイラー渦の他に波動テイラー渦、乱流テイラー渦等多種多様な流れモードが存在するからであろう。しかし、一方で実は波動テイラー渦流れへ遷移する臨界レイノルズ数より小さいレイノルズ数の範囲で存在可能なテイラー渦流れにおいても多くの流れ状態が存在することが知られてきた。それらについては代表的ないくつかのモードが明らかになっているが、限られた条件の範囲内においてであり、系統立てた分類は行われておらず、それらのモードの相互関係も完全にはわかっていない。また、従来の実験では系の対称性から攪乱の要因が減少することから上下端面が固定面の場合が多いのは当然であるが、反面上端が自由表面である自由端の場合はどのような違いがあるか興味のあるところである。しかし、この境界条件における流れの構造と安定性についてはアスペクト比が小さい場合に限っては実験的にも理論的にも今までに議論されていない。

本研究は有限長さの円筒、それもかなり短い円筒において固定端と自由端の場合に存

在するモードの種類と安定性、それらモード間の相互関係、さらにモードの形成条件と形成過程について流れの可視化法を使った実験により詳細に調べ、両場合の比較を行なうことでテイラー渦流れの特徴を明らかにすることを目的とする。さらにこれらの結果が非線形力学系における多くの問題の実例となることを期待するものである。

この流れの可視化による研究としてほとんど知られていないが、Taylor 以上に非常に多くの場合の写真を撮り、その多様性を明らかにした寺田寅彦らの先駆的研究(1-2)がある。彼は質的法則が成り立つ可能性について示唆し、School of qualitative hydrodynamics の必要性を提唱した研究者である。この研究を Mullin は予言者的であるといっている(1-3)。本研究も「位相幾何学が質的幾何学であるように質的流体力学」(1-4)としてアプローチしようとするものである。

## 1. 2 過去の研究の概要

ここで用いられる主な記号について述べる。

$r$ 、 $\theta$ 、 $z$  : 円筒座標系、 $r$  ; 半径方向、 $\theta$  ; 方位角方向、 $z$  ; 軸方向

$u$ 、 $v$ 、 $w$  :  $r$ 、 $\theta$ 、 $z$  方向の速度成分

$r_1$  : 内側円筒半径

$r_2$  : 外側円筒半径

$\eta$  : 半径比 ( $= r_1 / r_2$ )

$D$  : 内外円管の隙間 ( $= r_2 - r_1$ )

$d$  : 流体層厚さ

$L$  : 作動流体の高さ

$\Gamma$  : アスペクト比 ( $= L / D$ )

$\omega$  : 流体の回転角速度

$\omega_1$  : 内側円筒の回転角速度

$\omega_2$  : 外側円筒の回転角速度

$\Omega$  : 内外円筒の回転角速度比 ( $= \omega_1 / \omega_2$ )

$\nu$  : 作動流体の動粘度

$Re$  : レイノルズ数 (一般に ;  $\omega_1 r_1 D / \nu$ 、)

$Re_i$  : 内円筒のレイノルズ数 ( $= \omega_1 r_1 D / \nu$ )

$Re_o$  : 外円筒のレイノルズ数 ( $= \omega_2 r_2 D / \nu$ )

$Re_c$  : 臨界レイノルズ数 (一般に流れが不安定になり別の流れへ分岐する)

$T$  : テイラー数 (一般に ;  $4\omega^2 d^2 / \nu^2$ )

$T_c$  : 臨界テイラー数 ( $Re_c$  に対応する)

これ以外の記号については必要に応じて定義する。

すでに述べたようにテイラー渦流れに関する研究は膨大な数に上り、主要な論文だけでも1500編を越え、その他の論文、関連文献も含めると計り知れない数にのぼるであろう。

テイラー渦流れに関して述べられた一般的流体力学の書物が Landau and Lifshitz (1-5) により書かれ、安定性理論に関する論述が Chandrasekhar (1-6) の一部に、そし

て Koschmieder (1-7) 等によって提出された。また、テイラー渦流れの実験装置の歴史から特殊なテイラー・クエット流れまでの全般に関する概論が Andereck and Hayot (1-8) で述べられ、さらに Cognet (1-9)、DiPrima (1-10)、DiPrima and Swinney (1-11) 等で詳細に報告されている。本節では特にテイラー渦流れにおける安定性に関する研究に注目し、Taylor の論文から線形なテイラー渦流れの安定性、次に波動テイラー渦流れを代表とする非線形テイラー渦流れの安定性、Benjamin の論文から有限長さ円筒における端面の影響、乱流テイラー渦流れ・スパイラルターブレンス等のいろいろな流れ状態の安定性、最後にその他の特殊な条件でのテイラー渦流れの安定性を中心に概説する。

### 1. 2. 1 線形なテイラー渦流れの安定性

同軸回転二重円筒間の流れに関する最初の実験は、静止している長い内円筒と同軸で回転している外円筒の間に満たされている流体の粘度を測定するために1890年にCouetteによって行なわれた。これは外円筒の回転によって内円筒上で発生するモーメントの測定を通して粘性を決定しようとしたものである。その後、1896年にMallockによってCouetteと同じ実験が行なわれた。彼の実験で本質的に違っていたのはその装置において外円筒だけでなく、内円筒も回転させたことである。彼は流体の粘性を求めるという実験を主として行なった上に、その流れに不安定領域があることを指摘している。

Rayleigh は1916年に回転流体の力学に基本的な研究結果を発表した。それは今では、レーリーの安定評価と呼ばれているもので、円筒座標系のオイラー方程式により角運動量の保存則から「循環はいつも外向きに増加することが流体の安定を保証する。」とした。これは以下のような式で表されている。

$$\frac{d}{dr} (r^2 \omega)^2 > 0 \quad \text{または} \quad \omega_2 / \omega_1 > (r_1 / r_2)^2 \quad (1-1)$$

Taylor が1923年に発表した論文「Stability of a Viscous Liquid Contained between Two Rotating Cylinders」はレーリーの安定性評価に焦点をあて、不安定性について数学的説明を行ない、実際に実験で不安定状態を観察したものである。Koschmieder は「この論文は主なテイラー渦流れの500編の論文の中の1つであるが、基本的理論と実験

結果が同じ論文で結ばれた唯一のものである。」と述べている (1-7)。

Taylor は2つの回転円筒の速度場  $V(r) = Ar + B/r$  の Couette 流れを考えた。ここでAとBは以下の式で与えられる。

$$A = \frac{r_1^2 \omega_1 - r_2^2 \omega_2}{r_1^2 - r_2^2} = -\omega_1 \frac{\eta^2 - \mu}{1 - \eta^2} \quad (1-2)$$

$$B = \omega_1 \frac{r_1^2 (1 - \mu)}{1 - \eta^2} \quad (1-3)$$

ここで  $\omega_1$  は半径  $r_1$  の内円筒の回転角速度、 $\omega_2$  は半径  $r_2$  の外円筒の回転角速度で、 $\mu = \omega_2 / \omega_1$  で半径比  $\eta$  は  $r_1 / r_2$  である。

クエット流れの速度場を小さい軸対称攪乱で乱す場合を考える。円筒座標系 ( $r, \theta, z$ ) において変動速度成分  $u, v, w$  とする。ここで  $r$  は円筒軸からの距離、 $\theta$  は円周方向方位角、 $z$  は円筒軸に平行な距離で、 $u$  は半径方向成分、 $v$  は方位角方向成分、 $w$  は円筒軸方向成分である。線形化ナビエ・ストークス方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{2Vv}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p'}{\rho} \right) + \nu \left( \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right) \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \left( \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) u = \nu \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right) \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p'}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 w \quad (1-6)$$

ここで、 $p'$  は変動圧力、 $\nu$  は動粘度で



$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1-7)$$

を表す。境界条件は  $r = r_1 = r_2$  において

$$u = v = w = 0 \quad (1-8)$$

軸対称変動の形で (1-3) ~ (1-5) と (1-7) の解は

$$\left. \begin{aligned} u &= u(r) \cos k z e^{s t} \\ v &= v(r) \cos k z e^{s t} \\ w &= w(r) \sin k z e^{s t} \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

となる。ここで  $s$  は変動の成長率であり、 $k$  は軸方向波数である。

(1-9) 式から得られる攪乱は  $z$  方向に周期的な流れが存在することを示している。その後テイラー渦の不安定性について一般的な解はギャップのせまい場合と広い場合について各々、Chandrasekhar(1-12)、(1-13)で述べられた。Taylor は線形理論にしたがってせまいギャップで不安定が始まる臨界テイラー数を求めた。この臨界テイラー数の値まで準定常的にテイラー数が増加するとき軸対称渦の形で不安定性が発生する。臨界テイラー数以下ではすべての軸対称攪乱は小さくなるが臨界テイラー数以上では軸対称攪乱は時間とともに発達し、 $z$  方向に依存するようになることを明らかにした。彼は数値計算から軸方向断面の流線を示した。この流れは方位角方向にスパイラル運動をしている。

理論で示した結果を確認するために Taylor はアスペクト比が非常に大きい回転二重円筒間で、染料を使って流れを可視化し、流れが不安定になる臨界値を求める実験を行なった。その結果、実験値と理論値が一致することを示した。さらに流れの写真は明らかに円筒軸周りにスパイラル流れが存在することを示した。Koschmieder(1-7) は「テイラー実験をまとめるとテイラー渦の不安定性の線形理論のすべての本質的な特徴は Taylor 自身によって実験で確認されている。そしてその後の40年間の実験で新しい結果は何もない。」と述べている。彼の実験で使われた二重円筒は内円筒、外円筒のどちらも独立して回転し、その回転比  $\mu (= \omega_2 / \omega_1)$  を正から負の値まで変化させて確認している。しかし、テイ

ラー渦の不安定性に関してパラメータを増やすことは問題をそれだけ複雑にすることになり、テイラー渦流れの構造、不安定性に本質的な違いはない。よってその後の実験的、理論的研究を見てもわかるように内円筒が回転し、外円筒が静止している条件を扱う研究が主流を占めることになる。

Taylor は流れを可視化するために染料を使用した。Lewis(1-14) は染料の代わりにアルミ粉を使用した。アルミ粉を使用した実験はそれまで使われていなかったわけではなく、古くはレーリー・ベナード対流の実験で既に使用されていた。しかし、後の実験的研究を見てもわかるようにテイラー渦流れの可視化に関しては、ほとんどがアルミ粉を使用しており、アルミ粉の使用は波動テイラー渦流れへの重要なステップであったといえる。可視化に使われたトレーサとしては、カリロスコープを使用した実験が報告されている(1-15)。染料の使用(1-16)は少なく、特殊な例としてイオン法(1-17)、(1-18)、電気化学法(1-19)等もある。テイラー渦流れの実験装置の歴史的発展、実験方法、中でも流れの可視化法、作動流体、計測法の技術的内容に関しては Donnelly(1-20)が概説している。

線形、非線形テイラー渦流れの特徴を示す最も重要な特性の1つに軸方向の波長または渦の大きさ(後にこの渦をセルと呼び、渦の大きさをセルの高さと呼ぶ)がある。この問題を最初に取り上げたのは Stuart(1-21)である。彼は大幅振動に対する理論を展開して流体力学系の非線形攪乱の機構を研究し、臨界テイラー数、 $T_c$ 以上では渦の大きさは変化しないことを証明した。理論的研究は Kogelman and DiPrima(1-22)によって行なわれた。さらに Burkhalter and Koschmieder(1-23)は Stuart の行なったテイラー数の範囲より大きな  $T_c$  の80倍の範囲までで実験を行ない、テイラー数が疑似定常的に増加した時にテイラー渦流れが発達する場合、そのテイラー渦のセルの高さはテイラー数に独立であることを明らかにした。この実験では、アスペクト比はかなり大きく、端面の影響を極力なくして行なわれ、端面に接しているセルの高さは端面の影響によりそれ以外のセルの高さより大きいことを明らかにした。これらの実験における境界条件は固定端の場合であり、自由端の場合におけるセル高さとは比較されていない。一般にアスペクト比が大きいとき、セルの高さはテイラー数に依存せずに一定であることがわかったが、この原因に関しては理論的にまだ解明されていない。波動テイラー渦流れのセルの高さについては Coles(1-24)、Donnelly and Schwarz(1-25)によって研究され、セルの高さは増加する傾向があるとされた。King and Swinney (1-26) は  $\Gamma = 32$  で波動の波が6つである場合にレイ

ノルズ数に対するセルの大きさを調べた。そしてセル数は変化しないが、セルの大きさが伸びたり縮んだりして安定曲線が複雑であることがわかった。固定端と自由端の2つの境界条件においてレイノルズ数の変化に対するセルの高さの変化については本論文の2章によって述べられることになる。

### 1. 2. 2 非線形なテイラー渦流れの安定性

非線形テイラー渦流れの特徴は Coles(1-24) によって初めて明らかにされた。彼は回転二重円筒でアルミ粉を使用し、シリコンオイルを作動流体にして今まで認識されなかった波動テイラー渦流れの存在を確立した。波動テイラー渦流れの全体のパターンはテイラー渦流れに重ね合わさった周期的方位角方向の波として特徴づけられ、方位角方向の波の数を特性値とした。また、レイノルズ数の増加によりテイラー渦流れが不安定になり臨界レイノルズ数  $R_c$  で波動テイラー渦流れが発生するが、今度は波動テイラー渦流れからレイノルズ数が減少したとき、テイラー渦流れに戻る臨界レイノルズ数  $R_c'$  は  $R_c$  より小さい値であったことからヒステリシスの存在が発見された。Coles は軸方向の渦の数と方位角方向の波の数から非常に多くの流れの状態を分岐図で表した。そして観察されるこれらの流れ状態は実験の初期条件によって決定されると主張した。波動テイラー渦流れに関して Cagnet(1-27)、Fenstermacher et al.(1-28)とKing et al.(1-29)でも記述されている。

測定技術およびデータ処理技術の進歩はまた波動テイラー渦流れの新しい解明を促進した。波動テイラー渦流れが接線方向に移動するとき、ギャップ内の固定点において流れの速度成分の周期変化が発生することが明らかになった。測定にはレーザー・ドップラー流速計で流れの速度成分の周期性を測定する方法と流体中に浮遊する反射粒子からの光の間欠性の変化の周期を測定する方法が使われた。後者の方法は Donnelly et al.(1-30)によって行なわれ、レーザー・ドップラー流速計による測定はまず Swinney(1-31)によって行なわれ、Fenstermacher(1-28)、Krugljak et al.(1-32)、Zhang and Swinney (1-33) も行なった。Fenstermacher et al.(1-28)は外円筒が静止していて、 $\eta = 0.877$ 、 $\Gamma = 20$ の装置において、14個の軸方向渦と4つの方位角方向の波を持つ流れのパターンの半径方向速度成分を測定した。そして波動渦流れの状態における半径方向成分の信号のパワースペクトルにおいて周波数  $f_1$  と多くの  $f_1$  の高調波を発見し、さらにレイノルズ数の増加によ

り新しい周波数  $f_2$  のパワースペクトルを発見した。この  $f_2$  の周波数は変調波動テイラー渦流れを示していることが Gorman and Swinney(1-34)によって後に実験で確認された。彼らは外円筒が静止している装置で、 $\eta = 0.88$ 、 $\Gamma = 20$  の条件で行ない、すべての側から流れの運動が観察できるように円筒後方に鏡をおいた。流れの可視化法とスペクトル法を使って、 $f_1$  は1つの観察点を通過する境界線の振動周期で  $f_2$  が方位角方向に進行する波の変調に対応していることがわかった。そして変調する位相を方位角方向の波の数  $m$  と整数  $k$  で方位角方向の波の変調の位相差  $2\pi k/m$  で表した。この流れの成分に  $f_1$  と  $f_2$  の周期を含むことはレイノルズ数の変化によりこの流れがカオス的な変化をしていることを示しているとした。これと同様な実験で Ohji and Amagai (1-35) が円筒の周りに円錐形の鏡面状の物体を円筒の下に円筒を囲んで設置し、流れの一周期の写真撮影を行ない、同様な結果を得ている。カオス理論との関係について後に、Buzug et al. (1-36) は  $0.3 \leq \Gamma \leq 0.6$  で2セル流れを使って Hopf 分岐を見つけて、フラクタル次元を求めている。カオス理論に関して最近様々な理論的解説書が多く出版されている。カオス理論は流体力学ばかりでなくブラウン運動と細胞運動のような物理学の分野 (1-37)、医学的には神経パルスの伝播に関して (1-38)、社会学的には議員定数の最適配分法 (1-39) 等にも関係し、様々な現象を定性的に表現できるものとして注目されている。『非線形力学とカオス』(1-40) では技術者・科学者のために物理現象的要素が多く述べられている。テイラー渦流れに関して、Yahata (1-41), (1-42) は連結モード (Coupled-Mode) の集合を使ってテイラー渦流れを計算し、周期流れ→疑似周期 (2つの周期) →疑似周期 (3つの周期) →カオス (非周期運動) と遷移することを求めた。また、八幡 (1-43) は一般に定常解から周期軌道へ遷移する Hopf 分岐が2回の遷移  $f_1$ 、 $f_2$  で乱流へ遷移しているのはルエール・ターケンスの考え方と符合していると考えられるとしている。

波動テイラー渦流れの波の速度については King et al. (1-29) が円筒の上面が自由表面である自由端の場合に関して調べ、レイノルズ数の増加に対して波の速度は減少し、ある一定値に達することを発見した。また、その波の速度はその波が消えるほど大きなレイノルズ数の範囲では再び増加することを発見した。そして結論としてレイノルズ数に関する波の速度は半径比に依存するとした。テイラー渦流れが不安定になり波動テイラー渦流れが発生する臨界レイノルズ数が Cole(1-44)によってトルク測定と可視化実験により求められた。その結果、波動テイラー渦流れが発生する臨界レイノルズ数はアスペクト比に依存することが発見された。

非線形テイラー渦流れの重要な特徴である非一意性の存在は初め Snyder(1-45)によって次のように証明された。同じ方向に回転している二重円筒において外円筒の回転数を減少させゼロにしたとき、22個の渦セルの数が存在した。さらに、外円筒が静止していて、内円筒の回転数が疑似定常的に増加するとき、23個のセル数が発生した。互いに逆回転している場合に26と24個のセル流れが存在したが、その状態から外円筒の回転数を減少させゼロにした時、やはり26と24個のセル数が維持された。このように初期条件は異なるが最終条件が同じ円筒で22、23、24、26個のセルが発生することを示した。さらにBarkhalter and Koschmieder(1-46)は外円筒を静止させておき、内円筒を急加速することで非一意性を確認した。この内円筒を急加速することで非一意性が存在する実験については1. 2. 5でもう少し詳細に述べる。

### 1. 2. 3 有限長さの円筒間の流れに対する端面の影響

Taylor から始まり現在に至るまでの二重円筒間の流れの不安定性に関する実験的、数値的そして理論的研究はその多くが無限長さの円筒に関して行なわれてきた。これは Taylor が報告したように、線形理論による定常安定な解と実験結果が良い一致を示したことによる。有限長さの円筒では端面の影響により回転クエット流れに有限攪乱が与えられ流れは不安定化する。よって流れに影響を及ぼす攪乱を可能な限り減らすために無限長さ円筒が採用されてきたといえる。しかし、最近になって急速に発展の兆しを見せている分岐理論、カオス理論との関連から有限長さにおける流れの不安定性に関する研究が理論的にも実験的にも発表され始めてきた。これらの理論は流れの安定性と乱流現象(1-47)にも関係し、これからますます発展していくことは明らかである。

有限円筒を扱った最初の論文は Alziary de Roquefort and Grilland(1-48)が数値計算で渦が連続に発生する過程を示したことによる。彼らは初期条件を変えることによりいろいろな定常状態が得られることを発見した。これらの結果に基づく実験は後に Pfister and Rehberg(1-49)と Heinrich et al.(1-50)によって確認された。

有限円筒における流れの特徴で従来の研究では述べられなかった新しい流れの状態を発見し、テイラー渦流れの不安定性に分岐理論を導入したのは Benjamin(1-51), (1-52)である。彼は自らの抽象数学的理論をテイラー渦流れの安定性に応用した。

Benjamin (1-53) は流体力学問題の多重解の存在という数学的研究から始めた。本来、

問題を一般的に解くことが目的であるが、その新しい原理を発展させるために重要な参考例として回転クエット・テイラー渦流れが使われた。テイラー渦流れは一様流体の定常運動における良く知られた分岐の例の1つであるといえる。Leray の存在定理により、流れはレイノルズ数のすべての有限値にたいして少なくとも1つの解をもつ。Benjamin は Leray-Hopf-Ladyzhenskaya と続く抽象数学理論から、主解からの定性的変動を抽象的に扱い、それをテイラー渦流れの安定性に応用した。パラメータ  $Re$  の臨界値での分岐によって発生する解の定性的挙動の代表的型は4つあり、図1-1に示す。図において、(1)超臨界分岐、(2)亜臨界分岐、(3)遷臨界分岐、(4)片側分岐と呼ばれる。図におけるパラメータは横軸  $R$  は  $Re$  と考える。縦軸  $f$  は、中村(1-47)によると、流れ全体で決まる量で例えば流れ場全体の乱れエネルギーのような汎関数である。超臨界分岐と亜臨界分岐については理想化された理論において存在する分岐図であり、Benjamin は現実の場合の現象においては超臨界分岐や亜臨界分岐のような対称分岐は摂動により破壊され、遷臨界分岐や片側分岐が優先されるとしている。これらの抽象的理論を実際のテイラー渦流れに応用した。分岐理論に関しては Romero(1-54) が初等分岐理論を概説し、Joseph(1-55) が流体力学の安定性と分岐の関係を概説している。分岐理論は力学系ばかりでなく生態系の数理現象学については、例えば H.フェノーム(1-56) が概説している。数学的な説明として、山口(1-57)、(1-58) が非線形現象の解説をしている。

Benjamin はテイラー渦流れを抽象数学的理論に照らし合わせて主な結論を以下のよう提示した。

(1)  $Re$  が次第に増加したとき、定常渦セル運動が完全にスムーズに出現する。この流れ状態を主モード (Primary Mode) と定義する。実際には主モードの発生する  $Re$  の正確な臨界値はなく理想化された理論で示された値以下で流れは不安定になり、セル流れが現れる。もし、理想化された理論にしたがって管の長さが十分に長いならば、セルの発達は  $Re_c$  の理想値の近くで発生すると思われる。

(2) ある  $\Gamma$  において、 $Re$  が疑似  $Re_c$  より大きい範囲において  $Re$  が疑似定常的に増加したときに発生するモードのセル数より2個多いか、または2個少ないセル数をもつ流れが存在する。この流れ状態を2次モード (Secondary Mode) と定義し、2次モードが発生する臨界レイノルズ数  $Re'_c$  と2次モードの状態から  $Re$  が減少したとき主モードへジャンプして分岐する臨界レイノルズ数  $Re''_c$  ( $Re''_c < Re'_c$ ) との間にヒステリシス現象があることが明らかである。この現象を抽象的に表現する方法として代数学で知られるカラス

トロフィ理論を使って定性的に説明することができる。図1-2はカタストロフィ現象を一般的に表わしたもので、図における $R$ は $Re$ を $f$ は前述の汎関数を、 $\gamma$ はアスペクト比 $\Gamma$ であると見なしてよい。図からその定性的特徴にはくさびをもつことがわかる。

(3) $Re$ が十分大きい値で発生する2次モードは片側分岐で発生する。さらに2次モードの中には従来では発見されなかった流れ状態があることがわかった。それは端面上において外向きの流れ方向をもつものである。これは後に変異モードと呼ばれる。

以上、述べてきたことは任意の有界領域における粘性流体の完全非線形問題から得られるのでテイラー渦流れのような特別の流れに関するどんな近似理論によっても支配されることはない。

理論的な討論に続いて Benjamin(1-52)は理論的内容を確認するためにアスペクト比が小さいテイラー渦流れに関して実験を行なった。その中で従来の線形理論で言われている臨界テイラー数または臨界レイノルズ数の値は実際には決定できないことを証明した。また、レイノルズ数が準定常的に超臨界域に増加する場合と超臨界域に急激に増加する場合に発生する流れの状態を各々主モード、2次モードという概念で初めて分類し、レイノルズ数とアスペクト比の変化による2つのモードの関係がくさび形をもった分岐図で表されることを示した。それは位相幾何学におけるカタストロフィ理論(1-59)による不連続現象を表す相図とも関係することを示した。さらに特徴的なのは従来の線形理論では説明のつかない変異モードの存在を発見したことである。Benjaminは端面に隣接するセルの流れ方向が外円筒から内円筒へ向かって流れる通常の状態(Normal Mode)とは異なり、逆の方向へ流れるセルを持つ流れの状態を変異モード(Anomalous Mode)と呼んだ。実際彼は $\Gamma = 3.25$ 、 $\eta = 0.615$ で外円筒が静止している場合において3セル流れの状態を観察している。その後 Bielek and Koschmieder(1-60)は $\eta = 0.605$ において $\Gamma = 3.0$ 、 $3.25$ 、 $3.75$ で3セルモードを確認している。実験では引き続いて Mullin and Benjamin(1-61)がテイラー渦流れから波動テイラー渦流れへの遷移、またその逆へ遷移するレイノルズ数を求めた。Benjamin and Mullin(1-62)は2~7セルの安定曲線を求め、3セルの正規セルと変異セル(端面上で通常とは逆向きの流れ方向を持つセル)の高さをレイノルズ数に対して求めた。Mullin(1-63)、(1-64)は4-6、6-8、8-10、10-12セル間の主モードの交代をレイノルズ数とアスペクト比の関係から求め、くさび図を示した。Benjamin and Mullin(1-65)は $\Gamma = 12.61$ で流れの断面写真を何枚も示した。さらに進んだ研究を Mullin and Lorenzen(1-66)、Cliffe and Mullin(1-67)、Pfister et al.(1-68)

が行なっている。

理論的な発展に関する研究は Schaeffer(1-69)によって続けられた。彼は  $\tau$  というホモトピーパラメータを導入し、 $\tau = 0$  では理想とされた境界条件で解が存在する場合を表し、 $\tau = 1$  では現実の固定端の境界条件を表すとした。そして実際に  $0 < \tau < 1$  において  $\tau$  が小さい場合は固定端の境界条件をもつ問題の定性的特徴が表われると仮定した。Hall (1-70)は Schaeffer のモデルを研究し、レイノルズ数が準定常的に増加するときの2セルと4セルの発展を調べた。さらに Hall (1-71)は時間に依存する摂動を扱う摂動展開から広い半径比についても研究した。Hill (1-72)は Schaeffer のホモトピーパラメータを使い変異モードを発見し、実験との一致を確認した。さらに端面に存在する side-by-side モードを発見した。しかし、このモードの流線に関しては、はっきり示されていない。Layne et al. (1-73)はホモトピー法の適用法を説明した。

数値計算においては Cliffe(1-74)が1セルと2セルに関して行ない、1セルを変異モードであるとした。これは変異モードの定義上、端面において内円筒から外円筒へ向かう通常とは異なった流れ方向を持つことから当然であると思われる。Streett and Hussaini (1-75)はスペクトル選点法で1-2セル間の交代の過程を計算した。Lucke et al. (1-76)は  $\Gamma = 1.05$ 、 $\eta = 0.5066$  で数値的と実験的に研究した。Dinar and Keller (1-77)は  $\Gamma = 1.5$ 、 $\eta = 0.727$  で1セルの計算を行なっている。Cliffe (1-78)と Streett and Hussaini (1-79)は有限長さについて2セルと4セルの交代を示し、Pfister et al. (1-68)は  $\Gamma = 0.3 \sim 1.4$  について計算した。その他、Anson and Cliffe (1-80)は4と6セルについて、Anson et al. (1-81)は5セルモードを計算し、Cliffe et al. (1-82)は半径比が大きいと不安定になることを確認した。

Cliffe and Mullin(1-67)は2、3、4セルを数値計算し、可視化写真と比較した。ここで注目されるのは変異モードの変異セルの端に小さな渦が存在していることである。この渦に関しては Benjamin(1-52)が簡単に述べているのが始まりであるが、その後1つの重要な問題になる。Cliffe and Spence (1-83)は有限要素法で計算し、Benjamin と Mullin の実験結果を比較した。一方、Bolstad and Keller (1-84)は2セルから6セルまでの流れについて計算しており、彼らは数値計算の結果から変異モードの存在を否定的に述べている。すなわち、端面に隣接している変異セルの流れの方向は内円筒側から外円筒側へ向かうと定義されているが、実はその変異セルと端面の間にもう1つの隠れた渦 (hidden vortex)が存在しており、この考えに従うと変異モードの中に存在する奇数個の



渦が存在するという考え方は消えることになると主張した。彼らは数値計算の結果から流線で渦流れの状態を示し、変異セルの端に小さな渦の存在を示した。しかし、その小さな渦は端面全体に渡っているわけではなく、端面上で外円筒から内円筒へ向かう流れを持つ隠れた渦の存在に関してははっきりしない。この小さな渦の存在に関しては Cliffe(1-74)、Lucke et al.(1-85)にも見られる。Koschmieder(1-7)もこれらの渦の存在の重要性を指摘している。この小さな渦の存在に関しては変異モードの意義、従来からのセル数の数え方、安定性に関する影響等、明らかになっていない点が多く、本論文の6章で主テーマの1つとして詳細に述べる。

以上のようにアスペクト比が小さい場合のテイラー渦流れは無限長さにおいては考慮されなかった端面の影響により、従来の実験では見えなかった流れ構造が新たに発見されることになった。さらにテイラー渦流れが持つ非一意性により存在していた非常に多くのモードがある程度の数のモードに限定できるため相互関係が明らかにできる期待がでてきたといえる。しかし、現在のところまだ確認する内容が多いため、それらの関係を系統だっ整理するに至っていない。また、同軸二重円筒の上下端面の境界条件は上下端面が固定面である固定端の場合がほとんどである。上面が自由表面である自由端の場合の実験についての報告は Coles (1-24)、Snyder (1-45)、Cole (1-44) と Gorman and Swinney (1-86) が、アスペクト比の値をそれぞれ45~107、30、30、20で行なっているが、円筒は無限長さとしており、端面の影響に関する研究は報告されていない。有限長さの端面の影響を考える立場からいうと、固定端の場合と、自由端の場合についてその流れの構造と流れの形成過程から分類される各モードの相互関係について明らかにし、比較検討する必要があると思われる。

#### 1. 2. 4 内外円筒のレイノルズ数の変化における各種のテイラー渦流れの安定性

一般にレイノルズ数が大きくなると、波動テイラー渦流れはさらに Hopf分岐を繰り返して乱流へ遷移していく。この過程の途中には、様々な流れのパターンがあることが知られている。レイノルズ数の増加で波動テイラー渦流れから分岐する乱流テイラー渦流れについて、Tam and Swinney (1-87) は内円筒が回転し、外円筒が静止している円筒間において、 $\eta = 0.494 \sim 0.875$  の条件で  $Re = (50 \sim 1000) Rc$  の範囲で光吸収法を使って乱流テイラー渦流れの質量輸送を研究した。染料を流れの中に注入して光吸収法で拡散の時

間依存性を測定し、軸方向拡散係数  $D$  が  $1 \text{ cm}^2 / \text{s}$  のオーダーであり、軸方向波数に対して線形に増加することを明らかにした。Koschmieder(1-88)は  $\Gamma = 123$ 、 $\eta = 0.896$  の装置で、 $(10^2 \sim 10^4) T_c$  までの範囲で実験を行い、テイラー渦流れが存在していることを発見した。この中で、流れの状態は乱流テイラー渦流れであり、さらに非一意性を持っていることがわかった。

この実験において Koschmieder (1-88) は外円筒を静止させて内円筒の回転の仕方を 2 通りの方法で行なった。すなわち、内円筒の回転速度が  $7 \times 10^{-4} \text{ rad/sec}^2$  でゆっくり加速した場合と、内円筒を突然スタートさせ定常値まで増加させる方法である。どちらの場合にもセル数に違いがあるもののテイラー渦が存在しているのがわかった。レイノルズ数を急加速する実験は Burkhalter and Koschmieder(1-46)で行なわれており、やはりゆっくり加速した時に発生するセル数より数の多いセル状態が安定に発生していることを発見した。彼らの実験で行なっている急加速の実験は内円筒の回転における加速を回転軸に設置した円盤に開けた隙間に光をあて、円盤の反対側に置かれたダイオードで透過光を計測しながら行なっている。しかし、その値は 1 種類で、 $T/T_c$  の値を 1.46、5.56、29.5 と最終定常値を変化させており、その最終定常値までの変化の仕方の依存性ははっきりしない。また、初期条件によって影響する非一意性は渦の波長  $\lambda (= L/Nd)$  で表現している。ここで  $N$  はセル数を表す。よってテイラー渦流れの構造を表すセル数での表現ではなく具体的にどのような流れ状態であるかはわからない。これは  $\Gamma$  が大きいために存在するモードの数が多く分類できないためでもあると思われる。また、Takeda et al. (1-89) は同じく急加速の実験を  $\Gamma = 20$ 、 $\eta = 0.65$  でレイノルズ数を 70~1300 まで変化させて行ない、部分的に渦になったり、渦の融合が発生したりして 36セルになったことを報告している。Lee and Park (1-90) も準定常スタートと急加速で実験を行ない、奇数個のみの渦流れを確認し、ギャップ幅は小さい方が安定していることを確認した。他に東ら (1-91) は急加速の場合の数値計算を行なっている。しかしながら、これらの急加速の仕方は 1 つであり、その加速値そのものは変化していない。やはり変化の仕方による非一意性については不明である。レイノルズ数の急加速の仕方による実験はその初期条件の違いによる非一意性に関して重要であると思われ、本論文の 7 章で詳細に述べられることになる。

Taylor が行なった実験のように、内外円筒を独立に回転させることで多くの流れパターンが存在することがわかってきた。内外円筒を独立に回転させる実験は Snyder(1-92) によって再度行なわれた。彼は長い円筒を使って、 $\eta = 0.2 \sim 0.959$  の範囲における流れ

の安定図を作成したが、可視化実験を行なわなかった。その後、レイノルズ数がかなり増加したときに安定に存在するテイラー渦流れの状態を内外円筒を独立に回転させて調べた詳細な結果が Andereck et al.(1-93)によって報告された。彼らは  $\Gamma = 30$ 、 $\eta = 0.883$  の装置で流れのいろいろなパターンを発見し、Snyder(1970)も発見している軸方向の内円筒の周りに巻きつくスパイラル渦が  $-1200 < R_o < -150$  のせまい範囲で存在することを確認した。ここで  $R_o$  が負の値を持つのは外円筒が逆回転をしていることを示す。スパイラル渦は Krueger et al.(1-94)によって線形理論の範囲で方位角方向に移動して軸方向には一定である波とされ、方位角方向と軸方向の両方に移動する波を持つ波動テイラー渦流れと区別されている。スパイラル渦流れの研究は DiPrima and Gran-nick(1-94)によって始められ、Demay and Iooss(1-96)、Golubitsky and Stewart(1-97)、Golubitsky and Langford(1-98)、Langford et al.(1-99)によって続けられた。また、Andereck et al.(1-93)には Coles(1-24)の報告にもあるスパイラルターブレンスの安定領域が  $-4000 < R_o < -850$  の範囲で示されている。また、ツイスト渦流れが  $900 < R_o < 1400$  の小さい範囲であるが発見されている。この流れはセルの中に文字どおり細い糸が何本も寄り集まっているように見える流れである。この流れは Demay and Iooss(1-96)によって理論的に述べられ、Chossat and Iooss(1-100)、Golubitsky and Stewart(1-97)、Iooss(1-101)、Nagata(1-102)、Nagata(1-103)、Tagg et al.(1-104)にも記述されている。

一方、内外円筒の回転をそれぞれ変調させる実験報告がある。すなわち、内円筒が  $\omega_1 = \omega_m + \omega_p \cos \omega t$  ( $\omega_m$ 、 $\omega_p$  はゼロではない) で回転させ、外円筒は静止する場合 Donnelly(1-105)、Riley and Laurence(1-106)によって行なわれ、安定領域が広がることが確認された。数値計算では Barenghi and Jones(1-107)、Kuhlmann et al.(1-108)が行なっている。内外円筒がそれぞれ  $\omega_1 = R_1 \omega \cos \omega' t$ 、 $\omega_2 = r_2 \omega \cos \omega' t$  で回転する場合は Braun et al.(1-109)で実験が行なわれている。

以上のように、レイノルズ数が非常に高い場合、レイノルズ数の初期変化の履歴の違い、内円筒と外円筒が独立に回転したときのそれぞれの場合に存在する流れの状態はかなり多くの種類があり、それらがまた、初期条件に依存する非一意性に関係すると思われる。これらのことを考えてみると現在においてまだ明らかにされていないテイラー渦流れの本質を探るにはもう少しパラメータを減らす必要があり、簡単な系の条件において流れの構造とその安定性に関して詳細に調べてみなければならないと思われる。

### 1. 2. 5 その他の特殊な条件で発生するテイラー渦流れ

本質的なテイラー渦流れの安定性を知る上で最も基本的な幾何学的条件は内円筒が回転し、外円筒と円筒の上下端面が静止している同軸二重円筒であることは今までの議論から疑う余地のないところであろう。そしてそれらの条件にさらにアスペクト比、半径比、非対称境界条件等が付加される。本節では最後にその他の特殊な境界条件におけるテイラー渦流れの構造およびその安定性についても簡単に述べておく。

まず第1に2つの円筒を偏心させる実験である。この条件はテイラー渦問題を軸対称流れから除外してしまう。しかし、この研究はジャーナル軸受け等の工学的問題においては重要な問題であると思われる。安定性の問題に関して初めに実験的に調べたのは Cole (1-110)であり、彼はテイラー渦流れが存在しているのを確認した。そしてテイラー渦になる臨界値は偏心度の増加により増加することを発見した。その後、Koschmieder(1-111)によっても行なわれたが、いずれも二重円筒の偏心の影響は流れを不安定にすることがわかった。末松ら (1-112) も実験結果と数値計算の比較を行なっている。

第2に、同軸の円錐形円筒におけるテイラー渦流れの実験が Wimmer(1-113)によって行なわれ、Abboud(1-114)によって数値的に研究された。最も簡単な円錐形は内円筒、外円筒とも同じ角度で傾斜していることであり、この場合、内外円筒の隙間は同じである。この場合、やはり円筒間にトーラス状の渦が発生した。Wimmer(1-113)はこの他にも外円筒のみが円錐形、内円筒のみが円錐形の場合も行なっている。

第3に、回転二重球間の流れについては Khlebutin(1-115)によって内球が回転、外球が静止の状態で行なわれた。可視化実験では赤道領域でテイラー渦流れが発生することが明らかになった。その後、Sawatzki and Zierep(1-116)によって完全な実験結果が得られた。その結果、赤道平面に対して対称な渦流れが生じることがわかり、赤道付近の渦の大きさが測定された。その後、初期条件を変えた実験が Yavorskaya et al.(1-117)、Yavorskaya and Belyaev(1-118)によって行われ、Munson and Menguturk(1-119)は異なったギャップで、基礎流れから乱流域までの研究は中林(1-120)によって行なわれた。解析的研究については安定性について Munson and Joseph(1-121), (1-122)、Munson and Menguturk(1-119)によって、Walton(1-123)はせまいギャップに関して、Soward and Jones(1-124)は異なった回転速度に関して進められた。数値計算では、Bartels(1-125)、Schrauf(1-126)と Marcus and Tuckerman(1-127), (1-128)によって行なわれた。回転

二重球間の流れは基本的にはテイラー渦流れと類似していることがわかったが、まだ詳細については明らかではない。

さらに特殊な条件に関して述べると、コリオリ力の影響に関して Wiener (1-129)、Ning (1-130) が実験を行なっている。内外円筒間に温度勾配がある場合に関して Takhar (1-131) が計算を行なっており、Wu et al. (1-132) は上端面を 1 cm の最大振幅で軸方向に振動させて実験した。軸方向流れのある二重円筒に関して Lueptow et al. (1-133) が 7 つの流れ領域を発見している。

以上のように特殊な条件における流れの状態は基本的にはテイラー渦流れと類似しているが、まだ明らかになっていないことが多い。しかし、本論文では基本的なテイラー渦流れに注目しており、これらの内容に関して討論を行なわない。

本節の結びとして、テイラー渦流れに関する研究内容はかなり広範な内容に渡っており、その内容も莫大な数にのぼることがわかる。この研究報告の数に関して、Tagg (1-134) は次のようなことを述べている。「これだけの数にのぼる研究リストは 1 人の研究者がオリジナルな研究をする勇気をくじくのではないか、また、審査する人はすべての重要な研究はもう行なわれしまい、さらに進んだ成果の蓄積は報告書の数減らすだろうと考えるかも知れない。しかし、テイラー渦流れの研究を分類してみるとこれらの考え方が間違っていることに気づく。実験室にやって来てこの単純な形状での流れのエキサイティングな流れパターンを見てきたが、この流れを征服するにはまだほど遠い。遷移流れと乱流の関係を完全に理解するには多くの研究が必要であり、我々は実際の可能性をすべて調べあげてはいない。」。

### 1. 3 本研究の概要

本論文はアスペクト比が小さい場合のテイラー渦流れの安定性及び非一意性に関して、固定端と自由端の場合について実験を行なった結果を示したものである。内円筒が回転し、外円筒が静止している回転二重円筒において半径比が一定で、端面の影響がある条件において、レイノルズ数、アスペクト比が変化したときに存在するすべての流れの構造の特徴と安定性について実験的に調べた。そしてその特徴から流れのモードに分類し各モード間の相互関係を明らかにしたものである。また、これらのことを固定端の場合と自由端の場合について行ない比較、検討する。各章における内容は概ね以下の通りである。

第2章においては固定端と自由端におけるテイラー渦の構造と形成過程を確認し、テイラー渦における最も重要な特徴の1つであるセルの高さ（渦の大きさ、または波長の意味）がレイノルズ数とアスペクト比に対してどのように変化するかを測定する。

第3章においては固定端と自由端においてレイノルズ数が増加したとき、テイラー渦流れから波動テイラー渦流れへ遷移する臨界レイノルズ数をアスペクト比に対して調べる。さらに、自由端の場合のテイラー渦流れの不安定性、すなわちレイノルズ数が増加、減少したときに、各流れの状態が不安定になり、他のセル数を持つ状態に変化する分岐現象を明らかにする。

第4章においては固定端の場合のテイラー渦流れを流れの形成過程と構造からモード別に分類し、レイノルズ数が減少したときの各モードの分岐現象とモード間の相互関係を流れの分岐図を示すことによって明らかにする。

第5章においては自由端の場合のテイラー渦流れを流れの形成過程と構造からモード別に分類し、レイノルズ数が減少したときの各モードの分岐現象とモード間の相互関係を流れの分岐図を示すことで明らかにし、第4章で得られた固定端の場合の結果と比較する。

第6章においては固定端の場合について、変異モードの変異セルに隣接するエクストラ渦（小さい渦）の特徴を調べ、さらに従来の実験結果では発見されていない半径方向に2つの渦が並んだツイン渦がある特別なアスペクト比において存在することを明らかにする。また、Bolstad と Keller により隠れた渦は存在しないという主張に対し変異モードが Benjamin の定義通り存在することを確認した結果を示す。

第7章においてはテイラー渦流れが持つ多重解性、すなわち非一意性の初期条件に対する依存性を固定端と自由端の2つの場合について実験的に調べる。初期条件であるレイ

ノルズ数とストロハル数を変化させることにより、その同一幾何学的条件で存在するモードの中でどのモードの発生頻度が大きいかをアスペクト比を変化させ、その発生確率を求め検討する。さらに、詳細な可視化観察により、与えられたアスペクト比において存在するモードのレイノルズ数とストロハル数の変化による発生機構について考察する。また、これらの特徴について固定端と自由端の2つの境界条件に対する比較が行なわれる。

第8章は第2章から7章までの結論の総括である。

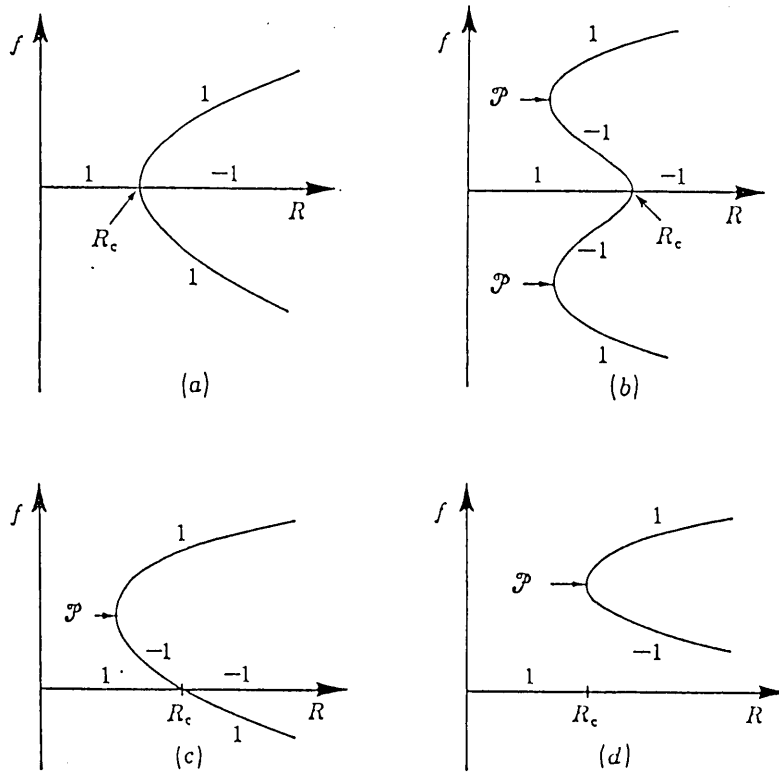


図 1 - 1 分岐の状態図  
 (a) 超臨界分岐 (b) 亜臨界分岐 (c) 遷臨界分岐 (d) 片側分岐

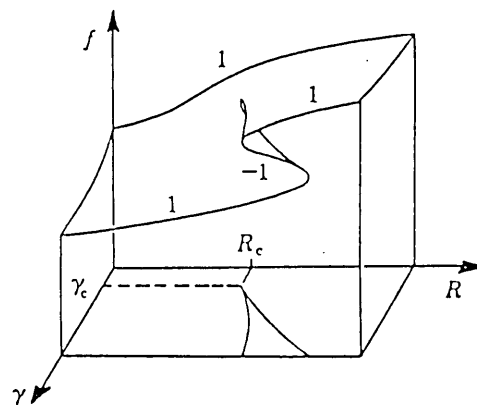


図 1 - 2 折り目カタストロフ



2. 1 緒言

テイラーは二重管が無限に長いとして研究を行ったが、有限長の影響を研究して、アスペクト比の効果によって流れ場が非常に複雑な事を示し、テイラー渦の研究に新局面を開いたのはテイラーの論文後半世紀を隔てて現れた Benjamin の報告である (2-2), (2-3)。彼は自らの抽象数学的理論 (2-4) を有限長のテイラー渦問題に応用して (2-2)、有限長の回転二重管ではテイラーの理想化された理論で言うような意味での臨界レイノルズ数は存在しないこと、テイラー渦のセル数 (後述) の間にジャンプ現象があること、レイノルズ数が十分大きいと流れの状態が一意でないこと等を説明し、実験によりこれを確かめ、又非常に特異な流れ状態があることを明らかにしている (2-3)。

これらの現象は二重管の端の影響によるものであり、Schaeffer はそれを、ホモトピーパラメータ  $\tau : 0 \leq \tau \leq 1$  を導入し、 $\tau = 0$  が無限長理想問題に対応するとして、それからの摂動によって説明した (2-5)。Benjamin らはその理論を進め、実験を行って変異現象 (Anomalous Mode) を研究している (2-6)。変異現象とは固定端近傍において、普通は Boedewadt 流れ (2-7) に相当して半径方向速度成分が内向き、即ちプラントルの第一種の2次流れが発生するのに対して、反対に半径方向速度成分が外向きになる流れパターンである (2-6), (2-8)。しかし、その後の数値解析の研究は変異現象に新しい渦が存在していると報告している (2-9)。又、徐々にレイノルズ数を増加させた時に生ずる流れを主流とすると、急にレイノルズ数を増加させたときの2次現象が見いだされている (2-3)。更にセル数間の分岐現象や (2-10)、テイラー渦が振動を開始するレイノルズ数のアスペクト比への依存性など (2-11), (2-12)、単純な境界条件であるにも関わらず、近年注目を集めているカオス以前の多様性がこの流れについて示されている (2-13)。

この様に固定端の影響が大きいとすると、底が固定端で上面が自由表面である非対称境界条件の場合 (以下この場合を自由端という) がどうなるかと考えられる。これは攪拌、混合にも関係し (2-14)、実際上の意味もあるが、これまでに十分調べられているとはいえない。例えば Cole (2-15) や Snyder (2-16) あるいは、Cognet (2-17) らの実験は自由表面を持つ装置を用いているが、Benjaminの観点からの観察はなされていない。

Gormanら (2-18) の実験も同様で、自由表面の影響を避けるため、アスペクト比を大

きくしている。本章はアスペクト比の小さいテイラー渦について、流れの発達の様子、セル構造に関して、固定端（以下両端固定の場合を意味する）と自由端の2つの場合を可視化によって調べ、その差を明らかにしようとしたものである。

## 第2章の主な記号

$R_1$  : 内側回転円筒半径 ( $2 R_1 = 40.19 \pm 0.006$  mm)

$R_2$  : 外側円管内半径 ( $2 R_2 = 60.11 \pm 0.024$  mm)

$D$  : 内外円管の隙間 ( $D = R_2 - R_1 = 9.96 \pm 0.025$  mm)

$L$  : 作動流体の円柱軸方向高さ

$\Gamma$  : アスペクト比、 $\Gamma = L / D$

$\omega$  : 内円筒の回転角速度

$\nu$  : 動粘度

$Re$  : レイノルズ数、 $Re = \omega R_1 D / \nu$

$Re_1$ : クエット流状の流れからの変化が可視化によって認められるレイノルズ数

$Re_2$ : テイラー渦流れの状態から波動テイラー渦流れの状態に分岐する

臨界レイノルズ数

他の記号はその都度定める。

## 2. 2 実験装置と実験方法

装置の概略は図 2-1 に示す通りで、装置の主要寸法は記号中に示す。内円筒はステンレス製で、回転振れは 0.015mm であった。外側円管は透明アクリル製である。外円管の外側に四角形の透明な槽があり、透明液で満たして光の屈折の影響を避けている。スライドリングの高さの調節によって固定端のアスペクト比を変化させた。自由端の場合にはこのリングは用いない。リングと内円筒の隙間は十分小さく、その影響は認められなかった。内円筒はサーボモータとVベルトにより駆動し、回転数はデジタルタコメータで測定した。

作動流体は混合体積比約 1 : 1 の水とグリセリンの混合液で、可視化のため直径 0.01 mm 程度のアルミ粉を約 0.013g/ml、数滴の無りん洗剤を界面活性剤として混合した。流れの断面観察時のアルミ粉はこれより少量とした。作動流体の動粘度はあらかじめオストワルド改良型粘度計で各温度における値を測定しておき、実験毎に作動流体の液温を測定して定めた。その精度は約 0.4% 以内であった。実験中の温度変化について、流れの各状態の測定中における温度変化は 0.1 度以下であり、セル構造の変化の観察にはあまり影響が無いと思われる。

流れの観察は外観と円筒軸を含む面による隙間の断面を見る 2 つの方法で行った。照明にはスライドプロジェクタか又は蛍光灯を用いた。断面観察では連続写真を撮り、流れの構造変化を明らかにした。実験の重要なパラメータである  $\Gamma$  は自由端の場合は 0.58 ~ 7.86 で、固定端の場合は 1.13 ~ 7.24 で変化させた。ちなみに Benjamin の固定端の実験では大体  $\Gamma = 0.7 \sim 4.0$  である。隙間の大きさは  $D/R_1 = 0.5$  (本実験)、 $D/R_1 = 0.62$  (Benjamin) である。

テイラー渦の基本形は内円筒を取り巻くトーラス状の渦で、これをセルと呼ぶことにする。 $Re$  を固定すると、このセルの高さは流れを代表するパラメータとして重要なので (2-2)、0.01mm 単位の読み取り顕微鏡で波動テイラー渦に遷移するまで測った。本実験では主としてこの波動テイラー渦発生以前のテイラー渦の形成過程、セルの数、セルの高さに注目した。

自由端の場合も予備実験によって  $\Gamma$  と  $Re$  が同じでもセルの現れ方は多様であることがわかっており、それは  $Re$  の変化の仕方に依存し、主モードと 2 次モードに区別する事ができる (2-2)。即ち、主モードとは  $Re$  が徐々に増加した場合に発生する流れで、本

実験ではクエット流状の流れから  $Re_{c1}$  付近まで  $Re$  を徐々に増加した。この  $Re$  を徐々に増加する方法は場合により 2 通り用いた。1 つは 内円柱の回転数を 1 r.p.m. か又は数 r.p.m. ずつ 4 分毎に上昇させて行く、状況が変化し易い場合での方法、1 つは比較的安定した状況で可能なもので、 $Re_{c1}$  付近まで十秒程度で増加させる方法である。2 次モードとは  $Re_{c1}$  を僅かに越える  $Re$  まで急激に増加した場合に生ずることのある、その  $Re$  での主モードとは異なる流れが生じるものである。本実験では 1 秒間程度で  $Re_{c1}$  まで増加させることによって発生した。又、重要なことに、流れが落ち着くには  $Re$  設定後、しばらく待つ必要がある。この緩和時間について Snyder は (2-16)、それは作動流体高さに依存し、 $T \sim c L^2 / \nu$  ( $c$  は定数) で表せるとしており、 $c = 0.15$  としている。本実験では  $L$  が小さいため何回かの試行の後、緩和時間は 4 分程度と見積られた。これは  $L = 80\text{mm}$ ,  $\nu = 6.0\text{mm}^2/\text{s}$  とすると  $c = 2.25$  となる。

## 2. 3 結果と考察

### 2. 3. 1 流れ場の構造

説明の便宜上、まず流れ場の名前を定義し、自由端 (Asymmetric Condition)、固定端 (Symmetric Condition) の場合の流れ状態をまとめて表 2-1 に示す。これは他のセル数でも同じである。セルどうしの境界は、その面での半径方向速度が正、つまり外円管へ向かう流れの場合と逆の場合がある。外円管へ向う流れを湧き出し流れ (Source Flow)、内円筒へ向う流れを吸い込み流れ (Sink Flow) と呼ぶ。自由端で発生する流れの外観写真を図 2-2 に示す。図 2-2 (a) は一般に発生するタイプの流れであり、表 2-1 の自由端の場合の主モード (Primary Mode) に対応する。この場合は 7 セル流れである。図 2-2 (b) と (c) は変異モードで 4 セル流れである。これらはどちらも 4 セル流れであるが、流れの構造が異なっている。表 2-1 の自由端の場合の 2 次モード (Secondary Mode) の変異モード (Anomalous Mode) に対応する。

テイラー渦の断面は前掲の表 2-1 中の図の構造で、自由端におけるセル構造は、奇数個のセルの場合には吸い込み境界が必ず最上位になり、逆に湧き出し境界が最上位になることはない。よってこの場合には変異モードは見られなかった。自由端の偶数個のセルでは湧き出し境界が最上位になるのが普通である (図 2-2 (b))。しかし  $Re$  の急激な変化があった場合の様に、外乱が加わると変異モードが発生し、最上位が吸い込み境界となり、底面で外向きの流れとなる (図 2-2 (c))。この変異モードは時々見られたが、その発生過程は明らかではない。変異モードについては本章ではこれ以上考察しない。

### 2. 3. 2 テイラー渦の形成過程とセル構造

自由端の場合に形成されるテイラー渦のセル数は固定端と異なり、奇数個が主である。しかし、 $\Gamma$  と  $Re$  の限られた範囲で偶数個のセルが形成されることが見いだされた。図 2-3 と図 2-4 は自由端と固定端の場合におけるテイラー渦の形成過程の連続写真であり、状態の変化の特徴が顕著である物を掲載した。各々の写真の向って右側は回転内円筒で左側は外円管である。写真から自由端の場合には最初に最下位の湧き出し境界が発生し、次第に上位の湧き出し境界が発生してセルが形成されて行くのが確認できる。これに対し固定

端の場合は最上位と最下位の湧き出し境界が最初に発生し、次第に中央に向かってセルが形成されて行くのが確認できる。テイラー渦の形成過程について従来あまり詳細な観察、整理がなされていない様なので、自由端について $\Gamma$ が6前後の値の場合を例として以下に示す。

$\Gamma$ が6より小さい値、例えば $\Gamma = 5.5$ では主流は5個のセルを持つ。この $\Gamma$ の範囲において3セルと7セルの流れが $Re$ の変化の仕方により2次モードとして発生する。 $\Gamma$ が6.5付近より大きい値、例えば $\Gamma = 6.8$ では7セルが主モードなり、5セルと9セルが2次モードとして発生する。即ち、 $\Gamma$ の変化によって主モードと2次モードの交代が生ずる。主モードも2次モードも、ある $Re$ で一旦その状態が安定した後、 $Re$ を増加させるとある限度までは $Re$ の増加に伴って渦が次第に明確に可視化されるようになる。その意味では渦が発展するといえる。更に $\Gamma = 5.5 \sim 6.5$ 付近の間では6セルが発生する。しかしどの $\Gamma$ の範囲でも6セルが確立した後、 $Re$ を増加させて行くと、 $\Gamma$ が6より大きい時は7セルに、 $\Gamma$ が6より小さい時は5セルに分岐することが見い出された。以上、3つの場合、即ち、

- (1) 初めから奇数個5セルが形成される
- (2) 一旦6セルになり、 $Re$ の増加により5セルへ
- (3) 一旦6セルになり、 $Re$ の増加により7セルへ

分岐する場合、各々セルの形成過程が異なる。

まず(1)の場合を図2-5に示す。 $Re$ を低い値に保っておくと中心部はクエット流に近いと思われる流れであるが、内円筒表面にアルミ粉の動きから見て周方向の速度が大きい薄い層が観察される(a)。 $Re$ が徐々に増加すると、その薄層内に軸方向流れが底面に近い側から発生し、その後、外円筒に向かう湧き出し流れが生ずる(b)。この湧き出し流れは外円筒に到達した後、その上に発生した別の湧き出し流れと一緒に吸い込み境界を作り(c)、最後に上層のセルができる。セルの高さはほぼ $D$ に等しい。このセルの形成過程は軸方向流れが発生してから形成し終わるまで、 $Re$ にもよるが数秒以内である。

(2)の場合を図2-6に示す。6セルが形成するまでは、最上層のセルの向きが反対であることを除いて(1)の場合と同様である。その後 $Re$ が増加すると次第に最上層のセルがその下のセルに押される様に時間とともに小さくなる。その様子は湧き出し境界がセル構造をそのまま維持しながらゆっくりと上昇して行くように観察された(b~d)。

5セルに分岐した後、各セル高さが変化し最終状態に落ち着く（e）。当初界面は流面と考えられるのに対し、移動するセル界面は連続の条件から流体が界面を通過するはずがないので、落ち着いた状態での界面とは流体力学的性質は全く異なると考えられる。

6セルから7セルに変化する（3）の過程を図2-7に示す。この場合も6セル形成までは（2）と同じである。その後 $Re$ が増加すると自由表面付近で図2-7（b）のように内円筒から外円管へ向かう流れが生じる。この動きはアルミ粉の運動からみると、その下側にある流れに影響され、外円管に到達する以前に下に曲がり込んでセルを形成する。その後、時間と共にセル流れが明確に可視化されるように発展して行く（e）。尚、 $\Gamma = 5.5$ での前述の2次モードとしての3セル、7セルの、形成過程は図2-5のようであるが、 $Re$ の急増加による発達なので、全過程が殆ど同時に生ずる。

一方、固定端の場合のセルの形成過程は $\Gamma$ に依存せず一種類であった。即ち、 $Re$ が徐々に増加するとき、最上端と最下端から、ほぼ $D$ だけ中央へよった位置に内円筒の表面から外円柱へ向かって流れの発生するのが観察され、それが発展してセル構造を作る。その後、 $Re$ の増加により、中央寄りにほぼ $2D$ だけ離れた位置からセルが形成される順に流れが発達して行く。

このセルの形成過程が起こる $Re$ は自由端、固定端の場合に、100前後であると思われるが、Benjaminが述べているように明確な値は決定できなかった。

$\Gamma$ に依存する様々な形成過程によって構成されるテイラー渦流れは自由端の場合、そのセル数はほぼ奇数個となる。これは装置の非対称性から予測されることである。本実験の $\Gamma$ の範囲では主モード、2次モードを含めて、1から11個までの奇数個のセル流れを確認した。又、限られた $\Gamma$ の範囲で2から8個までの偶数個のセル流れを確認した。しかし、奇数個のセル流れは $Re$ の増加に対してその状態を長く保つが、偶数個のセル流れは $Re$ の増加によって変化し易く、結局、奇数個のセル流れに分岐してしまった。この偶数個セルが発生し易い条件は $\Gamma$ が偶数の整数値付近で、 $\Gamma = 2$ 付近で2セル、 $\Gamma = 4$ 付近で4セル、・・・となる。これらの状態は $Re$ が小さい時に発生するが、 $Re$ が増加するとセル界面が変動しはじめ、奇数個のセルに分岐してしまう。しかもこの分岐の仕方は本節の初めに6セルを例に述べたように $\Gamma$ に強く依存している。

固定端の場合、テイラー渦流れを構成するセル数は偶数個のみで、奇数個のセルは本実験では見いだせなかった。この点について自由端の場合、限られた条件下で偶数個のセルが見られたこと、Benjaminが固定端で奇数個のセルを観察していること（2-11）から



考えて、本装置の固定端の場合でも奇数個のセルが発生する条件があると予測して様々な実験を行ったが確認できなかった。これは僅かな装置の非対称性によるものか、Benjaminの装置とは $R_1/D$ が異なるため、奇数個のセルが発生しない条件になっているのかは決定できなかった。

### 2. 3. 3 レイノルズ数に対するセル高さの変化

測定された多数の場合のうち図2-8は自由端の条件で $\Gamma = 5.87$ の場合における5セル流れの各セル高さを、図2-9は固定端で $\Gamma = 6.24$ の場合の6セル流れの各セル高さの作動流体高さによる無次元値の $Re$ に対する変化を示す。図中の $H_1 \sim H_5$ 、 $H_6$ はセルの位置を示し、下端のセルから順に1、2、・・・と番号が付けられている。

自由端の場合における全作動流体高さに対するセルの高さの割合( $H/L$ )は、 $Re$ が $R_{c1}$ を越える僅かな範囲では最下層のセルが最も大きく、次いで最上層のセルが大きい。この2つの層に挟まれた中間の層は、全てのセルの $H/L$ はほとんど等しく、高さは低くなっている。その後、 $Re$ の増加により最下層のセルの $H/L$ は次第に減少し最上層のセルの $H/L$ は次第に増加する。そして両者はある点で逆転する。中間層のセルの $H/L$ は $Re$ の変化に対してどの位置のセルもほぼ等しく最下層の変化と同程度に減少していく。

固定端の条件におけるセルの $H/L$ は最上層と最下層の $H/L$ がほぼ一定であり、かつその変化の仕方も同じ傾向を示す。即ち $Re$ が $R_{c1}$ を越える僅かな範囲ではセルの $H/L$ は減少する傾向を示すが、その後 $Re$ の増加に対しその変化はほぼ一定となる。中間層のセルは自由端の場合と同様に $Re$ に対してその変化は同様でありその値は最上層、最下層より低くほぼ等しい。

以上の $Re$ の変化に対するセルの $H/L$ の変化は、自由端と固定端について、特に最上層と最下層に注目される。境界条件が軸方向に対して対称な固定端の場合、同じ条件であることからその変化はほぼ等しいと考えられる。よってグラフ上の僅かな差は、上端と下端の装置の僅かな差によるのではないかと思われる。一方自由端の場合、その上端と下端では境界条件が異なり、自由表面である上端は、固定面であり粘性応力の影響が大きい下端より $Re$ の増加に対してセルは発展し易いと思われ、そのため高さは増加すると考えられる。中間のセルに関して、自由端の場合も、固定端の場合もその境界条件は同じであ

ると考えられ、 $Re$ の変化に対してその高さが変動しにくく、セルの高さの割合もほぼ一定であると考えられる。

表2-2は自由端と固定端の各セル数について、内外円管の隙間に対するセルの高さの値を $Re_2$ に達する直前の値において求めた結果を文献(2-19)に従って示したものである。テイラーの一般理論では、セルの高さは内外円管の隙間に等しいとされるが、本実験では必ずしもそうではない。最上層と最下層においてそのことが顕著である。これらは端面の影響を受けているためであると考えられる。又その端面の影響が比較的少ないであろうと思われる中間層についても必ずしも等しいといえない。これらは $\Gamma$ が小さい条件によるものと思われる。

上記の他、テイラー渦の非定常波動流れへの分岐、そのヒステリシス、セル数の分岐がカオス化以前の重要問題であるがこれについては次章で報告する。

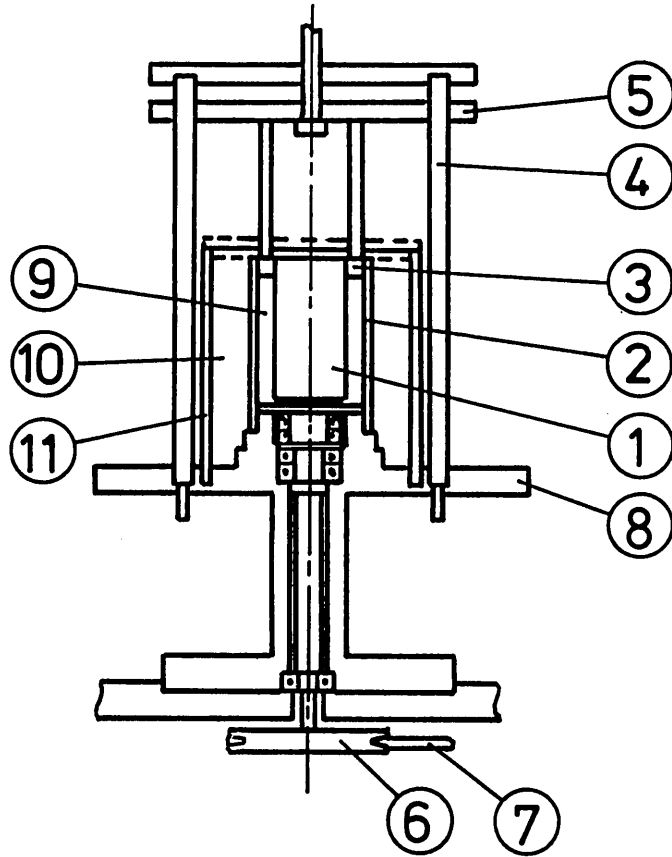
## 2. 4 結言

本章ではテイラー渦に関する多くの研究で扱っている条件とは異なる条件、即ちアスペクト比が小さい場合で、上面が自由表面の場合を可視化により調べた。又両端面が固定されている場合も観察し、2つの場合について流れの状態、渦の形成過程などを比較した。主な結論は次のごとくである。

(1) 回転二重円筒間の流れは上下端の境界条件に強く依存する。上端が自由表面の場合、端面条件の非対称性から予想される様に奇数個のセル流れが最も一般に発生するが、限定された条件下では偶数個のセル流れも形成されうる。両端固定の場合、本装置では偶数個のセル流れのみ観察された。奇数個のセル流れは幾何学的条件の変化に対しては観察されなかった。

(2) レイノルズ数が徐々に増加したとき、テイラー渦の形成には自由端の場合、3つの型があることが判明した。これらは何れも $\Gamma$ に依存する。固定端の場合、 $\Gamma$ に関係なくテイラー渦の形成過程は1種類であった。

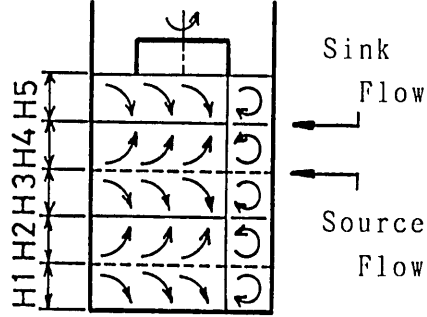
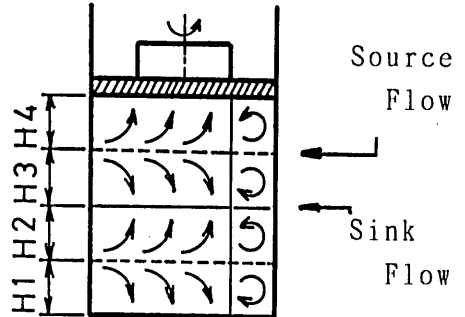
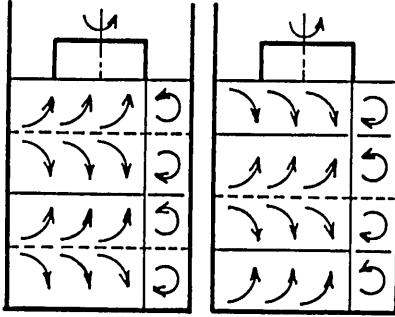
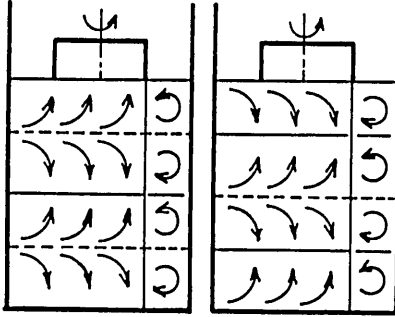
(3) レイノルズ数の変化に伴うセル高さの変化を明らかにした。特に自由端の場合において、最下層のセル高さは $Re$ の増加により減少し、逆に最上層のセル高さは増加し、最も高くなる。中間層はどの層もほぼ同じ高さで最も低く、最下層のセル高さと同程度に次第に減少して行く。固定端の場合において、最上層と最下層のセル高さの変化は同様でほぼ一定となる。中間層はどのセルもほぼ同じ高さであり、最上層、最下層より低く、ほぼ一定である。



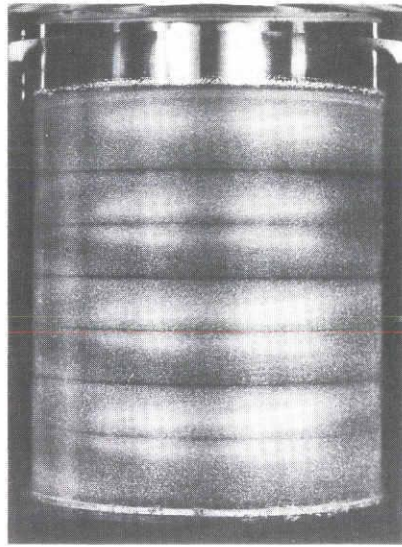
1. Rotating Inner Cylinder 2. Fixed Outer Cylinder  
 3. Slide Ring 4. Guide Rod 5. Slide Disk 6. Belt  
 Wheel 7. V-Belt 8. Table 9. Working Fluid  
 10. Transparent liquid 11. Outer Bath

图 2 - 1 实验装置

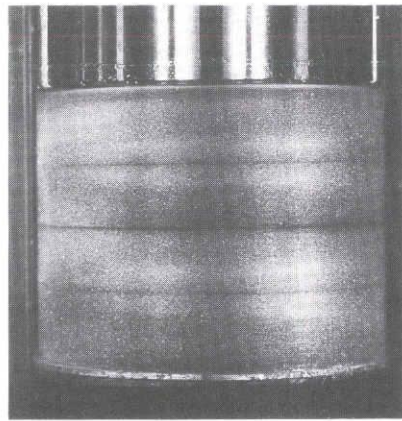
表 2 - 1 流れ場の構造

	A s y m m e t r i c		S y m m e t r i c	
Cell Number	Mainly	Odd Number Cell	All	Even Number Cell
	Limited $\Gamma, Re$	Even Number Cell		
Cell Structure	Primary Mode (ex. 5 Cells) 		Primary Mode (ex. 4 Cells) 	
	Secondary Mode (ex. 4 Cells) 			
	Anomalous Mode 			

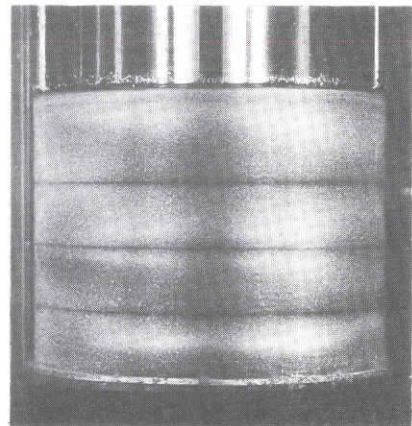
表中で Asymmetric は自由端、Symmetric は固定端を示す



(a) 7セル (主モード)



(b) 4セル (変異モード)



(c) 4セル (変異モード)

図 2 - 2 流れの外観写真 (自由端)



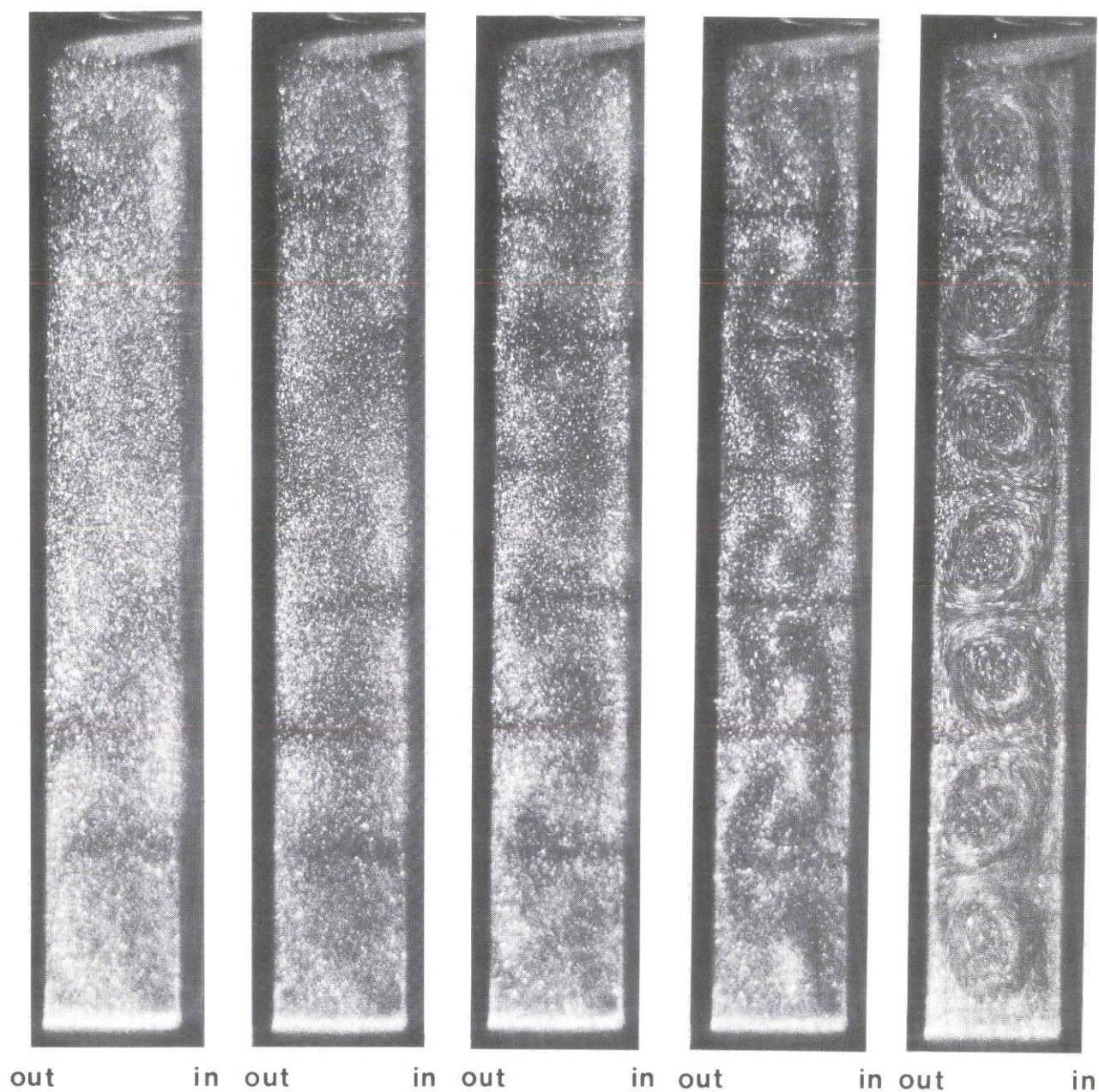


図 2 - 3 渦セルの形成過程の連続写真（自由端 7セル）

写真右側は内円筒、左側は外円管

連続写真の中で流れの状態が顕著なものを掲載する

安定な状態になるまで数秒から数10秒を要する



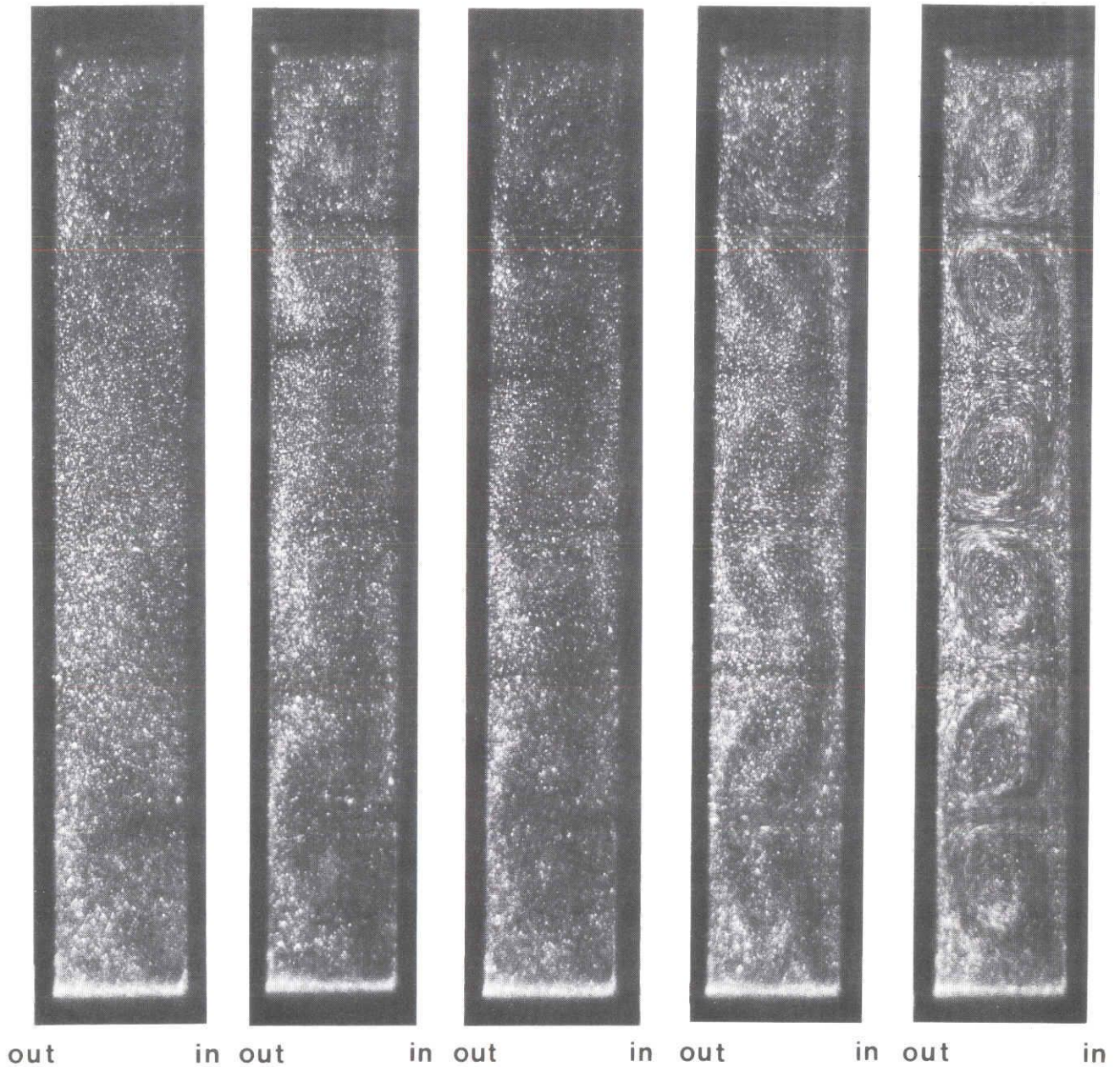


図 2 - 4 渦セルの形成過程の連続写真（固定端 6セル）

写真右側は内円筒、左側は外円管

連続写真の中で流れの状態が顕著なものを掲載する

安定な状態になるまで数秒から数10秒を要する



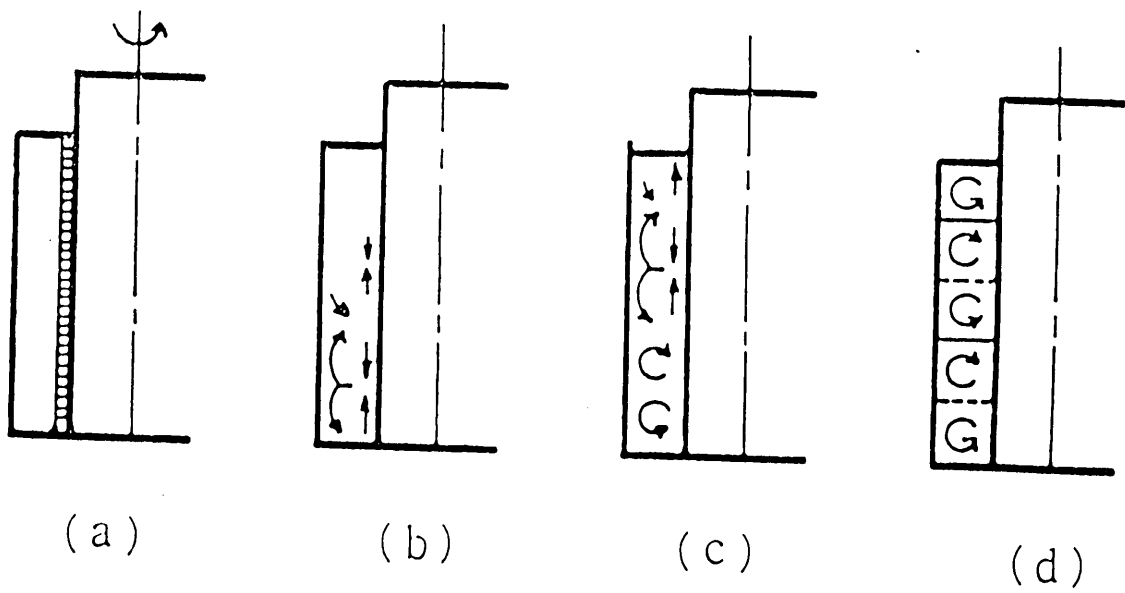


図 2 - 5 自由端における 5 セルの形成過程  
(a)~(d)へと変化する

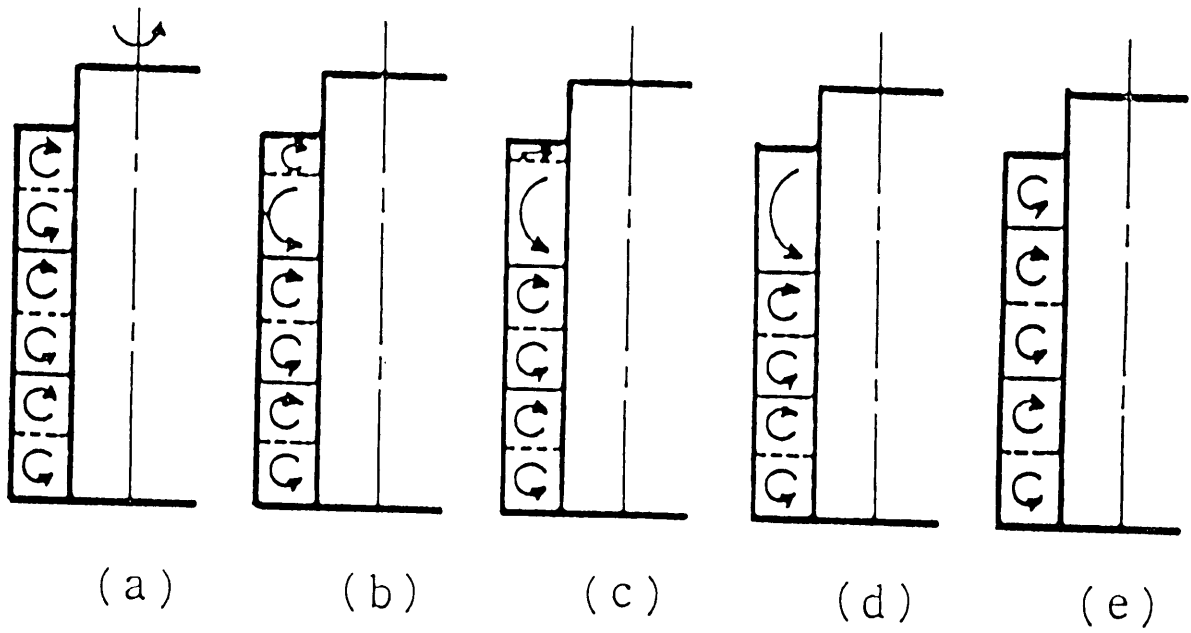


図 2 - 6 自由端における 6 セルから 5 セルへの形成過程  
(a)~(e)へと変化する

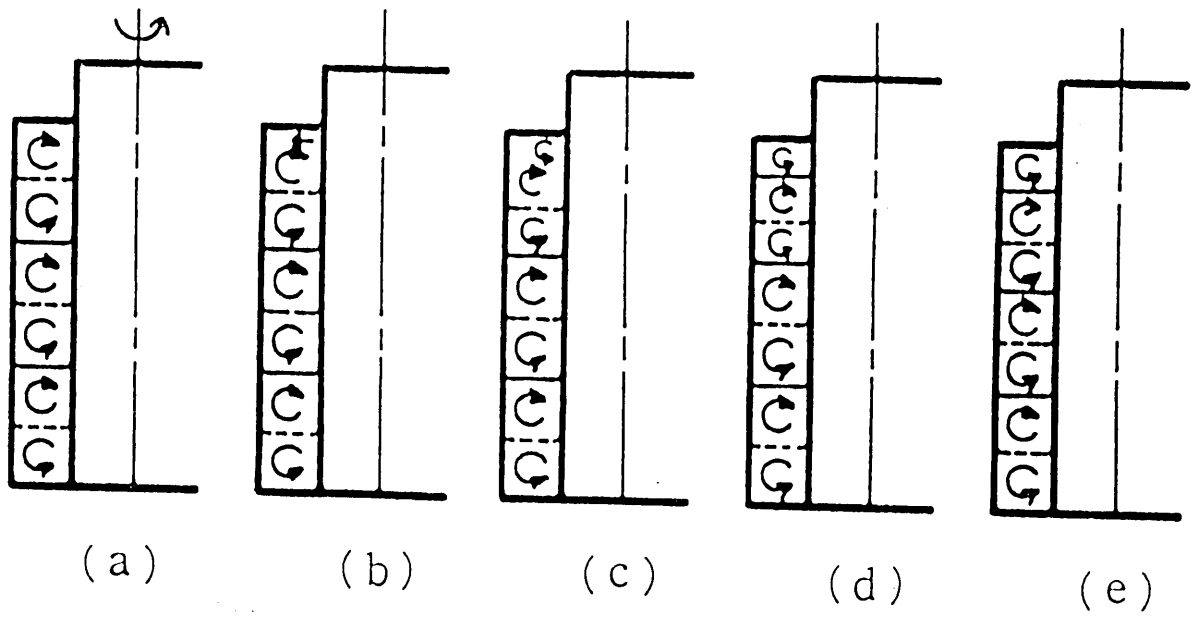


図 2 - 7 自由端における 6 セルから 7 セルへの形成過程  
(a)~(e)へと変化する

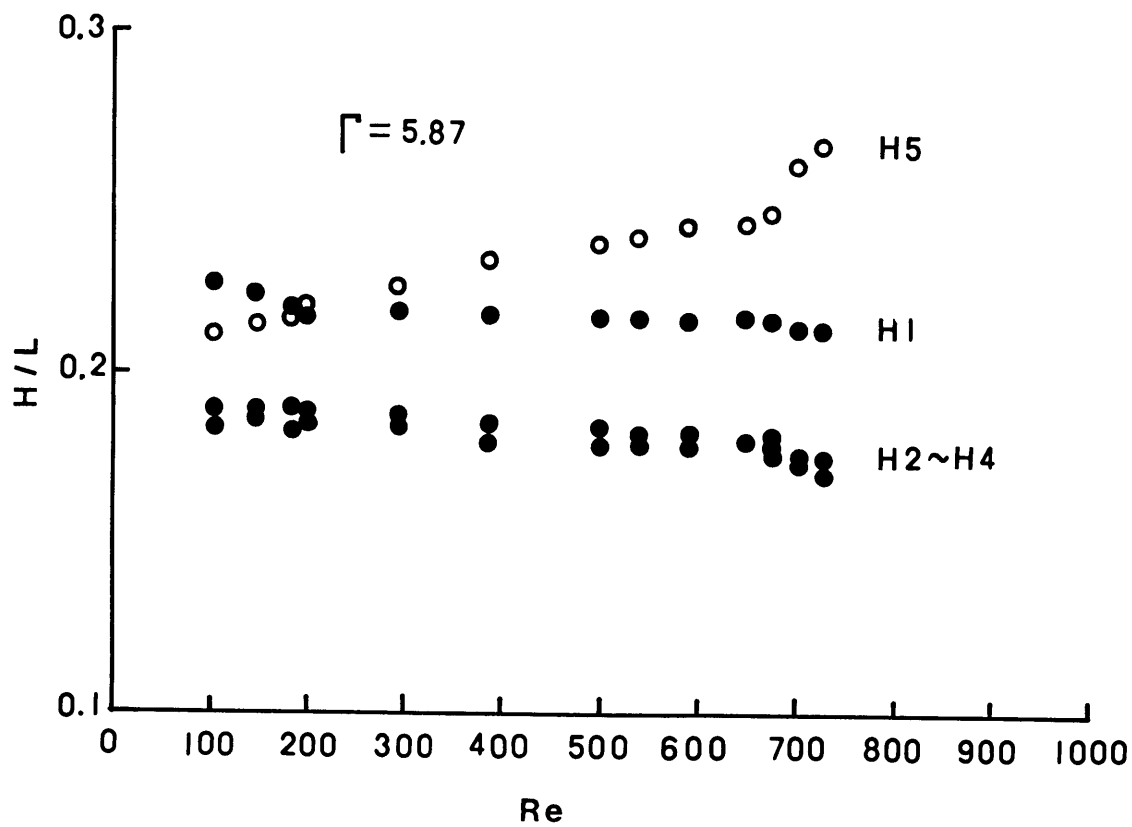


図 2 - 8     $Re$  に対する各セル高さの変化 (自由端 5セル)  
 H 1 から H 5 は最下層のセルから順に番号が付いている

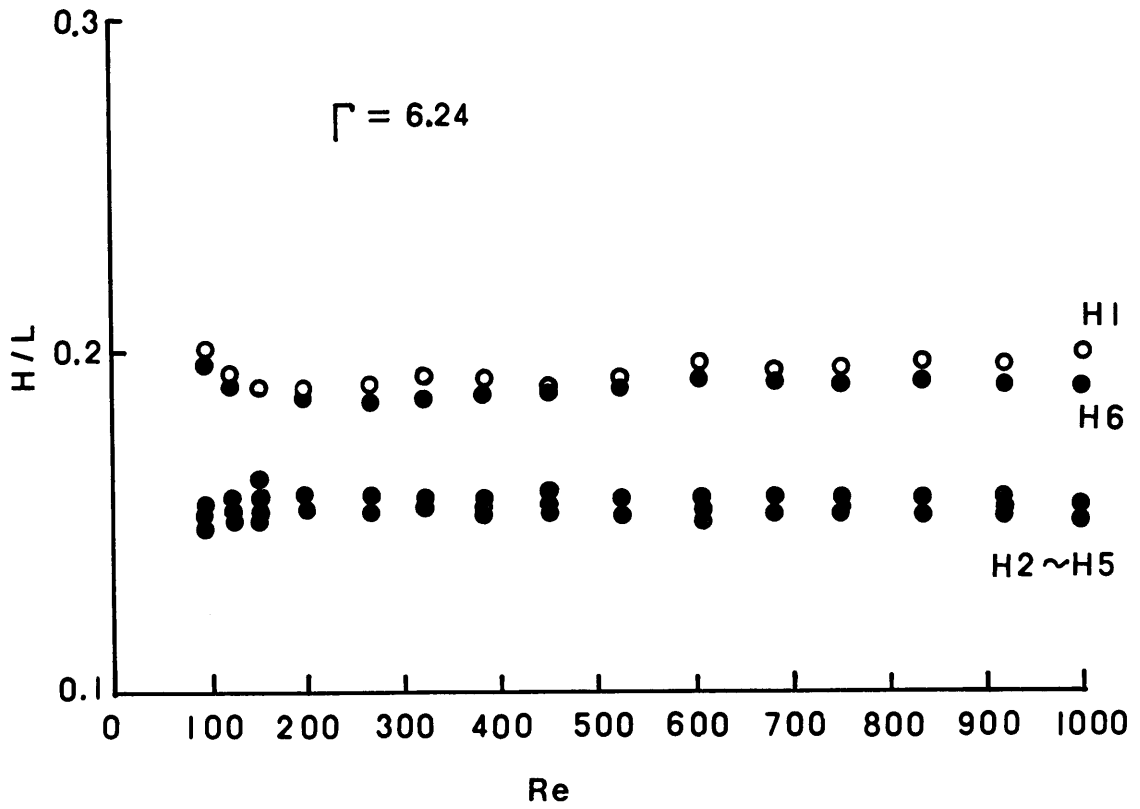


図 2 - 9  $Re$  に対する各セル高さの変化 (固定端 6 セル)  
 H 1 から H 6 は最下層のセルから順に番号が付いている

表 2 - 2 内外円管の隙間に対するセルの高さ

	Cell Number	Cell Height	H 1	H 2	H 3	H 4	H 5	H 6	H 7	H 8
		$\Gamma$								
A s y m m e t r i c	3	2.79	0.93	0.72	1.15	• •	• • •	• •	• •	• •
		3.57	1.17	0.96	1.44	• •	• •	• •	• •	• •
		4.24	1.37	1.20	1.67	• •	• •	• •	• •	• •
	5	4.30	1.00	0.72	0.71	0.76	1.11	• •	• •	• •
		4.96	1.09	0.84	0.85	0.86	1.32	• •	• •	• •
		5.87	1.27	1.06	1.05	1.06	1.43	• •	• •	• •
	7	6.15	1.00	0.79	0.77	0.79	0.76	0.82	1.21	• •
		7.05	1.16	0.90	0.90	0.87	0.90	0.92	1.41	• •
		7.75	1.23	1.02	1.00	1.00	1.01	1.02	1.47	• •
S y m m e t r i c	2	1.68	0.82	0.87	• •	• •	• •	• •	• •	• •
		2.69	1.34	1.35	• •	• •	• •	• •	• •	• •
	4	3.98	1.16	0.88	0.85	1.11	• •	• •	• •	• •
		4.28	1.23	0.92	0.93	1.21	• •	• •	• •	• •
		5.01	1.38	1.14	1.12	1.37	• •	• •	• •	• •
	6	5.62	1.13	0.85	0.85	0.85	0.84	1.10	• •	• •
		6.24	1.25	0.96	0.96	0.97	0.93	1.17	• •	• •
		6.62	1.31	1.04	1.04	1.00	1.03	1.21	• •	• •
	8	6.30	1.02	0.71	0.71	0.71	0.70	0.70	0.70	1.05

表中で Asymmetric は自由端、Symmetric は固定端を示す

### 第3章 テイラー渦の安定性 (3-1), (3-2)

#### 3.1 緒言

同軸回転二重円筒間の流れはレイノルズ数が増加するとトーラス状の流れ（セル）が幾重にも積み重なった特徴ある流れ、即ち、テイラー渦流れになり、そのセル数などは環状隙間のアスペクト比、レイノルズ数に複雑に依存する(3-3), (3-4)。前章においてアスペクト比が小さく、液柱の上表面が自由面である自由端（以下自由端と表す）の場合について実験を行い、アスペクト比が 0.5～7.9 の範囲では1～11個までの奇数個のセル流れと2～8個までの偶数個のセル流れの状態が存在すること、及びセルの形成過程を明らかにした(3-3)。

前章の実験で液柱の上下面が固定面である固定端（以下固定端と表す）の場合は2～8個までの偶数個のみのセル流れの状態が観察され、これらのテイラー渦流れの状態が確立された後、レイノルズ数が増加するとセル数を一定に保って波動テイラー渦、乱流へと分岐していった(3-3)。逆にレイノルズ数が徐々に減少する時、テイラー渦流れは安定なある個数のセル流れから別の個数のセル流れに分岐する場合があることが Benjamin によって分岐理論の応用として数学的に研究されており(3-4)、また、Benjamin, Mullin によって実験結果が報告されている(3-5), (3-6)。しかしこれは固定端の場合においてであり、自由端の場合については観察がなされていない。又、非対称境界条件の自由端の場合にはその分岐の様子もさらに複雑になると思われる。

この様にアスペクト比が小さいテイラー渦流れの状態の不安定性はレイノルズ数が増加すると波動テイラー渦状態への分岐か、もしくはセル数の異なるテイラー渦への分岐という2つの態様を示す。本章は自由端と固定端の場合においてアスペクト比を細かく変化させたときのテイラー渦の不安定性について実験で調べたものである。また、自由端におけるセル数間の分岐の様子を明らかにし、主モード（レイノルズ数を徐々に増加したときに発生する定常なテイラー渦流れ）への到達はレイノルズ数とアスペクト比に対してどの様に決定されるかを考察した。

### 第3章の主な記号

$R_1$  : 内側回転円筒半径 ( $2 R_1 = 40.19 \pm 0.006$  mm)

$R_2$  : 外側円管内半径 ( $2 R_2 = 60.11 \pm 0.024$  mm)

$D$  : 内外円管の隙間 ( $D = R_2 - R_1 = 9.96 \pm 0.025$  mm)

$L$  : 作動流体の円柱軸方向高さ

$\Gamma$  : アスペクト比、 $\Gamma = L / D$

$\omega$  : 内円筒の回転角速度

$\nu$  : 動粘度

$Re$  : レイノルズ数  $Re = \omega R_1 D / \nu$

$Re_1$  : クエット流状の流れからの変化が可視化によって認められるレイノルズ数

$Re_2$  : テイラー渦流れから波動テイラー渦流れへ分岐する臨界レイノルズ数

その他の記号はその都度定める。



### 3. 2 実験装置と実験方法

本実験に使用した装置は第2章において述べたものと全く同じ物で、環状部の寸法は上の記号表に示したとおりである。回転数の調整、可視化法等の実験方法の詳細については第2章で述べたので省略する。実験パラメータの変化の範囲はほぼ、 $Re = 0 \sim 2000$ 、 $\Gamma = 0.5 \sim 7.9$  である。

実験方法に関しても第2章と同じである。

### 3. 3 結果と考察

#### 3. 3. 1 波動テイラー渦分岐の臨界レイノルズ数のアスペクト比に対する変化

テイラー渦流れは  $Re$  が増加すると、その流れ状態は波動テイラー渦流れ、乱流へと遷移していく。その流れの様子を写真撮影したものを図 3-1 から図 3-4 に示す。図 3-1 と図 3-2 は自由端と固定端の場合の流れの外観写真で、図 3-3 と図 3-4 は流れの断面写真である。図 3-1 は  $\Gamma = 6.5$  における 7 セルの流れの状態、(a) はテイラー渦流れ、(b) は流れの方向が内円筒から外円筒へ湧き出す流れとなるセルとセルの境界が振動している波動テイラー渦流れ、(c) はさらに外円筒から内円筒へ沈み込むように流れるセルとセルの境界が振動する波動テイラー渦流れ、(d) は乱流テイラー渦流れである。図 3-2 は  $\Gamma = 5.5$  における 6 セル流れの状態、(a) から (d) まで図 3-1 と同じ流れ状態である。また、図 3-3 は  $\Gamma = 6.44$  における 7 セルの断面写真である。(a) から (d) は図 3-1 と同じ状態に対応する。図 3-4 は  $\Gamma = 6.50$  における 6 セルの流れ状態である。

初めに、セル数を保存したままのレイノルズ数に対する安定性の変化として波動テイラー渦への分岐 (3-7) を調べた。自由端における結果を図 3-5 に示す。図において横軸はアスペクト比、縦軸は流れが不安定になり波動テイラー渦になる臨界レイノルズ数である。図中の数字はセル数を表わす。この図に示されているセル数以外はこの  $\Gamma$  では存在しない。また、偶数個のセルにおける臨界値は流れの状態が不安定になり、他のモードへ変化する値を示している。図からも明らかなように同じ  $\Gamma$  の値においてそこで発生する安定したテイラー渦の状態はいくつかあり、例えば  $\Gamma = 5.5$  では 3、5、6、7 セルの状態がある。これは初期条件と  $Re$  の変化のし方に依存しており、このセル数の選択性については後に述べる。本実験においては判明した限りの状態についてその安定性を調べた。自由端の場合における奇数個のセル流れの状態では、波動テイラー渦流れへの安定限界曲線は各セルとも  $\Gamma$  に対して最大値を持つくさび型の形状を示す。 $Re_c$  が最大、即ち最も安定な条件は  $\Gamma$  がそのセルの数とほぼ同じ値、つまり 1 セルなら  $\Gamma = 1$ 、3 セルなら  $\Gamma = 3$ 、・・・の付近であり、その  $\Gamma$  の値の前後ではその安定性が減少することがわかる。各セルの個数に対しての安定性についてみると、セルの個数が増加して行くと全体的な安定性は低下している。しかも各セルに対する  $Re_c$  の最大値は次第に一定になり、 $\Gamma$  に対す

る差が小さくなっていることからセルの個数が増加して行くとその安定性は次第に一定になるのではないかとと思われる。しかしこの点についてはセルの数が増えたときの確認の実験が必要であろう。

一方、図 3-5 の自由端における偶数個のセルの安定性はテイラー渦流れから波動テイラー渦流れへ分岐するのではなく、奇数個のテイラー渦流れへ分岐する臨界レイノルズ数を調べた。 $\Gamma$ が大きくなるに従ってこの安定性は次第に減少する傾向があり、奇数個に見られるような特徴ある形は見られなかった。又その安定性はセル数によってあまり違いは見られない。全体として自由端における偶数個セル流れの安定性は奇数個セル流れのそれに比較して低いことが分かる。これは系の非対称性からも予想されることである。

固定端における対応する結果を図 3-6 に示す。各セルの $\Gamma$ に対する安定性は自由端の奇数個セルの場合と比較的類似しており 2セルの場合には最大値を持つくさび型であり 4、6セルはそれに対して最大値の先端が次第に丸みを持つ形になっている。最も状態が安定である $\Gamma$ の条件はセルの数と同じ値の付近であるが 4、6セルに関しては僅かに $\Gamma$ の値が大きい値の方へずれている。また、セル数が増すに従って全体的な安定性は低下する傾向にある。固定端に関して実験条件がやや異なるが、同様な観察が Benjamin によって既に報告されており (3-7)、その結果と比較してみるとほぼ同様な結果が得られていると言える。

### 3. 3. 2 自由端の場合の奇数個のセル間における分岐

$\Gamma$ が小さく両端が固定端の場合において偶数個のセル $N$ と $N \pm 2$ 個のセルの流れの分岐の関係が既に報告されている (3-5), (3-6)。これらはある $\Gamma$ について 2次モード ( $Re$ の $Re_c$ を越える範囲への急激な増加によって発生する流れの状態) (3-3), (3-5) から主モードに分岐する $Re$ を求め、又ある $\Gamma$ の範囲においてヒステリシス現象があることを示し、その分岐曲線がくさび型をしていることを明らかにしている。本実験は $\Gamma$ が小さく自由端の場合について奇数個のセル同士、奇数個と偶数個のセルの間における分岐の関係を調べた。

$\Gamma$ が奇数値付近においては奇数個のセル流れの状態が非常に安定して存在する。特に図 3-5 でも明らかなように $\Gamma$ の数値とほぼ同じ値の個数のセルの流れが最も安定して主モードとして存在し、そのセル数 $\pm 2$ 個の奇数個のセル流れが 2次モードとして存在する。

本節では奇数個のセル流れの状態について、主モードと2次モードの間の分岐の関係について述べる。その結果を図3-7、図3-8に示す。図3-7は主モードのセル流れよりセル数が2個多い2次モードがそこでの主モードに分岐する場合である。一旦、2次モードを発生させ、その状態が安定するまで十分な緩和時間（約4分）をとった後、次第に $R_e$ を徐々に増加させた場合にその2次モードが主モードに分岐する $R_e$ と徐々に減少させた場合にその2次モードが主モードに移行する $R_e$ を求めた（尚このような分岐の定義に付いては文献（3-5）を参照されたい）。上側の線は $R_e$ が徐々に増加した（図中で $R_e \nearrow$ と示す）結果であり、下側の線は $R_e$ が徐々に減少した（図中で $R_e \searrow$ と示す）結果である。

7→5セルの場合を例にとり説明する。 $R_e$ が徐々に増加した場合、2次モードである7セルは主モードである5セルに分岐し、分岐する $R_e$ の臨界値は $\Gamma$ が大きくなると次第に増加して行く。また $R_e$ が徐々に減少した場合、7セルは同じ様に5セルに移行するが、移行する $R_e$ の臨界値は $\Gamma$ の増加に対し次第に減少して行く。 $\Gamma$ が5より小さい範囲については2次モードである7セルが発生しにくいこと、又発生しても安定せずに5セルに変化してしまうことから実験で確認することが非常に困難であった。しかし、 $\Gamma$ を5より小さくして行くと上側の線と下側の線は次第に接近するのではないかと思われる。この現象は5→3、9→7セルにおいても同様であると思われる。

図3-8は主モードであるセル数より2個少ないセル流れの2次モードを発生させ、安定後次第に $R_e$ が徐々に減少した場合にその2次モードが主モードに移行する $R_e$ を求めた結果である。この $R_e$ は $\Gamma$ の増加とともに増加していく。又、全体的な $R_e$ の値はセル数が少ないほど大きくなっている。これらの曲線はその端が切れているがその前後は2次モードが発生しにくく、又発生しても不安定で直ちに他の流れ状態になってしまうので確認ができなかった。

尚、この2次モードの状態から逆に $R_e$ を徐々に増加させると、セル数を保存しつつ波動テイラー渦流れへと分岐して行くことがわかっており、本実験では他のセルへの分岐の状態については調べなかった。

### 3. 3. 3 自由端の場合の奇数個と偶数個のセル間における分岐

$\Gamma$ が偶数値付近においては偶数個のセルが比較的安定して存在する。しかし $R_e$ が増

加するとその状態は不安定になりやすく、最終的に奇数個のセルに分岐する(3-3)。また、同じ $\Gamma$ の範囲において奇数個のセルの状態は $R_e$ が徐々に減少すると偶数個のセルに移行する。それらの分岐、移行が起こる $R_e$ を $\Gamma$ の値に対して求めた結果を図3-9、図3-10に示す。図中における黒丸印と白丸印は分岐、移行の種類を区別するために付けた。図3-9は偶数個のセルが確立した状態から $R_e$ を徐々に増加させた場合と、徐々に減少させた場合の各々において奇数個のセル流れの状態に分岐、移行したときの $R_e$ の変化である。4セルの場合を例にとって説明する。 $\Gamma$ が4付近においては4個のセル流れの状態が発生し $R_e$ の変化によって3個、又は5個のセル流れの状態に分岐する。図において上側にある線は $R_e$ が徐々に増加した場合であり、下側にある線は $R_e$ が徐々に減少した場合である。まず $R_e$ が徐々に増加した場合の上側の線について注目する。 $\Gamma$ が4より小さい範囲では4セルは3セルに分岐し、その分岐する $R_e$ の値は $\Gamma$ の増加に対して次第に減少して行く。そしてその現象は $\Gamma$ が4付近まで続き、 $\Gamma$ が4より大きくなると今度は4セルが5セルに分岐する。その分岐する $R_e$ の値は4セルが3セルに分岐する場合の曲線につながっており、 $\Gamma$ の増加に対して減少して行く。この4セルが3、又は5セルに分岐する現象は $\Gamma$ がほぼ3.7～4.3の範囲で観察された。

次に $R_e$ が徐々に減少する場合の下側の線について注目する。 $\Gamma$ が4より小さい範囲では4セルは3セルに移行し、その移行する $R_e$ の値は $\Gamma$ が大きいほど次第に減少して行く。この現象は $\Gamma$ が4の値になるまで続く。しかし $\Gamma$ が4より大きい範囲では同様なセル間の移行、例えば4セルから5セルへの移行の様な現象は起こらなかった。この $\Gamma$ が4より大きい範囲では4セルの安定した状態が維持され $R_e$ が徐々に減少して行くと4セルはその状態からそのままクエット流状の流れになり、他の個数のセル流れの状態に移行することはない。

6セルの分岐過程についても以上と同様のことが言える。 $R_e$ が増加したときの分岐の範囲はほぼ5.4～6.8の範囲で観察された。又、2セル、8セルについては実験装置の制約上、多くの測定点が得られなかったためはっきりしたことは言えないが、ほぼ同様な傾向になるのではないかと思われる。尚、2セルの下側の線は破線になっているが、実験における点が一点しか得られなかったためである。

次に図3-10は、 $R_e$ が徐々に減少したとき、奇数個のセルを持つ安定した2次モードが偶数個のセルを持つモードに移行した $R_e$ を求めたものである。 $\Gamma$ が4付近の場合を例にとって説明する。 $\Gamma$ が4付近においては奇数個のセルとしては3と5セルの流れ状態

が発生する。2次モードである5セルの流れ状態が4セルの流れ状態に移行する $Re$ の変化は $\Gamma$ の増加に対し次第に減少して行き、逆に2次モードである3セルの流れ状態が4セルの流れ状態に移行する $Re$ の変化は $\Gamma$ の増加に対し次第に増加して行く。これらの移行が起こる $\Gamma$ の範囲は $\Gamma$ が4の前後に限られている。図からも明らかなように5セルから4セル、3セルから4セルの移行の $Re$ の変化の線はある点で交差するがその点は $\Gamma$ が4の値より大きいところである。このことは図3-8に示した内容にも関係し、後節で述べるが、ある $\Gamma$ における主モードは何かという問題に関係する。 $\Gamma$ が偶数値付近である時、例えば、 $\Gamma$ が4付近の場合には4~4.7付近に4セル流れが主モードとなり $\Gamma < 4$ では3セルが、 $\Gamma > 4.7$ では5セルが主モードになる。よって3→4セルのグラフで最小値が $\Gamma$ が4付近で切断しているのは $\Gamma < 4$ では3セルが主モードとなるためこれ以上移行はせず、5→4セルのグラフで最小値が4.7付近で切断しているのは $\Gamma > 4.7$ では5セルが主モードとなるためこれ以上移行をしないからであると思われる。 $\Gamma$ が2、6、8の付近についても $\Gamma$ に対して移行する $Re$ の値が僅か異なるがその傾向はほぼ同様であると思われる。

### 3. 3. 4 アスペクト比と主モードの選択性

以上述べてきた結果を従来用いられてきたようなカタストロフィ理論(3-8)で用いられる図で示すことを試みたが、首尾一貫した図が見いだされなかったのでここでは流れの状態の分岐をブロック線図形式でアスペクト比に対して示した。このような分岐は微妙なので多数の繰り返し観察の結果このようにまとめられたものである。図3-11は $\Gamma$ が6を中心にしてその前後の $\Gamma$ の範囲における流れの分岐図である。ここで $Re \nearrow$ 、 $Re \searrow$ の記号については既に述べたが、 $Re \nearrow$ の記号は $Re$ が $R_{c1}$ を越える範囲へ急激に増加することを意味する。そしてこの急激に増加する方法は一通りではなく、増加の速度が違う場合や、 $Re$ が増加する以前の流れの状態で異なったりする。しかし図中ではその区別をしない。 $Re \nearrow \uparrow$ は $Re \nearrow$ と $Re \uparrow$ の両方の様式で流れの状態間を分岐しうることを示す。以下の説明ではこの記号を用いる。図中のCはクエット流れを表わし、P.M.は主モードを、S.M.は2次モードを、I.F.は中間流れを示す。また図中の四角で囲った部分はその流れの安定な状態を表し、その間を結ぶ線と矢印はその方向への分岐、移行を示す。又各タイプが存在する概略の $\Gamma$ の範囲を示す。 $\Gamma$ の値は概略の値であり、(c)と(d)の $\Gamma$ の値6.7と6.8の間は別の状態があるのでなく現在確認できている範囲を示している。

実験では微妙な変化のため明らかにできなかったが、この両値は更に近づき1つのある値を境にすると思われる。流れの分岐は大きく分けて5つのタイプに分類できる。まず(c)について注目すると、ここでは6セルが主モードである。よって $Re \nearrow$ によりクエット流状の流れは6セルに分岐し、5セルや7セルに分岐することはない。6セルになった状態が確立した後、更に $Re \nearrow$ にするとほとんど7セルに分岐する。又、実験では制御しがたい微小攪乱により時々5セルに分岐することがあった。しかしこれは図3-9に示すように7セルに分岐するのが一般であると思われる。ただし上述のように、注意深く実験しても6→5が発生したことから、これは分岐理論で言う系の不完全敏感性(Imperfection-Sensitivity)が原因であるとも考えられ(3-9)、理想状態でも5セルへの分岐が存在するかいなかは不明である。一方、6セルは主モードであるにも関わらず、この状態から $Re \nearrow$ によって6セルのままに更に分岐して波動テイラー渦流れ、乱流へと変化していくことはない。これは本実験系が自由端であるため偶数個セルが存在しにくいからであると考えられる。

(c)型における5セルと7セルは2次モードとして存在し、 $Re \uparrow$ によってクエット流状の流れから発生するか、もしくは主モードである6セルからの分岐によって発生する。一旦この流れの状態が確立すると $Re \nearrow$ によってその流れは波動テイラー渦流れ、乱流へと分岐していく。このテイラー渦流れはセル数について可逆的であり $Re \searrow$ によって波動テイラー渦流れはテイラー渦流れになるが、変化はヒステリシスを示す。そして波動テイラー渦流れからテイラー渦流れへ移行するレイノルズ数は $Re_c$ に対して数%小さいことがこの実験で明らかになった。これは他の研究結果(3-7)とも一致している。更に5セルと7セルの状態は $Re \searrow$ にすると6セルに移行し、5セルと7セルはクエット流状の流れに移行することはない。6セルの状態は $Re \searrow$ によってクエット流状の流れに移行する。以上のように6セルが主モードとなる $\Gamma$ の範囲はほぼ $6.0 < \Gamma < 6.7$ であり6前後ではないことが注目される。

次に(b)と(d)に注目する。(b)と(d)は(c)と異なり(b)は5セルが主モード、(d)は7セルが主モードの場合である。よってクエット流状の流れから $Re \nearrow$ によって(b)では流れは5セル、(d)では流れは7セルに分岐する。一旦、その主モードが確立すると $Re$ の変化によって他のセル数の状態へ分岐することがなく、 $Re \nearrow$ によって波動テイラー渦流れへ分岐する。これは固定端において $Re$ の増加と減少によって4セルと2セルが相互に分岐するという関係(3-5)と異なる。更に(b)においては

7セルが、(d)においては5セルが2次モードとなり、これらはクエット流から  $Re \uparrow$  によって発生する。この2次モードは一旦確立すると  $Re \nearrow \uparrow$  によって波動テイラー渦流れへ分岐する。しかし  $Re \searrow$  にするとそれらの2次モードは6セルへ移行する。更に6セルにおいて、 $Re \searrow$  にすると(b)では主モードである5セルへ(d)ではその主モードである7セルへ移行する。又、一旦、6セルの状態から  $Re \nearrow$  にするとやはり主モードである5セルあるいは7セルへ分岐する。よってこの型における6セルはこれまで分類されてきた主モードでも2次モード(3-4)、(3-5)でもない中間の流れ状態と見なすことができる。しかもこの状態は極めて不安定であるといえる。一方主モードは  $Re \searrow$  によってクエット流状の流れになる。

次に(a)と(e)について注目する。ここでは既に6セルの発生はみられず、5セルと7セルの関係になる。即ち(a)では5セルが主モードに、7セルが2次モードに、(e)では7セルが主モードに、5セルが2次モードになる。これらの  $Re$  に対する関係は(b)と(d)の場合の中間の流れ状態がない場合と同じである。更に現象を複雑にするのは図には示されていないが2次モードとして(a)には7セルの他に3セル、(e)には5セルの他に9セルが存在することである。実際にこれらの2次モードを発生させるには(a)における3セルは(e)における5セルを発生させる方法、(e)における9セルは(a)における7セルを発生させる方法と同じである。即ち現段階の実験では、主モードのセル数より2個多いセル数の2次モードを実際に発生させるには  $Re \geq Rc_1$  で  $Re$  を急激に増加させることで可能である。又、主モードのセル数より2個少ないセル数の2次モードを発生させるには  $Re \gg Rc_1$  で  $Re$  を急激に増加させてから今度は急激に  $Re = 0$  まで減少させ、その直後に  $Rc_1$  付近まで急激に  $Re$  を増加させることで可能で容易に達成された。これらの(a)における3セルと(e)における9セルの他の流れ状態との流れの分岐関係は各々(e)における5セル、(a)における7セルと同じ関係であるのでここではこれらの流れの関係は省略した。

又、ある  $\Gamma$  の範囲では波動テイラー渦状態において  $Re \nearrow \uparrow$  で2次モードが主モードに分岐する場合がある。これは自由端において最上層のセルが  $Re$  が大きくなると遠心力により上表面が凹面になり、ついには最上層のセルが崩壊し2次流れに分岐する場合、即ち  $7 \rightarrow 5$  と、 $Re$  が大きくなると最上層のセルの高さが高くなりついには1つセルが増えて2次モードに分岐する場合、即ち  $5 \rightarrow 7$  が可能である。この  $7 \rightarrow 5$  の現象の場合は(a)の  $\Gamma$  の範囲内で  $\Gamma$  が比較的小さいとき、 $5 \rightarrow 7$  の場合は(e)の  $\Gamma$  の範囲内で  $\Gamma$  が比較的



大きいときに起こる。

以上主モードの選択性に関して述べてきたが、主モードの定義について、従来の主モードの定義は、 $Re$  が徐々に増加した場合に発生する流れを主モードとしている(3-4)。しかしこの定義はクエット流からテイラー渦流れへの一方向のみである。一方、図3-11から明らかなように主モードは $Re$ の徐々の増加又は減少の変化に対してクエット流との間で分岐又は移行を行う。その意味でさらに従来の定義に加えて $Re$ が徐々に減少するときにクエット流状の流れに移行する直前の流れの状態を主モードと定義することもできる。

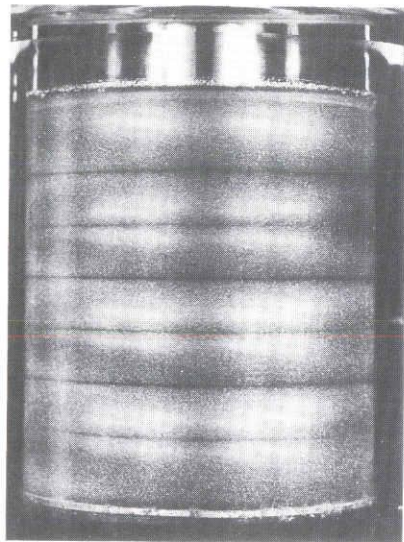
### 3. 4 結言

本章はアスペクト比が小さい場合のテイラー渦流れの不安定性について調べたものである。特に $\Gamma$ に対してテイラー渦流れから波動テイラー渦流れに分岐する $Re$ の変化を自由端と固定端について比較を行い、更には自由端において奇数個のセル間、奇数個と偶数個のセル間の複雑な分岐現象を明らかにした。主な結論は次のごとくである。

(1) 自由端の場合の奇数個セルと、固定端の場合の偶数個セルについて、テイラー渦流れから波動テイラー渦流れへ分岐する $Re$ の $\Gamma$ に対する変化を明らかにした。即ち流れはセル数と同じ値の $\Gamma$ の付近が最も安定である。又、セル数が増加するにつれ、流れの安定性は全体的に低下する。さらに自由端における偶数個のセルは限られた $\Gamma$ と $Re$ の範囲にしか存在せず、偶数セルのまま波動テイラー渦流れや乱流へ分岐しないことが明らかになった。

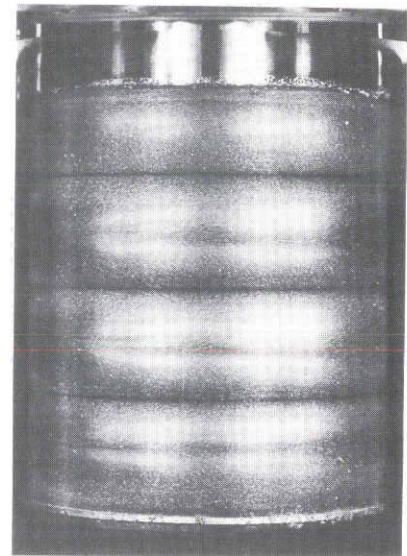
(2) 自由端における奇数個セル同士の流れ、又、奇数個と偶数個セルの流れの間の分岐、移行するレイノルズ数を求め、それらの複雑な相互関係を明らかにした。

(3) 自由端において $\Gamma$ に対するセル数間の分岐、移行の関係を求め、主モードの選択性を明らかにした。更に主モードの定義について新たな提案を行った。



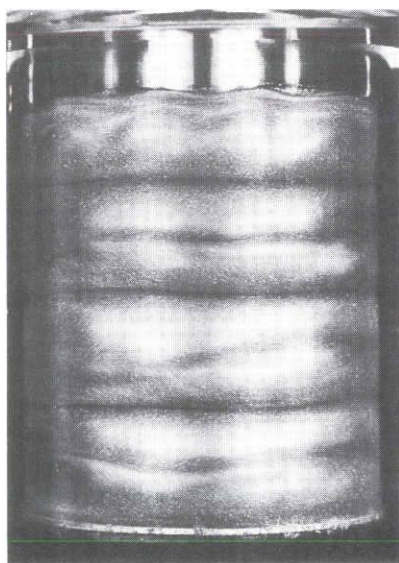
(a) テイラー渦流れ

$Re = 673$



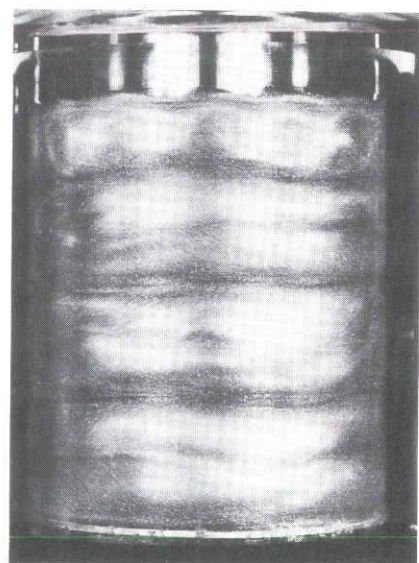
(b) 波動テイラー渦流れ

$Re = 784$



(c) 波動テイラー渦流れ

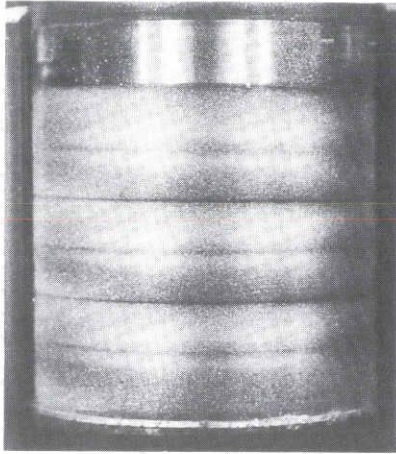
$Re = 1332$



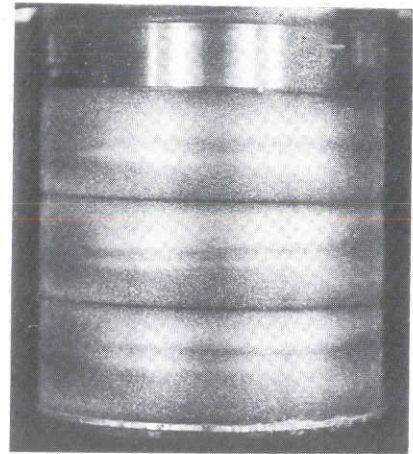
(d) 乱流テイラー渦流れ

$Re = 1657$

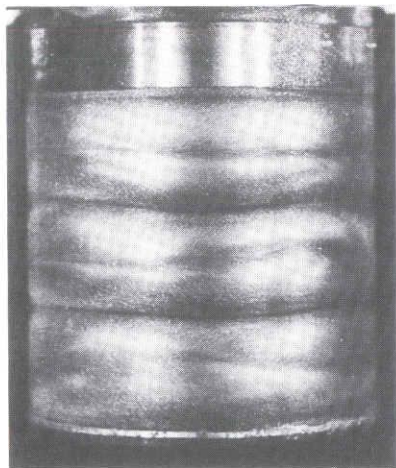
図3-1 流れの外観写真 (自由端 7セル  $\Gamma = 6.5$ )



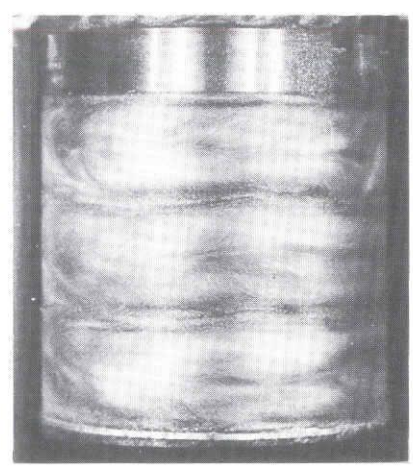
(a) テイラー渦流れ  
 $Re = 433$



(b) 波動テイラー渦流れ  
 $Re = 765$



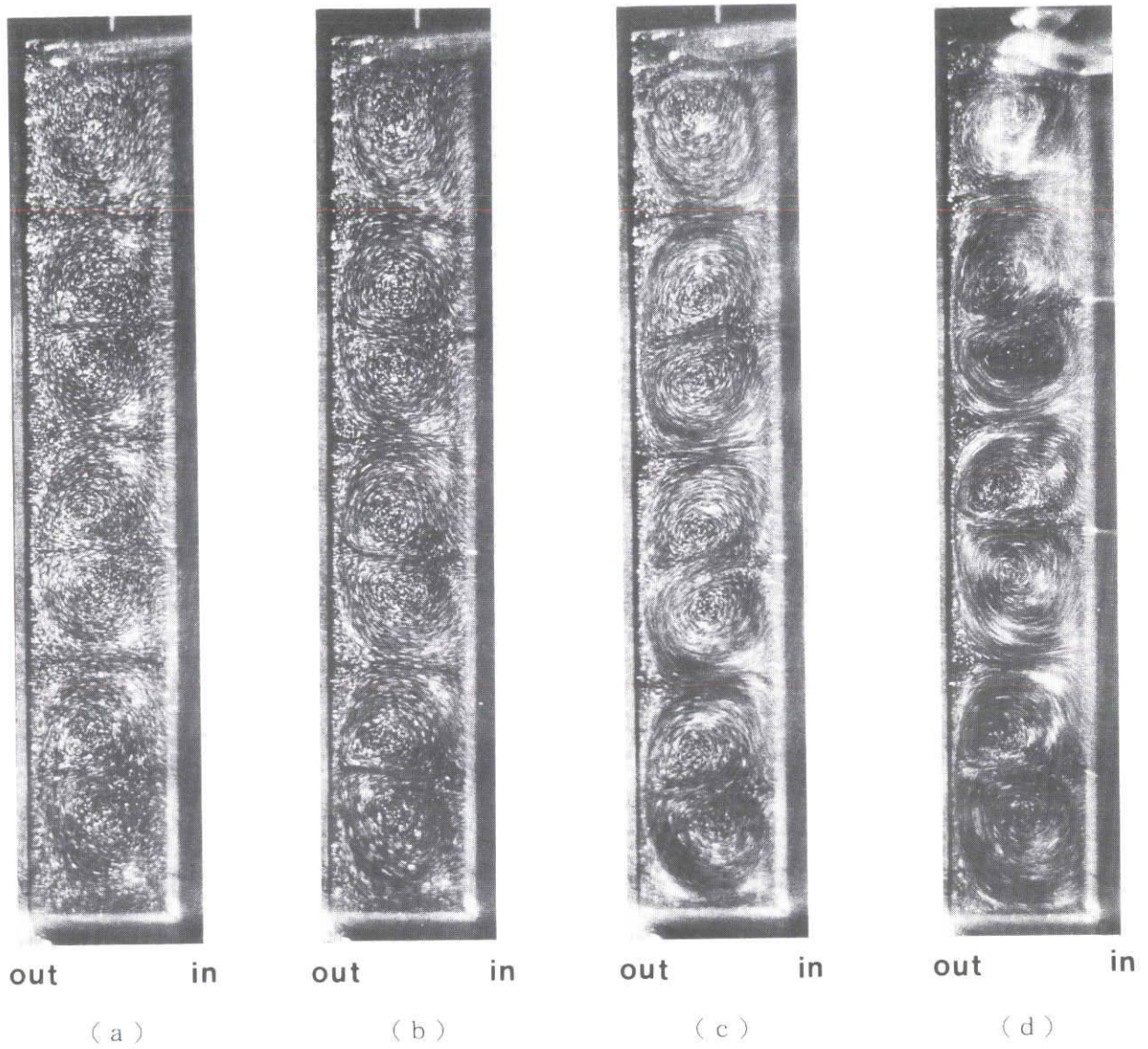
(c) 波動テイラー渦流れ  
 $Re = 1462$



(d) 乱流テイラー渦流れ  
 $Re = 2518$

図 3 - 2 流れの外観写真 (固定端 6セル  $\Gamma = 5.5$ )

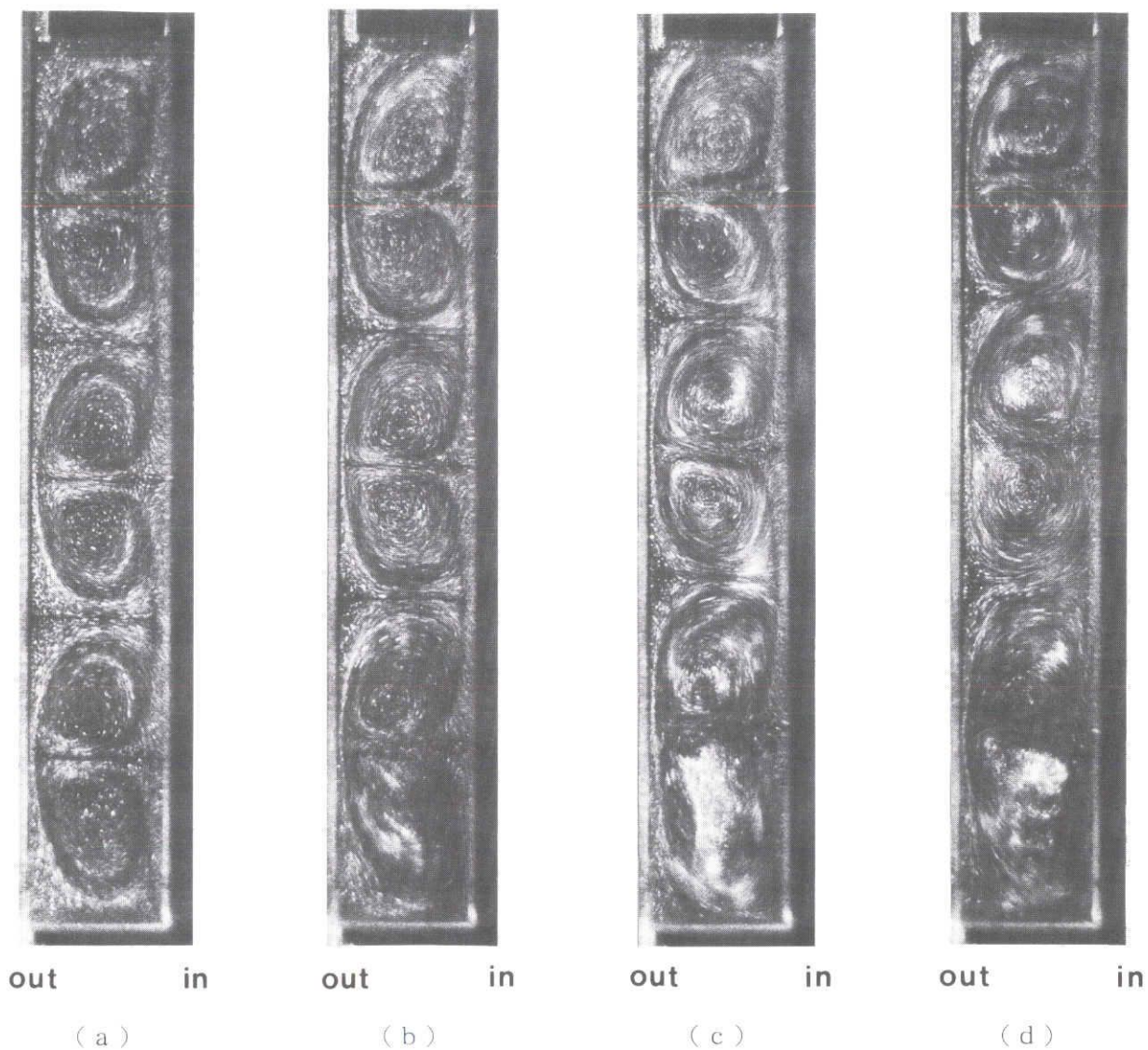




(a) テイラー渦流れ :  $Re = 471$       (b) 波動テイラー渦流れ :  $Re = 578$   
(c) 波動テイラー渦流れ :  $Re = 1073$       (d) 乱流テイラー渦流れ :  $Re = 1371$

図 3 - 3 流れの断面写真 (自由端 7セル  $\Gamma = 6.44$ )

写真右側は内円筒、左側は外円筒



( a ) テイラー渦流れ :  $Re = 626$                       ( b ) 波動テイラー渦流れ :  $Re = 1396$   
 ( c ) 波動テイラー渦流れ :  $Re = 1478$                       ( d ) 乱流テイラー渦流れ :  $Re = 2000$

図 3 - 4 流れの断面写真 ( 固定端 6 セル  $\Gamma = 6.5$  )

写真右側は内円筒、左側は外円筒

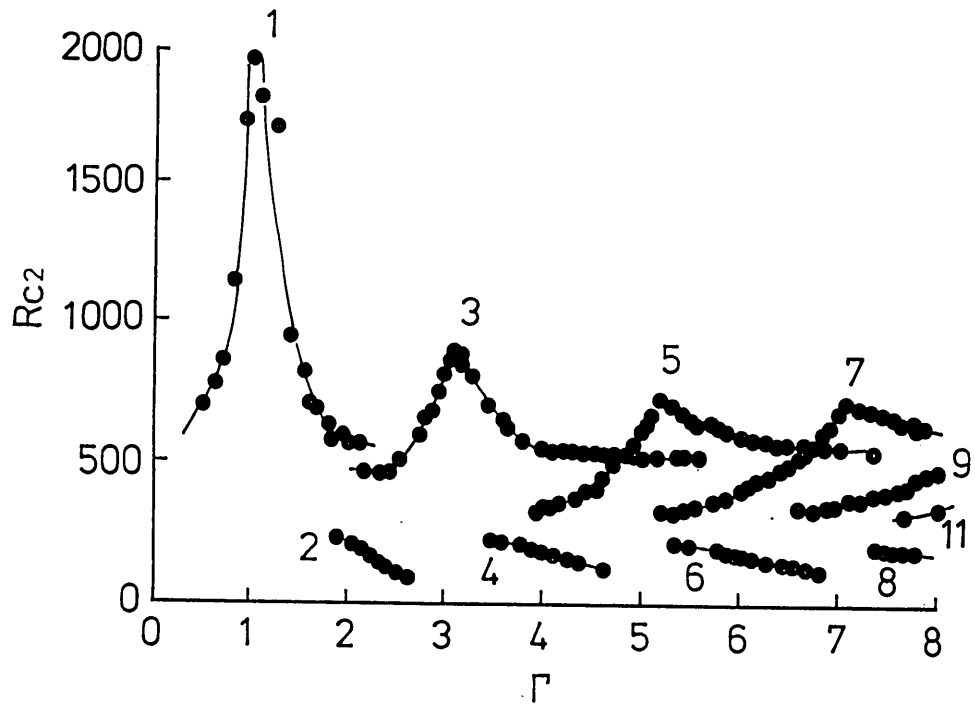


図 3 - 5 波動テイラー渦へ遷移する臨界レイノルズ数 (自由端)  
 図中の数字はセル数を表わす

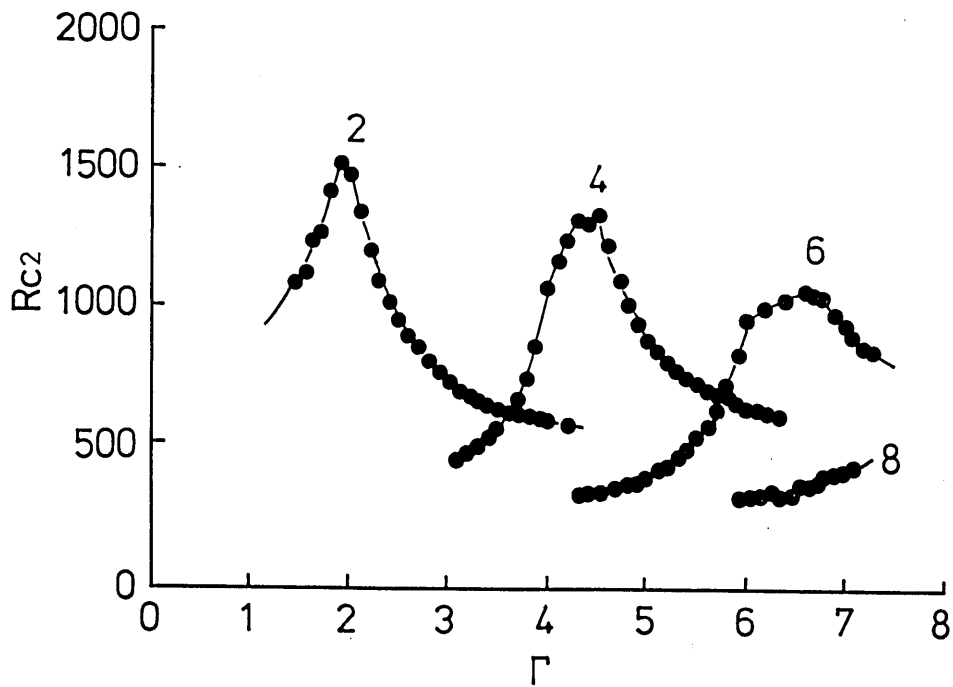


図 3 - 6 波動テイラー渦へ遷移する臨界レイノルズ数 (固定端)  
 図中の数字はセル数を表わす

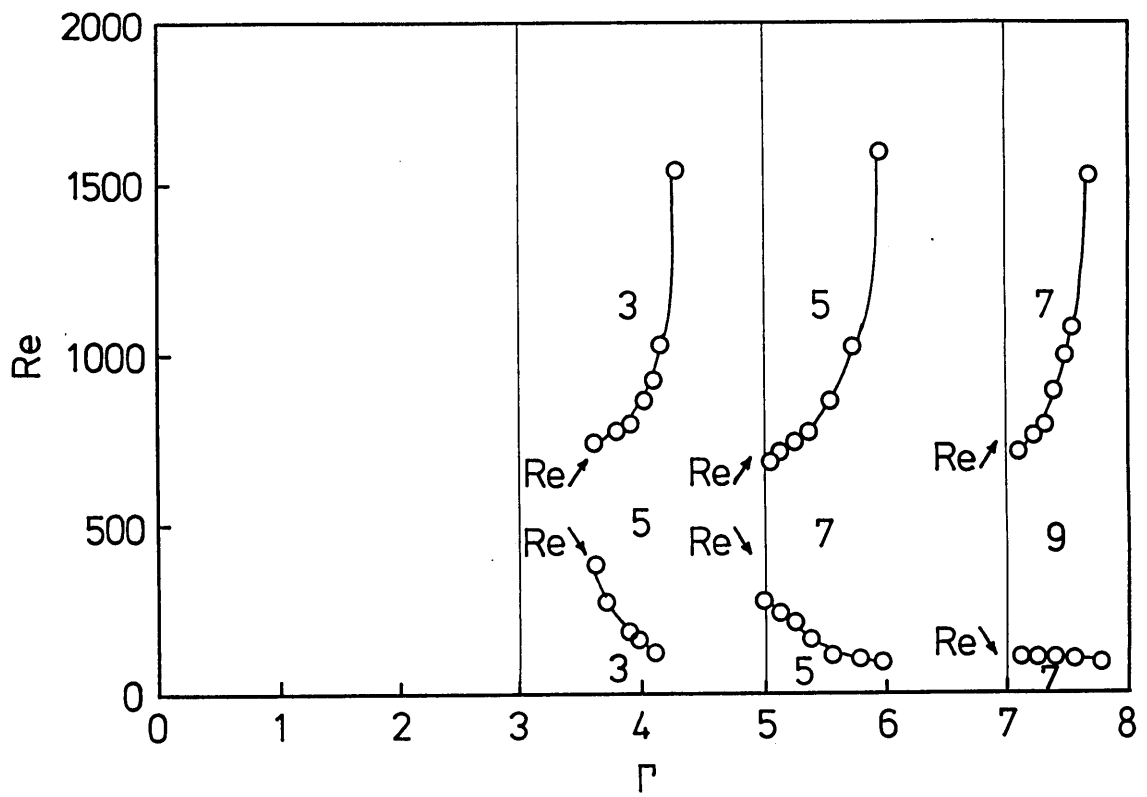


図 3 - 7 (2N+1)セルから(2N-1)セルへ分岐する臨界レイノルズ数  
 図中の数字はセル数を表わす

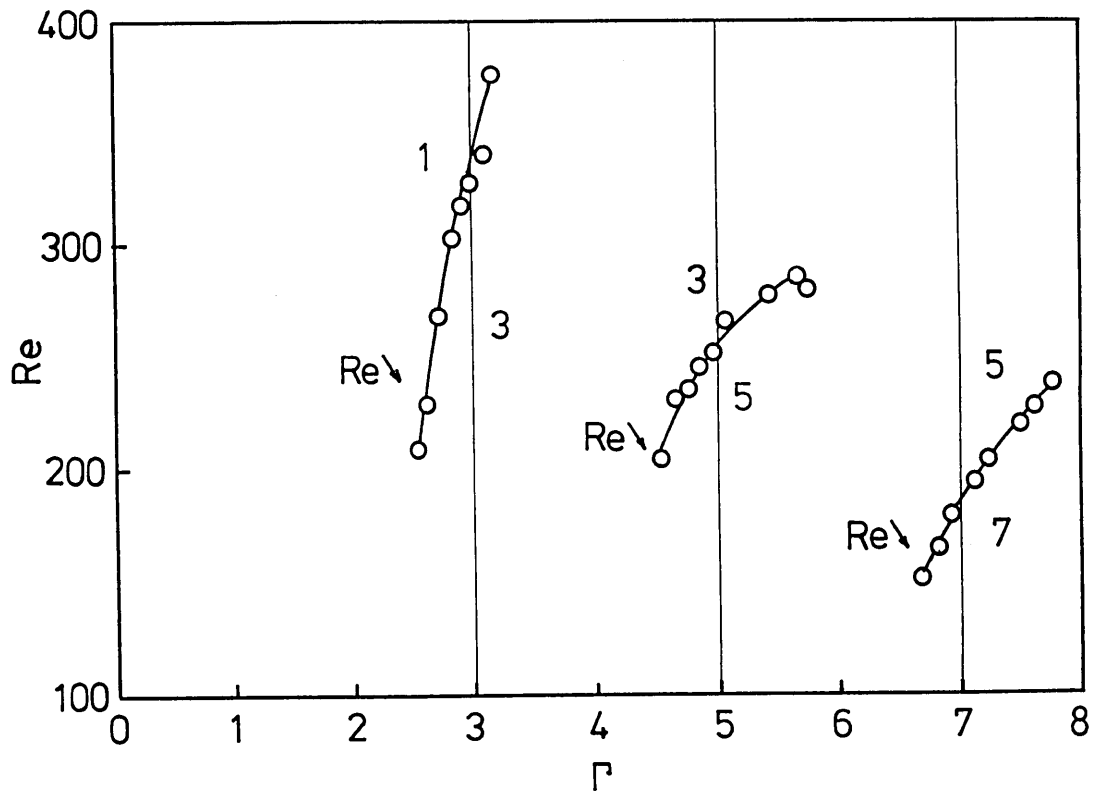


図 3 - 8 (2N-1)セルから(2N+1)セルへ分岐する臨界レイノルズ数  
 図中の数字はセル数を表わす



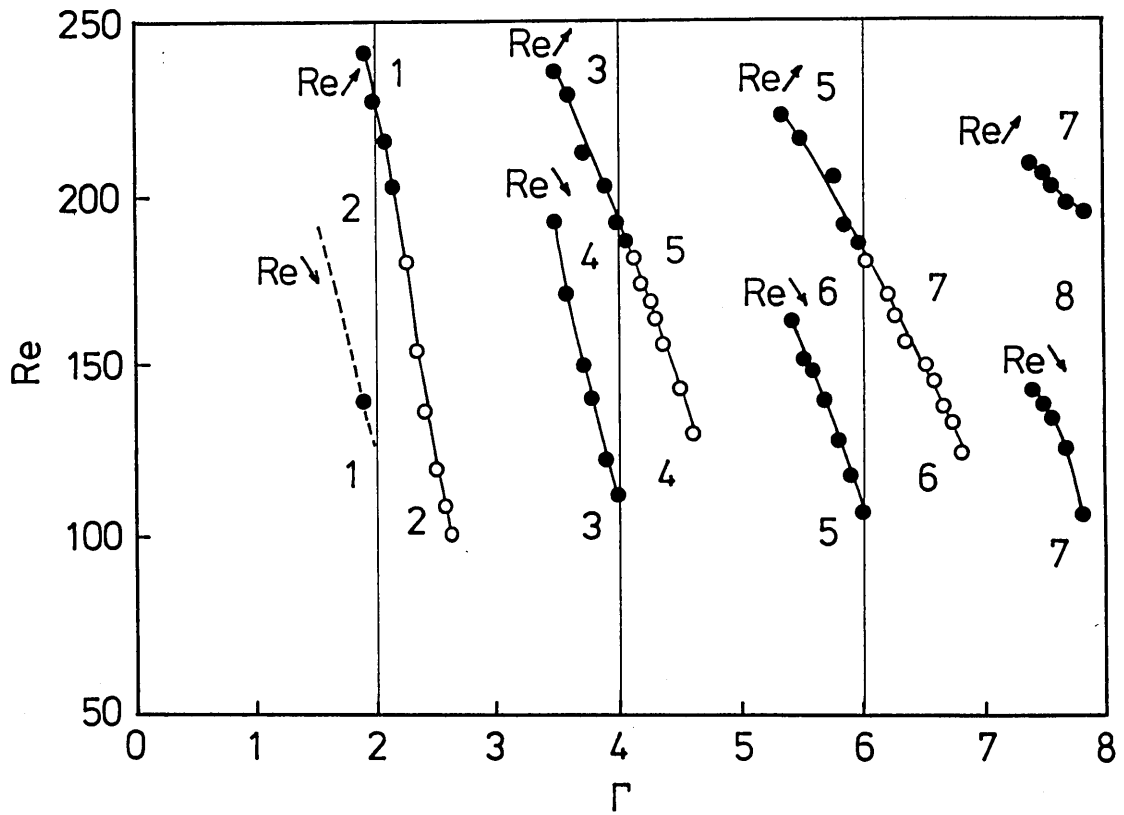


図 3 - 9 (2N)セルから(2N±1)セルへ分岐する臨界レイノルズ数  
 図中の数字はセル数を表わす

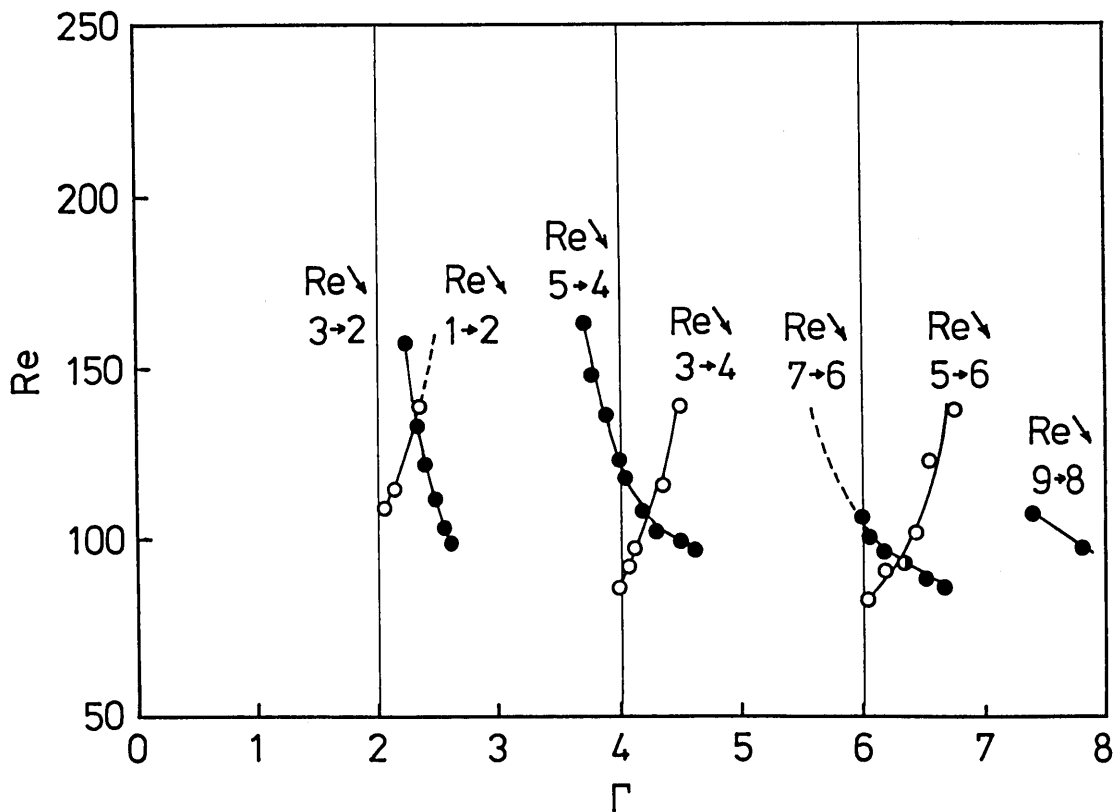
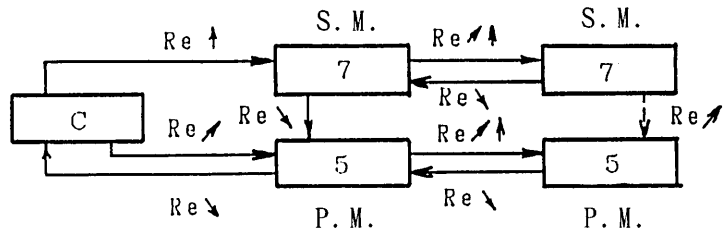
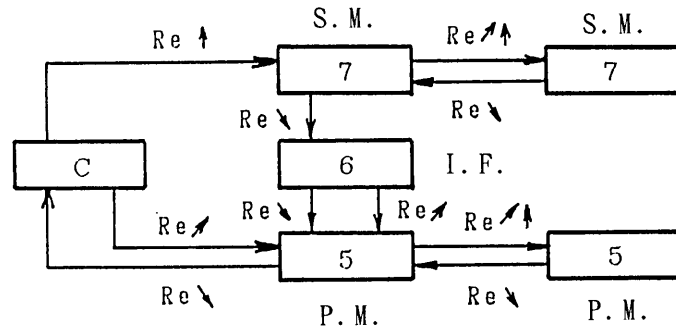


図 3 - 10 (2N±1)セルから(2N)セルへ分岐する臨界レイノルズ数  
 図中の数字はセル数を表わす

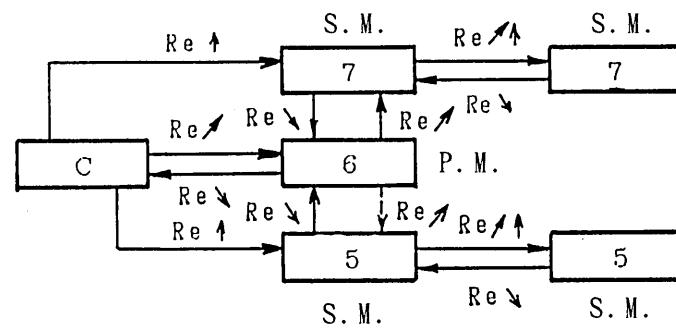
( a )  
 $4.7 < \Gamma < 5.0$



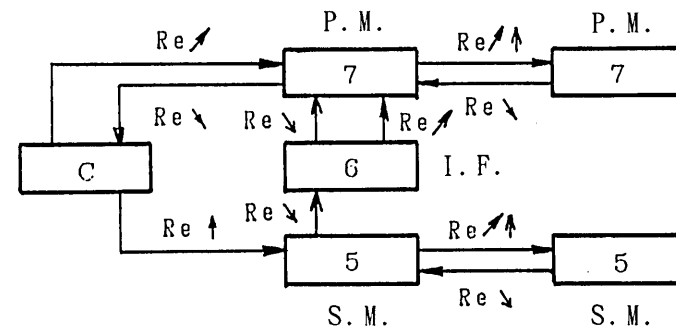
( b )  
 $5.0 < \Gamma < 6.0$



( c )  
 $6.0 < \Gamma < 6.7$



( d )  
 $6.8 < \Gamma < 7.0$



( e )  
 $7.0 < \Gamma < 7.8$

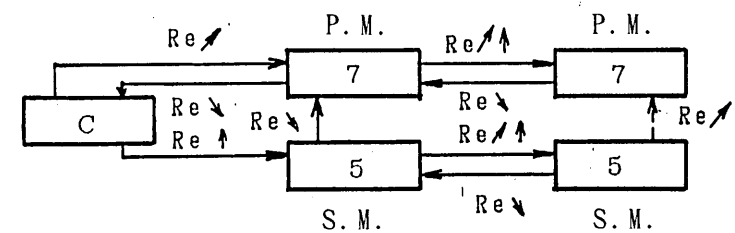


図 3 - 11 自由端における流れの分岐図  
 Cはクエット流れ、S.M. は主モード、S.M. は2次モード  
 I.F. は中間流れを表わす

## 第4章 固定端の場合の流れの分岐 (4-1), (4-2)

### 4.1 緒言

内円筒回転、外円管静止の同軸回転二重円筒間のテイラー渦が、円環部の長さと隙間の比、即ちアスペクト比に強く依存することを見いだした Benjamin の研究以降、この流れに関する多くの研究がなされ、流れの複雑さが明らかになってきている (4-3)。本論文において第2章でアスペクト比が小さい場合のテイラー渦に関して円環部の上端が自由表面となっている自由端と固定端の場合の流れ場の構造の差を調べ (4-4)、更に第3章で自由端の場合の複雑な流れの相互関係を流れのブロック図を使って表した (4-5)。

この流れ場の研究には流れの乱流化の問題と、定常安定な渦パターン (渦の数と向き) の間の分岐に関心が集まっている。後者の中にも主モードと2次モードの関係 (4-6)、主モードの交代とヒステリシス (4-7)、変異モード (後述) の性質等 (4-3)、各種の問題があり全体の統一的解釈 - これには分岐理論が中心となっている - には尚多くの研究が必要であろう (4-9)。

本章は両端固定の基本的な場合につき、レイノルズ数が減少するときのテイラー渦の数 (セル数と呼ぶ) や正規モード、変異モード間の分岐の様式がアスペクト比によってどのように変化していくかを可視化により研究したものである。

この問題は Benjamin の基本的論文に扱われて以来、研究が行われているが、主としてくさび形分岐について実験、計算がなされ (4-7), (4-9)、モード間の分岐の様子はまだ十分に明かされていない。本章においては特にアスペクト比を細かく変化させ、主モードが他の流れパターンのアトラクタとなっている状態を実験により明らかにした。

尚、応用面からみると、ラグランジュ乱流と呼ばれるオイラー的には規則正しい流れ場の中の流体粒子のカオス的移動による拡散に対してこの種の流れ場の研究は有用であろう (4-9)。

#### 第4章の主な記号

$R_1$  : 内側回転円筒半径 ( $2 R_1 = 40.19 \pm 0.006$  mm)

$R_2$  : 外側円管内径 ( $2 R_2 = 60.11 \pm 0.024$  mm)

$D$  : 内外円管の隙間 ( $D = R_2 - R_1 = 9.96 \pm 0.025$  mm)

$L$  : 作動流体の円柱軸方向高さ

$\Gamma$  : アスペクト比  $\Gamma = L / D$

$\omega$  : 内円筒の回転角速度

$\nu$  : 作動流体の動粘度

$Re$  : レイノルズ数  $Re = \omega R_1 D / \nu$

その他の記号はその都度定める。

## 4. 2 実験装置と実験方法

本実験に使用した装置は第2章において示した装置と同じ物であり、主要寸法は上の記号表中に示した。作動流体は従来よりも動粘度の高いグリセリン水溶液が使用され、25℃で $8.9 \text{ mm}^2/\text{s}$ である。これは変異モード（最上層位置または最下層位置のセルのスパイラル流れの方向が通常の状態と反対になる流れ（4-3））は動粘度が高い方が発生し易いという理由である。これはその方が同じ $Re$ にするのに $\omega$ が大きい必要があり、 $\omega$ の制御が容易になるためと思われる。

ここで本実験のような固定端、即ち系が対称条件下にあるテイラー渦流の分類を流れが波動渦となる以前について表4-1に示す。クエット流れから発生するテイラー渦流れは $Re$ の変化の仕方によって主モード（Primary Mode）と2次モード（Secondary Mode）に分類することができる（4-3）、（4-5）。セルの流れの方向と数に関して、主モードは最上端と最下端面上において外円筒から内円筒へ向かう流れであり偶数個のセルのみである。2次モードは正規モード（Normal Mode）と変異モード（Anomalous Mode）に分類することができる。変異モードは既に述べた通りであり、端面上において主モードと異なる流れの層を特に変異セルと呼ぶ。変異セルが上下端の両方に発生する場合は全体では偶数個のセルになり、どちらか片方に発生する場合は奇数個のセルになる。

同じく固定端の場合で、特に $\Gamma = 4.0$ 付近の場合におけるテイラー渦流れのモードの名称とその流れの構造を図4-1に示す。主モードとは $Re$ が徐々に増加したときに発生するモードであり、2次モードは $Re$ が急激に増加したときに発生するモードである。特に、2次モードの中で変異モードは図4-1の（d）、（e）、（f）であり、（d）に関して、端面上におけるセルの流れ方向が内円筒から外円筒へ向う流れであり、この場合上端面と下端面上に存在するセルが変異セルになり、このモードは変異セルを2つ持つモードになる。

変異モードは $Re$ がある値の所のある範囲内まで急激に増加した場合に発生する。しかもその値の範囲は主モードや正規の2次モードを発生させるときの範囲に比較して極めて狭いものであり、その範囲はアスペクト比によって異なると思われる。またその範囲へ増加する変化率も一定の基準があると思われる。これは極めて狭い範囲に異なった変化率で $Re$ を増加しても決して変異モードは発生しないことから明らかである。しかしその範囲と変化率についてはここでは明らかにならなかった。 $Re$ を徐々に変化させるには4分

間に 1 ~ 3 r.p.m. 程度毎に変化させ、流れのパターン変化の確認のために回転数を固定し、緩和時間として 4 分前後 (4-4) そのままにして観察し、パターンが変化した場合、その安定性を確認して  $Re$  を定めた。この回転数の増加率は例えば  $Re = 300$  ( $\omega = 200\pi$  rad/s ) の場合、 $\omega$  の 0.5 ~ 1.5 % 毎に増加させたことにあたる。

## 4. 3 結果と考察

### 4. 3. 1 正規モードの分岐

一般に固定端の場合、発生するセルの数は基本的には偶数個であり、発生のかたによって主モードと2次モードがある。2次モードの中の正規モードは $R_e$ が急激に増加したときに発生する状態であり、安定した後に $R_e$ が徐々に減少すると、ある $R_e$ の値で2次正規モードは主モードへ分岐する。本実験はその $R_e$ の変化をアスペクト比に対して求めた。

図4-2はその結果を示す。2セルと4セルの関係に注目すると、 $\Gamma$ が3付近から3.72までは2セルが主モードである。2次モードである4セルが形成され安定した後、 $R_e$ が徐々に減少すると、4セルは2セルへ分岐する。 $\Gamma$ が3.72より大きい値では4セルが主モードになり、 $R_e$ の減少により2次モードの2セルから4セルへ分岐する。6セルから4セルへの線と4セルから6セルへの線はつながると予想されたが $R_e$ の値に差があった。この部分に関して特殊な現象がみられたので再度2セルと4セル、4セルと6セルに関して $\Gamma$ を細かく変化させて実験を行った。次に詳しい結果を述べる。

2セルと4セル、4セルと6セルが互いに主モードと2次モードの役割を交換する意味の分岐の $\Gamma$ と $R_e$ の関係（分岐集合と呼ばれる）の詳細を図4-3と図4-4に示す。図4-3と図4-4は定性的にグラフの形が異なるがその意味は同じであるので詳細については図4-4で説明する。図4-3においてグラフ中の左側の黒い点の線分はその線分の右側で安定して存在する2次モードの2セルが左側へ向けて主モードの4セルへの分岐する変化を表しており、グラフ中の右側の黒い点の線分はその線分の右側で安定して存在する2次モードの4セルが左側の主モードの2セルへ分岐する変化を表している。白い点の線分はその線分の左側の主モードの4セルが右側の2次モードの2セルへ分岐する変化を表している。図4-4において線分ABは6セルから4セルへ分岐する $R_e$ の変化でありABの左側では4セルが主モード、右側では6セルが2次モードである。線分DEは4セルから6セルへ分岐する $R_e$ の変化で、DEの左側では6セルが主モード、右側では4セルが2次モードである。次に線分BCは $R_e$ が徐々に減少する時、2次モードの6セルが線分ABを左へ横切って主モードの4セルへ一旦分岐した状態において、今度は逆に $R_e$ が徐々に増加したときに主モードの4セルから2次モードの6セルへ分岐する $R_e$ の

変化である。即ちこの $\Gamma$ の範囲において2次モードと主モード間でヒステリシスが存在する。但しこの範囲の主モードの4セルは6セルの状態が崩壊して4セルの状態へ変化する途中の状態が維持され、完全に4セルの状態になっていない。即ち、中央に領域は小さいが淀んだ流れが存在し、その上下に4つのセル流れが存在する構成となっており、5セルとは言い難く、疑似4セル流れとして存在するようである。

この図4-3と図4-4のくさび形をした特徴ある分岐は非常に微妙で求め難いがここでの結果は Benjamin (4-6)、Mullin (4-7) によって報告されたものと定性的に一致している。

#### 4. 3. 2 変異モードの分岐

4. 2で定義した変異モードが奇数個の場合、変異セルは上端に存在する場合と下端に存在する場合があるが装置は対称であるからこの2つの状態は同じものと考えられる。よって本実験は最上層に変異セルがある場合について変異モードが発生し安定した状態で  $Re$  が徐々に減少するとき、それが他の流れの状態（どの様な状態かについては4. 3. 3参照）へ分岐する  $Re$  を求めた。

図4-5はその結果である。図中の数字はセル数を表している。図中の1セルに関して、この状態は変異モードか主モードであるか明らかではない。なぜなら1セルは  $Re$  が徐々に増加したときに発生する流れの状態であるという主モードの定義にもあてはまるからである。しかしここでは変異セルの流れの向きが正規モードの流れの方向と異なるという点を重視して変異モードとして分類した。このような分岐において装置の対称性が十分でない場合は分岐理論でいう不完全敏感性(imperfection-sensitivity) (4-8) のため片側のみ変異モードが生じて実験結果が一般的でない恐れがある。このことを確かめるため変異セルが最下層に発生する場合についても図4-5と同じ結果が得られることを確認した。その際、変異セルが最上層に発生するか最下層に発生するかは偶然的であったので本装置の対称性は十分であることと、奇数個の変異モード自身は不完全敏感性によるものでないことも確認されたといえる。

図4-6は偶数個の変異モードが他の流れの状態に分岐する  $Re$  の変化を示す。分岐先の状態については4. 3. 3で述べる。

これらの図から奇数個の変異モードと偶数個の変異モードが分岐する  $Re$  の最低値は



250 ~ 280 の範囲内であり、流れの不安定性の限界に関してセルの数及び奇数個か偶数個かの違いは1セルを除いて関係ないように思われる。

#### 4. 3. 3 流れの分岐

図4-2から図4-6において2次モードである正規モードまたは変異モードが他の流れの状態へ分岐する $Re$ を求めた。更にこの実験において分岐した流れの状態は分岐する前の状態が同じでも $\Gamma$ によって異なることが明らかになった。その $\Gamma$ に対する分岐先を表4-2に示す。表中のNは正規モードを、Aは変異モードを意味している。例えば変異モードセルの場合、 $\Gamma$ によって変異モード4セル、5セル、7セルや、正規モード4セル、6セルへ分岐する。( )のついた数値は実験によって確認できる $\Gamma$ の値であり、その範囲を越えると、状態を安定させることができなかつたため明らかにならなかつた。また7.10を越える範囲は装置の寸法限界の関係上測定ができなかつた。また、表中の正規モードの欄は各セルが主モードとして存在するアスペクト比の範囲を示している。

この表の分岐先の状態はすべて必ずしも最終の状態ではなく、分岐先が変異モード、又は正規モードである2次モードであるならば $Re$ がさらに減少する時、更に分岐し最終的に主モードに落ち着く。

Benjamin と Mullin は各アスペクト比における変異モードの崩壊のルートと呼ぶ現象を報告している(4-3)。彼らは例えば変異4セルモードにおいて $\Gamma = 4.03$ ではA4がある臨界レイノルズ数においてN4の流れの構造に直接変化するのでなく、実はA4からA5、N6の変化を経てN4に最終的に落ち着くこと、しかもそれが数分間を費やすことを述べている。本研究は例えばA4からN4に分岐する臨界レイノルズ数とその変化がどの $\Gamma$ の範囲で存在しているかを求めている。よってA4からN4の間に僅かの時間に存在する流れの状態は実験で確認したがここでは示していない。しかしここでは $\Gamma$ が4.24 ~ 4.42の範囲においてある臨界レイノルズ数でA6からA4に分岐し、そこで流れは安定し次に $Re$ が減少するとA4はある臨界レイノルズ数でA5へ移って安定し、さらに $Re$ が減少するとある臨界レイノルズ数でA5はN4へ分岐することが示されている。そしてその各々の分岐する臨界レイノルズ数は明かに異なり、その臨界レイノルズ数が次第に減少した時に分岐が進行する。よってこの表は安定しうる流れの分岐のルートを表しているということができ、崩壊的变化とは異なるものである。

#### 4. 3. 4 流れの相互関係

表4-2から $Re$ が徐々に減少した時の複雑な流れの相互関係を流れの分岐図を使用して示すことができる。図4-7にその結果を示す。図中の $C$ はクエット流れを意味しており、各図の下の数字は $1/100$ ずつ細かく変化させた $\Gamma$ の範囲を示している。図の矢印は $Re$ が徐々に減少した時分岐する方向を示す。破線で囲まれた状態と破線の矢印は以下のことを意味する。2次モードに属する変異モードは $Re$ を急激に増加させて発生させるか、そのモードが発生し易い $\Gamma$ の値で一旦発生させておいてから他の状態へ分岐しないように徐々に(約4分毎)に $\Gamma$ を所定の値まで変化させて安定させることでできる。一方、破線で囲まれた流れの状態はそのモードが一旦発生しても不安定であり、すぐ他の状態へ変化してしまったり、規定の $\Gamma$ に設定すると同様に不安定になり他の状態へ変化してしまうので求めることができなかつたものである。しかし理想的な状態においてはそのモードは存在すると思われるため1つ下の $\Gamma$ の状態図に示した。よってこの破線の分岐はどの $\Gamma$ の範囲まで存在するかは明らかにしていない。

ここでこのような $\Gamma$ が一定の状態において減少するコントロールパラメータである $Re$ に対する分岐過程のさらに $\Gamma$ をコントロールパラメータとした変化を代表例として $N_4$ が主モードとなった⑥の状態から $N_6$ が代わって主モードとなる⑰までの過程について定性的に見よう。⑥は $A_5 \rightarrow A_3$ を除き対称性の良い形であり、全てのパターンが引き付けられるように $N_4$ へ向かって分岐している。よって $N_4$ はその周りに存在する全てのモードのアトラクタとして存在しているといえる。 $\Gamma = 3.76$ から $\Gamma = 3.77$ に増加すると⑦のように $A_5 \rightarrow A_3$ のつながりは消え $A_5$ から直接 $N_4$ へ分岐する形となり、 $A_6$ が不安定でありながら現れ $A_4$ へつながり始める。⑧では $A_6$ が確立されて $A_4$ は $A_5$ へ分岐する。⑨では $A_6$ が $N_6$ への引き付けられる第一歩として $A_6 \rightarrow A_4$ が $A_6 \rightarrow N_4$ に替わる。⑩ではそれが進み $A_6 \rightarrow N_4$ が $A_6 \rightarrow A_5$ になる。⑪では $N_6$ の引き付けが強まり $A_5 \rightarrow N_4$ が $A_5 \rightarrow N_6$ となり $N_6$ へつながるパターンが増す。しかし⑫では $A_7$ が発現し $A_5$ へつながり始めるため $A_6$ は $A_7$ に押し退けられ再び $N_4$ へ分岐する形に戻る。次に $\Gamma$ が少し増加した⑬では $A_7$ が確立される以外パターンは⑫と同じである。⑭になると $A_3$ が消滅し始める。よって⑫から⑭までに存在するパターンが次第に $N_6$ の方へ移動しているといえる。⑮では $A_3$ が消えると共に $A_7$ が $A_5$ から $N_6$ に分岐するようになる。⑯では $N_6$ がアトラクタとしての働きが強まり、 $A_6$ が $A_5$ へ戻ることなく分岐先が $N_4$

から A 6 へ変わる。⑰では N 2 が消えて N 8 が発現し N 4 が主モードとしてのアトラクタの席を N 6 の席に譲ってしまい、 $\Gamma$  の増加に伴う主モードの N 4 と N 6 の交代が終わる。

この図と以上の説明から明らかなように  $\Gamma$  が増加するにつれてアトラクタへ各セルパターンが引かれている様子がわかる。この図はブール代数でいう Hasse 図になっており (4-10)、これらのパターンに代数的構造、さらには位相構造を対応できるようであるが、現在の所まだ明らかではないのでこの図から判断される事項を以下に列挙しておく。

(1) 変異モードの偶数個セルはセル数の異なる別の変異モードの偶数個セルまたは奇数個セルか正規モードのどれかへ分岐する。その中で偶数個セル間の場合はセル数の少ない方へ分岐する。

(2) 変異モードの奇数個セルは変異モードの奇数個セルか正規モードへ分岐する。その中で奇数個間の場合はセル数の少ない方へ分岐する。

(3) 変異モードにおける偶数個セル間、奇数個セル間の分岐は存在するが、奇数個セルから偶数個セルへの分岐は存在しない。

(4) 2 次モードはクエット流れへ直接分岐しない。

(5) 2 次モードに属する正規モードは変異モードへ分岐しない。

(6) 1 つのモードから 2 つ以上のモードへの分岐、即ち複数個の分岐先は存在しない。

(7)  $\Gamma$  が一定の時、定性的に偶数個セルの変異モードが最も不安定であり、次いで奇数個セルの変異モード、2 次正規モードであり、主モードが最も安定していることがわかる。

#### 4. 4 結言

本章は回転二重円筒間のアスペクト比が小さく、円環の上下端が固定である場合のテイラー渦流れに関して、不安定性及び分岐の特性を扱っている。初めに流れの分類として1つの考えを示し、各モードに関して考察した。主な結論は次のようである。

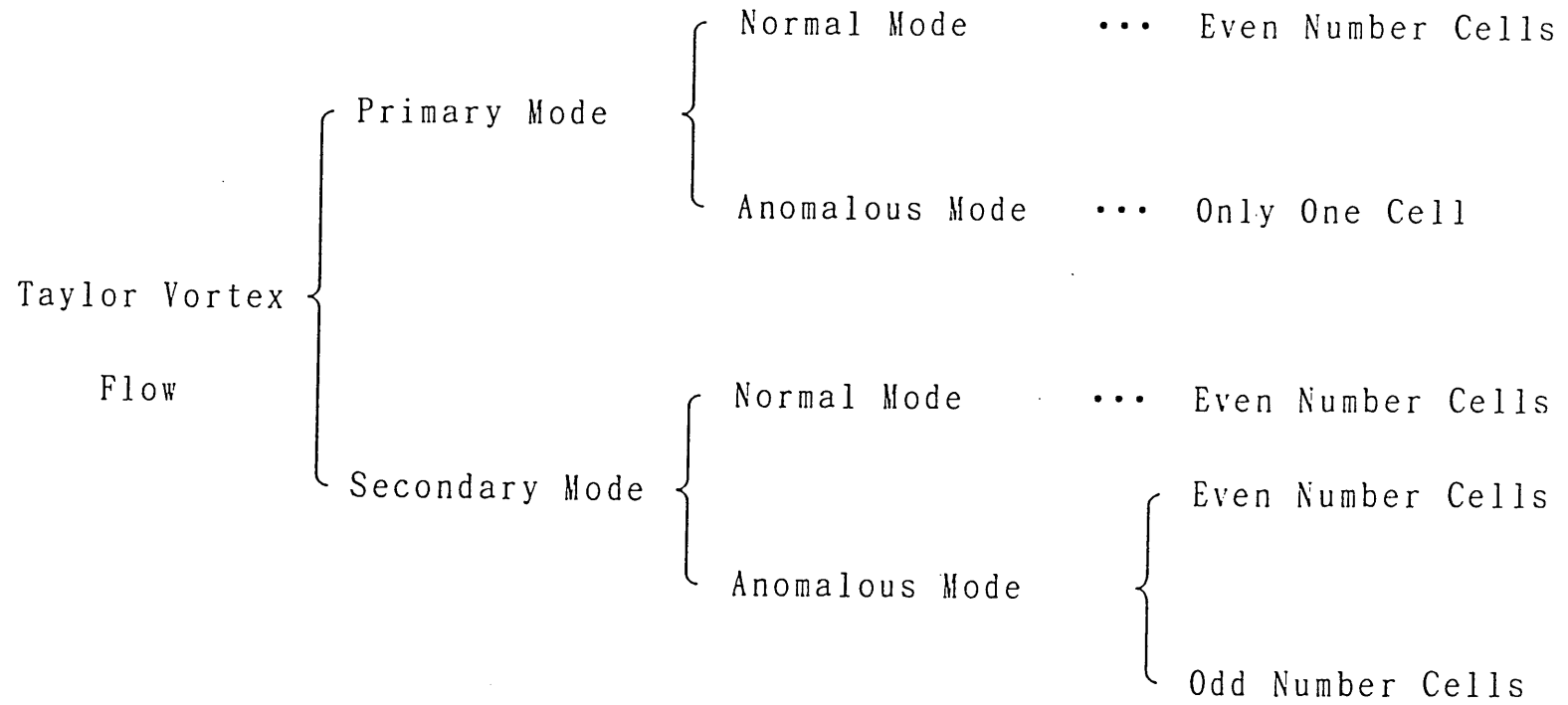
(1) 2次モードの中の正規モードから主モードへ分岐する  $Re$  の変化をアスペクト比に対して求め、2次正規モードの安定限界を明らかにした。

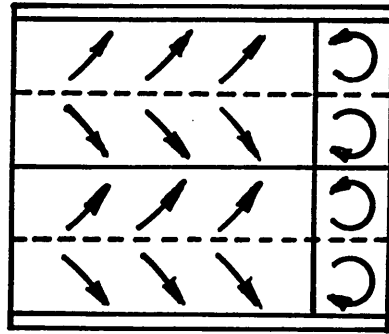
(2) 変異モードから他の流れの状態へ分岐する  $Re$  をアスペクト比に対して求め、変異モード安定限界を明らかにした。

(3) アスペクト比の値によって同じセル数と構造を持つ2次モードが異なる流れの状態へ分岐することを明らかにし、そのアスペクト比の範囲を求めた。

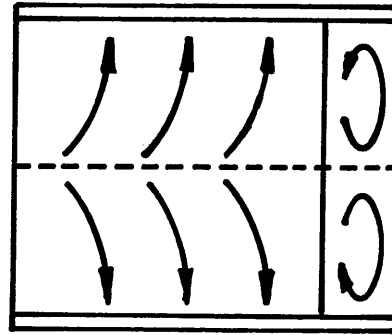
(4) 複雑な流れの相互関係を流れの分岐図を使用して示し、2次モードである偶数個セルの変異モード、奇数個セルの変異モードと正規モード及び主モードとの関係を明らかにした。更に各モードの不安定性は定性的に偶数個セルの変異モードが最も不安定であり、順に奇数個セルの変異モード、2次正規モードで主モードが最も安定していることが明らかになった。

表 4 - 1 固定端の場合のテイラー渦流れの分類

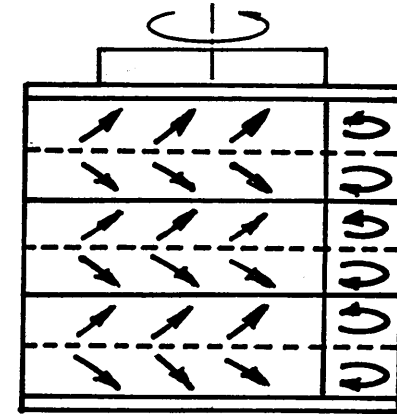




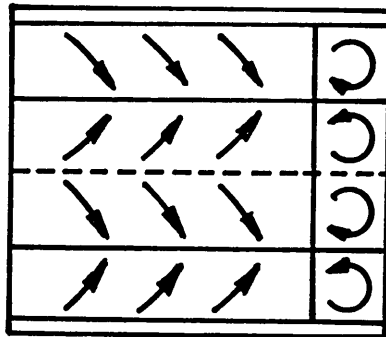
(a) Primary Normal Mode (4 Cells)



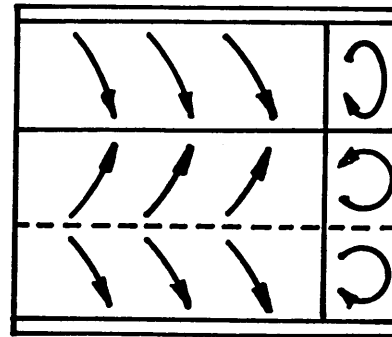
(b) Secondary Normal Mode (2 Cells)



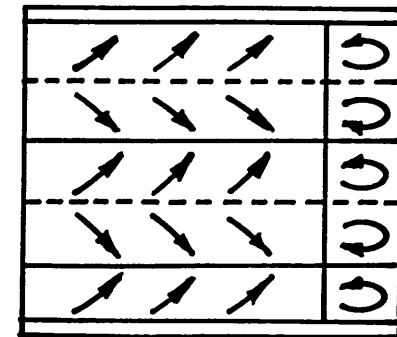
(c) Secondary Normal Mode (6 Cells)



(d) Secondary Anomalous Mode (4 Cells)



(e) Secondary Anomalous Mode (3 Cells)



(f) Secondary Anomalous Mode (5 Cells)

図 4 - 1 固定端の場合のテイラー渦流れのモードの名称と流れの構造  
(各図の右側は断面流れで左側は外観流れを示す。  $\Gamma = 4.0$ )

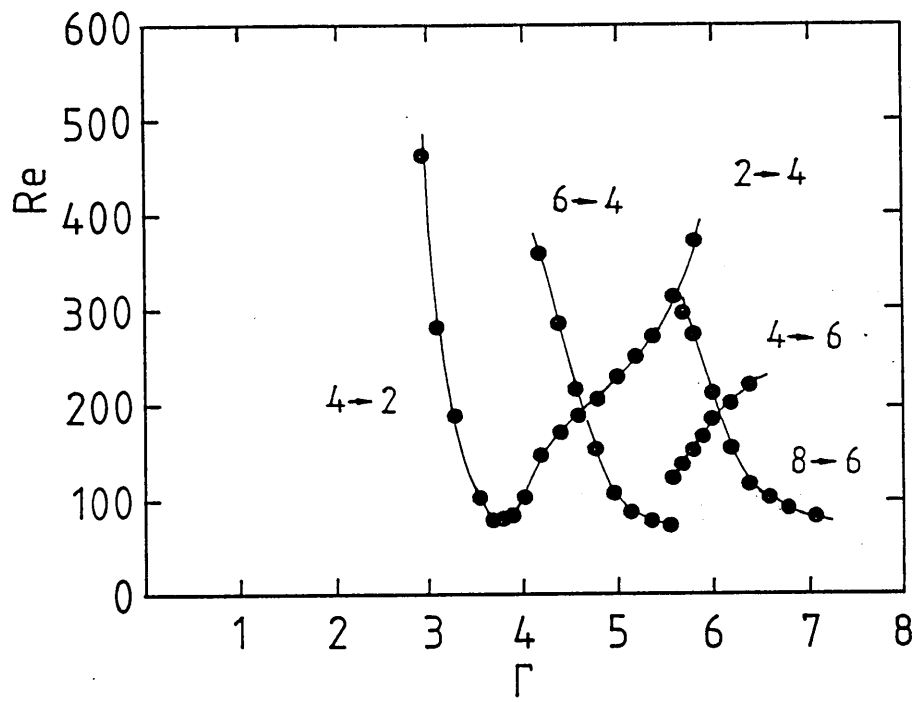


図 4 - 2      2 次正規モードの分岐する臨界レイノルズ数  
 図中の数字は分岐前後のセル数を示す

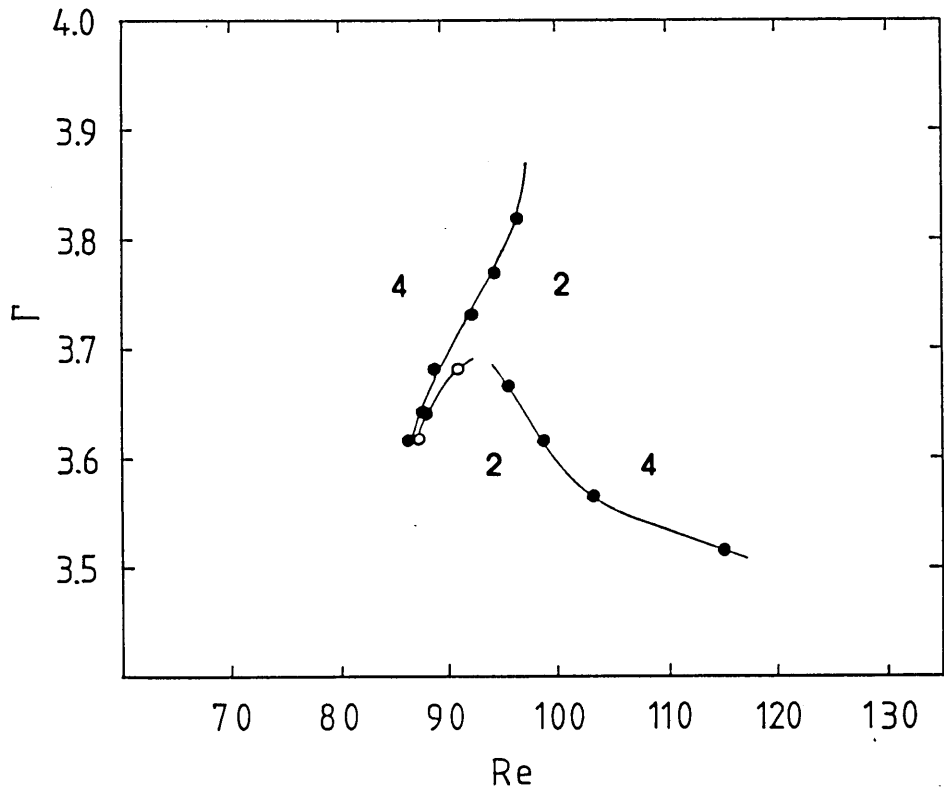


図 4 - 3 4セルと2セルの分岐

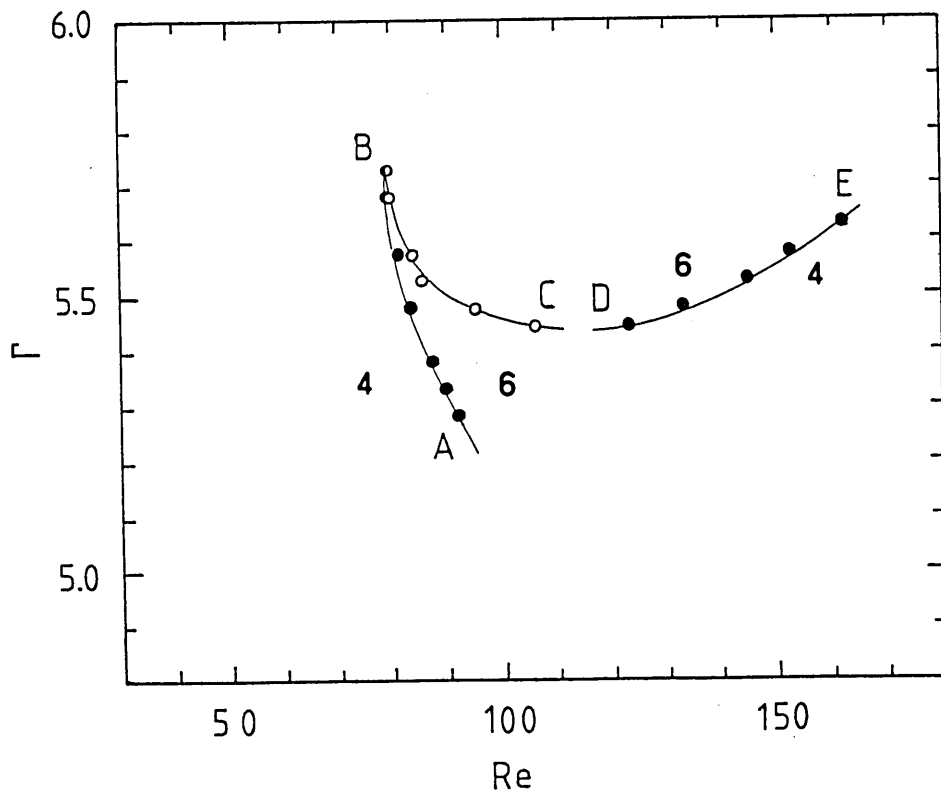


図 4 - 4 4セルと6セルの分岐



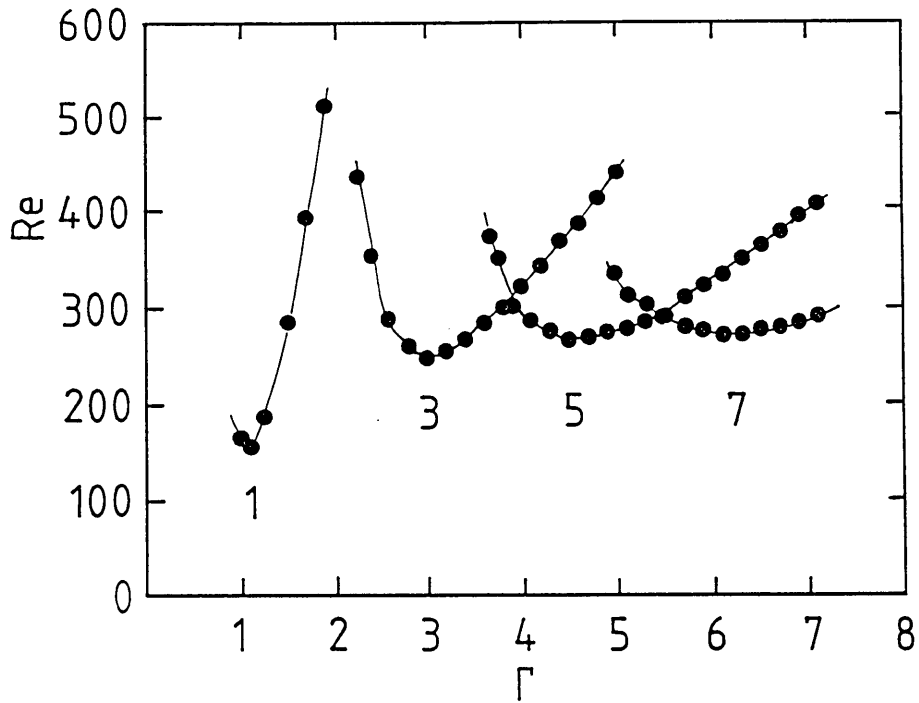


図 4 - 5 奇数個の変異モードの分岐 (最上層に変異セルがあるモード)  
 図中の数字はセル数を示す

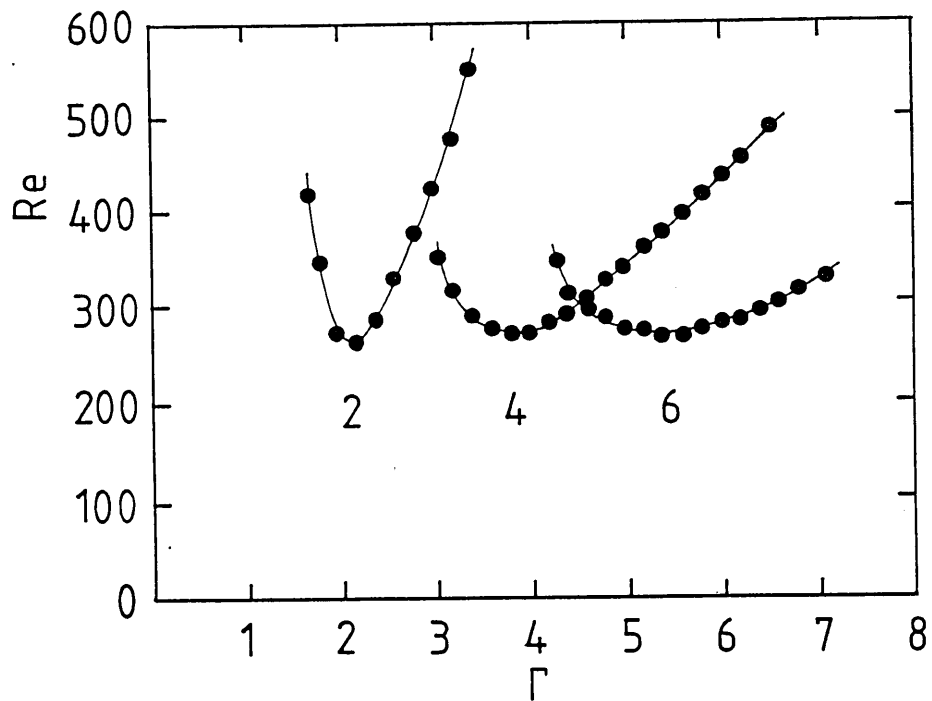


図 4 - 6 偶数個の変異モードの分岐  
 図中の数字はセル数を示す

表 4 - 2 アスペクト比による流れの分岐先

ANOMALOUS MODE 2		ANOMALOUS MODE 3	
(1.68) ~ 2.59	→ N 2	(2.25) ~ 3.16	→ N 2
2.60 ~ 3.37	→ A 3	3.17 ~ (4.98)	→ N 4
ANOMALOUS MODE 4		ANOMALOUS MODE 5	
(3.04) ~ 3.26	→ A 3	(3.65) ~ 3.76	→ A 3
3.27 ~ 4.23	→ N 4	3.77 ~ 4.76	→ N 4
4.24 ~ (6.50)	→ A 5	4.77 ~ (7.08)	→ N 6
ANOMALOUS MODE 6		ANOMALOUS MODE 7	
(4.27) ~ 4.42	→ A 4	(4.95) ~ 5.07	→ A 5
4.43 ~ 4.68	→ N 4	5.08 ~ 6.40	→ N 6
4.69 ~ 4.78	→ A 5	6.41 ~ (7.09)	→ N 8
4.79 ~ 5.17	→ N 4	NORMAL MODES	
5.18 ~ 5.86	→ N 6	(0.90) ~ 3.72	2
5.87 ~ (7.10)	→ A 7	3.73 ~ 5.43	4
		5.44 ~ (7.10)	6

各表の左側の数字は $\Gamma$ の範囲を示し、  
 右側は各モードの分岐先のモードを示す  
 Nは正規モードを、Aは変異モードを示す

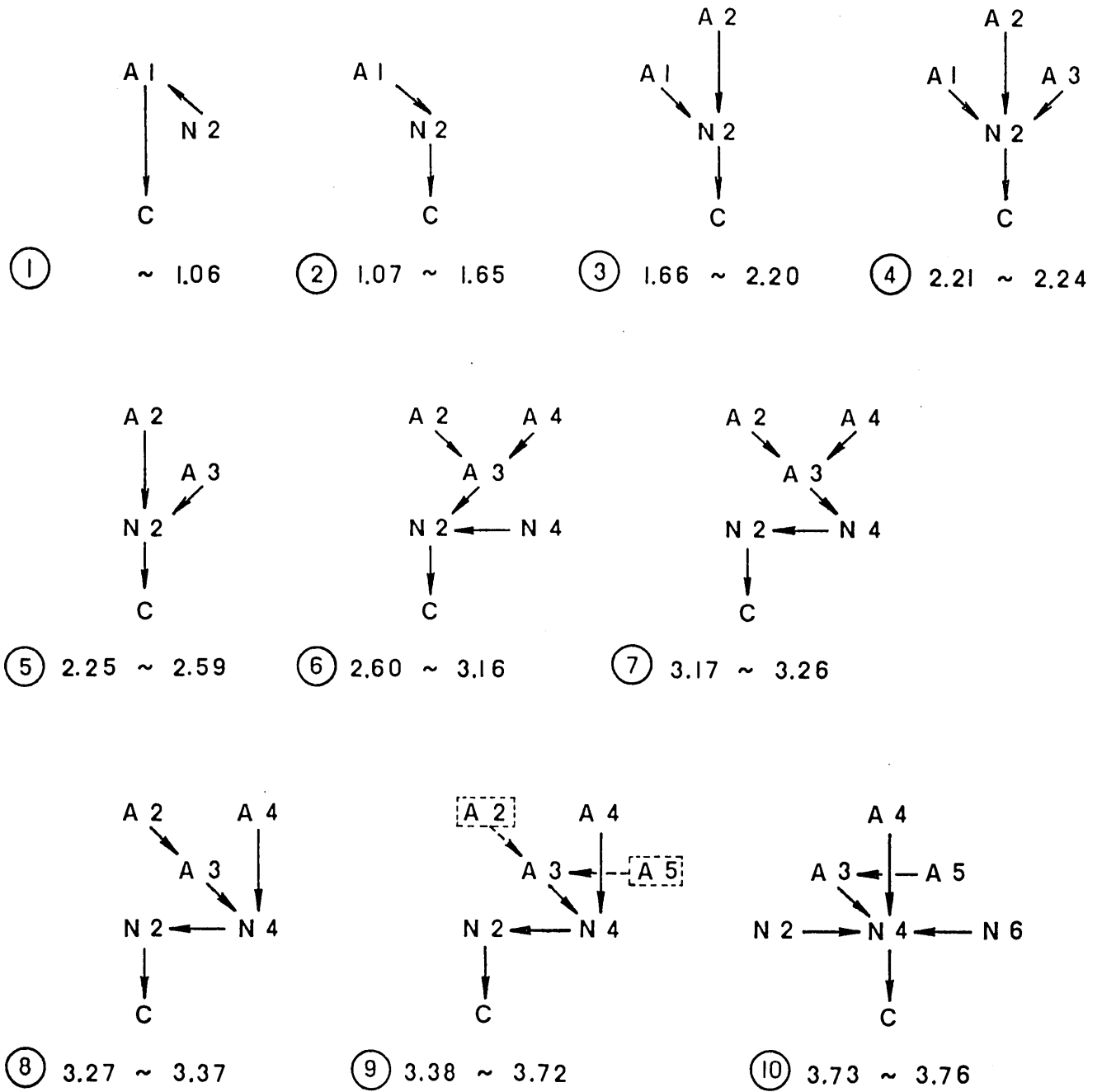
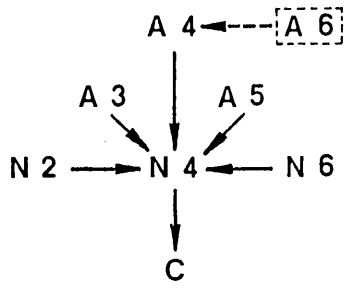
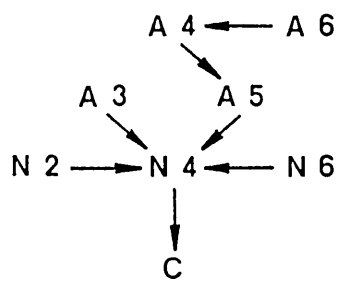


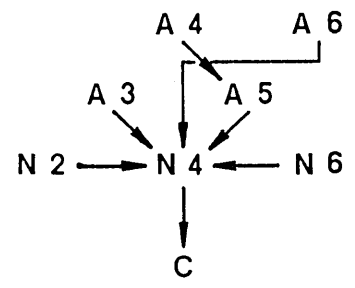
図 4 - 7 流れの分岐図 (その 1)  
 Cはクエット流れ、Nは正規モード、Aは変異モードを示す



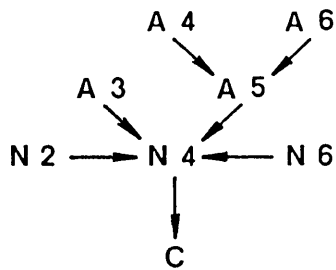
⑪ 3.77 ~ 4.23



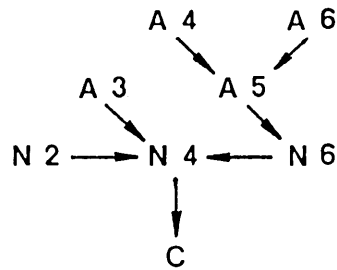
⑫ 4.24 ~ 4.42



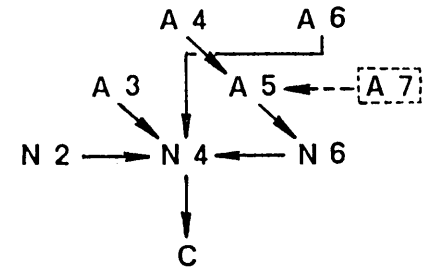
⑬ 4.43 ~ 4.68



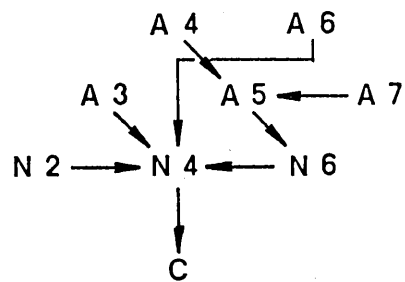
⑭ 4.69 ~ 4.76



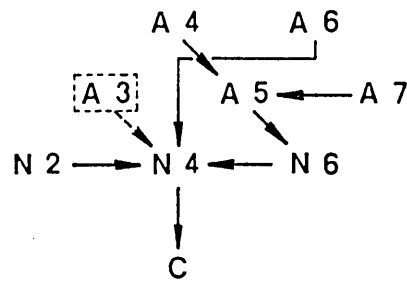
⑮ 4.77 ~ 4.78



⑯ 4.79 ~ 4.95

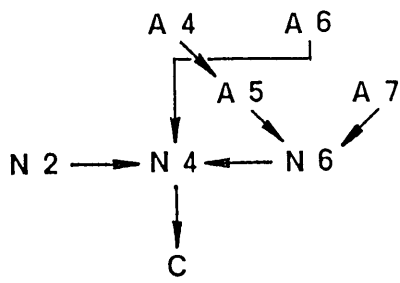


⑰ 4.96 ~ 4.98

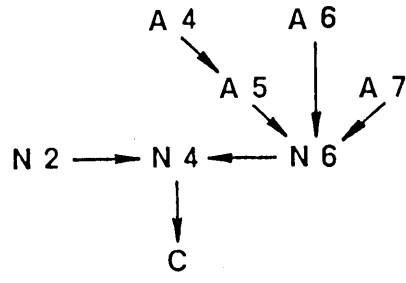


⑱ 4.99 ~ 5.07

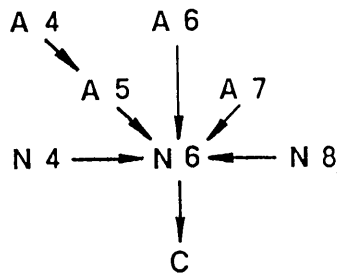
図 4 - 7 流れの分岐図 (その 2)  
C はクエット流れ、N は正規モード、A は変異モードを示す



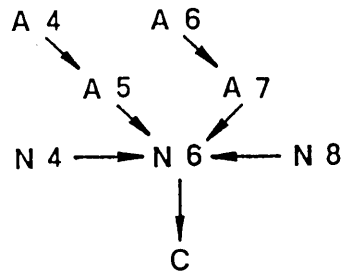
① 5.08 ~ 5.17



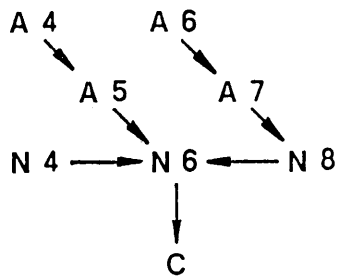
② 5.18 ~ 5.43



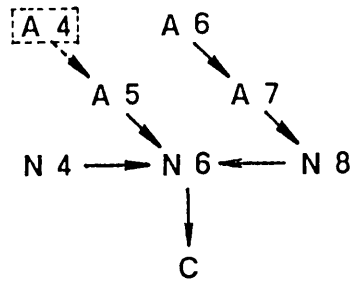
③ 5.44 ~ 5.86



④ 5.87 ~ 6.40



⑤ 6.41 ~ 6.56



⑥ 6.57 ~ 7.10

図 4 - 7 流れの分岐図 (その 3)

Cはクエット流れ、Nは正規モード、Aは変異モードを示す

5. 1 緒言

内円筒が回転し外円筒が静止している同軸回転二重円筒間のテイラー渦流れは力学的パラメータであるレイノルズ数と幾何学的パラメータであるアスペクト比の変化によって波動化、カオス化以前においても複雑多岐にわたる流れの構造を持つことが明らかにされている (5-3)。この問題について非常に多くの研究が行なわれているが、理論、計算の面から見ると関数解析の考えが流体力学の具体的問題の解明に極めて有効であることを示した Benjamin の基本的研究 (5-4), (5-5)、彼の扱った有限長テイラー渦流れの固定端境界条件の取り扱いにホモトピーパラメータの手法を導入した Schaeffer の解析 (5-6)、変異モードの数値計算に延長の方法を用いた Bolstad と Keller の計算 (5-7) などが重要であろう。

特に Schaeffer の方法を見ると、固定端以外の境界条件の場合にどのような流れとなるかが問題である。本論文の第2章と第3章でアスペクト比が小さい場合において、円筒の上端が自由表面である自由端の場合と上下端の両方が固定されている固定端の場合の流れの構造を実験的に調べ、各場合における流れの不安定性を研究した (2-1), (3-1)。さらに第4章で固定端の場合について、安定な流れ状態はレイノルズ数が徐々に減少すると、ある臨界点において不安定になり、他の構造を持つ流れ状態へ分岐する現象を明らかにし、アスペクト比の変化によるレイノルズ数との相互関係を流れの分岐図によって表わした (4-1)。

本章は第3章で報告した自由端における流れの不安定性に関してさらに新しい流れの状態の実験を行ない、ついでレイノルズ数が徐々に減少した時の分岐関係を実験的に求めたものである。

二重円筒における自由端と固定端の2つの場合はその円筒の上端の境界条件が異なるため、発生する流れのパターンは異なっている。しかしレイノルズ数の変化による流れの状態の発生の仕方と渦の数及びその流れの方向が重要な要素であるパターンとによって2つの場合における流れの状態は共通のモードに分類することができ、そのモードの分岐関係に関して比較することが可能であると思われる。本章の最後に自由端と固定端における流れの構造を比較し、各場合の分岐関係について討論する。

## 第 5 章の主な記号

$R_1$  : 内側回転円筒半径 ( $2 R_1 = 40.19 \pm 0.006$  mm)

$R_2$  : 外側円管内径 ( $2 R_2 = 60.11 \pm 0.024$  mm)

$D$  : 内外円管の隙間 ( $D = R_2 - R_1 = 9.96 \pm 0.025$  mm)

$L$  : 作動流体の円柱軸方向高さ

$\Gamma$  : アスペクト比  $\Gamma = L / D$

$\omega$  : 内円筒の回転角速度

$\nu$  : 作動流体の動粘度

$Re$  : レイノルズ数  $Re = \omega R_1 D / \nu$

その他の記号はその都度定める。

## 5. 2 自由端の場合のテイラー渦の分類

自由端の場合におけるテイラー渦流れの種類は固定端より複雑なのでその分類についてまず述べる。 $Re$ が徐々に増加すると円環内における粘性流体はクエット流れからテイラー渦流れ、波動テイラー渦と分岐していくことは良く知られていることである。ここでは波動テイラー渦流れへ分岐する以前の $Re$ の範囲に関して注目する。表5-1に本装置で確認されたこれらのテイラー渦流れの関係を系統的に表わしたものを示す。ここで主モードと2次モードは $Re$ が増加した時の流れの形成過程によって区別される。すなわち主モードとは $Re$ がゼロから徐々に増加したときにクエット流れからテイラー渦流れへ分岐しさらに発展していく流れであると定義され、又逆に $Re$ が徐々に減少したときにクエット流れへ分岐する直前の流れ状態であるといえる。2次モードは $Re$ がある臨界点をこえる値に急激に増加したときに発生する流れの状態である。

正規モードと変異モードはセルの数と流れの方向で決定される構造によって図5-1のように区別される。図5-1(a)は主モードの正規モードの例をスケッチしたものである。自由端のこのモードの場合、最下層が接している面の流れの方向は内向きをもち、最上層の上面が自由表面である面の流れの方向は外向きとなる。この向きのセルがそれぞれの正規セルであり、これとそれぞれ逆向きに流れる最上層と最下層にあるセルが変異セルである。変異セルを1つ以上持つ流れの状態が変異モードである。図5-1(b)は主モードの変異モードの例である。固定端の場合、主モードは正規モードしか持ち得なかったが、3章で述べているように自由端の場合、主モードは変異モードを持つことがわかっている。すなわちある $\Gamma$ の範囲において $Re$ が徐々に増加したときに最上層に変異セルを持った流れ状態がクエット流れから分岐してさらに発展することを意味している。よって同じ構造の変異モードであっても発生の仕方で主モードと2次モードの2つが存在することになる。これが図5-1(b)と(e)の関係である。図5-1(c)は2次モードの正規モードの例を表わしている。図5-1(d)、(e)は2次モードの変異モードを表わし、(d)は変異セルが最下層にあるAl (With Anomalous Cell on the lower end plate) モード、(e)は変異セルが最上層にあるAu (With Anomalous Cell on the upper end plate) モードを表わす。2次モードは $Re$ が急激に増加したときに発生し、その最終の $Re$ の値と $Re$ の変化率は各々異なるようである。しかしその条件は今のところ明らかではない。この点に関しては第7章で明らかにされる。(f)は2次モードの変異



モードであり、変異セルが最上層、最下層の両方にある場合を表わしている。このモードは  $Re$  の急激な増加により発生するという条件に関しては他の 2 次モードと同じであるが、本実験においてその発生頻度は極めて少なく、最も発生しやすい条件であろうと思われる  $Re$  の領域で発生確率は 1600 回に 10 回であり、およそ 0.625% であった。さらに発生したその状態はかなり乱れた波動テイラー渦の状態であり、 $Re$  が徐々に減少すると、その状態は同じセル数と向きを持つテイラー渦流れの状態へ分岐せずに波動テイラー渦からそのまま不安定になり他のモードへ分岐してしまう。よってこのモードは定常安定な状態として存在することがなく、テイラー渦流れの領域においては存在しないと思われる。本研究において注目している分岐関係は局所的な領域でありこのモードに関しては取り扱わない。大域的な領域においてはこのモードも考慮しなければならないと考える。

### 5. 3 実験装置と実験方法

本実験に使用した装置は2章と同じものであり主要寸法は記号中に示した。但し本実験は自由端の場合のみであり、よって表面は自由表面となっている。実験方法に関しても4章と同じ方法をとっており、まず流れのパターンを発生させてから安定させた後、 $Re$ を減少させる方法として内円筒の回転数を1～3 r.p.m.程度ごとに変化させる。緩和時間として4分間その状態を保って観察し、流れの状態が変化しないことを確認してから上記のようにさらに減少させていった。

## 5. 4 結果と考察

### 5. 4. 1 2次変異モードの不安定性

図5-2は2次モードにおけるA1モードの不安定性を示す。図中の数字はセル数を表わしている。この不安定性曲線は第4章で述べた固定端における変異モードの不安定性曲線とその形状が類似している。一方、Auモードに関しては既に第3章において報告している。Auモードが2次モードとして存在する $\Gamma$ の範囲ではAuモードは他のモードへ分岐するため不安定性曲線を求めることができるが、このAuモードが主モードとして存在する $\Gamma$ の範囲ではAuモードは他のモードへ分岐することが無く、クエット流れへ分岐するためその不安定性曲線を求めることができない。すなわち Benjamin (5-8) が述べているようにクエット流れからテイラー渦流れへ分岐する臨界値はそもそも存在しないと考えられるからである。よってAuモードは今回求めたA1モードの不安定性曲線のような形状を持っていない。Auモードが主モードへ分岐する $Re$ は $\Gamma$ の増加により減少していくが、 $\Gamma$ がある値(そのセル数と同じ数値に近い値)に達すると、Auモードは主モードとして存在するようになるため、その曲線はその $\Gamma$ までの半直線としてしか求まらない。よって自由端における変異モードの不安定性曲線はAuモードとA1モードとで各々半直線と2次曲線となりそれぞれで異なることになる。これらの違いは自由端において変異モードが主モードとして存在していることによるといえる。

### 5. 4. 2 流れの相互関係

第3章と今回行なった各モードの不安定性の結果から $Re$ が徐々に減少し、ある臨界点に達すると、流れの状態は不安定になり他の構造を持つパターンへ分岐すること、さらにその分岐先は $\Gamma$ に依存していることが判明している。本実験では各モードが $\Gamma$ の値によって分岐先がどのようなになるかを細かく調べた。

図5-3は $\Gamma$ による $Re$ が徐々に減少した場合の流れの相互関係を流れの分岐図を使って表わしたものである。Nは正規モードを、Cはクエット流れを表わしている。矢印の向きは $Re$ が徐々に減少したときに流れのモードが分岐する方向を示している。各図の下の数字は $\Gamma$ の範囲を表わしている。実験はそのモードが発生しやすい $\Gamma$ の値で発生させて、

その状態が落ち着いた後、規定の $\Gamma$ の値に設定する。その後 $Re$ を4分ごとに約2～7減少させて分岐現象を観察した。 $\Gamma$ は1/100ごとに変化させた。

各モードの図示の位置関係は以下のようなものである。図5-3の⑳に代表例として見やすさのための座標線を示したので参照されたい。ここで座標線の縦軸はモードの不安定性の度合を表わし、横軸はセル数を表わす。正規モードはクエット流れの上に位置される。これは正規モードは形成過程、構造ともに一般に最も安定しているからである。Auモードは正規モードの上に位置される。このモードは変異セルを持っているにもかかわらず主モードにもなり得る条件、すなわち正規モードより安定であるという条件を一面持っているが、 $Re$ の増加に対して不安定になる要素を持っているので正規モードより不安定であるとみなした。さらにこのAuモードはA1モードより安定していることから、このAuモードはA1モードより下に位置される。左右の位置はセル数について等間隔におかれている。Cに分岐するモードだけが主モードでその他は2次モードである。

この一連の経過の図の中から中心的部分を取り出してアスペクト比に伴う分岐図の変化を説明する。㉑では $\Gamma$ が2.57～2.76の範囲であり、ここでは2セルが主かつ変異モードとして存在している。その他のモードは2次モードであり、N1とA12は一旦N3へ分岐するが最終的にはAu2へ引きつけられて落ち着く。よってAu2はここでは全てのモードのアトラクタとして存在しているといえる。㉒では $\Gamma$ が2.77～2.90において主モードはAu2からN3へ交代する。Au2はすでにモードとして存在していない。さらに㉓、㉔、㉕、㉖まで $\Gamma$ が増加するといくつかのモードが出現、消滅しているが、どのモードも全て直接N3へ分岐しておりN3は強いアトラクタとして存在している。㉗においてA14はN5へ引きつけられ始めるが、N5は最終的にN3へ分岐しN3のアトラクタとしての地位は代らない。㉘ではN5は一旦Au4へ分岐しその後N3へ落ち着く。㉙では $\Gamma$ が4.18～4.38において主モードはN3からAu4へ交代し、すなわちアトラクタとしての役割の交代が行なわれる。㉚においてはA14からN5への分岐を除いて対称性の良い形をしている。㉛になるとN5を除く2次モードはN5へ引きつけられるように一旦分岐する。㉜では $\Gamma$ が4.79～4.87において主モードはAu4からN5へ交代する。よって㉜は主モードが交代する直前には2次モードは次第に次の主モードとなるモードへ引きつけられ始めるという様子が現れているといえる。㉝からはN5が主モードとして存在する領域になり、また対称性の良い形になっている。

以上を整理してみると以下のようなことがいえる。

(1) 最下層に変異セルが存在する変異モード、A1モードは最上層に変異セルが存在する変異モード、Auモードへ分岐することではなく2次モードの正規モードへ分岐するかまたは主モードへ分岐する。

(2) Auモードは主モードへのみ分岐する。

(3) 2次モードの正規モードはAuモードへ分岐するかまたは主モードへ分岐する。

(4) 2次モードはクエット流れへは分岐しない。

(5) 全てのモードの分岐先は1つであり複数であることは無い。

(6)  $\Gamma$ がアトラクタとして役割を持つ主モードの交代が行なわれる値に近づくと、ほとんどの2次モードは次第に次の主モードとなるモードへ引きつけられ始める。

尚、Auモードの位置をその性質を考えて中間に示したが、代数的順序関係はやはりハッセ図に対応する(5-9)。

## 5. 5 自由端と固定端間の流れの分岐関係の比較

自由端と固定端における円筒の上端の境界条件の違いにより流れの状態の構造は異なってくる。よって当然、各場合におけるモード間の相互関係、すなわち分岐関係も異なると考えられる。ここで前章で明らかにした固定端の場合の分岐関係と本章で調べた自由端の場合の分岐関係を比較してみる。

図5-4は自由端と固定端における代表的な流れの断面写真である。各図の左側は外円管で右側が内円筒である。各場合とも主モードの正規モードとして存在する自由端の場合は奇数個のセル（図の場合は7セル）、固定端の場合は偶数個のセル（同様に6セル）が発生したときのものである。また流れの構造に関して自由端、固定端とも最下層のセルの流れの方向は内向き流れとなっているが、最上層のセルの流れの方向は自由端の場合は外向き流れであり、固定端の場合は内向き流れとなっている。

自由端と固定端の場合の流れの構造を比較すると以下のことが挙げられる。（1）自由端の主モードは正規モードと変異モードを持つが、固定端の主モードは正規モードのみである。（2）自由端の変異モードは変異セルが最上層、最下層のどちらか片方に存在するが、固定端の変異モードは最上層、最下層の片方か両方に存在する場合がある。（3）自由端の変異モードで最上層と最下層の両方に変異セルが存在するものはかなり乱れた波動テイラー渦としてのみ存在する。これを記号で示すと表5-2のように対応する。ここで $N$ は0及び自然数を表わし、左側の表示は自由端を、右側の表示は固定端の場合を表わす。表中においてさらに流れの分類を明らかにするために主モード、2次モードをそれぞれ $P$ 、 $S$ とし、正規モード、変異モードをそれぞれ表わしている $N$ 、 $A$ の前に表示する。自由端の2次変異モードである $SA(2N+1)$ をかっこで示したのはこのモードは波動テイラー渦でのみ存在するからである。これは図5-1(f)の場合であり、図5-3、5-5の中には現れない。

次に2つの場合の流れの分岐関係より代表的なセル数の近い3つの図を図5-5に示す。図の左側は自由端の分岐図を、右側は固定端の分岐図を表わす。(a)と(a')は各モードが主モードへ直接分岐しており、主モードがアトラクタとして強く存在していることが言える。 $\Gamma$ が増加した(b)と(b')は2次モードの一部が主モード以外のモードに一旦分岐し始めることを示している。さらに $\Gamma$ が増加した(c)と(c')はアトラクタの交代が行なわれる直前の様子を示しており、ほとんどの2次モードが主モードへ分岐する

前に主モードよりセル数の多いある2次モードへ一旦分岐している。自由端と固定端における各モードのこれらの分岐関係は概ね共通すると思われる。2つの場合の分岐関係の大きく異なる点は自由端の場合、最上層と最下層の両方に変異セルがある変異モードは上述のように存在しないが、 $\Gamma$ の範囲によって変異モードが主モードとしても存在するため分岐関係が固定端の場合より著しく複雑になるということ、固定端の場合、自由端の場合には定常的に存在しない最上層と最下層の両方に変異セルが存在する変異モードがあるという点において分岐関係が複雑になることである。

このような自由端と固定端の分岐図の変化が Schaeffer のホモトピーパラメータの方法で取り扱えるかどうかは理論的には重要であろう。

## 5. 6 結言

本章では $\Gamma$ が小さいテイラー渦において特に自由端の場合における流れの不安定性と $Re$ が徐々に減少したときの流れの分岐関係を明らかにしたものである。さらにその結果を固定端の場合における流れの分岐関係と比較した。主な結論は以下のようなものである。

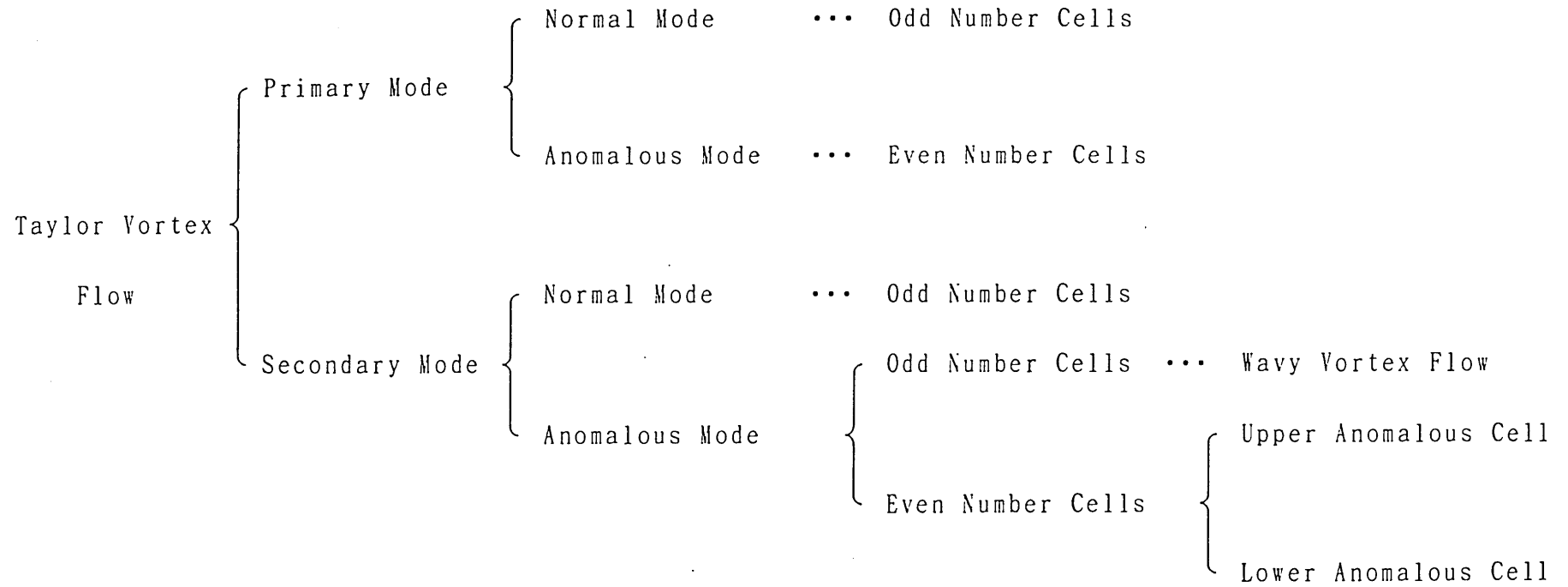
(1) 変異セルが最下層にある場合において変異モードが他の流れ状態へ分岐する $Re$ を求め、 $\Gamma$ の変化に対する不安定性曲線を明らかにした。

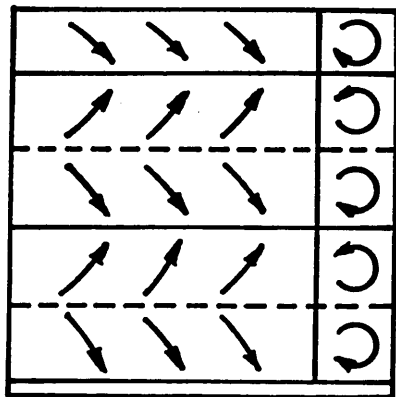
(2)  $\Gamma$ の値によって2次モードが他の流れ状態へ分岐することを明らかにし、その範囲を求め、流れの相互関係を流れの分岐図を使って示した。

(3) 自由端と固定端における複雑な流れの状態をその形成過程および流れの構造から整理し、比較した。すなわち自由端の主モードは正規モードと変異モードを持ち、固定端の主モードは正規モードのみである。自由端の変異モードで最上層と最下層の両方に変異セルが存在するものはかなり乱れた波動テイラー渦としてのみ存在する。自由端と固定端の場合における流れの分岐関係を比較し、主モードを除く全てのモードは最終的に主モードへ分岐するという基本的な特徴は共通しており、アトラクタとしての主モードの交代が行なわれる前のアスペクト比のある範囲では2次モードは次第に主モードとなるモードへ分岐し始め、次のアトラクタへ引かれていくことが明らかになった。

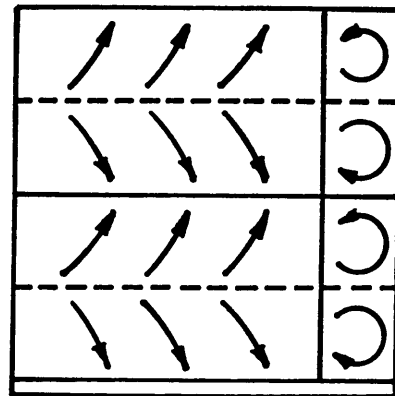


表 5 - 1 自由端の場合のテイラー渦流れの分類

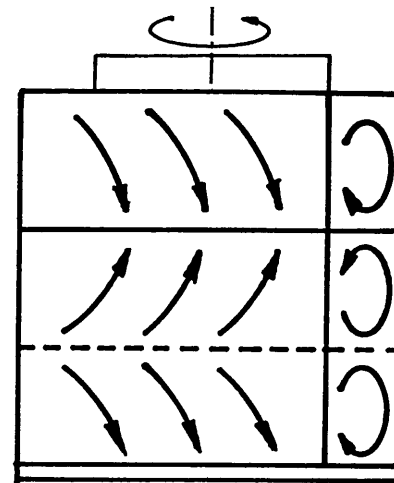




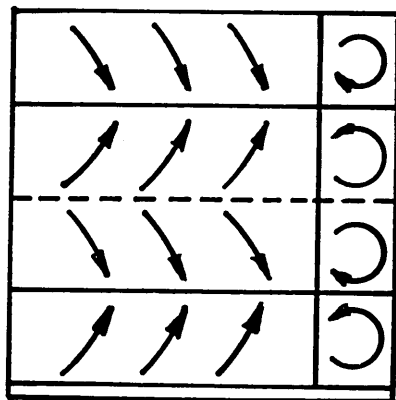
(a) Primary Normal Mode (5 Cells)



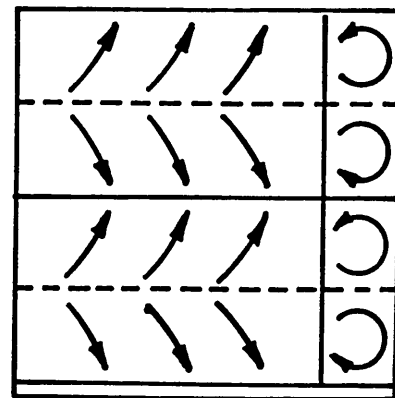
(b) Primary Anomalous Mode (4 Cells)



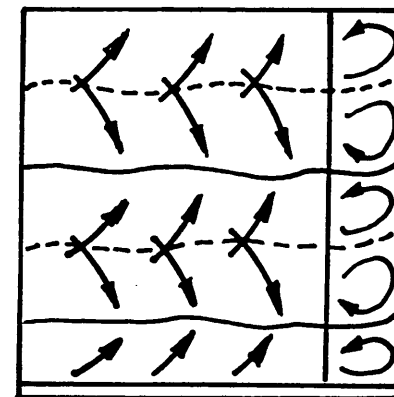
(c) Secondary Normal Mode (3 Cells)



(d) Secondary Anomalous Mode (4 Cells)



(e) Secondary Anomalous Mode (4 Cells)



(f) Secondary Anomalous Mode (5 Cells)

図 5 - 1 自由端の場合のテイラー渦流れのモードの名称と流れの構造  
 (各図の右側は断面流れで左側は外観流れを示す。Γ = 1.0)

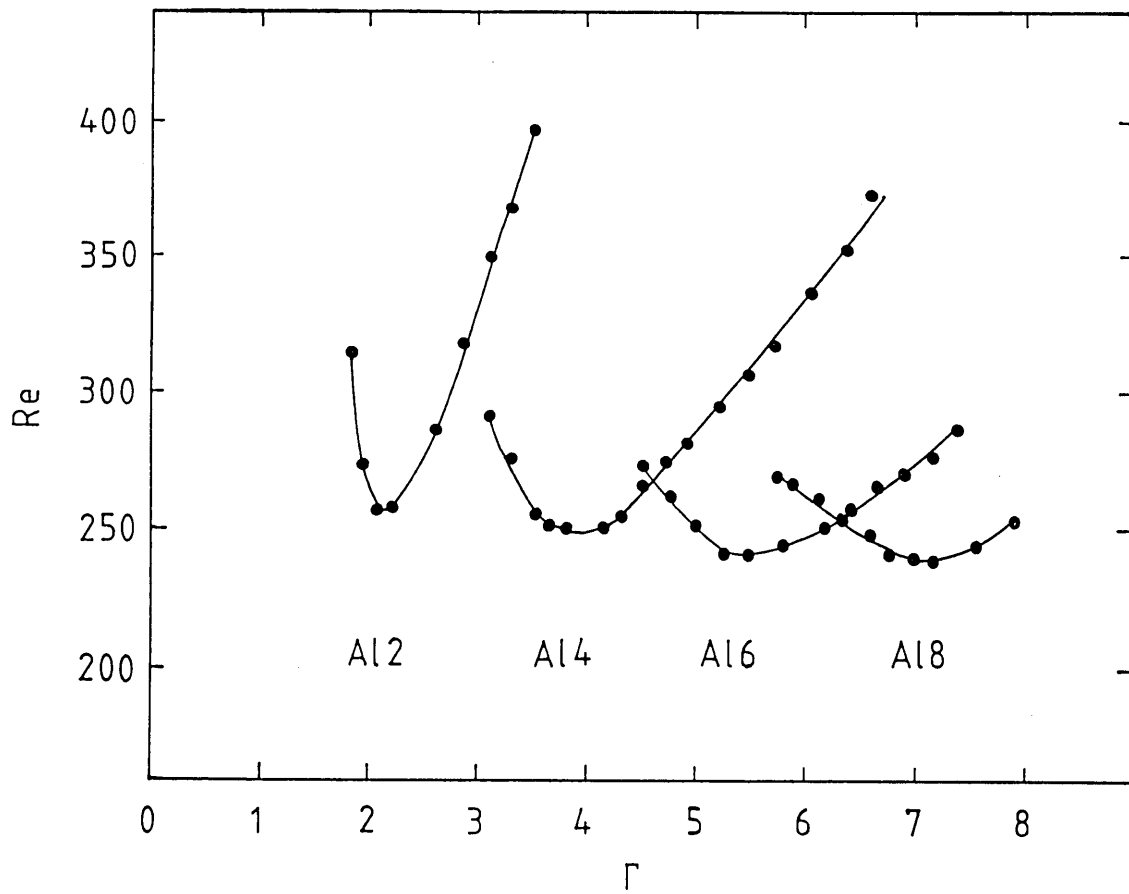


図 5 - 2 変異モードの分岐 (最下層に変異セルがあるモード ; A1)  
 図中の数字はセル数を示す

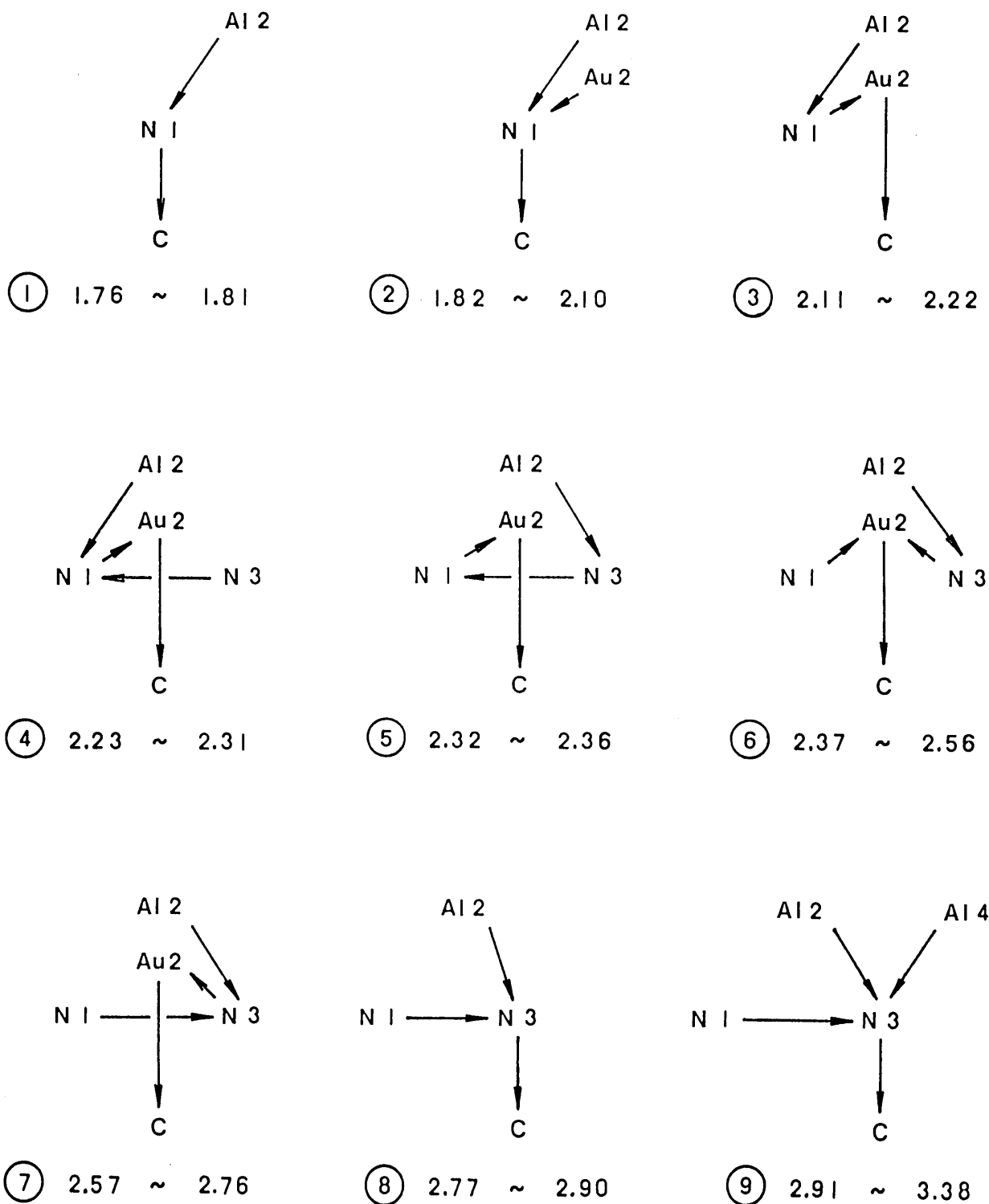


図 5 - 3 流れの分岐 (その 1)

Cはクエット流れ、Nは正規モード、Auは変異セルが最上層にある変異モード、Alは変異セルが最下層にある変異モードを示す

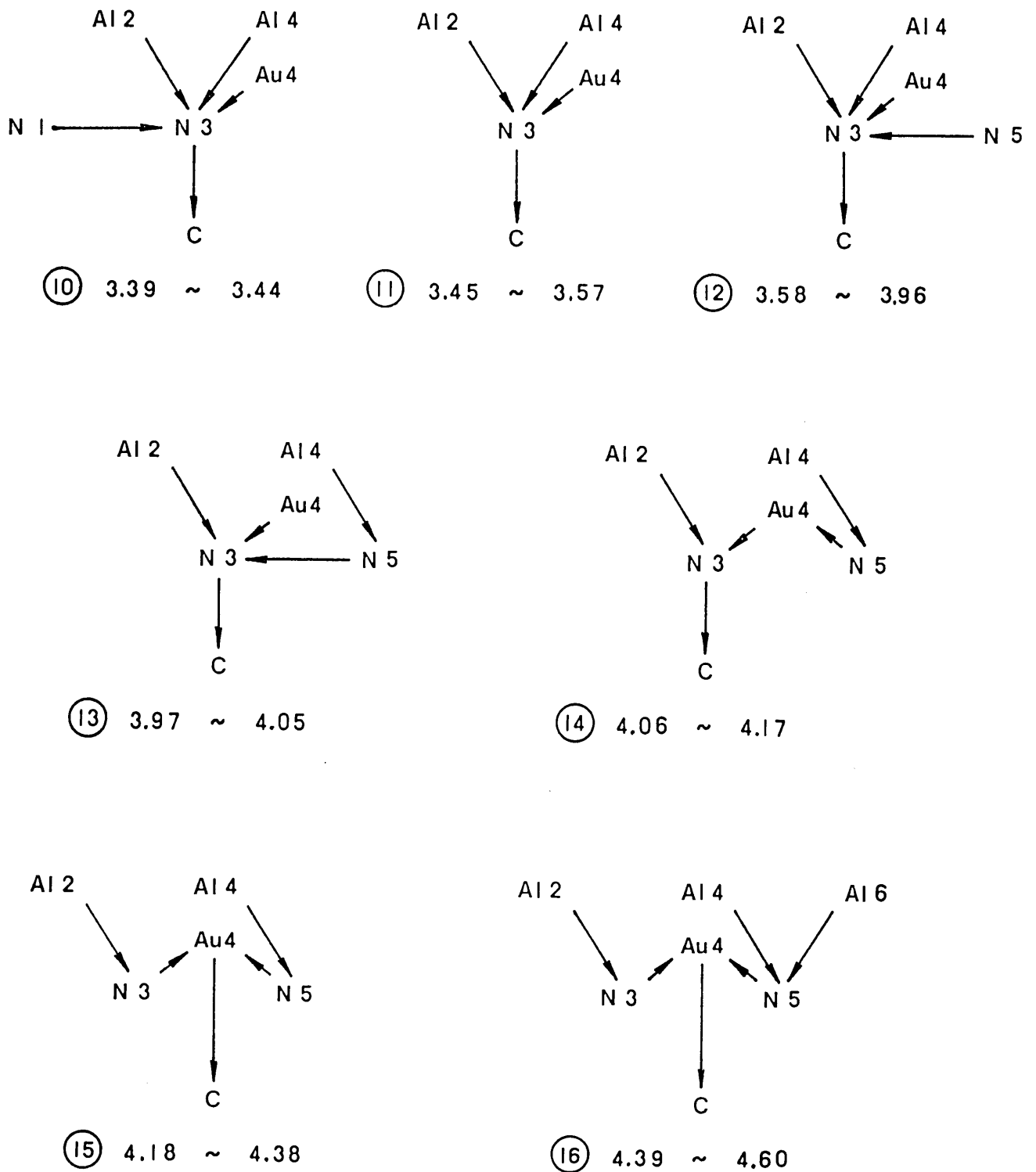


図 5 - 3 流れの分岐 (その 2)  
 C はクエット流れ、N は正規モード、Au は変異セルが最上層にある変異モード、Al は変異セルが最下層にある変異モードを示す

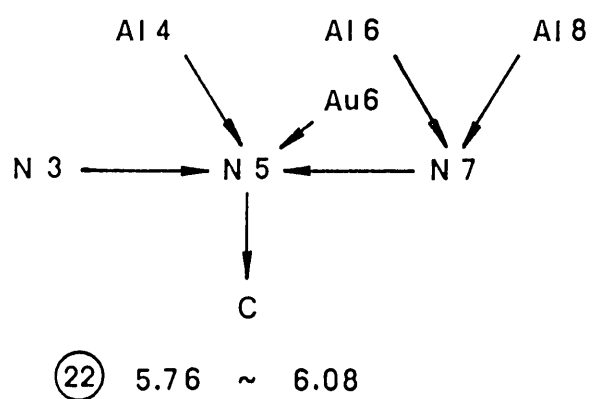
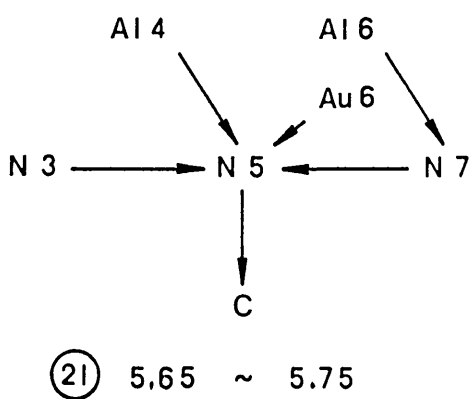
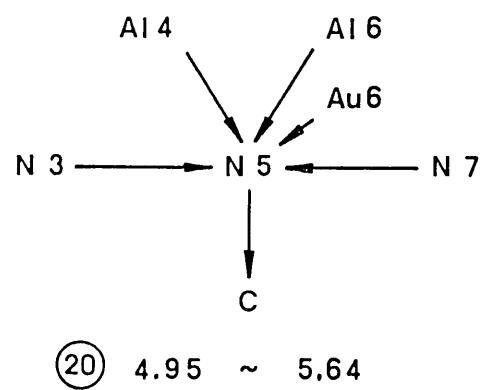
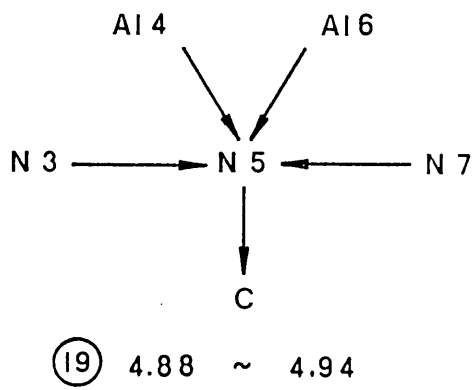
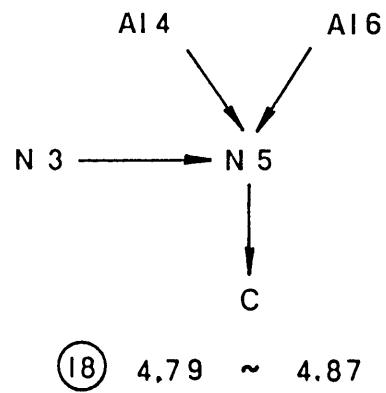
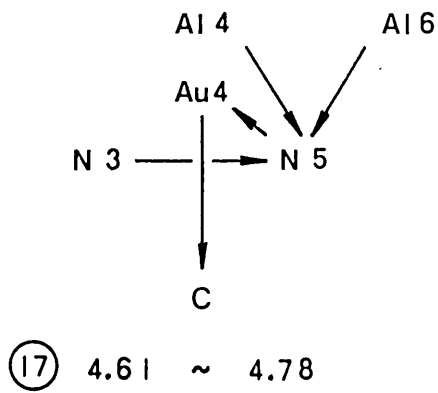


図 5 - 3 流れの分岐 (その 3)  
 Cはクエット流れ、Nは正規モード、Auは変異セルが最上層にある変異モード、Alは変異セルが最下層にある変異モードを示す

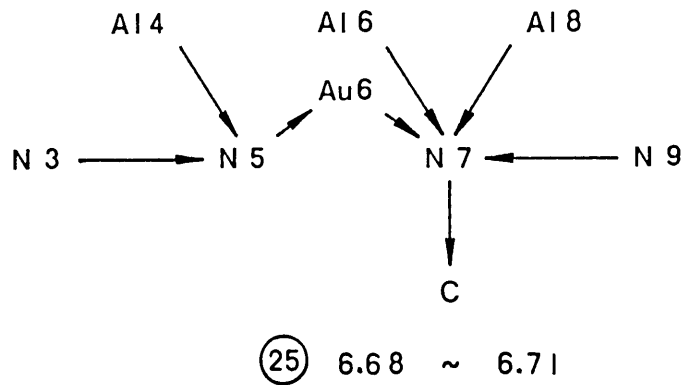
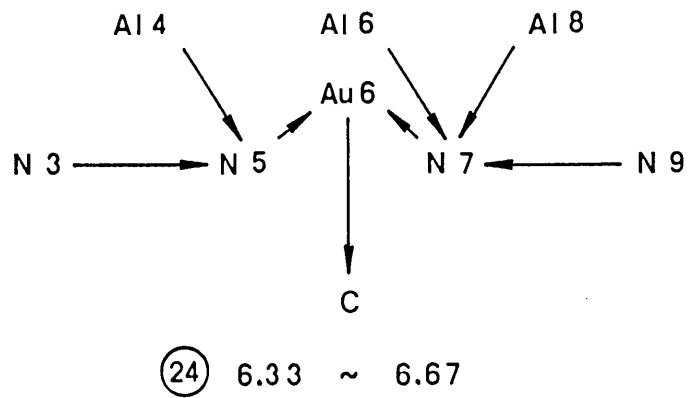
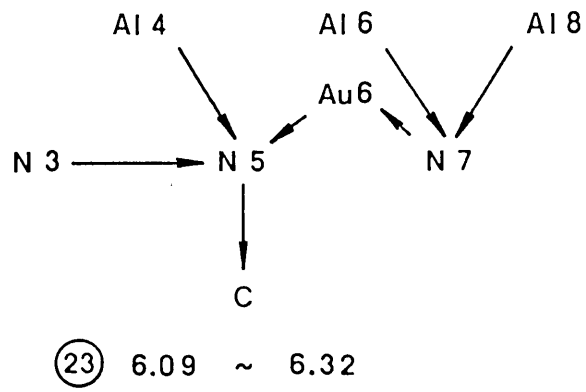


図 5 - 3 流れの分岐 (その 4)  
 C はクエット流れ、N は正規モード、Au は変異セルが最上層にある変異モード、A l は変異セルが最下層にある変異モードを示す

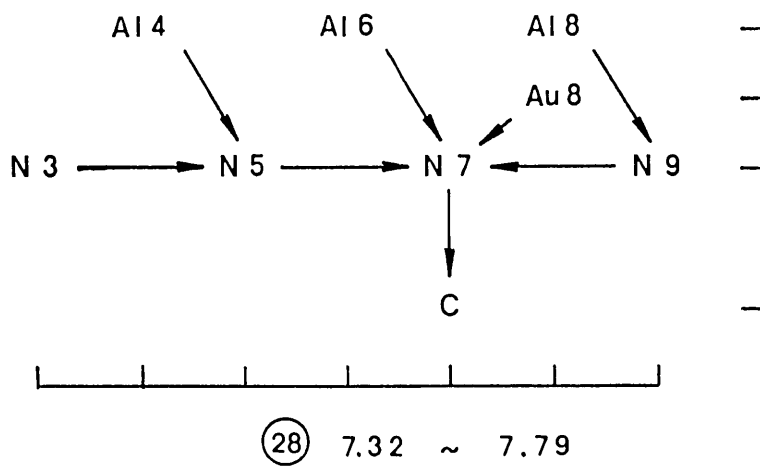
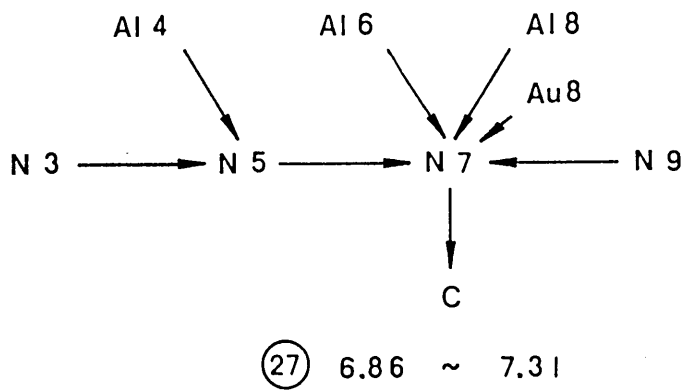
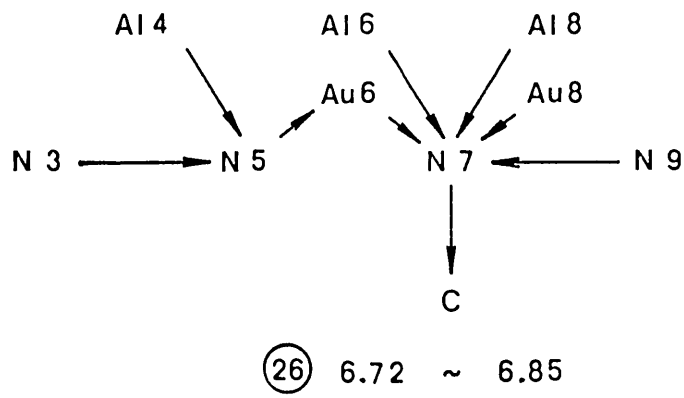
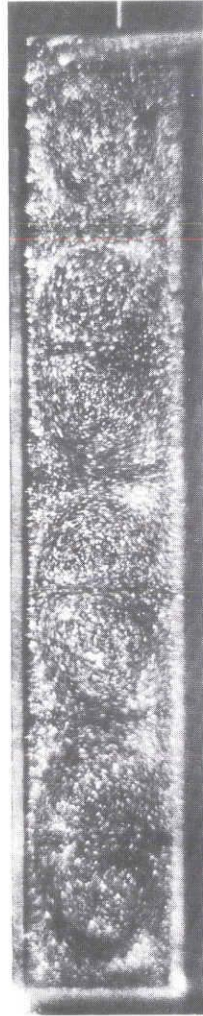


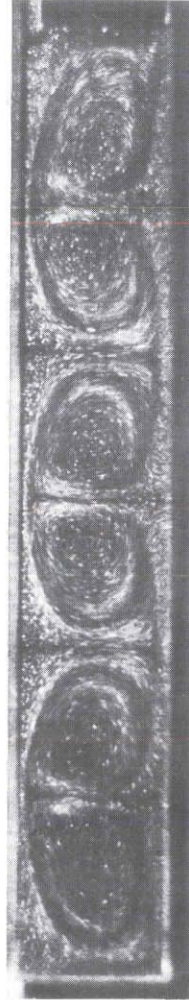
図 5 - 3 流れの分岐 (その 5)  
 C はクエット流れ、N は正規モード、Au は変異セルが最上層にある変異モード、Al は変異セルが最下層にある変異モードを示す





out in

自由端 7セル  
 $\Gamma = 6.44$   $Re = 675$



out in

固定端 6セル  
 $\Gamma = 6.50$   $Re = 789$

図5-4 テイラー渦流れの断面写真  
写真右側は内円筒、左側は外円筒

表 5 - 2 自由端と固定端の間のモードの対応

自由端	固定端
主正規モード	
$P N (2N+1)$	$P N (2N+2)$
主変異モード	
$P A u (2N+2)$	存在しない
2次正規モード	
$S N (2N+1)$	$S N (2N+2)$
2次変異モード (最上下層の片側に変異セルが存在する)	
$S A 1 (2N+2)$	} $S A (2N+1)$
$S A u (2N+2)$	
2次変異モード (最上下層に変異セルが存在する)	
$[ S A (2N+1) ]$	$S A (2N+2)$

注： [ ] 内で存在するモードは波動テイラー渦として存在する。

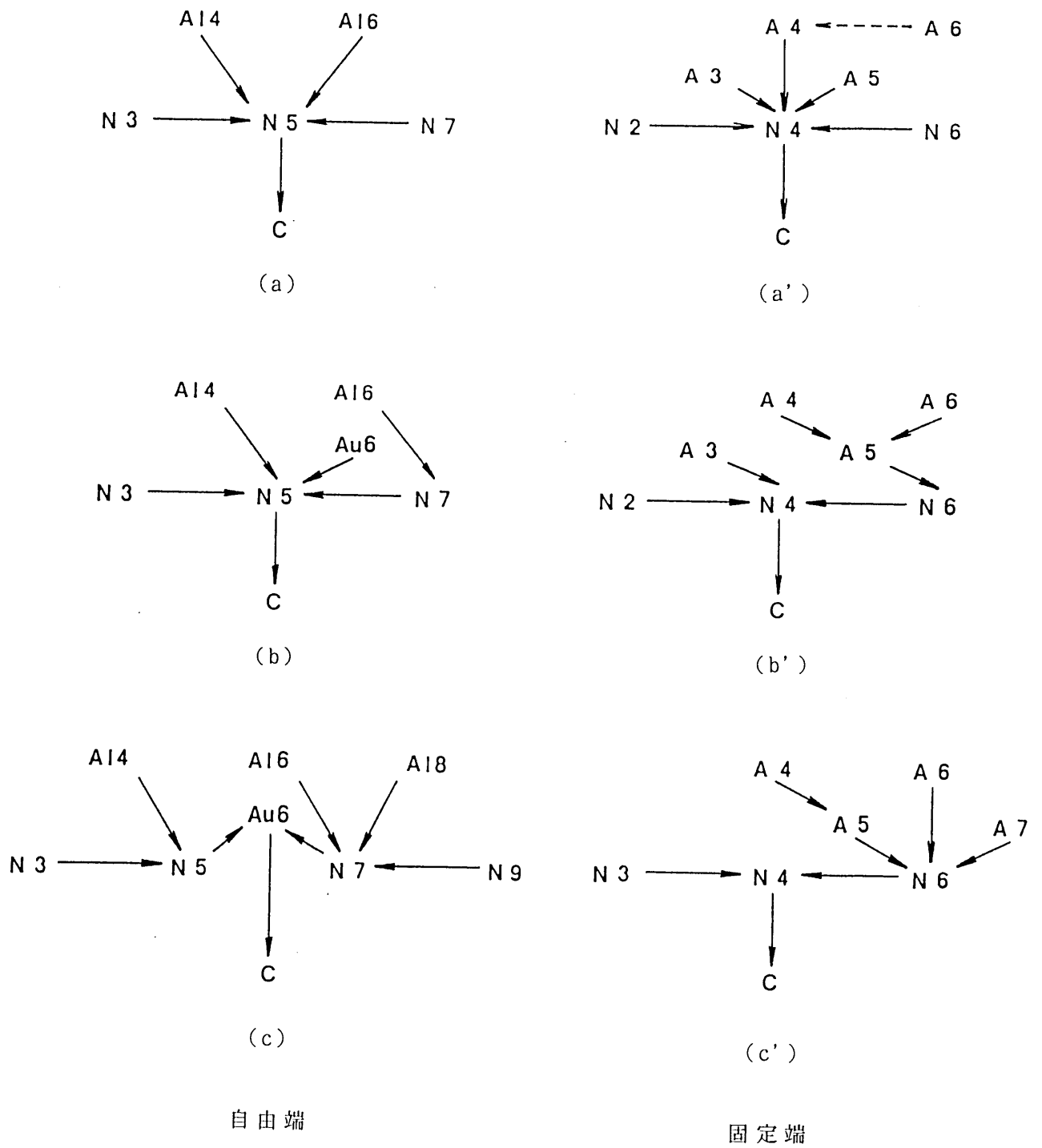


図 5 - 5 自由端と固定端の流れの分岐図

## 第6章 変異モードにおけるエクストラ渦とツイン渦の存在 (6-1)

### 6. 1 緒言

アスペクト比が小さい同軸回転二重円筒間における粘性流体の流れはその上端と下端の境界条件、即ち下端と上端が固定面である固定端の場合と、下端は固定面で上端は自由面である自由端の場合の違いにより様々な流れの構造を持つことがわかっている (6-2), (6-3)。このテイラー渦流れは図4-1と図5-1に各々示したように、固定端と自由端において、発生条件により主モードと2次モードに分類することができ、さらに2つのモードは構造から Benjamin による、正規モードと変異モードに分類することができる (6-2), (6-3)。正規モードとは最上層、最下層の流れが端面上において固定端上では外円管から内円筒へ向かう流れ方向を持ち、自由面上では内円筒から外円管へ向かう流れ方向を持つものである。尚、図のセル数とは内円筒から外円管に完全にわたる渦の数のことである (図6-1参照)。一方、変異モードとは最上層、最下層の流れの方向が上記の流れとは異なるセル、いわゆる変異セルを持つものをいう。

固定端における変異モードに関して多くの研究があるが、それらの結果には相互に相反するもの、不明確な点があり、その問題点を以下に述べる。BenjaminとMullin (6-4) は分岐理論と実験から変異モードの存在を確認した。さらに、CliffeとMullin (6-5) は変異モードに関して Schaeffer (6-6) のホモトピー理論を使った計算と実験の比較を行ない、変異モードにおいて変異セルの発生時には通常のセル以外にもう1つの小さな渦が上端もしくは下端と内円筒の角に存在することを示した。Cliffe et al. (6-7) はさらに同様な結果を示している。Bolstad と Keller (6-8) もホモトピー理論から Benjamin らの実験条件とほぼ同じ内外円管半径比 (0.615) とアスペクト比 (1.648~5.683) で数値計算している。そこで変異セルの上に弱い”隠れた渦”と呼ぶ小さなセルを確認し、変異2セルモードは4個のセルを持ち、Benjamin らが述べている変異セルにおける逆向きの流れは存在しないと強調して述べている。しかし、彼らの計算結果における端面上の渦は内円筒側と外円管側の両方の角に1つずつ存在するものもあり、それらの流れの方向は明らかには述べられていない。変異セルの計算結果に関しては、Hill (6-9) が変異3セルについて計算をしているが、端面上の流れの分割流線の方向について明確にしていない。Anson、MullinとCliffe (6-10) は変異5セルモードに関して実験結果と計算結果を報告

している。しかし、やはり端面上の流れの方向は明らかにされていない。以上複数個のセルを持つ変異モードに関して、内円筒と端面との角に小さな渦が1つ存在するものと、外円筒と内円筒の両側に小さな渦が2つ存在するもの、さらに変異セルの上に隠れた弱いセルが存在するという報告があるが、いずれも端面上の流れ方向に関して明確にされていない。また、流れの構造上から変異セルに分類できると思われる、アスペクト比が1付近における1セル流れに関して、Cliffe (6-11)、Pfister、Schmidt、CliffeとMullin (6-12)とStreetとHussaini (6-13)は計算結果を報告している。いずれも片側端面上において弱い小さな渦を計算している。さらにLucke、Michelcic、Wingerathと、Pfister (6-14)は1セルの写真を報告している。その写真には端面上で内円筒と外円筒の角に小さな渦が存在しているのがわかる。このように、変異セルにおける端面上の流れに関して不明確な点が多い。それは端面上の流れを流線で表わすとき、例えば固定面上で流れの方向が変異セルの存在により内円筒から外円筒へ向かうのか、変異セルの上に弱い、いわゆる隠れたセルが存在し、外円筒から内円筒へ向かうのか、それとも端面と内外円筒の角に存在する小さな渦により流れの方向が異なるのかが明らかでないことから起因すると思われる。KoschmiederもBolstadとKellerの計算結果からこの小さな渦の存在に注目しているが、流れの状態を外観の観察から判断しているようであり、変異セルが存在するかいなかについては不明であるとしている(6-15)。よってこのことを明らかにするために、変異セルにおける端面上の流れ、さらに変異セルに付随する渦に関して詳細な実験的調査が必要である。

本章は固定端と自由端において変異モードの変異セルに付随する渦の存在条件、すなわちレイノルズ数、アスペクト比に対してどのように変化するかを調べた。さらにBolstadとKeller(6-8)が主張するように変異モードは変異セルの上に隠れたセルが存在し、実際には端面上で通常と同じ流れ方向を持つのかを確認する。

## 第 6 章の主な記号

- $R_1$  : 内側回転円筒半径 ( $2 R_1 = 40.19 \pm 0.006$  mm)
- $R_2$  : 外側静止円管内半径 ( $2 R_2 = 60.11 \pm 0.024$  mm)
- $\eta$  : 半径比 ( $R_1 / R_2 = 0.669$ )
- $D$  : 内外円管の隙間 ( $D = R_1 - R_2 = 9.96 \pm 0.025$  mm)
- $L$  : 作動流体の円筒軸方向高さ
- $\Gamma$  : アスペクト比、 $\Gamma = L / D$
- $\omega$  : 内円筒の回転角速度
- $\nu$  : 作動流体の動粘度
- $Re$  : レイノルズ数、 $Re = \omega R_1 D / \nu$

その他の記号はその都度定める。

## 6. 2 小さい渦に関する分類

まず後述の観察した結果より固定端と自由端における渦の名称をあらかじめ与える。代表的な流れの断面構造を模式的に描いたものを図 6-1(a)~(d)に示す。各図の右側は内円筒であり、左側は外円筒である。内円筒は円筒上部から見て反時計方向に回転する。断面に見られる渦の大きさが異なるものを扱うので、後に述べるツイン渦の場合を除いて、隙間の半径方向全体にわたる渦をセルと呼ぶ。また断面の角にできる小さな渦はエクストラ渦と呼ぶ。2セルモードと言うようなときにはエクストラ渦はセル数には入らない。図中に断面の分割流線を示した(6-15)。ここで点AとSは付着点と剥離点を表わす。もちろん正しくは流れの状態は3次元剥離である(6-15)。(a)は固定端の場合の変異1セルモードであり、上端左側の小さい渦は外側エクストラ渦、上端右側の小さい渦は内側エクストラ渦と呼ぶ。(b)は固定端の変異1セルモードに属する形で、これをツイン渦流れと呼ぶ。この形の渦構造は今までに報告されていないようである。左側の渦は外側エクストラ渦が発展したものであり、右側の渦は従来のセルを示す。(c)は固定端の変異3セルモードであり、上端左側の小さい渦は外側エクストラ渦、上端右側の小さい渦は内側エクストラ渦を示す。(d)は自由端の場合の変異2セルモードであり、下端左側の小さい渦は外側エクストラ渦、下端右側の小さい渦は内側エクストラ渦を示す。

### 6. 3 実験装置と実験方法

実験装置は従来のもと同じであり、作動流体は水とグリセリンの混合液である。トレーサとしてアルミ粉を使用して流れ場を可視化した。実験で変化するパラメータは幾何学的パラメータである $\Gamma$ と動的パラメータである $Re$ である。固定端の場合は $\Gamma$ を任意に変化することができるスライドリングを設置した。流れの観察は断面の観察と外観面の両方で行ない、断面観察にはスライドプロジェクタにより3mm幅のスリット光を方位角方向に垂直に照射した。断面写真は35mmカメラを使用し、4倍増感で撮影した。

自由端について、変異1セルモードの変化の観察が望まれるが、前章で述べたように自由端における奇数個の変異モードは安定な状態では存在しないことがわかっている。今回、再度変異1セルモードを発生させることを試みたが達成できなかった。

端面上における変異セルの流れ方向を確認する実験を特に行なった。それはBolstadとKeller(6-8)が端面上における変異セルの流れ方向はMullinとBenjaminらが主張するような通常とは異なった流れ方向を持つことはなく、隠れたセルの存在によって内向き流れを持つと主張する内容を確認するためである。そのために上端面の表面から染料を注入することにより端面上における流れの方向を可視化した。その実験方法と撮影方法を図6-2に示す。染料を注入するために、内径0.41mmのステンレスパイプを端面上の半径方向にほぼ等間隔に5箇所設けた。染料は内円筒側から青色、赤色を交互に使用した。端面上の流れ場は装置の関係で直接観察できないので、鏡を装置の前方に傾斜させて設置し、その反射像を写真撮影した。

内側エクストラ渦は内円筒の影響で流速が大きく、さらにその大きさが小さいと観察ではその存在を明確にできないため、通常アルミ粉の実験では確認しにくい。よって上記の実験方法で染料を内円筒近くに注入することによって内側エクストラ渦の存在条件を確認した。



## 6. 4 結果と考察

### 6. 4. 1 固定端の変異1セルモードに発生するツイン渦

各 $\Gamma$ における1セルの断面写真を図6-3に示す。各断面写真の右側は内円筒で左側は外円筒である。本写真のセルは上端において内円筒から外円筒へ向かって流れ、下端面上では外円筒から内円筒へ向かって流れている。各 $\Gamma$ の値について最もエクストラ渦の発達した条件で撮影しているため $R_e$ は異なっている。この写真の中で(e)の $\Gamma = 1.00$ におけるセルの流れについてみると外円筒と上端面の角（外側上角）に小さい渦（エクストラ渦）が存在することがわかる。この小さい渦は中央のセルとは逆の流れ方向を持っている。この渦の流速はかなり小さく、セル流れとはかなり異なり、観察でははっきりした渦と判断するのは難しい。本写真は小さな渦が1つの渦流れと判断できるように露光時間を長くして撮影したものである。本実験ではこの外側エクストラ渦が存在する $\Gamma$ の範囲を求めた。その結果、1セルが存在する全 $\Gamma$ の範囲でエクストラ渦はその大きさが $R_e$ によって変化するが、外円筒と上端面の角に必ず存在することが明らかになった。外側エクストラ渦はセル流れから働くせん断力によって逆方向の流れが生じると考えられる。そのため流速は非常に小さく、 $R_e$ が小さい場合には明瞭に渦であると判断しにくい。内円筒と上端面の角（内側上角）に内側エクストラ渦が存在し、外側エクストラ渦と同様に時計方向に流れている。内側エクストラ渦は内円筒の表面付近に存在するため内円筒の角速度の影響を受けて速度が速くなり、渦であるかどうか判断しにくい。また、1セルが存在する $\Gamma$ の全範囲において同時に存在するか明らかでない。しかし後に述べる染料の実験で内側エクストラ渦は全範囲に存在することが明らかになった。さらに1セルの場合、他のモードへ分岐する $\Gamma$ の値、すなわち $\Gamma$ の値が2に近くなると内側エクストラ渦は発展し始めるようである。図の(f)の $\Gamma = 1.71$ において明瞭でないが内側エクストラ渦が発展しているのがわかる。前章で述べたようにモードの分岐に関して、 $\Gamma$ が大きい範囲において $R_e$ が小さくなると、変異1セルモードは他のモードへ分岐する。その過程は外側エクストラ渦とともに内側エクストラ渦が大きくなり、外側と内側エクストラ渦が合体し、1つの独立したセルに発展する。1セルモードに関して、特に外側エクストラ渦について $\Gamma$ を変化させて詳細に調べた。 $\Gamma$ の値が0.5~0.7の範囲においてエクストラ渦は発展し、従来から存在するセルより小さいが、その領域が上端から下端にわたる大きさの渦に発展する。

図6-3の(a)、(b)、(c)の場合、右側の渦は従来から存在する渦であり、反時計方向へ流れている。左側の渦は時計方向へ流れている。これらの2つの渦は安定な状態で存在し、このように同じ程度の大きさの渦が横に並んだ流れの状態をツイン渦流れと呼ぶ。Hill (6-9) が内外円管を互いに逆回転させた時の流れの計算において” side-by-side” モードの存在を報告しているが、内円筒回転、外円管静止の流れにおけるこのようなツイン渦に関しては、従来から実験的にも数値的にもまだ報告がなされていないようである。エクストラ渦とツイン渦との違いは、エクストラ渦は外円管上に付着点が存在し、ツイン渦は端面上に付着点が存在することで区別する(図6-1(a)と(b)を参照)。 $\Gamma$ の値が0.7付近より大きい値の場合は外側エクストラ渦の領域は次第に小さくなり、 $\Gamma$ が2を超えるとエクストラ渦は判断しにくい程度に小さくなる。 $\Gamma$ の値が0.5より小さい値では外側エクストラ渦は弱くなり次第に渦としての流れでなくなり、外円管付近ではクエット流れの状態になり、内円筒付近においてのみ従来通りスパイラル流れとなっている。

変異1セルモードの結果から、多数個セルの変異モードの場合においても変異セルに付随するエクストラ渦は、変異セルが存在する $\Gamma$ の全範囲で存在し、さらに内外円管の間に対するセルの高さが0.5~0.7付近において2つの渦が半径方向に並んだツイン渦を形成するのではないかと予想される。これを確認するために変異3セルモードにおけるエクストラ渦を観察した。

#### 6. 4. 2 固定端における変異3セルモード

固定端における変異3セルモードの断面写真を図6-4に示す。ここで変異セルは最上層のセルで反時計方向に流れている。写真は最もエクストラ渦が明瞭な $\Gamma$ の値のものを掲げた。外側エクストラ渦はアルミ粉により可視化観察することが容易であり、全ての範囲で存在することがわかった。しかし、内側エクストラ渦は内円筒の回転の影響で、その存在が明確ではない。そこで染料を使用した可視化実験において内側円筒付近に染料を注入して確認を行なった。その結果、装置の最大設定値である $\Gamma = 7.10$ より小さい範囲においてどの条件でも染料は内円筒へ向かうことが確認され、内側エクストラ渦が存在することが明らかになった。固定端における変異1セルモードでは外側エクストラ渦が、従来から存在するセルと同じ程度の大きさになり、その結果、半径方向に並ぶ流れの状態であるツイン渦を形成する。しかし、変異3セルモードでは $\Gamma$ が最も小さいと思われる値の付近

でもツイン渦は形成されなかった。 $\Gamma$ の値が次第に大きくなるとエクストラ渦はその存在領域が次第に狭くなり、 $\Gamma = 4$  を超えるとその領域はかなり小さくなることがわかる。

$Re$ に対するエクストラ渦の大きさの変化は変異1セルモードのそれと同じであると思われるが、ツイン渦が形成されないということに関しては異なっている。この原因は境界条件によるものかセルの高さの条件が異なるのか明らかではない。よって次に各 $\Gamma$ の値においてセルの高さが $Re$ の変化に対してどのように変化するか確認した。

#### 6. 4. 3 固定端の変異セルの高さの変化

固定端における変異3セルモードについて、 $Re$ の変化に対する流れの発展の指標の1つである変異セルの高さを求めた。その代表的結果の一部を図6-5に示す。横軸は $Re$ を、縦軸はセルの高さ $H$ を内外円管の隙間 $d$ で除して無次元化してある。参考までに他の2つのセルの高さも示してあり、最下層のセルから順に $H_1$ 、 $H_2$ 、 $H_3$ と記す。ここでは $H_3$ が変異セルを示す。

$Re$ が増加すると変異セルの高さは次第に小さくなり、一定の値に収束することがわかる。セルの高さが小さいと思われる $\Gamma = 2.60$ において、変異セルの高さは $H/d = 0.88$ 付近であり、1セルにおいて明らかになったツイン渦が発生するであろうと思われる $H/d$ が $0.5 \sim 0.7$ に達していない。 $\Gamma$ の値が増加すると変異セルの高さ、 $H/d$ も増加するので $H/d$ を $0.5 \sim 0.7$ にするには $\Gamma$ は小さくしなければならないが、前章でも述べたように変異3セルモードの存在する $\Gamma$ の範囲は一定しており、さらに本実験で行なった結果 $\Gamma = 2.21$ より小さい場合は変異3セルは存在しない。本実験において $\Gamma = 2.30$ における変異セルのセル高さを確認したところ、 $H/d$ は $0.7$ に達していなかった。よってこのことからエクストラ渦は存在するが、それ以上に発達してツイン渦になることはないと思われる。この理由は変異1セルモードの境界条件とは異なり、変異3セルモードは上端が固定端、下端は自由境界面で他のセルと接しているので $\Gamma$ の値が小さくなっても他のセルが小さくなるため、変異セルはその $H/d$ が $0.7$ より小さくならないためと思われる。

#### 6. 4. 4 自由端における変異2セルモード

自由端における変異2セルモードの断面写真を図6-6に示す。写真において最下層

が変異セルで時計方向、すなわち通常とは逆向きに流れている。図のすべてにおいて外円管と下端の角に白く光る部分があり、外側エクストラ渦が存在するのがわかる。(b)において内円筒と下端の角に存在する内側エクストラ渦の存在も確認できるが、 $Re$ が増加すると観察では明らかでない。実際、写真から外側エクストラ渦は確認できるが、(b)以外の写真においては内側エクストラ渦が存在するのを確認することができない。また、染料を用いた実験は固定端の場合とは異なり、装置の形状から確認することが不可能である。しかし、自由端における変異セルは固定端の変異セルと比較して存在場所が異なるだけであり、その境界条件は同じであると思わせるので、内側エクストラ渦は存在すると予想される。外側エクストラ渦について $\Gamma$ を変化させてその存在を確認した結果、自由端において変異セルの存在する全 $\Gamma$ の範囲について外側エクストラ渦は必ず存在することが明らかになった。外側エクストラ渦の大きさについては $\Gamma$ が小さい値においてもその領域はあまり大きくなり、小さい渦のままである。よって固定端の1セルの場合のようにツイン渦が形成されることはないと思われる。参考として変異2セルモードの変異セルの高さの変化を図6-7に示した。図中の $H_1$ が変異セルの高さを表す。結果としては固定端の場合における変異セルの高さの変化と同様であり、最低でも $\Gamma = 2.06$ において $H/d$ が0.8であった。

#### 6. 4. 5 変異セルの流れ方向とエクストラ渦の独立性

固定端と自由端における変異モードはそれが持つ変異セルの流れの方向が正規モードが持つ通常の流れの方向と異なっている。ここでの詳細な実験結果から、変異セルに付随した小さな渦であるエクストラ渦が存在することが明らかになった。このエクストラ渦の存在は変異セルの存在を確立させている可能性がある。一方、固定面もしくは自由面の境界上で逆の流れ方向を持つとされていたセルは実際にはもう1つの非常に弱いセルが変異セルより端面側全体に存在しており、端面上で通常の流れ方向を形成しているとも考えられる。BolstadとKeller (6-8)はこのことを計算している。しかし、本実験結果からエクストラ渦はあくまでも外円管と端面上および内円筒と端面上の角に2つで存在しており、Kellerらが主張するように端面上に1つのセルが接して通常と同じ流れ方向を持つようには観察されなかった。

さらにそのことを確認するために染料を使用した実験を行なった。その結果を図6-

8の写真に示す。この写真は図6-2で示したように上端面から注入した染料で流れを可視化しており、その状態を鏡で反射させた像をカメラで撮影したものである。実際には上下逆さである。この写真は変異5セルモードにおける変異セルが端面上でどのように流れているかを示している。図6-8(a)は $Re = 294$ であり、内円筒に近い青、赤、青の染料は内向き流れであることがわかる。外側の赤の染料は内側または外側のどちらにも寄らず方位角方向に流れているように見える。外側の青の染料は内向き流れを示している。(b)は $Re = 320$ で中央の青い染料は次第に外向きの流れに変化している。(c)は $Re = 391$ で、中央の青の染料は外向き流れを示し、わずかに外向きの流れ方向であると思われる外側の赤の染料と外円筒付近からの青の染料の流れと合流している。この合流した流れはわずかに外方向に流れながらスパイラル流れになっている。(d)は $Re = 517$ で、中央の青い染料は外向きに流れており、赤の染料も外向きの流れに見える。(e)は $Re = 715$ で、明らかに内側の赤と中央の青の染料は外向きであることがわかる。参考までに写真に対応する流れの断面の模式図を示した。図の右側は内円筒で、左側は外円管である。流れの図の下にある端面において5本の線によって染料の注入される位置を示し、流れは流線と分割流線で示した。参考として(f)に正規セルの場合を示した。正規セルは外円管から内円筒へ向う流れであり、5本の染料が内円筒へ向って流れていることから、この染料の流れは変異セルの流れと明らかに異なっていることがわかる。

これらの結果から端面の中央付近の流れは外向きの流れであり、明らかに内向き流れとは異なっている。よって変異セルに存在する内側と外側のエクストラ渦は各々独立に存在し、端面上ではそれらのエクストラ渦の間にはもう1つの渦流れ、すなわち変異セル流れが存在することがわかる。このことは従来より報告されている数値的結果においては、端面上において2つのエクストラ渦が報告されているが、接する箇所における流れ方向に関して明確にされていない。流線を考えた場合、内側と外側のエクストラ渦が接するとすると、その場所では互いに逆方向の流れが接することになり矛盾する。よってこの変異セルはわずかではあっても端面上に存在しなければならない。図6-8における各写真の右に示した流線の図は先の図6-1と同じ形式で表わしてある。端面上に2本の分割流線があり、一本は内円筒側で剥離点から出て、一本は外円管側で付着点へ流れ入っている。剥離点と付着点の間の流れは内円筒から外円管へ向かって流れている。以上のことから変異セルの流れは端面上に存在し、BolstadとKellerらの主張する流れでなく、端面全体ではないが一部の領域でいわゆる通常とは異なる逆の流れ方向を持っていることになる。

変異 3 セル、変異 4 セルモードの流れに関しても同様な実験を行ない写真を撮影したが、結果は変異 5 セルと定性的に一致した。

固定端における変異 1 セルモードのツイン渦はあくまでも外側エクストラ渦が発展したものであり、これを通常の回転軸方向に積み重なった 2 セル流れと考えることはできない。すなわちエクストラ渦は従来より考えているセル流れと同じ 1 つの独立した流れとは見なしがたい。なぜなら複数個のセルを持つモード間の分岐において、エクストラ渦のみが不安定になり崩壊するが、変異セルがそのまま安定な状態で存在するということはないからである。変異セルが不安定になり崩壊するときは必ずエクストラ渦も消滅する。よってエクストラ渦は変異セルに付随する渦であると考えられる。ただし複数個のセルを持つ変異モードが  $\Gamma$  の条件によってセル数の多い他のモードに分岐する直前には外側および内側エクストラ渦が共に発展してつながり始め、ついには 1 つの独立したセルとなって分岐が完成するのが確認された。よってエクストラ渦が分岐時に 1 つのセルになる源であると思われる。

## 6. 5 結言

アスペクト比が小さいテイラー渦における変異モードの変異セルに付随するエクストラ渦とエクストラ渦が発展して形成されるツイン渦について観察した結果を述べる。主な結論は以下のようなものである。

(1) 自由端と固定端の場合、エクストラ渦は変異セルと共に付随して2つ存在する。その場所は各々、外円管と端面の角、内円筒と端面の角である。しかしこのエクストラ渦は従来から注目しているセルとは性質上異なり、セル流れのように独立した物とは考えず、あくまでも変異セルに付随した渦流れとみなされる。

(2) 固定端における変異1セルモードに関して、 $\Gamma$ の特定の値において、外側エクストラ渦は従来から存在するセルと同じ程度の大きさに発展し、半径方向に横に並んだ2つの渦を形成しツイン渦となる。これは従来報告されていない形の渦構造である。

(3) 固定端における変異3セルモードと自由端における変異2セルモードにおいてエクストラ渦は変異セルに付随して存在する。しかしどちらのモードも外側エクストラ渦が発展してツイン渦になることはない。

(4) 変異セルの流れは、内外円筒と端面との角に存在する2つのエクストラ渦と主たるセル流れで構成され、端面上における流れは、必ず逆向きの流れ方向の領域を持つことになる。よって変異セルの流れの上に通常の流れ方向があるとするBolstadとKellerらの主張する内容と異なることになる。

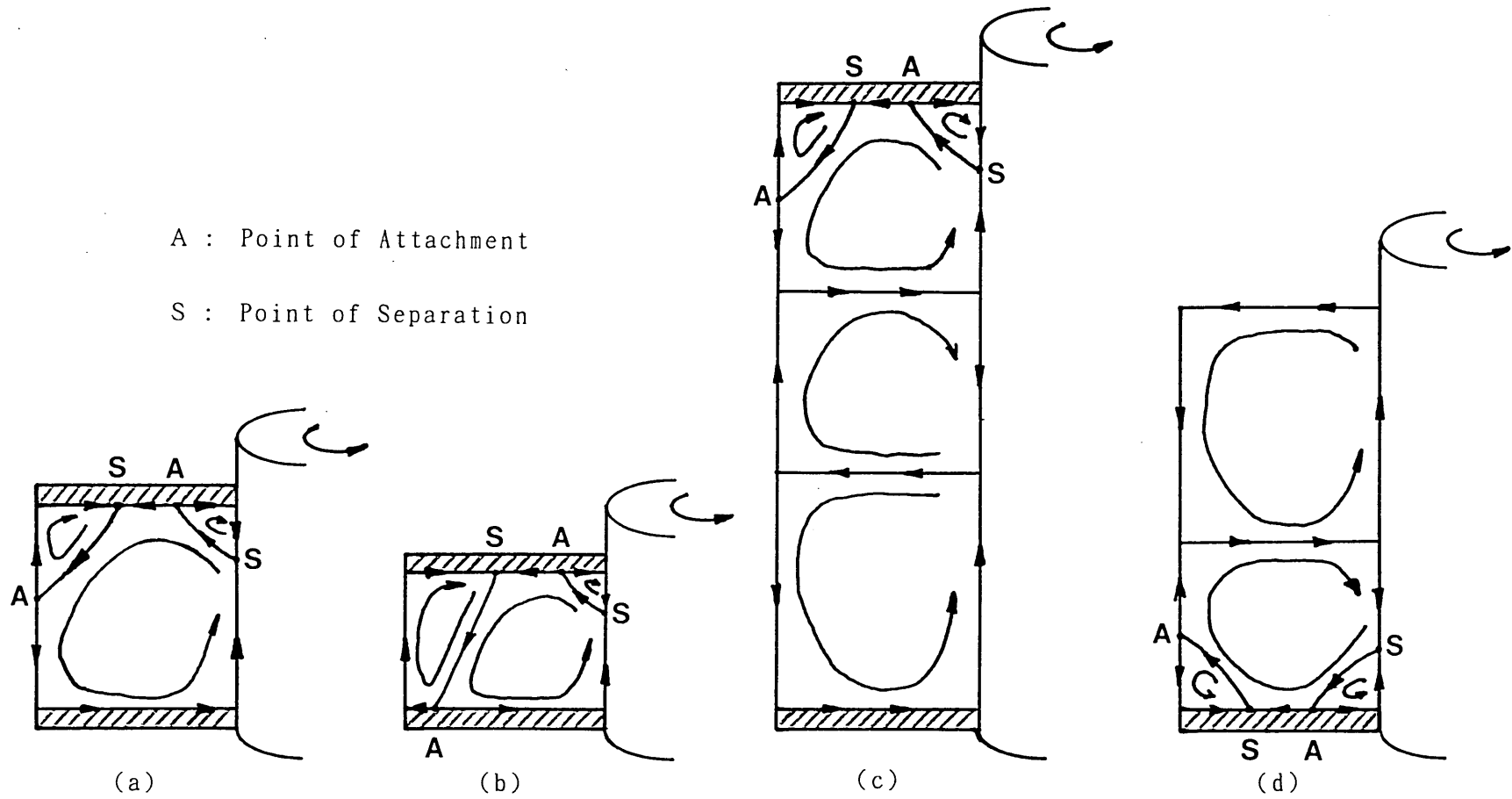


図 6 - 1 変異モードにおけるエクストラ渦とツイン渦  
(a)~(c)は固定端、(d)は自由端の場合であり、  
(b)はツイン渦、残りはエクストラ渦を示す。



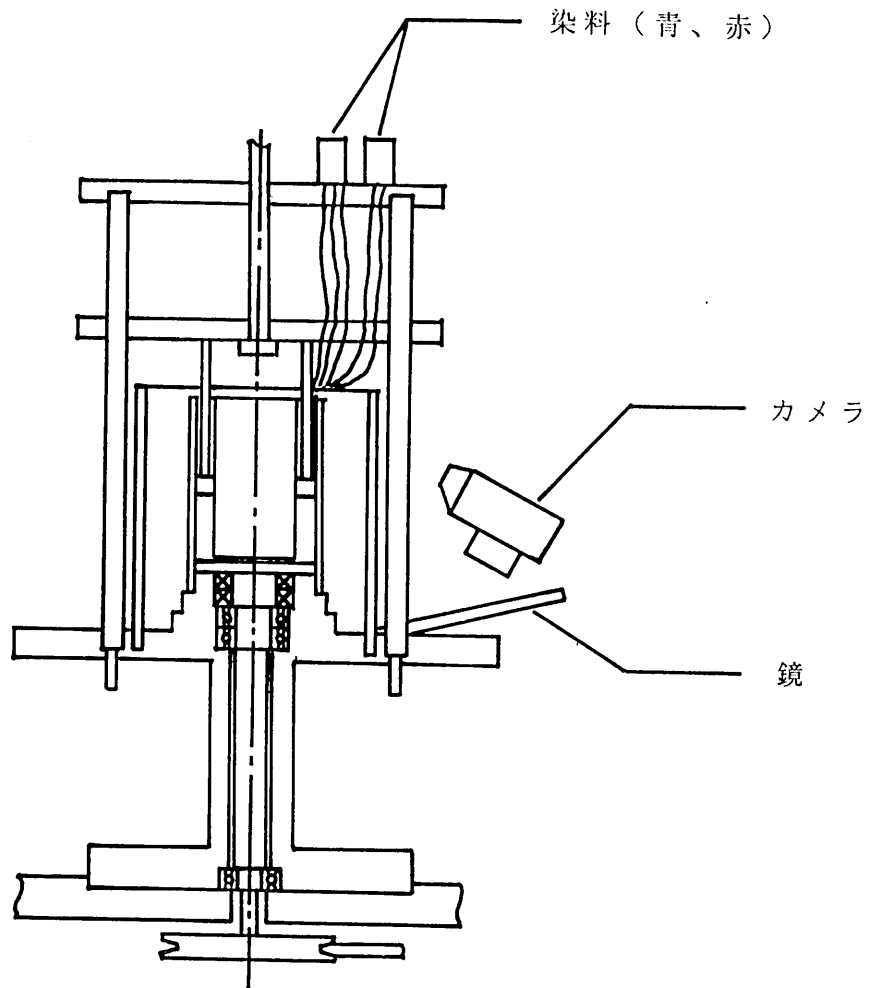
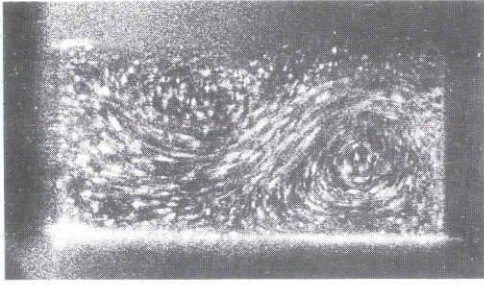
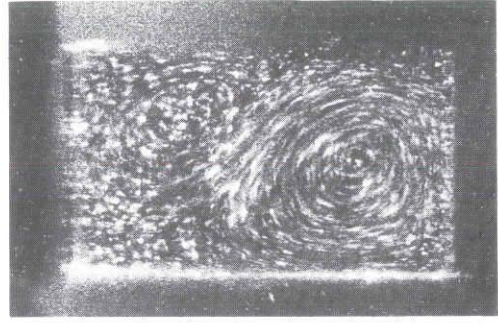


図 6 - 2 実験装置（撮影方法）



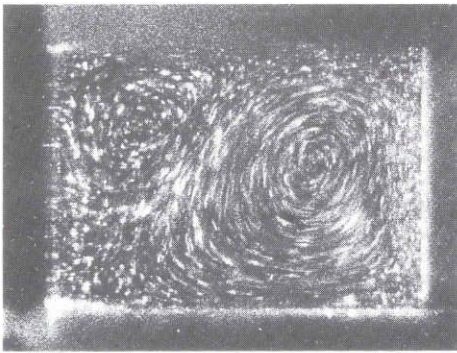
out in

(a)  $\Gamma = 0.51$   $Re = 653$



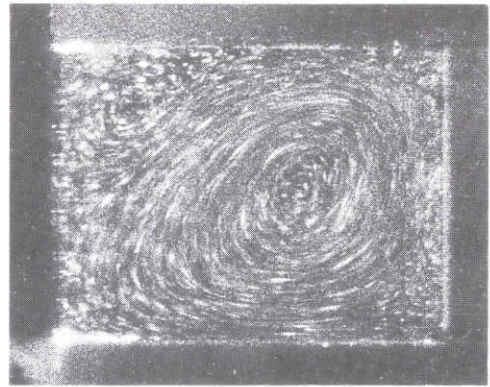
out in

(b)  $\Gamma = 0.62$   $Re = 532$



out in

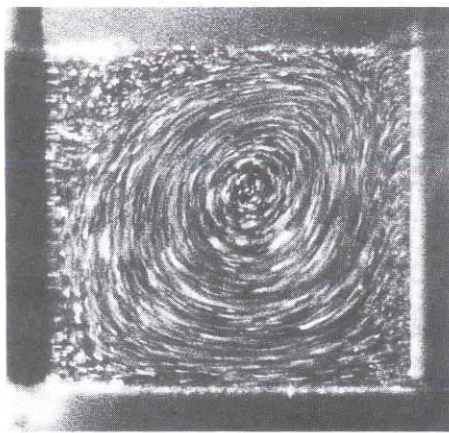
(c)  $\Gamma = 0.72$   $Re = 560$



out in

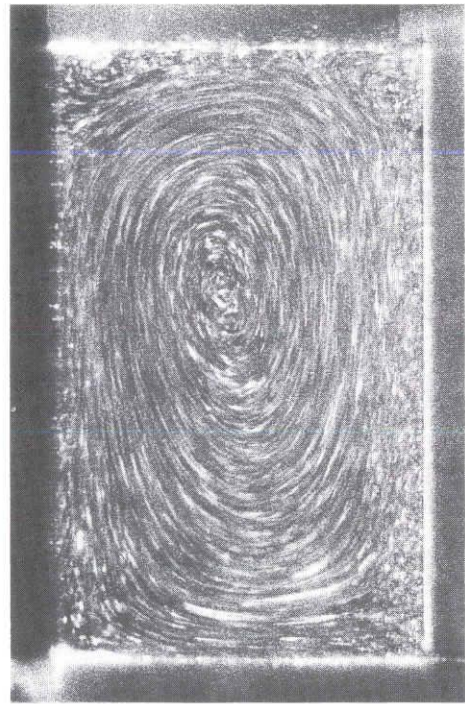
(d)  $\Gamma = 0.8$   $Re = 560$

図6-3 固定端における1セルのエクストラ渦とツイン渦(その1)



out in

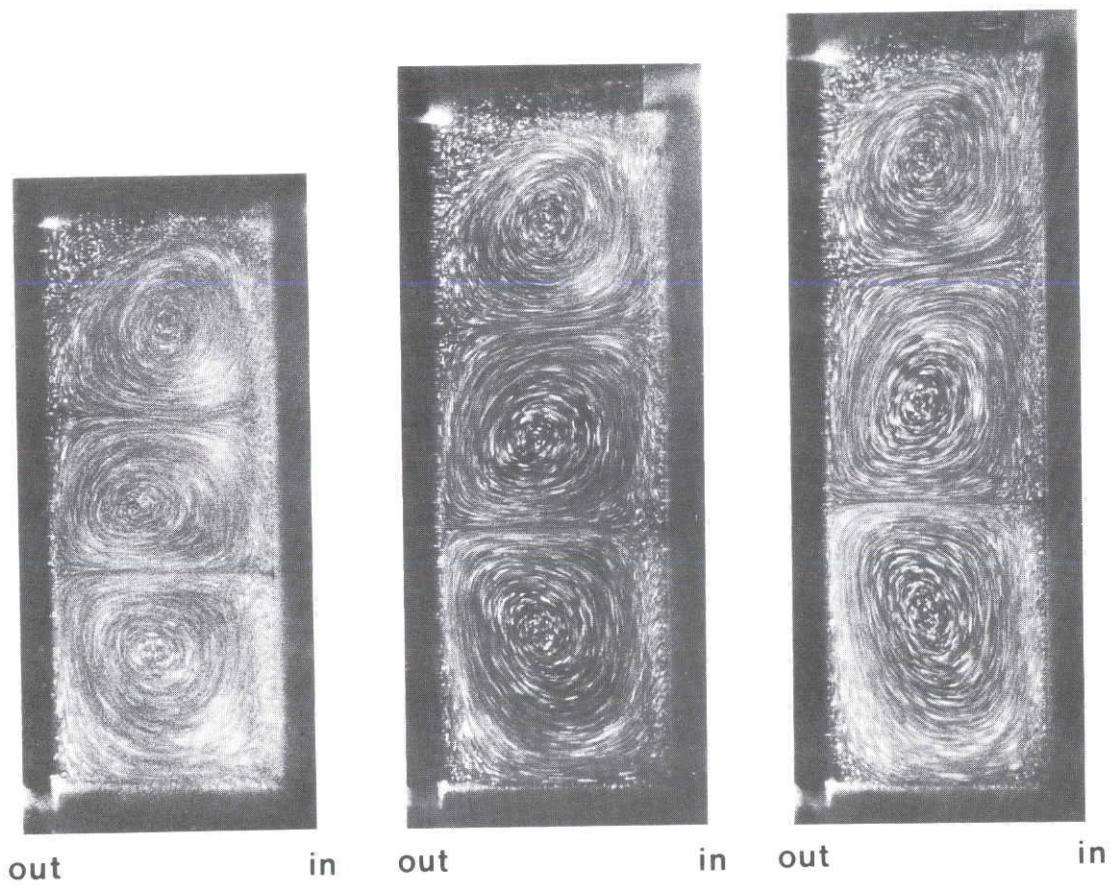
(e)  $\Gamma = 1.00$   $Re = 659$



out in

(f)  $\Gamma = 1.71$   $Re = 566$

図6-3 固定端における1セルのエクストラ渦(その2)



(a)  $\Gamma = 2.60$   
 $Re = 513$

(b)  $\Gamma = 3.00$   
 $Re = 640$

(c)  $\Gamma = 3.40$   
 $Re = 657$

図 6-4 固定端における 3セルのエクストラ渦 (その 1)

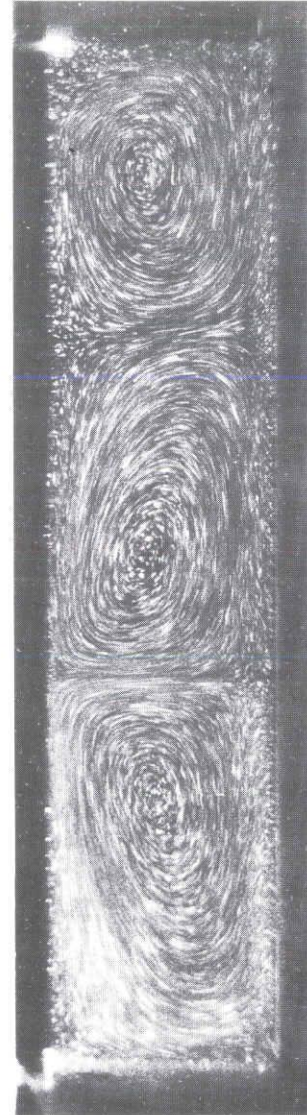




out in

(d)  $\Gamma = 4.20$

Re = 627



out in

(e)  $\Gamma = 4.60$

Re = 625

図 6 - 4 固定端における 3 セルのエクストラ渦 (その 2)

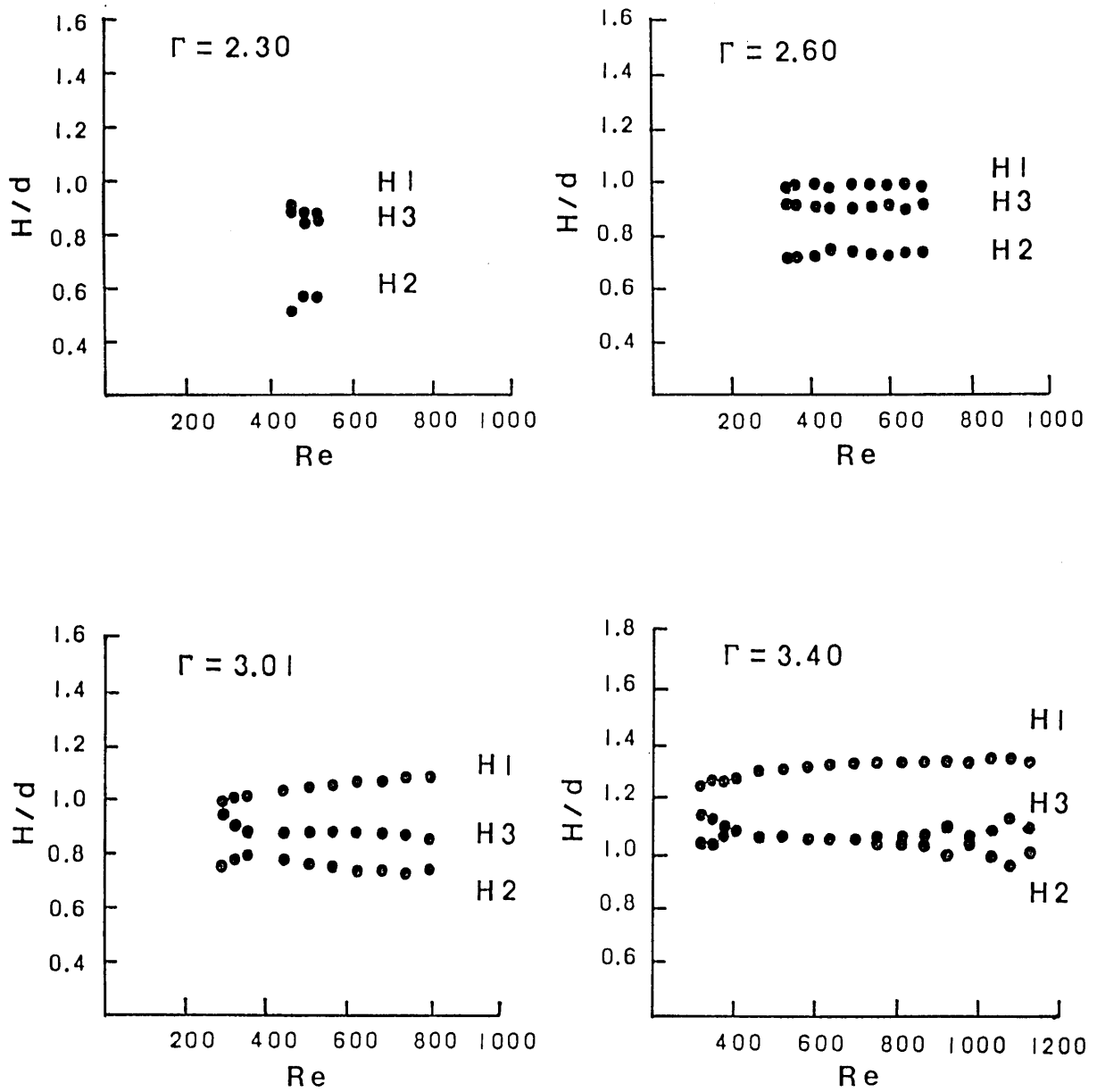


図 6 - 5 固定端における 3セルのセル高さの変化 (その 1)  
(H 3 は変異セルの高さを示す)

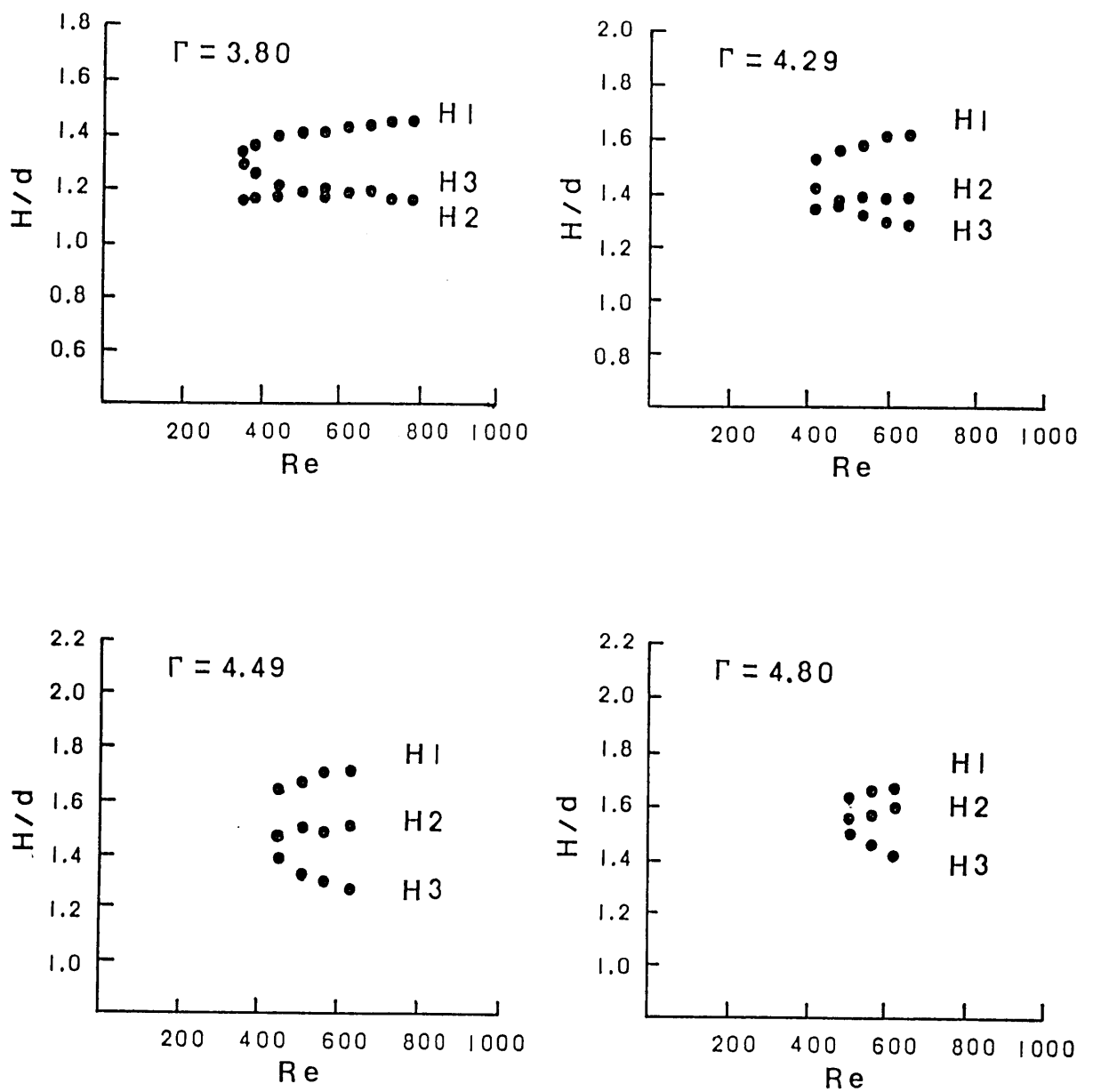
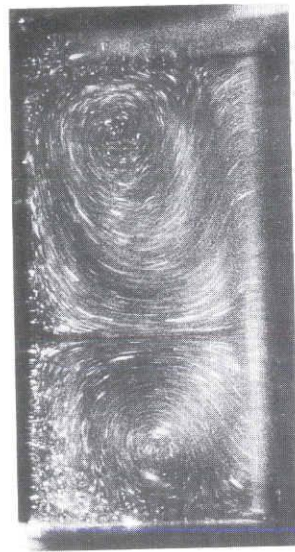
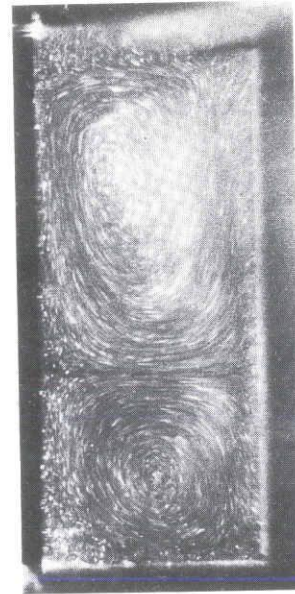


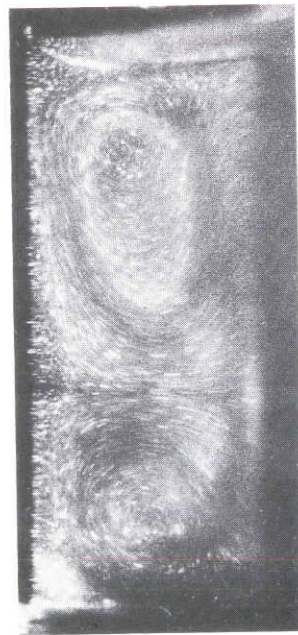
図 6 - 5 固定端における 3セルのセル高さの変化 (その 2)  
(H 3 は変異セルの高さを示す)



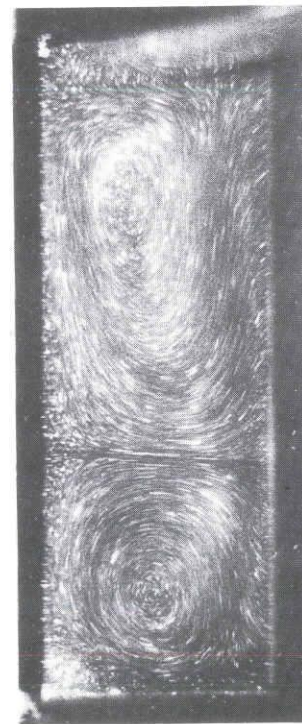
out in  
 ( a )  $\Gamma = 2.22$   $Re = 617$



out in  
 ( b )  $\Gamma = 2.48$   $Re = 630$



out in  
 ( c )  $\Gamma = 2.62$   $Re = 581$



out in  
 ( d )  $\Gamma = 2.89$   $Re = 581$

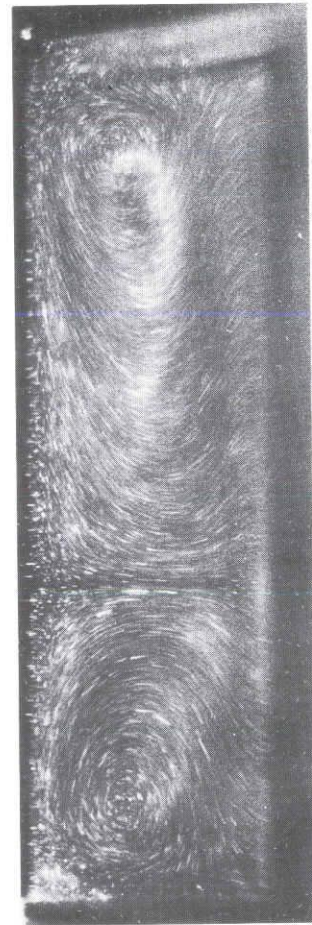
図 6 - 6 自由端における 2 セルのエクストラ渦 ( その 1 )





out in

(e)  $\Gamma = 3.53$   $Re = 666$



out in

(f)  $\Gamma = 3.92$   $Re = 583$

図 6 - 6 自由端における 2セルのエクストラ渦 (その 2)

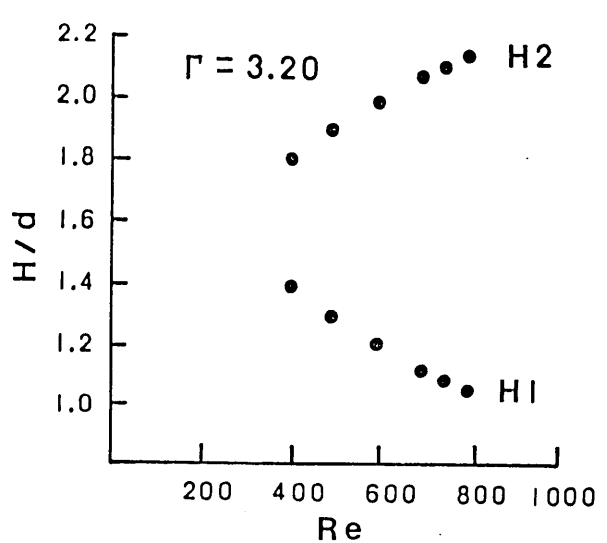
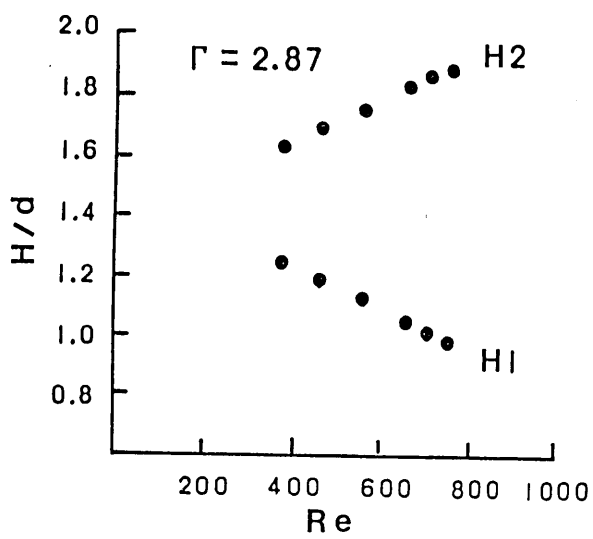
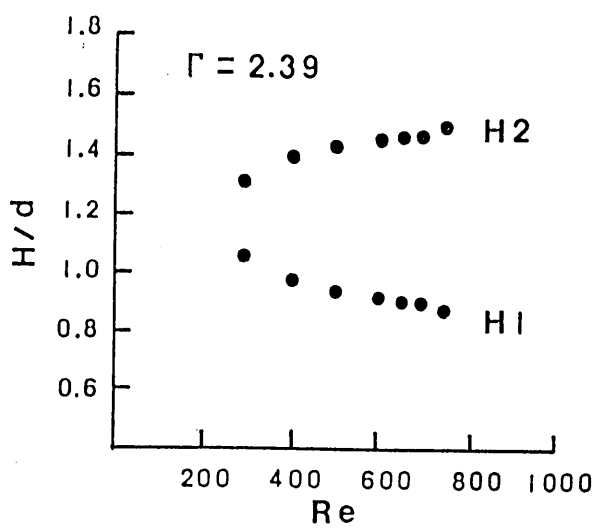
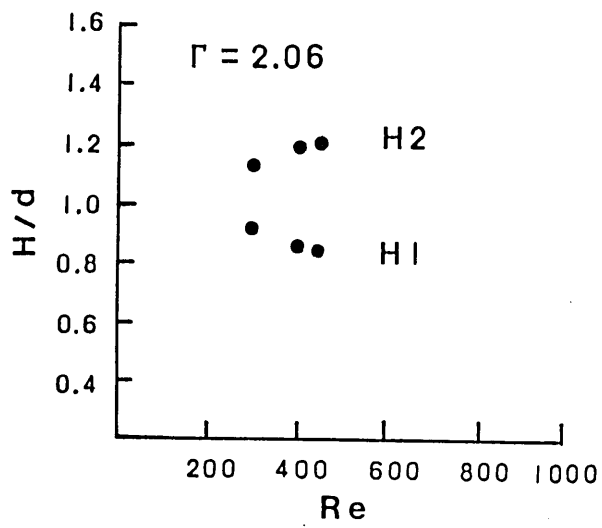


図 6 - 7 自由端における 2 セルのセル高さの変化 (その 1)  
 (H 1 は変異セルの高さを示す)

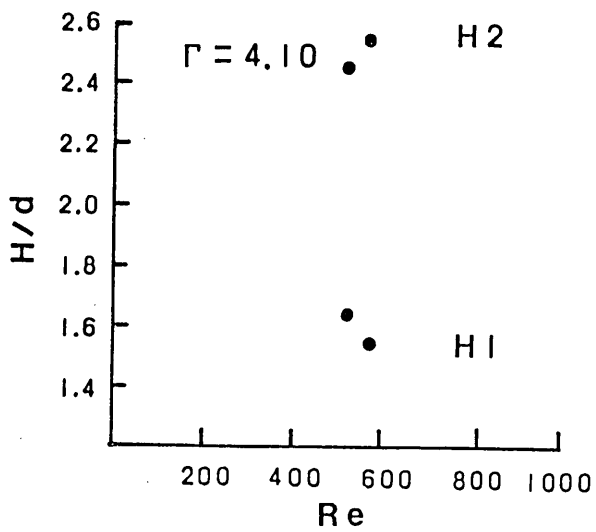
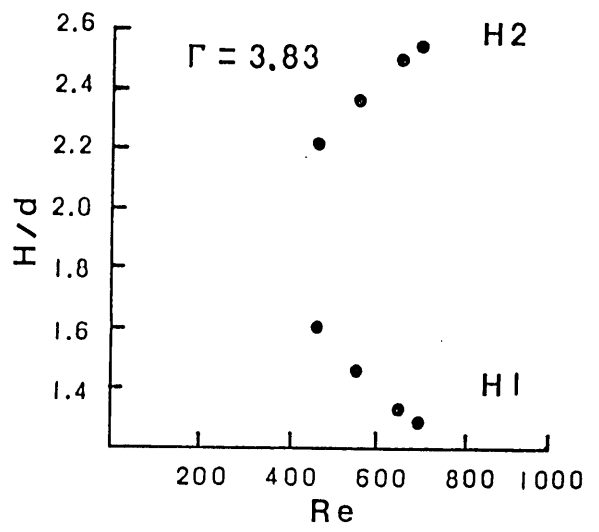
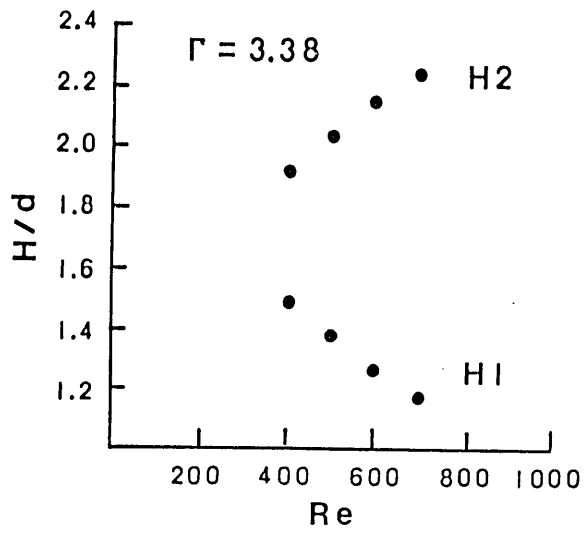
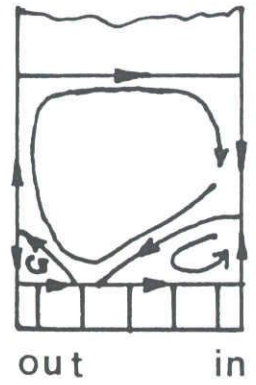
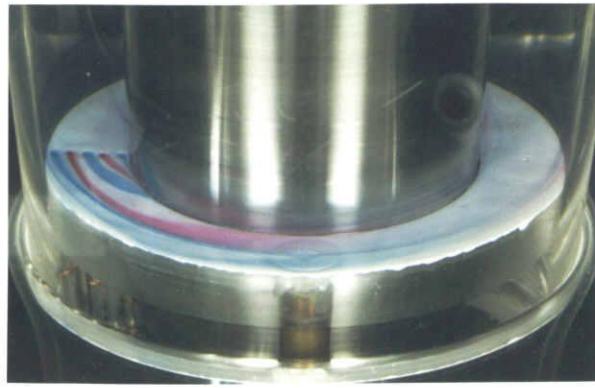
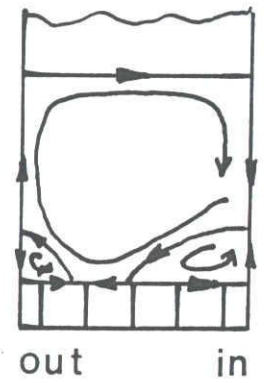
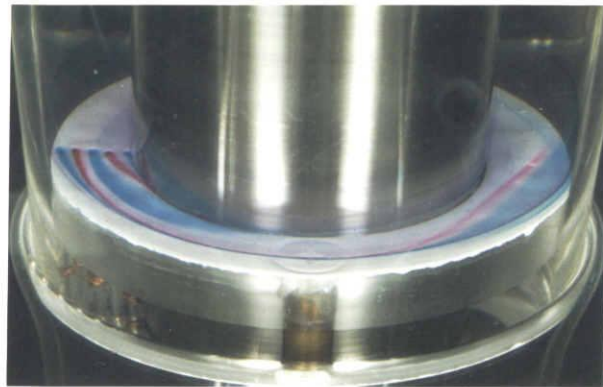


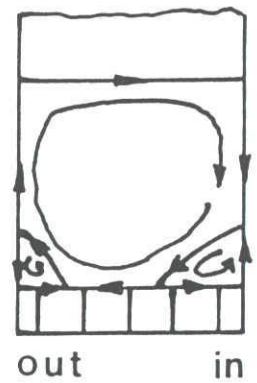
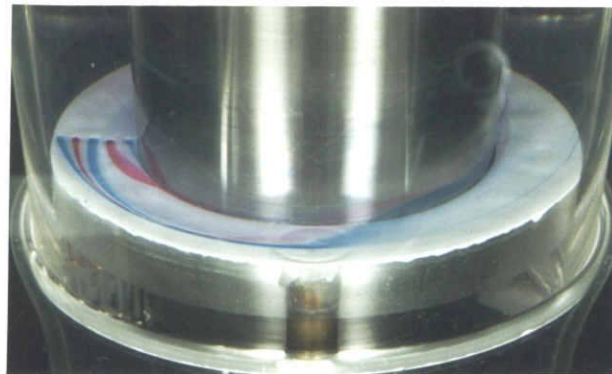
図 6 - 7 自由端における 2セルのセル高さの変化 (その 2)  
 (H 1 は変異セルの高さを示す)



(a)  $Re = 294$  (変異セル)

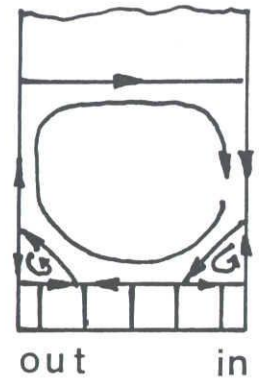
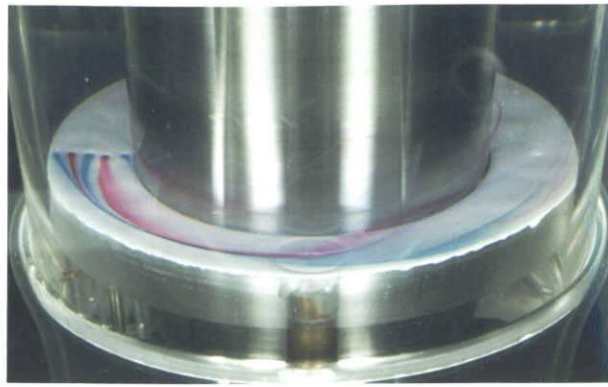


(b)  $Re = 320$  (変異セル)

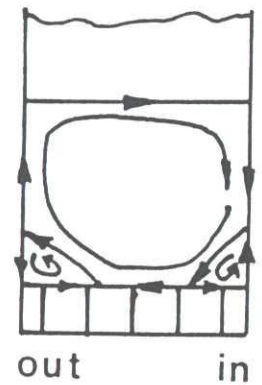


(c)  $Re = 391$  (変異セル)

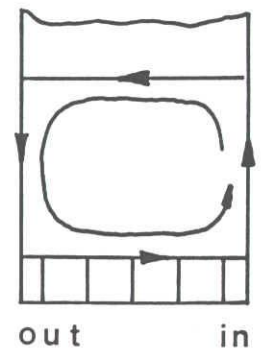
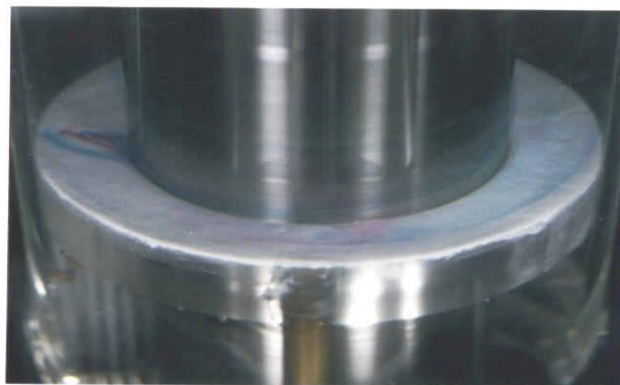
図 6 - 8 染料による流れの可視化と断面模式図 (その 1)  
 模式図の下端面に示してある 5 本の線は染料の注入位置を示す。



(d)  $Re = 517$  (変異セル)



(e)  $Re = 715$  (変異セル)



(f)  $Re = 521$  (正規セル)

図 6 - 8 染料による流れの可視化と断面模式図 (その 2)  
 模式図の下端面に示してある 5 本の線は染料の注入位置を示す。

### 7. 1 緒言

同軸回転二重円筒間のテイラー渦流れの多数の理論は無限円筒を仮定し、実験もアスペクト比 $\Gamma$ を大きくとって端面の影響を小さくしたものがほとんどであるが、 $\Gamma$ の小さい場合を理論、実験の双方から調べ、テイラー渦研究に新しい展開をもたらしたのが Benjamin である (7-3), (7-4)。その後、多くの研究が $\Gamma$ の小さい場合についてなされてきた (7-5)。前章までに Benjamin によって提唱された、 $\Gamma$ の小さい場合のテイラー渦の主モード、2次モード、正規モード、変異モード状態を上面が自由表面である自由端と固定端の場合に、その発生条件、渦の構造の観点から詳細に調べてきた。

ここで理解の便宜のために固定端の場合におけるこれらのモードを簡単に要約する。

主モード；基本的にはレイノルズ数をゼロから準静的に増加した場合に最初に生ずる渦パターンで $\Gamma$ によって一意に決まる。急加速でも生じうる。

2次モード；レイノルズ数がある狭い幅の中の値まで急増加させた場合に生ずるモードで、主モードとは異なる渦パターン。

正規モード；端面の極限流線が遠心力に抗する圧力勾配のため内向きスパイラルとなる渦構造。2次モードでも生じうる。

変異モード；上記とは逆に極限流線が外向きのスパイラルとなる。2次モードのみで存在する。

これらの詳細は4章、5章で述べた。変異モードの存在については議論がなされてきたが (7-5)、6章で示した著者の可視化写真によれば疑う余地なく存在する。

2次モードの発生は興味ある問題であるが、その発生状態を $Re$ の上昇のさせ方を変えて系統的に調べた例は少なく、東らの数値計算 (7-6), (7-7)、BielekとKoschmiederの実験のみのようなものである (7-8)。東らは主モード4セル渦と2次モード2セル渦の発生を計算し注目されるが、同条件下で実験的には確かめられている他のモードには言及していない。Bielekらは多数回の実験を行っているが、モード発生確率や渦形成過程の詳細は述べられておらず、また、著者らの確認したのとは異なり奇数個の渦はないとしているが、それは数値計算の結果をそのまま認めたもので十分なものとはいえない (7-8)。以上の研究報告は固定端の場合についてであるが、境界条件の異なる自由端の場合も同様に当て

はまると思われる。

本章は固定端と自由端の両方の場合において、レイノルズ数が減少する時の分岐は、比較的単純なことが分かっている固定端の場合についてはアスペクト比が 4.0、自由端の場合については 4.9 の条件に問題を絞って、最終レイノルズ数と回転数の直線的増加率を変えて各モードの発生頻度や、渦の形成過程を調べてこの流れの複雑な分岐過程の一端を明らかにしようとしたものである。

本問題は広く見れば外的条件が非定常なテイラー渦の問題であるので関連した  $\Gamma$  の大きいテイラー渦の変調 (modulation) の研究について触れておく。内、外円筒の回転角速度がそれぞれ  $\omega_{in} = f_1(t)$ 、 $\omega_{out} = f_2(t)$  となる場合は早くから注目されていた (7-9)。これは大別して次のような場合が研究されている。

$f_1(t)$ ; ステップ変化 (7-10), (7-11), (7-12)、一定増加 (7-13), (7-14)、  
正弦波状変化 (7-9), (7-15), (7-16)、いずれも  $f_2 = 0$

$f_2(t)$ ; 正弦波状変化 (7-15), (7-17)、いずれも  $f_1 = 0$

多くの研究の中で代表的報告を文献に示した。正弦波状変化には平均角速度がゼロの場合と、そうでない  $a + b \sin \omega t$  の形のものがある。上記よりさらに一般的变化をさせた場合 (7-18) や端板を周期的に上下させ変調した例もある (7-19)。いずれも複雑な流れで統一的理解には進んだ研究が必要である。また、本研究と直接比較すべき報告は見当たらない。

## 第7章の主な記号

$R_1$  : 内側回転円筒半径 ( $2 R_1 = 79 \pm 0.1 \text{ mm}$ )

$R_2$  : 外側円管内径 ( $2 R_2 = 119.1 \pm 0.1 \text{ mm}$ )

$D$  : 内外円管の隙間 ( $D = R_1 - R_2 = 20 \pm 0.1 \text{ mm}$ )

$L$  : 作動流体の円筒軸方向高さ ( $L = 80 \text{ mm}$ )

$\Gamma$  : アスペクト比、 $\Gamma = L / D$

$\omega, \omega_0$  : 内円筒角速度、 $\omega_0$ は最終角速度

$\nu$  : 作動流体の動粘度

$Re$  : 最終レイノルズ数 ( $Re = \omega_0 R_1 D / \nu$ 、回転数変化時には $\omega R_1 D / \nu$ を意味する。)

$T$  : 内円筒が静止から $\omega_0$ に一定加速で達するまでの時間

$St$  : 無次元加速パラメータ、 $St = 1 / \omega_0 T$

その他の記号はその都度定める。



## 7. 2 実験装置と実験方法

実験装置を図7-1に示し、主要寸法は記号表に記した。内円筒はステンレス鋼製で、外円筒は透明アクリル樹脂製でできており、その外側にアクリル樹脂の四角い槽がある。この四角い槽には透明液体が満たされ、可視化像の屈折を補正し、作動流体温度管理の役割をする。内円筒はサーボモータにタイミングベルトで連結されて回転する。本装置は渦の可視化を容易にするために前章までに使用したものより大きい。

作動流体は体積比約1:1の水とグリセリンの混合液であり、トレーサとしてアルミ粉を混入し可視化した。Reを任意に変化させる方法は内円筒の回転数で行う。よって作動流体の動粘度は一定になるように作動流体の温度を $25 \pm 0.5^\circ\text{C}$ に保持する。サーボモータ（山洋電気社製 BL820 BM060BXT）は回転数とその回転数に達するまでの時間をデジタル位置決め装置（同社製 PDC-F-112）でデジタル制御できる。回転速度の変化の様子を図7-2に示す。この回転数と時定数はReとストロハル数Stの値を決定する。回転数はパルス列に比例しており、本装置のモータ軸の回転数の制御の精度は、最小移動量が $360 \times (1/4000)$ 度/パルスに設定されている。

本章における実験は固定端と自由端の場合を行い、固定端では $\Gamma = 4.0$ に、自由端では $\Gamma = 4.9$ に設定した。流れの断面観察にはスライドプロジェクタを使用し、5mm幅のスリット光を方位角方向に垂直に照射した。流れの断面の様子はビデオカメラで撮影、記録した。ビデオカメラは1コマの撮影を1/30秒で行い、流れの形成過程を解析するために適当な時間における流れの画像をビデオプリンタで出力した。

固定端と自由端の場合で安定に存在するモードは既に報告されており、固定端の場合は、 $\Gamma = 4.0$ において、Reが徐々に減少したときの流れの分岐図を図7-3に示す。ここでN4は主モード、その他のモードは2次モードを表わす。自由端の場合は、 $\Gamma = 4.9$ において、Reが徐々に減少したときの流れの分岐図を図7-4に示す。ここでN5は主モードで、その他のモードは2次モードを表わす。特に、A14、A16は変異セルが下端面に存在するモードを意味する。

実験は以下の方法で行った。 $\Gamma$ が大きい場合の直線加速の研究には速度ゼロからのものと、クエット流状態で一定回転しているところからのものと2種類ある。ここでは初速度ゼロから行った。すなわち、流れの初期状態を目視で静止と認められる状態から、設定した $\omega_0$ まで、設定したTで図7-2のように増加させ、発生した渦モード

を観察する。その後、円筒を静止させ、また同じ実験を繰り返す。このような流れの特性時間は作動流体の高さ方向に対し、 $L^2/\nu$ 、隙間方向に対し $D^2/\nu$ 、スピニアップ時間として $\sqrt{L^2/\nu \omega_0}$ などがある(7-10)。有限長テイラー渦の場合には $L^2/\nu$ が重要とされ、Snyder は渦状態が定常になるまでに  $0.15 L^2/\nu$ が必要としている。本実験においては、 $0.15 L^2/\nu = 177.8 \text{ sec.}$  ( $\nu = 5.4 \text{ mm}^2/\text{s}$ )となるので4分間を流れ状態を安定化させる時間にとった。本実験では $T = 0.01 \sim 4 \text{ sec.}$ であり、 $L^2/\nu$ に比べかなり早い加速である。

このような加速でどのモードが発生するかは、これまでの実験から一意的でないことが分かっているので実験は一組の条件、すなわち $(Re, St)$ の一組に対して100回行った。 $Re$ は6種、 $St$ は6種で以下に示したものだけでも3600回の実験である。ちなみに、Bielek らは976回実験したと述べている(7-8)。なお、固定端の場合において2種の $Re$ 、6種の $St$ について、各300回観察したが、100回の場合と基本的な差はなかった。

### 7. 3 結果と考察

#### 7. 3. 1 固定端の場合の各モードの発生頻度

$R_e$  と  $S_t$  を変化させたときの 2 次モード (図 7-3 参照) の発生回数の頻度分布を図 7-5 (a)~(e) に示す。各グラフは  $R_e$  の値を変えたものである。図において {100- (全 2 次モード発生頻度)} が主モード (図 7-3 の  $N_4$ ) の発生頻度を示す。100 回の実験なので頻度は発生確率をパーセントで示したことになる。図より  $R_e$  と  $S_t$  の値により主モードの発生頻度がかなり異なることが分かる。図は略すが、 $R_e = 1000$  では  $S_t$  の値に関わらず 100% 主モードであり、 $R_e$  が小さい場合は  $S_t$  の影響は見られない。 $R_e = 2000$  では主モードの発生頻度が減少し、それは  $S_t$  の値によって異なる。図 7-5 (a) 中の横軸の 1 ヶ所に矢印で示されている  $S_t$  の値では 100% 主モードであるが、 $S_t = 45 \times 10^{-2}$  では 40% 程度に主モードは減少する。特に  $R_e = 5000$  では主モードの発生頻度は  $S_t$  が  $7 \times 10^{-2}$  では非常に小さい。 $R_e = 6000$  では主モードは波動テイラー渦にホップ分岐しているので、これ以上の  $R_e$  については実験を行わなかった。また、各  $R_e$  で  $S_t$  の値が揃っていないのも波動渦発生条件が違い、それ以前の分岐を調べたためである。

各 2 次モードの発生頻度は図 7-5 中に印分けして示した。モードによっては発生頻度が少なく、模様による区別がしにくいものは各ヒストグラムの上にモードのセル数を示した。 $R_e = 2000$  では変異 5 セルモードが比較的多く発生しているが、全体としてはどのモードも発生している。 $R_e = 3000$  では主モードの発生頻度が高い。 $R_e = 4000, 5000$  では変異 3 セル、変異 4 セルモードの頻度が高い。特に従来、発生しにくいとされていた変異 4 セルモードが  $R_e = 5000$  でかなり発生しているのは注目される。変異 3 セルモードは  $R_e = 6000$  にいたる広い範囲で発生している。

図から見られる特徴は変異 5 セルモードが  $R_e = 2000$  の所で主として見られ、 $R_e = 3000$  では僅かな回数、それ以上の  $R_e$  では全く見られないことである。また、 $R_e = 2000$  が発生モードの種類が最も多い。

同じアスペクト比で存在する 2 次 6 セルモードがほとんど発生していないが、これは以下の理由による。即ち  $R_e = 1000$  の場合に一旦 6 セルモードが発生することがあるが、その後主モードに分岐する。本実験は  $R_e$  を変化させて最終的に安定して存在するモードを調べたため、2 次 6 セルモードは発生しないという結果になった。2 次 6 セルモードを

発生させるには一旦発生した6セルモードの状態でも崩壊する前に $R_e$ を適当に変化させて安定化させなければならない。

### 7. 3. 2 自由端の場合の各モードの発生頻度

固定端の場合における、 $R_e$ と $S_t$ を変化させたときの2次モード(図7-4参照)の発生回数の頻度分布を図7-6(a)~(e)に示す。各グラフは $R_e$ の値を変えたものである。図において{100-(全2次モード発生頻度)}が主モード(図7-4、のN5)の発生頻度を示す。図より $R_e$ と $S_t$ の値により主モードの発生頻度がかかなり異なることが分かる。図は略すが、 $R_e=650$ では $S_t$ の値にかかわらず100%主モードであり、 $R_e$ が小さい場合は $S_t$ の影響は見られない。 $R_e=1250$ では主モードの発生頻度が減少し、それは $S_t$ の値によって異なる。しかし、 $S_t=36 \times 10^{-2}$ では60%程度に主モードは減少する。特に $R_e=3780$ では主モードの発生頻度は $S_t$ が $2 \times 10^{-2}$ では50%以下と非常に小さい。 $R_e=1900$ 、2540と3140では主モードの発生がほとんどである。よって $R_e$ が低いある範囲で2次モードが発生し、 $R_e$ が増加すると一端主モードの発生が増加するが、さらに $R_e$ が増加するとまた、2次モードが発生するようになるといえる。 $R_e=3780$ では主モードは波動テイラー渦にホップ分岐しているため、これ以上の $R_e$ については実験を行わなかった。また、各 $R_e$ で $S_t$ の値が揃っていないのは固定端の場合と同様に波動渦発生条件が違い、それ以前の分岐を調べたためである。

各2次モードの発生頻度は図7-6中に印分けして示した。固定端と同様に図中の数字は区別しにくいモードのセル数を示す。 $R_e=1250$ では3セルモードが発生している。 $R_e=1900$ と2540では主モードの発生頻度が高いため2次モードはあまり発生していないが、発生している内訳を見ると $R_e=1900$ では最もモードの種類が多く、 $S_t$ にもよるが全種類が発生している。このことは固定端の場合において $R_e=2000$ で2次モードの発生が多かったが、 $R_e=3000$ では主モードの発生頻度が増加したと類似している(7-11)。 $R_e=3140$ と3780では変異4セルモードの頻度が高い。特に変異4セルモードが $R_e=3780$ でかなり発生している。3セルモードは $R_e=650$ を除く全ての $R_e$ でほとんどの $S_t$ で発生している。3セルモードは固定端における変異3セルモードと対応している。

同じアスペクト比で存在する2次7セルモードがほとんど発生していないが、これは以下の理由による。即ち $R_e=650$ の場合に一端7セルモードが発生することがあるが、

その後主モードに分岐する。本実験は $R_e$ を変化させて最終的に安定して存在するモードを調べたため、2次7セルモードは発生しないという結果になった。2次7セルモードを発生させるには一端発生した7セルモードの状態でも崩壊する前に $R_e$ を適当に変化させて安定化させなければならない。このことは固定端において6セルモードが発生しにくかった結果と対応している。

### 7. 3. 3 固定端の場合の情報エントロピー

このようなマクロには同一条件とみなされる実験で発生渦パターンが確率的にしか定まらぬことは、分岐が複雑で、流れがその点近傍で不安定であることによると考えられる。このような系の挙動を明らかにするには実験的にも数値的にも困難である。ここでは流れの力学に立ち入ることなく現象として表現することを考えてみると、図7-5、7-6の各場合のパターンの分類に情報エントロピーを利用することが考えられる。例えば、固定端の場合における $R_e = 2000$ の中での $S_t$ による差、 $R_e = 2000$ と $3000$ の場合の差の目安となる量として情報エントロピーが有効と予期される。これは情報エントロピーが現象を観測することによってもたらされる情報量という直観的解釈を持つことによる(7-20)。

情報エントロピー $H$ は今の場合、ある $R_e$ 、 $S_t$ 対し、

$$H = \sum_i (-p_i \log p_i)$$

で定義される(7-20)。ここに $p_i$ はその( $R_e$ 、 $S_t$ )の場合の各モードの発生確率を示す。100%主モードの生じている場合は情報エントロピーはゼロであり、モードの発生が複雑な場合にはエントロピーは大きいことが期待される。

図7-7(a)~(e)は各々固定端の場合の各 $R_e$ についての情報エントロピーを示したものである。固定端の場合、 $R_e = 1000$ の場合は上述のようになっているので図示してない。図7-7(a)~(e)で対比させてみると、当然ながら複雑なパターンと直観的に判断される場合に情報エントロピーが大きいこと、直観ではいずれが複雑とも決めがたい場合、例えば $R_e = 2000$ の各 $S_t$ による差が情報エントロピーには明確に示されることが分かる。ただし、本実験では100回中の発生頻度がごく少ないモードもあるので、情報エントロピーの値そのものは定性的な意味しか持たないが、前述のように300回の実験で基本的な差

はなかったので、図7-7の各値の相対関係は意味あるものと思われる。十分精度の高い確率を得るにはおそらく一組の $(Re, St)$ に対して1000回以上の実験が必要で、それには完全な自動実験しか方法がないであろう。

ここで、このような分岐現象でどの分枝が選択されるかについて、一、二考察する。2次モードの解はいずれも主モードの解とは切り離された分枝上にあると考えられている(7-5)。本実験のようにいくつもの解が同一と考えられる条件でランダムに生ずることはこれらの分枝が近接して存在することを示している。そのどれかが選択されるかは装置に起因する不完全性分岐によるものか、完全静止にはできないための流体力学的ゆらぎによるのか明らかではない。装置の不完全さも回転円筒のガタ、振れ回りとか、モータの回転数の不均一によるのか様々である。しかし、渦モード発生のバラツキからみると、装置の不完全性よりも初期の流れが完全静止でないこと、特に僅かな対流などによると考えるのが妥当と予想される。これに関連した重要な研究はベナール対流の初期値分布の影響を数値的に調べた結果である(7-21)。それによればある系が多重安定領域に存在し、そこで2つ、あるいはそれ以上の安定解が異なった誘引領域(basin of attraction)と異なった最終状態を持つならば、2つの全体的な異なった初期状態が区別されることが示されている。すなわち、ランダムな速度場に異なった見えないような弱い不完全な渦の初期状態から計算すると、最終状態はそれぞれ異なった対称性を持つ発達したベナール対流状態に落ちつく。BestehornとHakenはこれをパターン認識における連想記憶と同じ性質のものであるとしている。本流れでも同様な性質があるとすれば、弱いランダム場に僅かな各種の規則流れがあり、最終的な発達渦状態がその初期の記憶に従って達成され、見えるようになることもあり得る。すなわち、初期の見えない確率的区別が時間発展によって顕在するということになる。

#### 7. 3. 4 自由端の場合の情報エントロピー

自由端の場合も固定端と同様にパターンの分類をエントロピーを使って表すことを試みる。図7-8(a)~(e)にその結果を示す。 $Re = 650$ の場合は上述のようになっているので図示していない。 $Re = 1250$ では全体的にエントロピーは大きく0.4以上になっている。よって比較的その分岐関係は複雑である。 $Re = 2540$ では $St$ 全体にわたってエントロピーは低く、 $Re = 1900, 3140$ では $St$ が小さい範囲では $H$ が小さいが、 $St$ が大きい

とエントロピーも増加している。よって、同じ $R_e$ でも $S_t$ が大きい場合、分岐関係も複雑さを増すと思われる。さらに、 $R_e = 3780$ では $S_t$ が小さいときは主モードがほとんど発生するため、エントロピーは小さいが、 $S_t$ が増加すると、エントロピーは大きいので全体にわたり分岐関係は複雑であると思われる。定量的な判断はしにくいですが、もし情報エントロピーが分岐の複雑さをある程度表わすものであるならば、固定端と自由端の場合の複雑さを比較すると、全体的に固定端の方が情報エントロピーが大きく複雑な分岐関係であるといえる。

ここで、このような分岐現象でどの分岐が選択されるかについては固定端の場合と同様であると考えられる。2次モードの解はいずれも主モードの解とは切り離された分岐上にあると考えられている(7-5)。本実験のようにいくつもの解が同一と考えられる条件でランダムに生ずることはこれらの分岐が近接して存在することを示している。自由端の場合と固定端の場合を比較すると自由端の場合の方が情報エントロピーは全体的に小さかった。よって解の分岐関係は自由端に比較して固定端の方が複雑であるといえる。装置の幾何学的条件からいえば、自由端の場合、上面が自由表面であり非対称であるのに対し、固定端の場合、上下端の対称性が完全であるとは考えない。そのために分岐の複雑さが大きくなったと考えることはできる。しかし、どちらの場合にも分岐の複雑さが存在するので、その複雑さは、渦モード発生バラツキからみると、装置の不完全性よりもむしろ、初期の流れが完全静止でないこと、特に僅かな対流などの初期状態によると考えるのが妥当と予想される。

しかし、再度ここで強調したいのは、現実には初期状態は無限に存在し、 $R_e$ の増加の仕方は幾つかあるにもかかわらず、最終的に落ち着く安定した流れの状態、すなわちアトラクタは固定端の場合には $N_4$ 、 $N_2$ 、 $N_6$ 、 $A_3$ 、 $A_4$ 、 $A_5$ のモードと6つ存在し、自由端の場合には $N_5$ 、 $N_3$ 、 $A_{14}$ 、 $A_{16}$ の各モードと、我々の従来の実験結果から $N_7$ を加えたものの5つしかないことである。

### 7. 3. 5 固定端の場合のモードの形成過程

$R_e$ と $S_t$ の値によって発生するモードの種類及び頻度が異なることが明らかになったが、その具体的なモードの形成過程は複雑であり一様でない。本実験では $R_e$ と $S_t$ が異なる場合の各モードの発生過程の様子をビデオカメラに撮影し、その画像をビデオプリ

ンタに出力した。固定端の場合における各モードN4、A4の一連の発生過程の画像から変化が明瞭な画像を図7-9に示す。各モードは左から順に時間が経過している。

ビデオ画像を詳細に観察することにより、以下のことが判明した。

- (1)テイラー渦は回転による遠心力により内円筒表面から発生する半径方向の流れと、端面の影響により内円筒と端面の角に発生するプラントルの第1種の流れである2次流れとの時間的な差がモードの形成過程に影響する。
- (2)2次流れは半径方向流れが発生する前に発生する。しかし、2次流れは $Re$ が1000程度の小さい値でない限りモードの決定に影響しない。
- (3)2次流れと半径方向の流れは $Re$ が大きいほど、また、 $St$ が大きいほどその時間的差は小さい。
- (4)半径方向の流れは端面上に発生する2次流れの影響で上下端面側から発生し、順次、中央よりに発生する。
- (5)2次流れに比較して半径方向の流れは運動量が大きく、発生場所が軸方向中央によるほどその傾向が強い。

以上のことからモード別に発生の内容をまとめ、テイラー渦流れの発生過程の様子を主モードであるN4の条件が異なる場合と2次モードの代表としてA4とA15を模式図にして図7-10(a)~(d)に示す。各図は順次、時間の経過による流脈の変化の様子を表わしている。内円筒は矢印の方向に回転している。ここでは特に主モードのN4と変異モードのA4の形成過程の違いについて述べる。主モードは $Re$ が準静的に増加する場合と急加速の場合で形成過程が異なり、(a)の主4セルモードは $Re$ が小さいと上下端面上における2次流れと少し遅れて中央に発生する半径方向の流れにより6セルが発生する。その後、2つの2次流れの渦対のうちどちらかの一对の渦が中央の渦流れに巻き込まれ、4セルになる。(b)は $Re$ が大きくなると2次流れに対して半径方向の流れが比較的早く発生し、多くの渦が形成される。その後、運動量の大きい流れが次第に他の流れを吸収し4セルになる。これはカルマン渦の下流における渦の合体とよく似ている。既に述べたように回転円筒中央付近に発生した渦の方が運動量は大きい、最終的にどの渦が残るかは初期状態に依存する。主モードに対して2次モードである変異4セルモードの(c)は $Re$ と $St$ が大きい場合、半径方向の流れから発展する渦の数が多く、主4セルモードの場合と比較し、各渦が発生する時間に大きな差がない。よって中央よりの運動量の大きい流れが発展してできた渦が端面よりの渦を端面側へ押しやり、他の渦に吸収させてしまう。通常



なら対を成して存在する渦対のうち1つの渦だけが吸収崩壊し、変異セルのみが残ることになる。これが上下端面で作用すると変異4セルモードになる。変異5セルの(d)は(c)で述べた作用が何らかの原因で対称性が崩れると変異セルの形成がどちらか片方の端面でしか起こらず、変異5セルモードとなる。2次2セルモード、変異3セルモードについてはここでは述べないが、基本的には上で述べた要因の作用の微妙な差によると考える。

### 7. 3. 6 自由端の場合のモードの形成過程

自由端における各モードN5、A14の代表的な発生過程をビデオカメラで撮影した断面画像を図7-11に示す。基本的な過程は固定端の場合と共通であると考えられる。以下では固定端の場合と異なる点に関して述べる。

(1) 2次流れは半径方向流れが発生する前に発生する。しかし、2次流れは $Re$ が650程度の小さい値でない限りモードの決定に影響しない。

(2) 半径方向の流れは $Re$ が小さい場合、端面上に発生する2次流れの影響で下端面側から発生し、順次、上面よりに発生する。 $Re$ が大きい場合、下端面から2次流れが発生し、続いて自由表面における半径方向の流れが発生し、最後に円筒の中央部分で半径方向の流れが発生する。

以上の内容からモード別に発生の内容をまとめ、テイラー渦流れの発生過程の様子を主モードであるN5について $Re$ の増加条件が異なる場合と2次モードの代表としてN3とA14を模式図にして図7-12(a)~(d)に示す。各図は順次、時間の経過による流脈の変化の様子を表わしている。内円筒は矢印の方向に回転している。主モードは $Re$ が準静的に増加する場合と急加速の場合で異なり、(a)の主5セルモードは $Re$ が小さいと下端面面上における2次流れが発生し、次第に上の方へ向かって半径方向の流れが発生する。最上部の渦対の発生と表面において外円筒方向の流れのセルは同時に発生する。本実験で行った $\Gamma = 4.9$ の場合、初め7セルの状態が形成されるが、3対のセルのうち上の2対の渦が次第に不安定になり1対になり、最終的に5セルを形成する。(b)は $Re$ が大きくなると上下端面上で2次流れおよび半径方向の流れが発生する。また、半径方向の流れは比較的早く発生し、多くの渦が形成される。その後、運動量の大きい流れが次第に他の流れを吸収し5セルになる。既に述べたように回転円筒中央付近に発生した渦の方が運動量は大きい、最終的にどの渦が残るかは初期状態に依存する。主モードに対して2次モードであ

る変異4セルモードの(d)は $R_e$ と $S_t$ が大きい場合、半径方向の流れから発展する渦の数が多く、N5の場合と比較し、各渦が発生する時間にほとんど差がない。よって中央よりの運動量の大きい流れが発展してできた渦が端面よりの渦を下端面側へ押しやり、他の渦に吸収させてしまう。通常なら対を成して存在する渦対のうち1つの渦だけが吸収崩壊し、下端面上に変異セルのみが残ることになる。

### 7.3.7 固定端と自由端の場合の比較

二重円筒間の上端面の境界条件の違いはそこで発生するテイラー渦流れの安定構造を異なったものになっている。テイラー渦がその発生過程と渦構造から各々主モードと2次モードに、正規モードと変異モードに分類されることは既に4章と5章で述べた。固定端と自由端において構造安定に存在するモードについて $R_e$ を減少させたときの分岐関係を固定端の場合は $\Gamma = 4.0$ 、自由端の場合は $\Gamma = 4.9$ についてそれぞれ図7-3と図7-4に示した。各 $\Gamma$ においてこれ以外のモードは存在しない。固定端の場合に安定して存在するモードの方が1つ多く存在する。これは固定端において存在するモードの1つが自由端では波動テイラー渦状態でしか存在しないことから除かれる。

2つの場合において、実験では $R_e$ の増加の加速時間は $T = 0.01 \sim 4.0$ 秒と同一である。6つの種類で行った最終 $R_e$ は各 $\Gamma$ における主モードがホップ分岐して波動テイラー渦になる臨界 $R_e$ の値が異なるため、2つの場合で異なっている。固定端と自由端における特徴をまとめると以下ようになる。

(1)固定端の場合で、主モードの発生頻度がかなり小さく、最低で4%であった。自由端では主モードの発生頻度は最低で47%であった。

(2)固定端の方が1つの $R_e$ で発生するモードの種類が多く存在する。これは $S_t$ の値が変化してもいえることである。このことは固定端の方が自由端より情報エントロピーの量が大きい結果と一致する。

(3)情報エントロピーが定性的な意味だけでなく、定量的な見方ができるとすれば、エントロピーは固定端の方が全体に大きい値を持つ。これは分岐関係が固定端の方が複雑であることを意味することになる。

(4)固定端と自由端のどちらの場合も $R_e$ の値により情報エントロピーが変化する。特に、 $R_e$ が小さい場合、エントロピーは大きく、 $R_e$ が増加すると一端は減少するがさらに

$Re$ が増加すると再び増加する傾向にある。

(5)固定端と自由端の場合も $St$ が小さいとエン트로ピーは小さいが、 $St$ が増加すると $Re$ に依存して変化する。

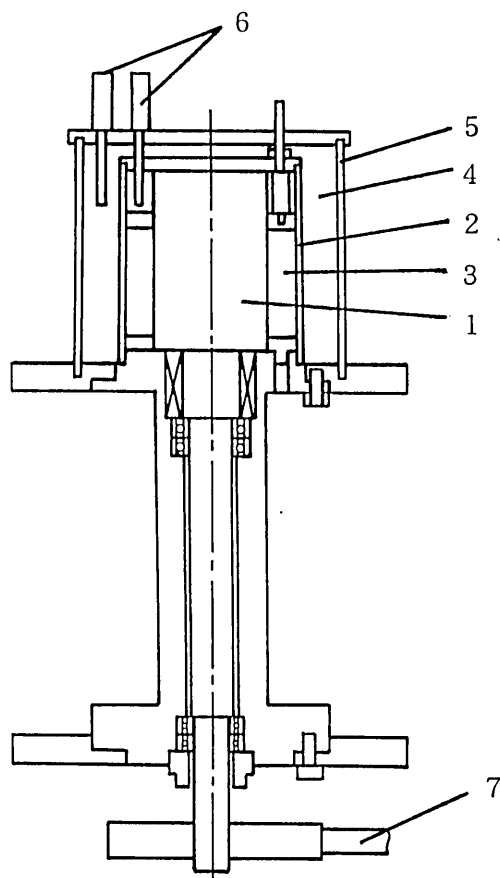
(6)渦の形成過程に関して固定端と自由端の場合に $Re$ が準静的に増加する時、固定面において初めに2次流れが発生し渦セルを形成する。その後、順次2次流れの渦セルに隣接するセルが形成されていく。

(7) $Re$ が急激に増加するとき、その形成過程は $Re$ と $St$ の値にかなり依存するので、個々に異なるが、固定端と自由端の場合で端面上で発生する2次流れによるセルの発生に続いて概ね固定端の場合は中央付近で、自由端の場合は上端面または中央付近でセルが発生し、そのセル間の相互作用によりその条件の誘引領域（アトラクタ）であるモードが形成される。

#### 7. 4 結言

本章においてはアスペクト比が小さいテイラー渦において、固定端の場合に $\Gamma = 4.0$ と自由端の場合に $\Gamma = 4.9$ の条件において、 $R_e$ と $S_t$ の変化に対する各モードの発生頻度を多数回の試行により実験的に調べた。その結果、 $R_e$ と $S_t$ の値によって主モードと2次モードの発生頻度が異なる。特に $R_e$ によって発生頻度が大きく変わり、同じ $R_e$ の値でも $S_t$ によって変わることがわかった。2次モードは $R_e$ によって発生するモードの種類が異なり、さらにその発生頻度が増える。また、同じ $R_e$ でも $S_t$ によってモードの発生頻度が増えることがわかった。 $R_e$ と $S_t$ の変化により発生するモードが異なる現象、すなわち、多重解を持つテイラー渦の分岐関係の複雑さを実験的に定めた確率から計算される情報エントロピーで表現することで定性的に明らかにできることを示した。また、各モードの形成過程はそれぞれ特徴があることがわかり、これをスケッチ図で説明した。モードの選択決定は $R_e$ と $S_t$ の値により半径方向の流れと上下端面上の2次流れの発生の時間差と運動量の大きさによるものであると思われる。

固定端と自由端において、どちらの場合も $R_e$ と $S_t$ の値によって発生するモードが決定され、主モードの発生頻度の $R_e$ と $S_t$ の影響は定性的に類似しているところがあった。また、その分岐の複雑さはどちらかという自由端の方が小さかった。



- 1. Rotating Inner Cylinder
- 2. Fixed Outer Cylinder
- 3. Working Fluid
- 4. Transparent Liquid
- 5. Outer Bath
- 6. Thermometer
- 7. Timing Belt

图 7 - 1 实验装置

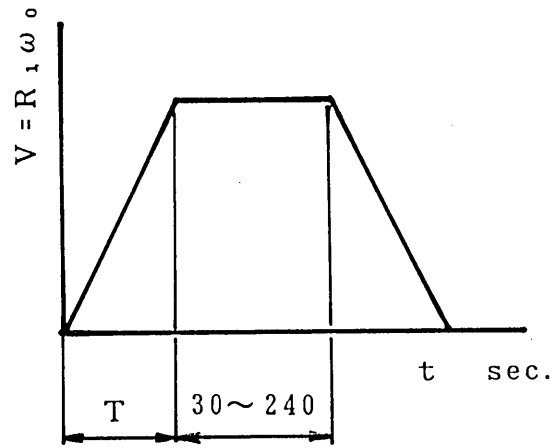
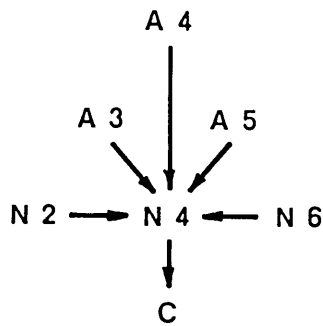
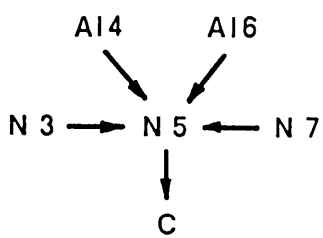


図 7 - 2 内円筒回転速度の履歴



- N 4 : Primary Normal 4 Cell Mode
- N 2 : Secondary Normal 2 Cell Mode
- N 6 : Secondary Normal 6 Cell Mode
- A 3 : Secondary Anomalous 3 Cell Mode
- A 5 : Secondary Anomalous 5 Cell Mode
- A 4 : Secondary Anomalous 4 Cell Mode
- C : Couette Flow

図 7 - 3 固定端の場合の流れの分岐 ( $\Gamma = 4.0$ )



- N 5 : Primary Normal 5 Cell Mode
- N 3 : Secondary Normal 3 Cell Mode
- N 7 : Secondary Normal 7 Cell Mode
- A 14 : Secondary Anomalous 4 Cell Mode  
(With Anomalous cell on the lower end plate)
- A 16 : Secondary Anomalous 6 Cell Mode  
(With Anomalous cell on the lower end plate)
- C : Couette Flow

図 7 - 4 自由端の場合の流れの分岐 ( $\Gamma = 4.9$ )

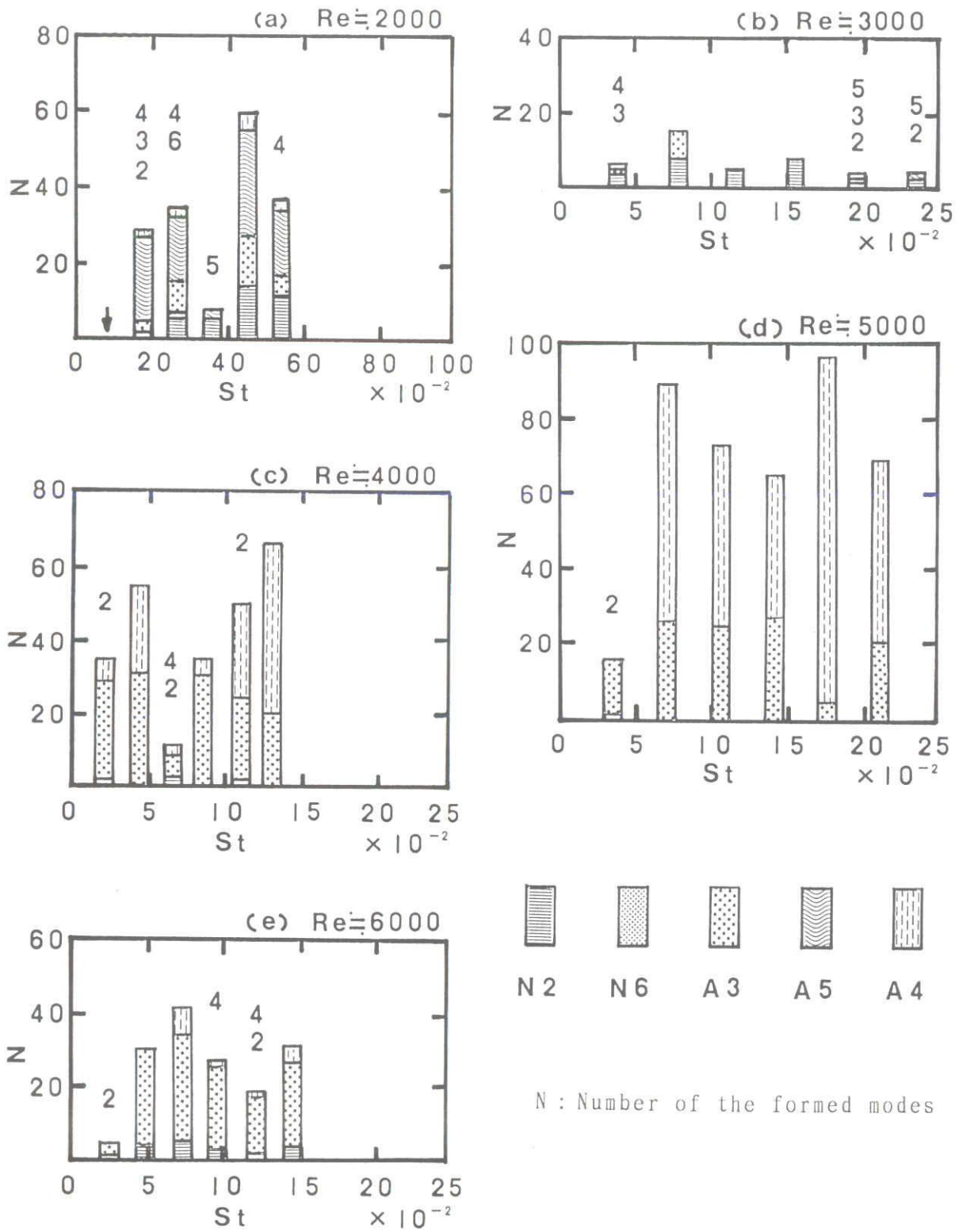


図 7 - 5 固定端の場合のモードの発生頻度 ( $\Gamma = 4.0$ )  
 図中の数字はセル数を示す。



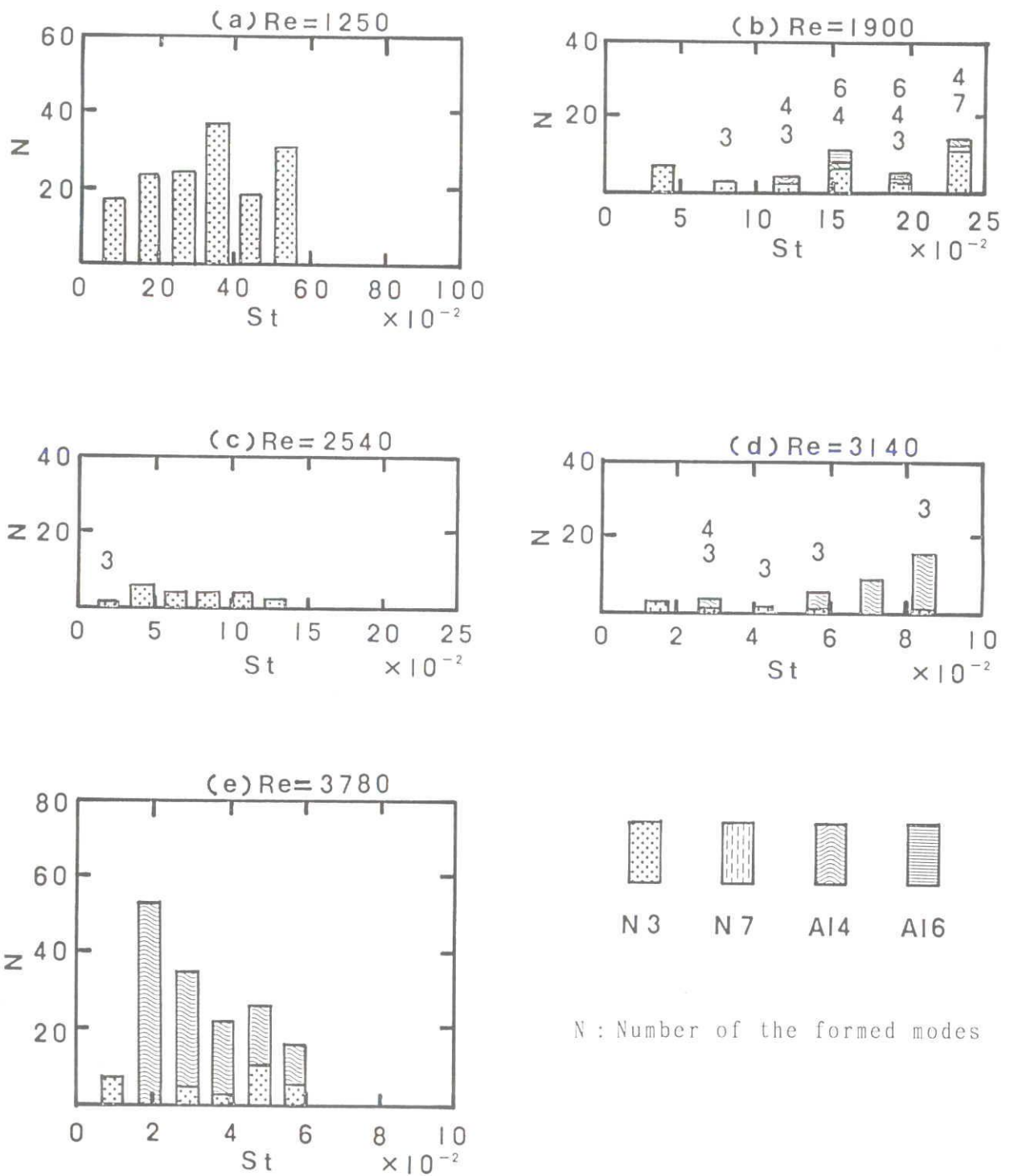


図 7 - 6 自由端の場合のモードの発生頻度 ( $\Gamma = 4.9$ )  
 図中の数字はセル数を示す。

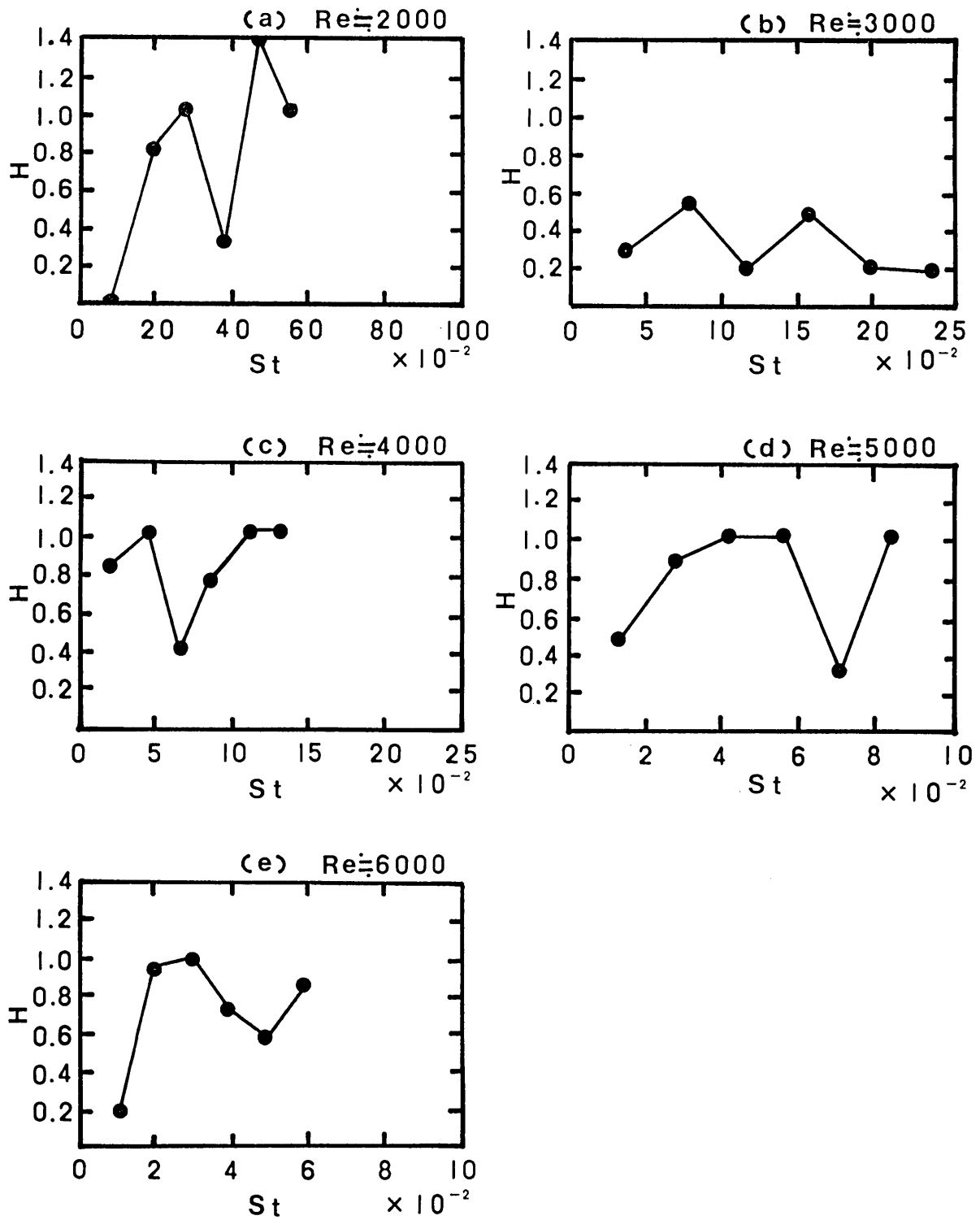


図 7-7 固定端の場合の情報エントロピー ( $\Gamma = 4.0$ )

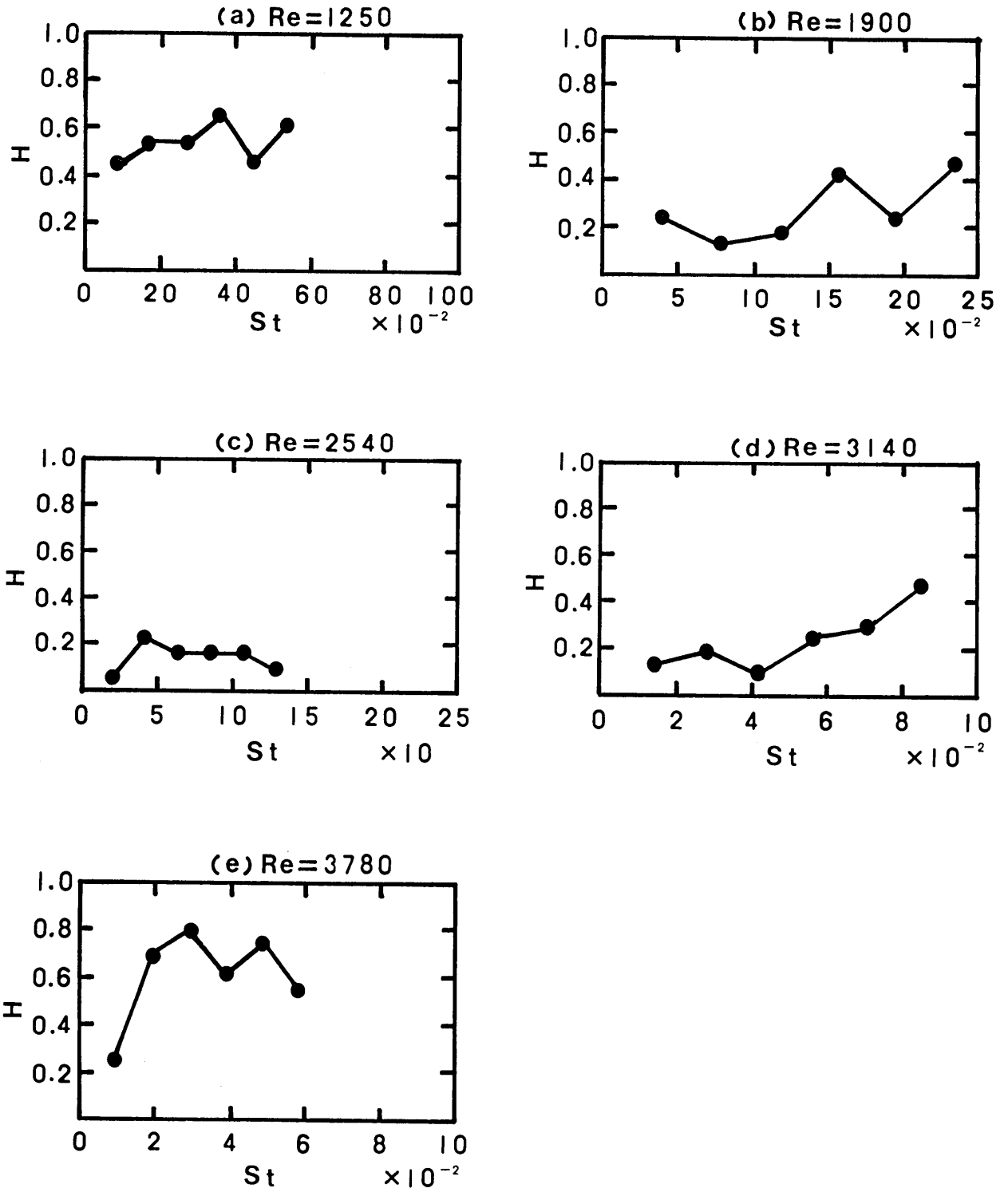


図 7 - 8 自由端の場合の情報エントロピー ( $\Gamma = 4.9$ )

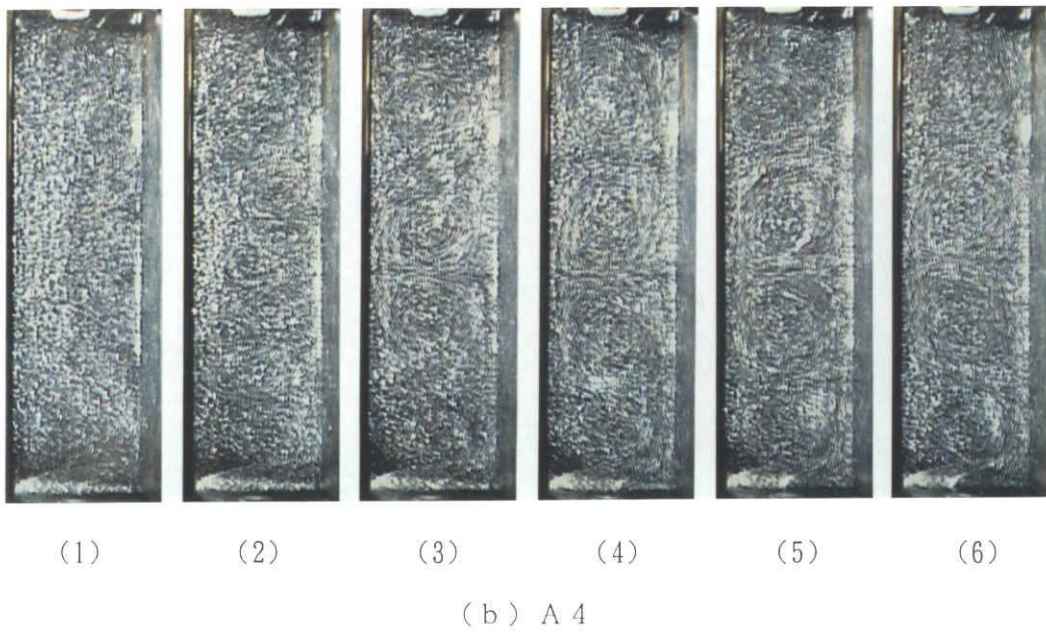
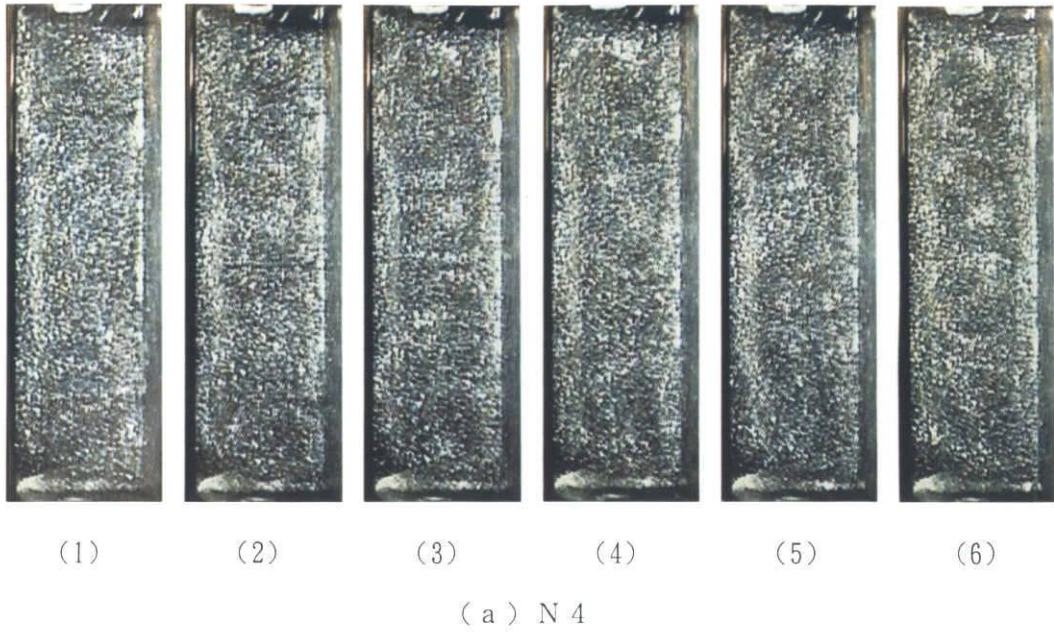
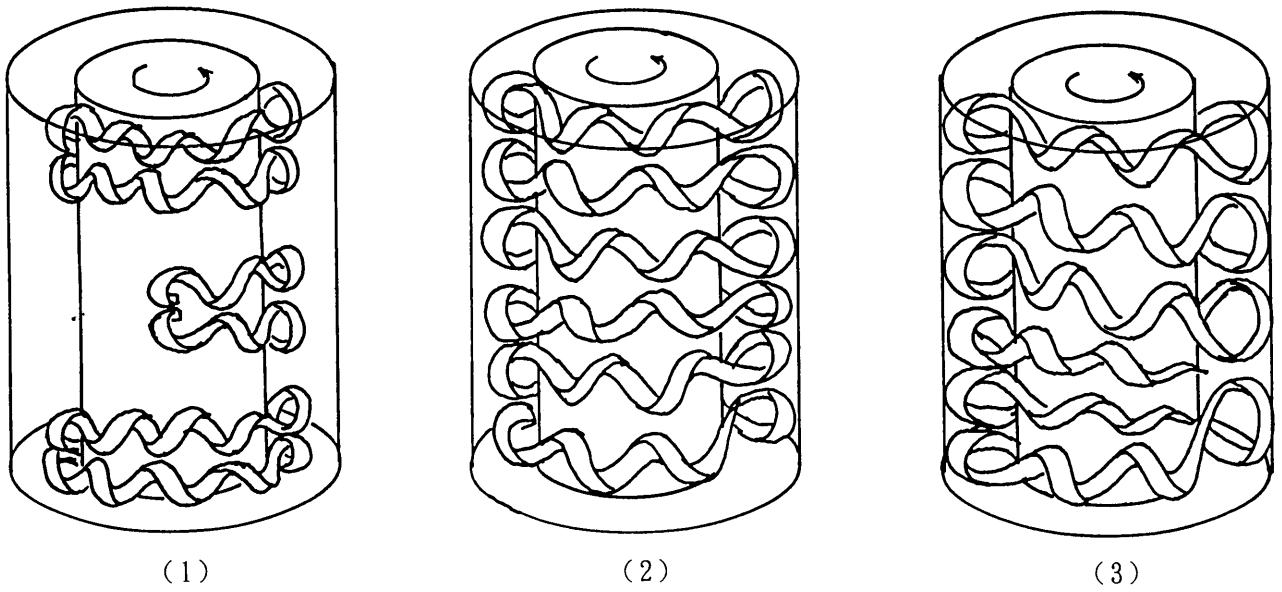
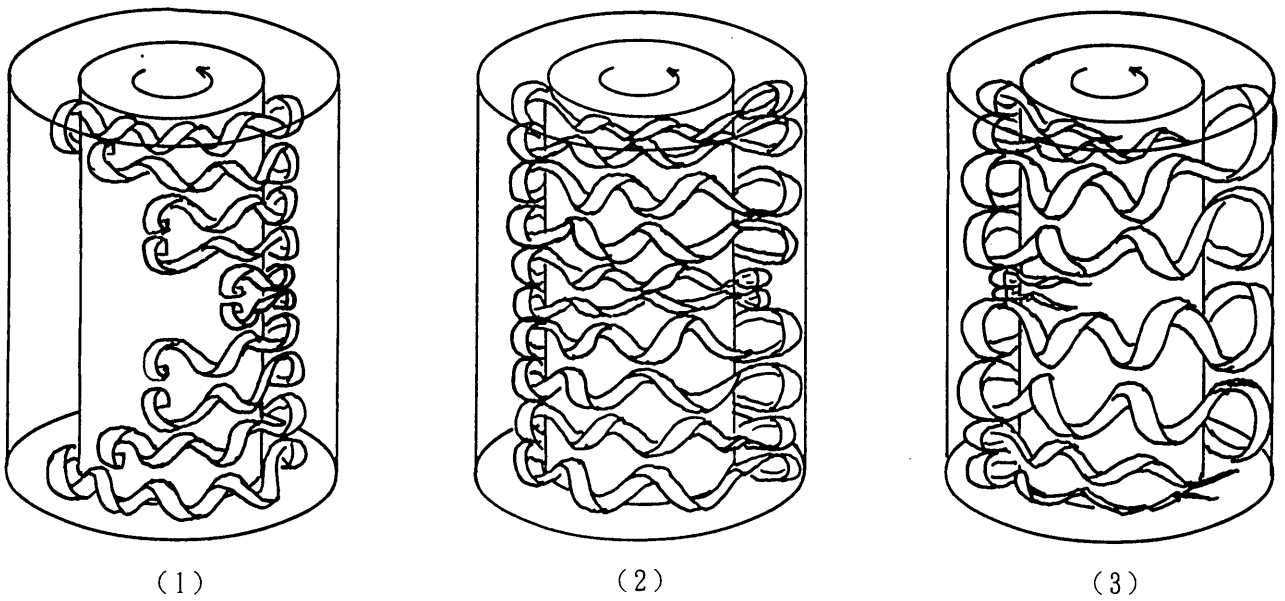


図 7 - 9 固定端におけるセルの形成過程（ビデオ出力画像）  
 画像右側は内円筒、左側は外円筒  
 画像は流れの状態の特徴が顕著なものを示す。

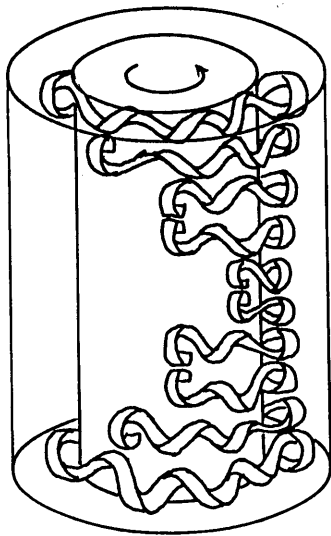


( a ) N 4 ( R e が徐々に増加したとき )

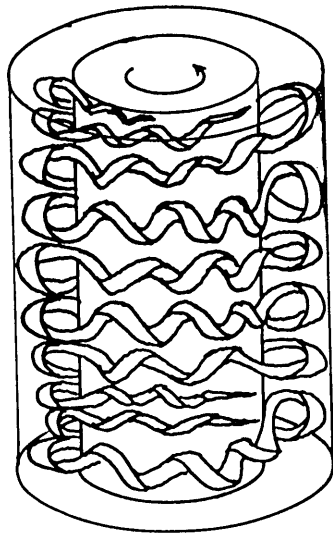


( b ) N 4 ( R e が急激に増加したとき )

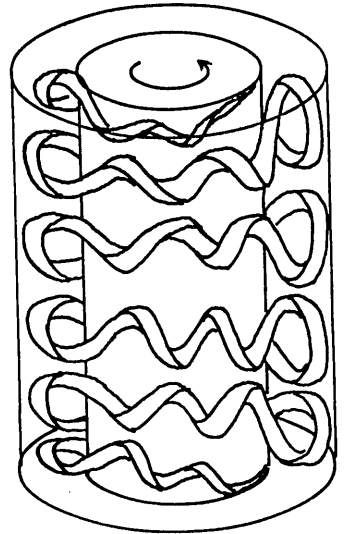
図 7 - 10 固定端の場合のモードの形成過程の模式図 ( その 1 )  
 ( 1 ) ~ ( 3 ) の順に時間が経過する



(1)

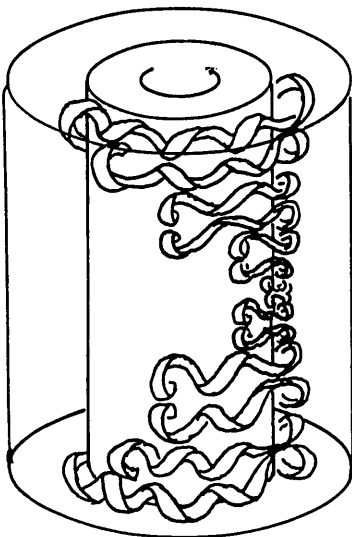


(2)

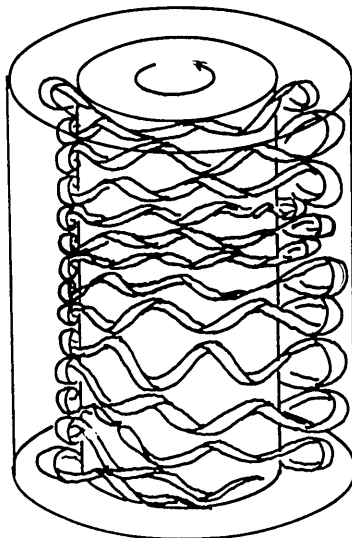


(3)

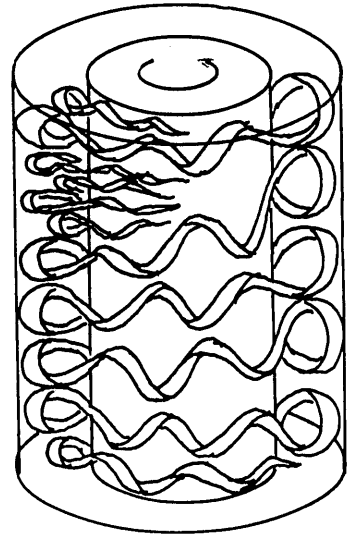
(c) A 4



(1)



(2)



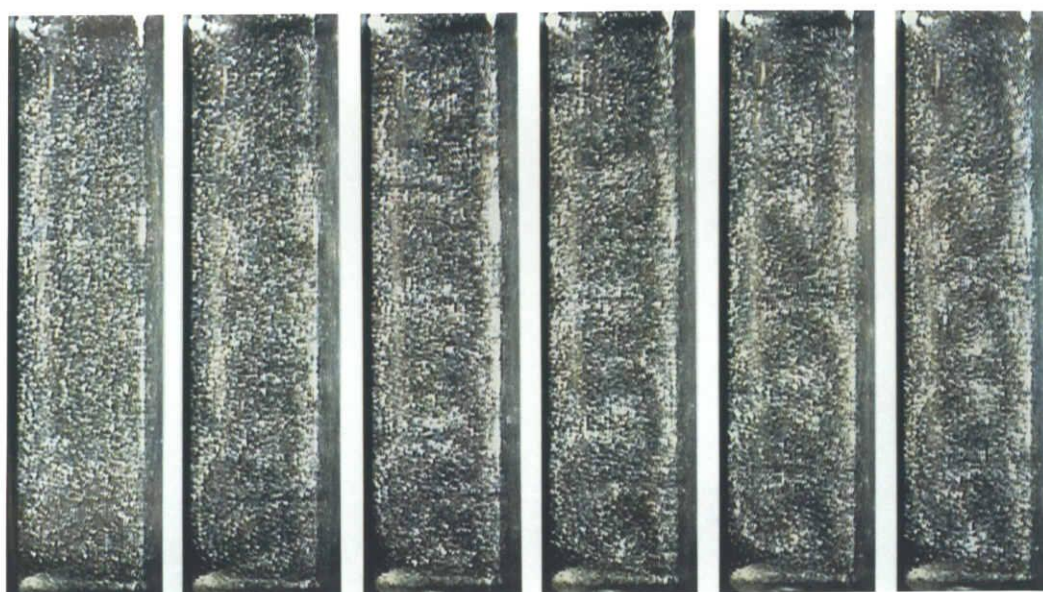
(3)

(d) A 1 5

図 7 - 10

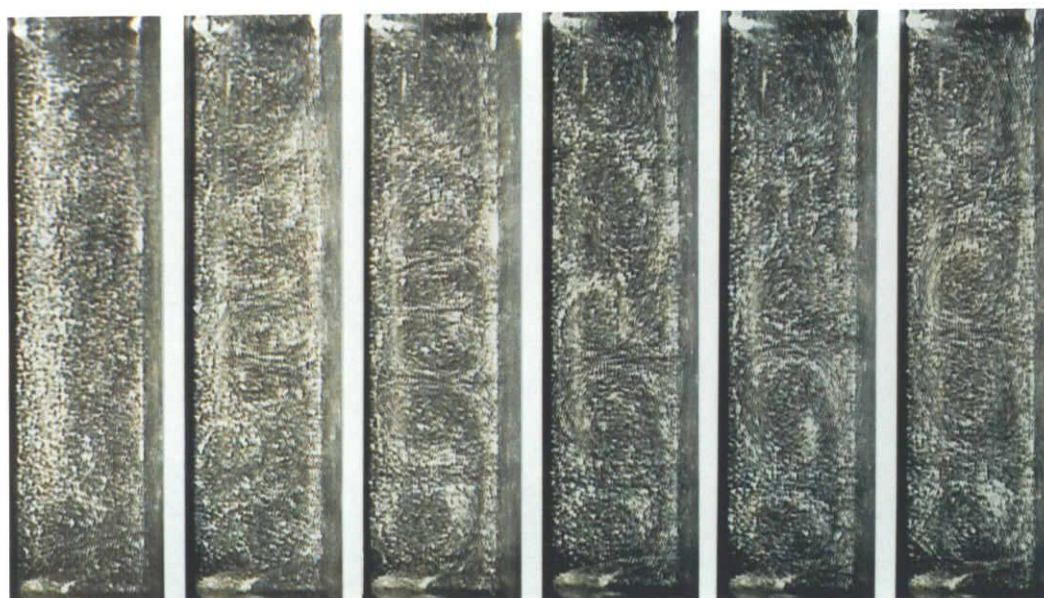
固定端の場合のモードの形成過程の模式図 (その 2)  
 (1)~(3)の順に時間が経過する





(1)                    (2)                    (3)                    (4)                    (5)                    (6)

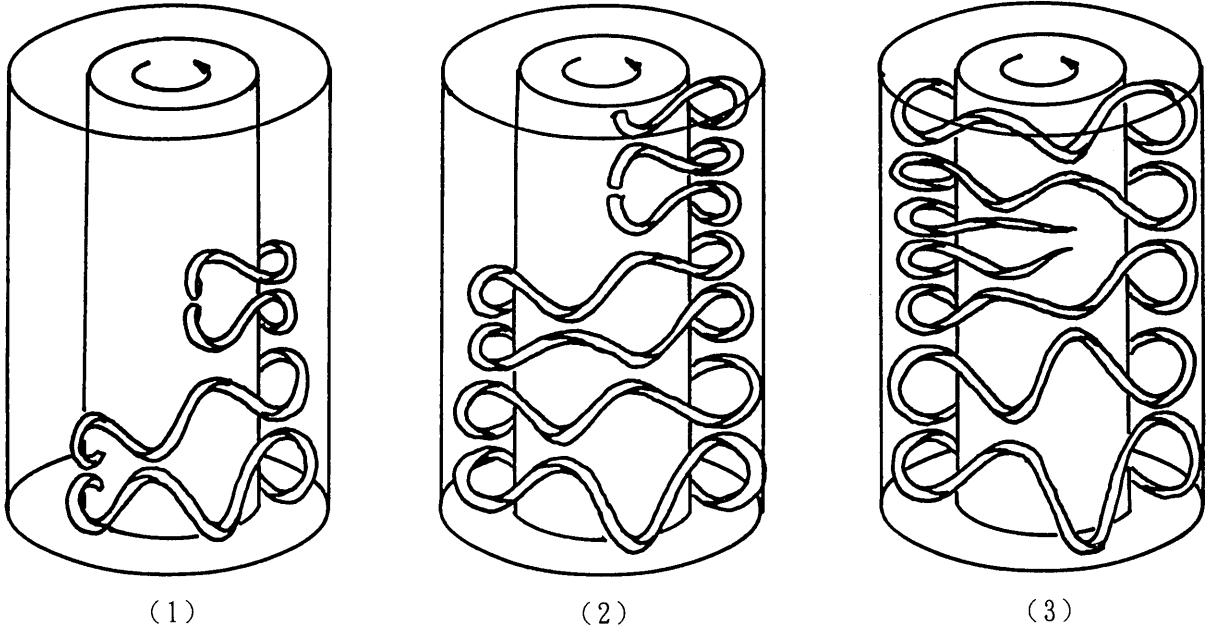
( a ) N 5



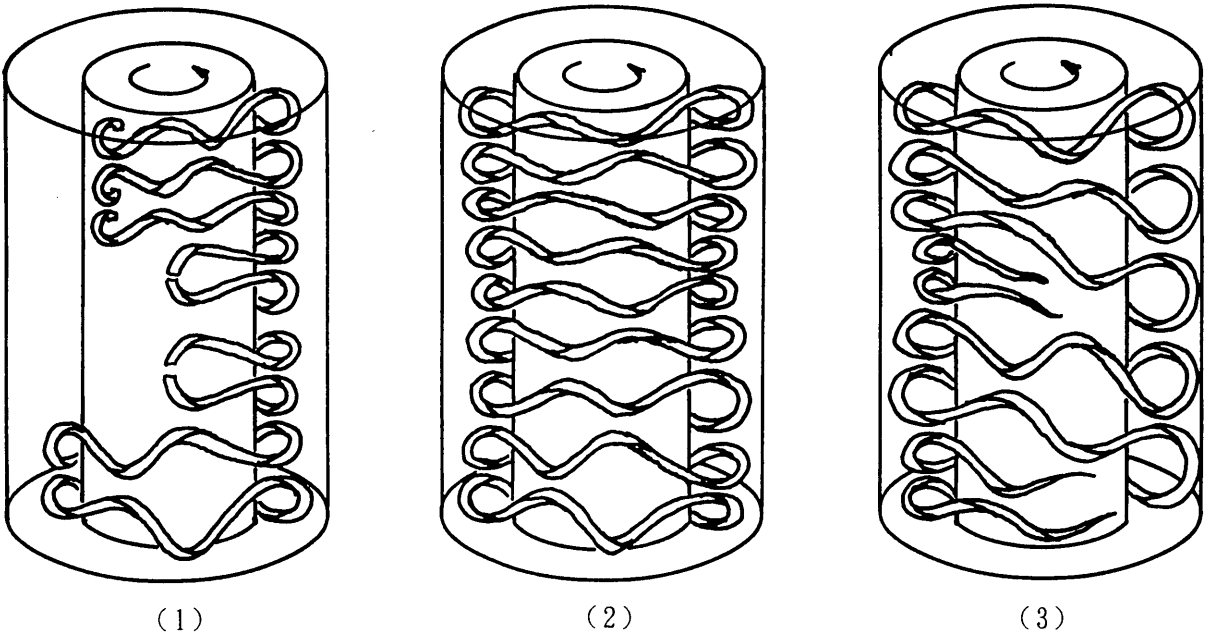
(1)                    (2)                    (3)                    (4)                    (5)                    (6)

( b ) A 1 4

図 7 - 11      自由端におけるセルの形成過程 (ビデオ出力画像)  
 画像右側は内円筒、左側は外円筒  
 画像は流れの状態の特徴が顕著なものを示す。



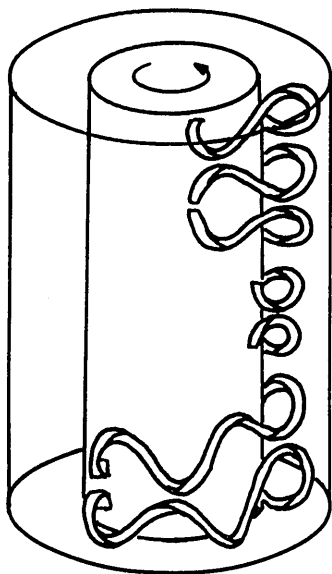
( a )  $N = 5$  (  $Re$  が徐々に増加したとき )



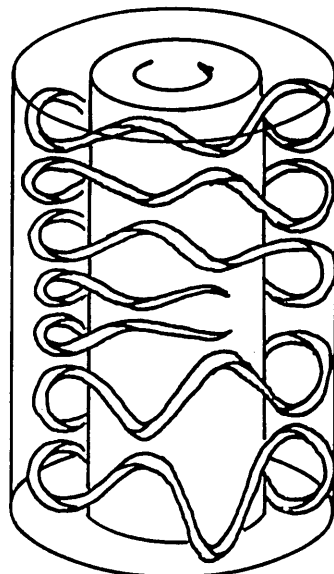
( b )  $N = 5$  (  $Re$  が急激に増加したとき )

図 7 - 12 自由端の場合のモードの形成過程の模式図 ( その 1 )  
 ( 1 ) ~ ( 3 ) の順に時間が経過する

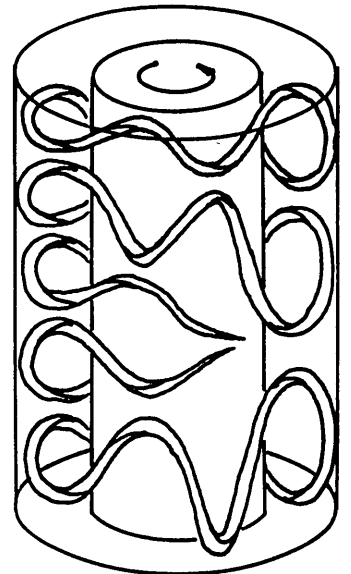




(1)

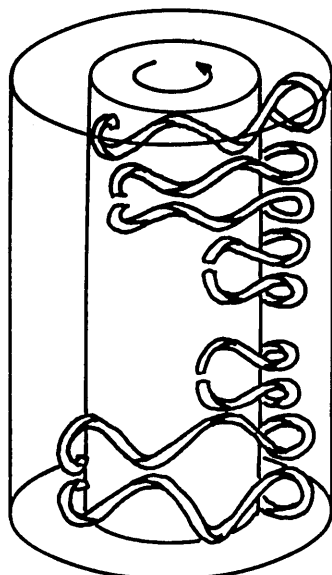


(2)

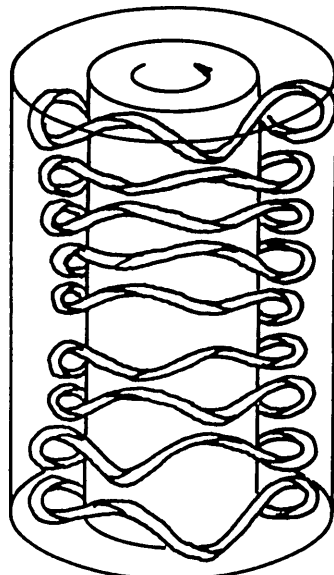


(3)

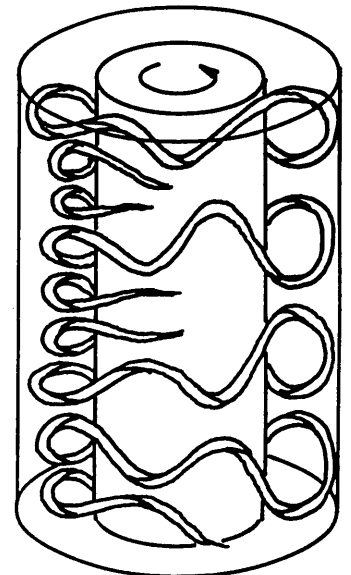
(c) N 3



(1)



(2)



(3)

(d) A 4

図 7 - 12 自由端の場合のモードの形成過程の模式図 (その 2)  
 (1) ~ (3) の順に時間が経過する

## 第 8 章 結論

テイラー渦流れに関する研究は歴史的に古く、実験、理論、数値計算の分野において非常に多くの報告がなされており、かつ現在でもかなりの注目を集めている領域であると言える。この古くて新しいテイラー渦流れの現在における研究において最も関心が払われているのは、この流れの解析が非線形力学系における諸問題を解決する糸口になる故であろうと思われる。特に最近の研究結果を見るとテイラー渦流れから乱流へと発展する過程が、最近盛んに注目されているカオス理論と関係し発展する兆しが見え始めている。実際に最近の多くの研究報告はそのことを物語っている。

一方、テイラー渦流れが乱流へ遷移するカオス化以前の定常安定なテイラー渦流れの状態においても、存在する流れの状態が非一意である、すなわち多重解を持つという研究結果が報告された。この研究報告は有限長円筒における特徴とされていたが、その後の理論から無限長円筒にも発展させることができることが報告された。

本研究は円筒の長さが短く、円筒の境界条件が自由表面である自由端と固定面である固定端の 2 つの場合において定常安定な多重解テイラー渦流れが持つ特徴を可視化実験から明らかにしたものである。特に、流れの形成過程と流れ場の構造を明らかにするとともにそれらの特徴から各々の条件に存在する流れの状態をモード別に分類し、各モードの安定性、各モード間の相互分岐関係を明確にした。以下において本研究で明らかになった諸点を章別に総括し結論とする。

第 1 章において、本研究の意義、およびテイラー渦流れに関連する従来の研究の概要を説明した。

第 2 章において、自由端と固定端の場合の流れの状態、渦の形成過程を調べ境界条件に強く依存することがわかった。特に自由端の場合、その境界条件の非対称性から奇数個のセル流れが一般的に発生し、限られた幾何学的条件では偶数個の流れも形成された。固定端の場合には偶数個のみのセル流れが観察された。奇数個の流れは幾何学的条件の変化では発生しない。また、レイノルズ数  $Re$  が徐々に増加したとき、テイラー渦の形成過程には 3 つの形があることがわかった。これらはいずれもアスペクト比  $\Gamma$  に依存する。固定端の場合には  $\Gamma$  に関係なく形成過程は 1 つであった。 $Re$  に対するセルの高さの変化は自由端の場合、最下層のセルの高さは増加し、最も高くなり、中間層はどの層もほとんど同じ高さで最も低く、最下層のセル高さと同程度に次第に減少していく。固定端の場合、最

上層と最下層のセルの高さの変化は同様でほぼ一定となる。また、中間層はどのセルもほぼ同じ高さであり、最上層、最下層より低く、ほぼ一定である。

第3章は自由端と固定端においてテイラー渦流れから波動テイラー渦流れへ遷移する  $Re$  を調べることによってテイラー渦流れの不安定性を明らかにし、自由端において奇数個のセルの間、奇数個と偶数個のセルの間の分岐現象を明らかにした。その結果、波動テイラー渦流れへ遷移する  $Re$  はセルの数と同じ値の  $\Gamma$  の付近が最も大きくよって安定である。セル数が増加するとその安定性は全体に低下する。さらに自由端における偶数個のセルは限られた  $\Gamma$  と  $Re$  の範囲にしか存在せず、偶数個のセルのまま波動テイラー渦流れや乱流へ分岐しない。自由端における奇数個セルの間、奇数個と偶数個のセルの間の分岐する  $Re$  を求め、それらの相互関係を明らかにした。また、自由端において  $\Gamma$  に対するセル間の分岐関係を求め、主モードの選択性を明らかにした。さらに主モードの定義について新たな提案を行った。

第4章は固定端の場合における流れのモードの分類を示し、その不安定性に関して実験を行った。2次モードの中の正規モードから主モードへ分岐する  $Re$  の変化を  $\Gamma$  に対して求め、2次モードの安定限界を明らかにした。また、変異モードから他の流れの状態へ分岐する  $Re$  を  $\Gamma$  に対して求め、変異モードの安定限界を明らかにした。 $\Gamma$  の値によって同じセル数と構造を持つ2次モードが異なる流れの状態へ分岐することを明らかにし、その  $\Gamma$  の範囲を求めた。さらに、複雑な流れの相互関係を流れの分岐図を使用して示し、2次モードである偶数個セルの変異モード、奇数個セルの変異モードと正規モードおよび主モードとの関係を明らかにした。また、各モードの不安定性は定性的に偶数個のセルの変異モードが最も不安定で、順に奇数個セルの変異モード、2次正規モードであり、主モードが最も安定していることが明らかになった。

第5章は自由端の場合における流れのモードの分類を示し、その不安定性に関して実験を行った。その結果、変異セルが最下層にある場合において変異モードが他の流れの状態へ分岐する  $Re$  を求め、 $\Gamma$  の変化に対する不安定曲線が明らかになった。 $\Gamma$  の値によって2次モードが他の流れの状態へ分岐することを明らかにし、その範囲を求め、流れの相互関係を流れの分岐図を使って示した。また、自由端と固定端における複雑な流れの状態をその形成過程及び流れの構造から整理し比較した。すなわち、自由端の主モードは正規モードと変異モードを持ち、固定端の主モードは正規モードのみである。自由端の変異モードで最上層と最下層の両方に変異セルが存在するものはかなり乱れた波動テイラー渦流

れとしてのみ存在する。自由端と固定端の場合における流れの分岐関係を比較し、主モードを除く全てのモードは最終的に主モードへ分岐するという基本的な特徴は共通しており、アトラクタとしての主モードの交代が行われる前の $\Gamma$ のある範囲では2次モードは次第に主モードとなるモードへ一旦分岐し始め、次のアトラクタへ引かれていくことが明らかになった。

第6章はアスペクト比が小さいテイラー渦流れにおける変異モードに存在する変異セルに付随するエクストラ渦とエクストラ渦が発展して形成されるツイン渦について観察した結果をまとめたものである。自由端と固定端の場合、エクストラ渦は変異セルとともに付随して2つ存在する。その場所は各々外円管と端面の角と内円筒と端面の角である。しかし、このエクストラ渦は従来から注目されているセルとは性質が異なり、セル流れのように独立したものとは考えず、あくまでも変異セルに付随したものであると見なされる。特に固定端における変異1セルモードに関して、 $\Gamma$ の特定の値において、外側エクストラ渦が従来から存在するセルと同じ程度の大きさに発展し、半径方向に横に並んだ2つの渦を形成しツイン渦となる。これは従来から報告されていない形の渦構造である。固定端における変異3セルモードと自由端における変異2セルモードにおいてエクストラ渦は変異セルに付随して存在する。しかし、どちらのモードも外側エクストラ渦が発展してツイン渦となることはない。変異セルの流れは内外円管と端面の角に存在する2つのエクストラ渦と主たるセル流れで構成され、端面上における流れは必ず逆向きの流れ方向の領域を持つことになる。よって変異セルの流れの上に通常の流れ方向があると主張する Bolstad と Kellerらと異なることになる。

第7章はアスペクト比が小さいテイラー渦において、固定端の場合に $\Gamma = 4.0$ と自由端の場合に $\Gamma = 4.9$ の条件において、 $Re$ とストロハル数 $St$ の変化に対する各モードの発生頻度を多数回の試行により実験的に調べた。その結果、 $Re$ と $St$ の値によって主モードと2次モードの発生頻度が異なることがわかった。特に $Re$ によって発生頻度が大きく変わり、同じ $Re$ の値でも $St$ によって変わった。2次モードは $Re$ によって発生するモードの種類が異なり、さらにその発生頻度が変化した。また、同じ $Re$ でも $St$ によってモードの発生頻度が変化することがわかった。 $Re$ と $St$ の変化により発生するモードが異なる現象、すなわち、多重解を持つテイラー渦の分岐関係の複雑さを実験的に定めた確率から計算される情報エントロピーで表現することで定性的に明らかにできることを示した。また、各モードの形成過程はそれぞれ特徴があることがわかり、これをスケッチ図

で説明した。モードの選択決定は $R_e$ と $S_t$ の値により半径方向の流れと上下端面上の2次流れの発生の時間差と運動量の大きさによるものであると思われる。

固定端と自由端において、どちらの場合も $R_e$ と $S_t$ の値によって発生するモードが決定され、主モードの発生頻度の $R_e$ と $S_t$ の影響は定性的に類似しているところがあった。また、その分岐の複雑さはどちらかという自由端の方が小さかった。

## 謝辞

本研究は名古屋大学中村育雄教授の御指導のもとに、長野工業高等専門学校機械工学科流体力学実験室において行ったものであります。本論文を結ぶにあたり、長年にわたって終始懇切丁寧な御指導と御鞭撻を賜りました中村育雄教授に謹んで感謝の意を表します。

本論文をまとめるに際し、名古屋大学藤田秀臣教授ならびに菊山功嗣教授からは、有益な御教示と注意深いご検討を賜りました。ここに深く感謝申し上げます。

本論文は中村育雄教授、岐阜大学山下新太郎教授（当時名古屋大学）、長野工業高等専門学校植木良昇教授との共同研究として、日本機械学会論文集等に公表した研究論文を中心にまとめたものであり、御助言をいただきました山下新太郎教授、植木良昇教授に深く感謝いたします。

実験装置の製作について御協力いただいた神田博邦氏（当時名古屋大学技官）、名古屋大学村上初男技官に厚く御礼申し上げます。

最後に、実験に御協力いただいた長野工業高等専門学校流体力学実験室の卒業生の方々に深く御礼申し上げますとともに、本論文をまとめるにあたって多くの御支援、御協力をいただいた方々に厚く御礼申し上げます。

## 文 献

文献番号は（章番号－章内番号）を示す。例えば（6- 1）は6章の1番の文献

### 第1章の文献

- (1- 1) Taylor, G.I., "Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders", Phil.Trans.Roy.Soc.Lond, A 223, (1923), 289-343.
- (1- 2) Terada, T. and Hattori, K., "Some Experiments on Motions of Fluids Part IV", Rep.Aeronaut.Reser.Inst.Tokyo Imp.Univ., No.26, (1927), 287-326, with 13 Plates.
- (1- 3) Mullin, T., Private Communication.
- (1- 4) 宇田道隆 編、"科学者 寺田寅彦"、日本放送協会、(1975)、P160.
- (1- 5) Landau, L.D. and E.M.Lifshitz, Fluid Mechanics, 2nd edition, Course in Theoretical Phsics, Vol.6,(Pergamon Press),(1987).
- (1- 6) Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability(Clarendon Press, Oxford), (1961).
- (1- 7) Koschmieder, E.L., Benard Cells and Taylor Vortices, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, (1993).
- (1- 8) Andereck, C.D.and Hayot, F., Ordered and Turbulent Patterns in Taylor-Couette Flow, Physics Vol.297, NATO ASI Series, (1992).
- (1- 9) Cagnet, G., "The ways to turbulence in Couette flow between coaxial cylinders", J.Mec.Theor.Appl., Spec.Suppl., (1984), 7-44.
- (1-10) DiPrima, R.C., "Transition in flow between rotating concentric cylinders", Transition and Turbulence, edited by R.E.Meyer(Academic Press,New York), (1981), 1-24.
- (1-11) DiPrima, R.C. and H.L.Swinney, "Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders", in Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence ,2nd ed., edited by H.L.Swinney and J.P.Gollub, Topics in Applied Physics, vol.45(Springer-Verlag, Berlin),

- (1985), 139-180.
- (1-12) Chandrasekhar, S., "The stability of viscous flow between rotating cylinders", *Mathematica* 1, (1954), 5-13.
- (1-13) Chandrasekhar, S., "The stability of viscous flow between rotating cylinders", *Proc.R.Soc.Lond., A* 246, (1958), 301-311.
- (1-14) Lewis, J.W., "An experimental study of the motion of a viscous liquid contained between coaxial cylinders", *Proc.R.Soc.Lond., A* 117, (1928), 388-407.
- (1-15) Dominguez-Lerma, M.A., G. Ahlers and D.S.Cannell, "Effects of 'Kalliroscope' flow visualization particles on rotating Couette-Taylor flow", *Phys.Fluids* 28(4), (1985), 1204-1206.
- (1-16) Kirchner, R.P. and C.F.Chen, "Stability of time-dependent rotational Couette flow. Part 1.Experimental investigation", *J.fluid Mech.*, vol.40. part1, (1970), 39-47.
- (1-17) Donnelly, R.J., "Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders IV.The ion technique", *Proc.Roy.Soc.A*, 283(1965), 509-519.
- (1-18) Donnelly, R.J., "Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders V.The theory of the ion technique", *Proc.Roy.Soc. A* 283, (1965), 520-530.
- (1-19) Gu, Z.H. and T.Z.Fahidy, "Mass transport in the Taylor-Vortex regime of rotating flow", *Chemical engineering Science* vol.40, No.7(1985), 1145-1153.
- (1-20) Donnelly, R.J., "Taylor-Couette flow:the early days", *Physics Today* 44, (1991), 32-39.
- (1-21) Stuart, J.T., "On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability", *J.Fluid Mech.*, 4, (1958), 1-21.
- (1-22) Kogelman, S. and R.C.DiPrima, "Stability of spatially periodic supercritical flows in hydrodynamics", *Phys.Fluids* 13, (1970), 1-11.
- (1-23) Burkhalter, J.E. and E.L.Koschmieder, "Steady supercritical Taylor



- vortex flow", J.Fluid Mech.58, (1973), 547-560.
- (1-24) Coles, D., "Transition in circular Couette flow", J.Fluid Mech., 21, (1965), 385-425.
- (1-25) Donnelly, R.J. and K.W.Schwarz, "Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders, VI.Finite-amplitude experiments", Proc.Roy.Soc.A 283, (1965), 531-556.
- (1-26) King, G.P and H.L.Swinney, "Limits of stability and irregular flow patterns in wavy vortex flow", Physical Review A, vol.27, No.2, (1983), 1240-1243.
- (1-27) Cognet, G., "Utilisation de la polarographie pour l'etude de l'ecoulement de Couette", J. Mecanique 10, (1971), 65-90.
- (1-28) Fenstermacher, P.R., H.L.Swinney and J.P.Gollub, "Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow", J.Fluid Mech., 94, (1979), 103-128.
- (1-29) King, G.P., Y.Li, W.Lee, H.L.Swinney and P.S.Marcus, "Wave speeds in wavy Taylor-vortex flow", J.Fluid Mech., (1984), vol.141, 365-390.
- (1-30) Donnelly, R.J., K.Park, R.Shaw and R.W.Walden, "Early nonperiodic transitions in Couette flow", Phys Rev.Lett.44, (1980), 987-989.
- (1-31) Swinney, H.L., "Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence", Prog.Theor.Phys.Suppl., 64, (1978), 164-175.
- (1-32) Krugljak, Z.B., E.A.Kuznetsov, V.S.Lvov, Yu.E.Nesterikhin, A.A.Predtechensky, V.S.Sobolev, E.N.Utkin and F.A.Zhuravel, "Spectrum evolution at the transition to turbulence in a Couette flow", Phys.Lett. A 78 A, (1980), 269-272.
- (1-33) Zhang, L. and H.L.Swinney, "Nonpropagating oscillatory modes in Couette-Taylor flow", Physiscal Review A, vol.31, No.2, (1985), 1006-1009.
- (1-34) Gorman, M. and H.L.Swinney, "Spatial and temporal characteristics of modulated waves in the circular Couette system", J.Fluid Mech.(1982), 117, 123-142.
- (1-35) Ohji, M. and K.Amagai, "Structure of modulated wavy vortical flows in

- the circular Couette system", Fluid Dynamics Research 3, (1988), 305-314.
- (1-36) Buzug, T., J. von Stamm and G. Pfister, "Fractal dimensions of strange attractors obtained from the Taylor-Couette experiment", Physica A 191 (1992), 559-563.
- (1-37) 西山賢一、清水博、"ブラウン運動と細胞運動", 数理科学, (1980).
- (1-38) 馬被健次郎、"神経パルスの伝播", 数理科学, (1982).
- (1-39) 茨木俊秀、"議員定数の最適配分法", 数理科学, (1980).
- (1-40) Thompson, J. M. T., H. B. Stewart, 武者利光, 橋口住久 訳, "非線形力学とカオス", オーム社, (1988).
- (1-41) Yahata, H., "Temporal development of the Taylor vortices in a rotating fluid. III", Progress of Theoretical Physics, vol. 64, No. 3, (1980), 782-793.
- (1-42) Yahata, H., "Temporal development of the Taylor vortices in a rotating fluid. V", Progress of Theoretical Physics, vol. 69, No. 2, (1983), 396-402.
- (1-43) 八幡英雄、"カオスと乱流", 数理科学, (1980).
- (1-44) Cole, J. A., "Taylor-vortex instability and annulus-length effects", J. Fluid Mech., (1976), vol. 75, part 1, 1-15.
- (1-45) Snyder, H. A., "Wave-number selection at finite amplitude in rotating Couette flow", J. Fluid Mech. (1969), vol. 35, part 2, 237-298.
- (1-46) Burkhalter, J. E. and E. L. Koschmieder, "Steady supercritical Taylor vortices after sudden starts", Physics of Fluids, vol. 17, No. 11, (1974), 1929-1935.
- (1-47) 中村育雄、"乱流現象", 朝倉書店, (1992).
- (1-48) Alziary de Roquefort, T. and G. Grillaud, "Computation of Taylor vortex by transient implicit method", Comput. Fluid 6, (1978), 259-269.
- (1-49) Pfister, G. and I. Rehberg, "Space-dependent order parameter in circular Couette flow transitions", Phys. Lett. A 83A, (1981), 19-22.
- (1-50) Heinrichs, R., D. S. Cannell and G. Ahlers, "Effects of finite geometry on

- the wavenumber of Taylor vortex flow", Phys. Rev. Lett. 56, (1986), 1794-1797.
- (1-51) Benjamin, T.B., "Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid I. Theory", Proc. R. Soc. Lond. A. 359, (1978), 1-26.
- (1-52) Benjamin, T.B., "Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid II. Experiments", Proc. R. Soc. Lond. A. 359, (1978), 27-43.
- (1-53) Benjamin, T.B., "Applications of Leray-Schauder degree theory to problem of hydrodynamic stability", Math. Proc. Camb. Phil. Soc., (1976), 79, 373-392.
- (1-54) Romero, L.A., "Tutorial on elementary bifurcation theory", ASME, HTD 94, (1987) Heat Transfer Division.
- (1-55) Joseph, D.D., "Hydrodynamic stability and bifurcation", Stability of Fluid Motions I, edited by D.D. Joseph, Springer-Verlag, (1976).
- (1-56) フェノーム, H, "生態系の数理現象学"、数学セミナー、日本評論社。
- (1-57) 山口昌哉 編、"非線型の現象と解析"、数学セミナー増刊、日本評論社、(1979)。
- (1-58) 山口昌哉 編、"数値解析と非線型現象"、数学セミナー増刊、日本評論社、(1981)。
- (1-59) Thompson, J.M.T., 吉澤修治、柳田英二 訳、"不安定性とカタストロフ"、産業図書、(1986)。
- (1-60) Bielek, C.A. and E.L. Koschmieder, "Taylor vortices in short fluid columns with large radius ratio", Phys. Fluids A 2, (1990), 1557-1563.
- (1-61) Mullin, T. and T.B. Benjamin, "Transition to oscillatory motion in the Taylor experiment", Nature vol. 288, (1980), 567-569.
- (1-62) Benjamin, T.B. and T. Mullin, "Anomalous modes in the Taylor experiment", Proc. Soc. Lond. A 377, (1981), 221-249.
- (1-63) Mullin, T., "Mutations of steady cellular flows in the Taylor experiment", J. Fluid Mech., (1982), vol. 121, 207-218.
- (1-64) Mullin, T., "Cell number selection in Taylor-Couette flow", Lecture notes in physics, Springer-Verlag, (1984), 75-83.

- (1-65) Benjamin, T.B. and T.Mullin, "Notes on the multiplicity of flows in the Taylor experiment", J.Fluid Mech., vol.121, (1982), 219-230.
- (1-66) Mullin, T. and A.Lorenzen, "Bifurcation phenomena in flows between a rotating circular cylinder and a stationary square outer cylinder", J.Fluid Mech., (1985), vol.157, (1985), 289-303.
- (1-67) Cliffe, K.A. and T.Mullin, "A numerical and experimental study of anomolous modes in the Taylor experiment", J.Fluid Mech., (1985), 153, 243-258.
- (1-68) Pfister, G., H.Schmidt, K.A.Cliffe and T.Mullin, "Bifurcation phynomena in Taylor-Couette flow in a very short annulus", J.Fluid Mech., (1988), 191, 1-18.
- (1-69) Schaffer, D.G., "Qualitative analysis of a model for boundary effects in the Taylor problem", Math.Proc.Camb.Phil.Soc., 87, (1980), 307-337.
- (1-70) Hall, P., "Centrifugal instabilities in finite containers: a periodic model", J.Fluid Mech., vol.99, part.3, (1980), 575-596.
- (1-71) Hall, P., "Centrifugal instabilities of circumferential flows in finite cylinders:the wide gap problem", Proc.R.Soc.Lond.A 384, (1982), 359-379.
- (1-72) Hill, N.A., "Numerical studies of "side-by-side" and other modes for the Taylor problem in a finite annulus", Computers and Fluids 16, (1988), 445-458.
- (1-73) Watoson, L.T. and R.T.Haftka, "Modern homotopy methods in optimization", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 74, (1989), 289-305.
- (1-74) Cliffe, K.A., "Numerical calculations of two-cell and single-cell Taylor flows", J.Fluid Mech., vol.135, (1983), 219-233.
- (1-75) Streett, C.L. and M.Y.Hussaini, "Finite length Taylor Couette flow", in Stability of time dependent and spatially varying flows, edited by D.L.Dwoyerand and M.Y.Hussaini, Springer-Verlag, (1987), 312-334.
- (1-76) Lucke, M., M.Mihelic, B.Kowalski and K.Wingerath, "Structure formation by propagating fronts", in The Physics of Structure Formation:Theory

- and Simulation, edited by W.Guttinger and G.Dangelmary, Springer-Verlag, (1987), 97-116.
- (1-77) Dinar, N. and H.B.Keller, "Computations of Taylor Vortex Flows using multigrid continuation methods", Lecture Notes in Engineering, edited by C.A.Brebbia and S.A.Orszag, Springer-Verlag, (1989), 191-262.
- (1-78) Cliffe, K.A., "Numerical calculations of the primary-flow exchange process in the Taylor problem", J.Fluid Mech., vol.197, (1988), 57-79.
- (1-79) Streett, C.L. and M.Y.Hussaini, "A numerical simulation of finite-length Taylor-Couette flow", Computational Fluid Dynamics, edited by G.de Vahl Davis and C.Fletcher, elservier Science Publishers B.V.(North-Holland), (1988), 663-675.
- (1-80) Anson, D.K. and K.A.Cliffe, "A numerical investigation of the Schaeffer homotopy in the problem of Taylor-Couette flows", Proc.R.Soc.Lond.A 426, (1989), 331-342.
- (1-81) Anson, D.K., T.Mullin and K.A.Cliffe, "A numerical and experimental investigation of a new solution in the Taylor vortex problem", J.Fluid Mech., vol.207, (1989), 475-487.
- (1-82) Cliffe, K.A., J.J.Kobin and T.Mullin, "The role of anomalous modes in Taylor-Couette flow", Proc.R.Soc.Lond.A(1992)439, 341-357.
- (1-83) Cliffe, K.A. and A.Spence, "Numerical calculations of bifurcations in the finite Taylor problem", Numerical methods for fluid dynamics II, (1986), 177-197.
- (1-84) Bolstad, J.H. and H.B.Keller, "Computation of Anomalous Modes in the Taylor Experiment", Journal of Computational Physics 69, (1987), 230-251.
- (1-85) Lucke, M., M.Mihelcic, K.Wingerath and G.Pfister, "Flow in a small annulus between concentric cylinders", J.Fluid Mech.140, (1984), 343-353.
- (1-86) Gorman, M. and H.L.Swinney, "Visual observation of the second characteristic mode in a quasiperiodic flow", Physical Review Letters,

- 43, (1979), 1871-1875.
- (1-87) Tam, W.Y. and H.L.Swinney, "Mass transport inturbulent Couette-Taylor flow", Physical Review A, vol.36, No.3, (1987), 1374-1381.
- (1-88) Koschmieder, E.L., "Turbulent Taylor vortex flow", J.Fluid Mech., 93, (1979), 515-527.
- (1-89) Takeda, Y., K.Kobashi and W.E.Fischer, "Obsevation of the transient behavior of Taylor vortex flow between rotating concentric cylinders after sudden start", Experiments in Fluids 9, (1990), 317-319.
- (1-90) Lee, S. and Y.Park, "A study on the instability of Taylor vortices between concentric cylinders", 大韓機械学会論文集、第15巻、第4号(1991)、1324-1332.
- (1-91) 東 尚史、小河原加久治、飯田誠一、"テイラー渦流れの変異モード発生機構に関する数値的研究"、機論, B, 58巻, 555号, (1992), 3245-3250.
- (1-92) Snyder, H.A., "Waveforms in rotating Couette flow", Int.J.Non-Linear Mech. 5, (1970), 659-685.
- (1-93) Andereck, C.D., S.S.Liu and H.L.Swinney, "Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders", J.Fluid Mech. (1986), 155-183.
- (1-94) Krueger, E.R., A.Gross and R.C.DiPrima, "On the relative importance of Taylor-vortex and non-axisymmetric modes in flow between rotating cylinders", J.Fluid Mech., vol.24, part3, (1966), 521-538.
- (1-95) DiPrima, R.C. and R.N.Grannick, "A nonlinear investigation of the stability of flow between counterrotating cylinders", in Instability of Continuous Systems(IUTAM Symposium), edited by H.Leipholz, Springer-Verlag, Berlin, New York, (1971), 55-60.
- (1-96) Demay, Y. and G.Iooss, "Computation of bifurcated solutions for the Couette-Taylor problem, Both cylinders rotating", J.Mec.Theor.Appl., spec., suppl., (1984), 193-216.
- (1-97) Golubitsky, M. and I. Stewart, "Symmetry and stability in Taylor-Couette flow", Siam J.Math.Anal., vol.17, No.2, (1986), 249-288.

- (1-98) Golubitsky, M. and W.F.Langford, "Pattern formation and bistability in flow between counterrotating cylinders", *Physica D* 32 , North-Holland, Amsterdam, (1988), 362-392.
- (1-99) Langford, W.F., R.T.Eric, J.Kostelich, H.L.Swinney and M.Golubitsky, "Primary instabilities and bicriticality in flow between counter-rotating cylinders", *Phys.Fluids* 31, 4, (1988), 776-785.
- (1-100) Chossat, P. and G.Iooss, "Primary and secondary bifurcation in the Couette-Taylor problem", *Japan J.Appl.Math.*, 2(1985), 37-68.
- (1-101) Iooss, G., "Secondary bifurcation of Taylor vortices into wavy inflow or outflow boundaries", *J.Fluid Mech.vol.173*, (1986), 273-288.
- (1-102) Nagata, M., "Bifurcations in Couette flow between almost corotating cylinders", *J.Fluid Mech.vol.169*, (1986), 229-250.
- (1-103) Nagata, M., "On wavy instabilities of the Taylor-vortex flow between corotating cylinders", *J.Fluid Mech.188*, (1988), 585-598.
- (1-104) Tagg, R., W.S.Edwards, H.L.Swinney and P.S.Marcus, "Nonlinear standing waves in Couette-Taylor flow", *Physical Review A vol.39, No.7*, (1989), 3734-3737.
- (1-105) Donnelly, R.J., "Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders", III.Enhancement of stability by modulation, *Proc. R.Soc.London, Ser.A*, 281, (1964), 130-139.
- (1-106) Riley, P.J.and R.L.Laurence, "Energy stability of modulated circular Couette flow", *J.Fluid Mech.79*, (1977), 535-552.
- (1-107) Barenghi, C.F., and C.A.Jones, "Modulated Taylor-Couette flow", *J.Fluid Mech.*, (1989), 127-160.
- (1-108) Kuhlmann, H., D.Roth and M.Lucke, "Taylor vortex flow under harmonic modulation of the driving force", *Phys.Rev.A 39*, (1989), 745-762.
- (1-109) Braun, R.J., G.B.McFadden, B.T.Murray, S.R.Coriell, M.E.Glicksman and M.E. Selleck, "Asymptotic behavior of modulated Taylor-Couette flows with a crystalline inner cylinder", *Phys.Fluids A 5(8)*, (1993), 1891.
- (1-110) Cole, J.A., "Taylor vortices with eccentric rotating cylinders", *Nature*

- (London), 221, (1969), 253-254.
- (1-111) Koschmieder, E.L., "Taylor vortices between eccentric cylinders", *Phys. Fluids* 19, (1976), 1-4.
- (1-112) 末松良一、伊藤忠哉、向良一、"回転する偏心二重円筒間の2次流れについて"、*機論*, B, 47巻, 415号, (1982), 431-442.
- (1-113) Wimmer, M., "Effects of geometrical shape on a Taylor vortex", *Z. Angew. Math. Mech.* 65, (1985), 255-256.
- (1-114) Abboud, M., "Ein Beitrag zur theoretischen untersuchung von Taylor-Wirbeln im spalt zwischen zylinder/Kegel-Konfigurationen", *Z. Angew. Math. Mech.* 68, (1988), 275-277.
- (1-115) Khlebutin, G.N., "Stability of fluid motion between a rotating and stationary concentric sphere", *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza3* [Fluid Dyn. (USSR) 3, 31(1968)] .
- (1-116) Sawatzki, O. and J. Zierep, "Das Stromfeld im Spalt zwischen zwei konzentrischen Kugelflachen, von denen die innere rotiert", *Acta Mech.* 9, (1970), 13.
- (1-117) Yavorskaya, I. M., Yu. N. Belyaev and A. A. Monakhov, "Stability investigation study and secondary flows in rotating spherical layers at arbitrary Rossby numbers", *Doc. Akad. Nauk SSSR*, 237, (1977), 804-807, [Sov. Phys. Dokl. 22, 707-719] .
- (1-118) Yavorskaya, I. M. and Yu. N. Belyaev, "Nonuniqueness and multiparametric study of transition to chaos in the spherical Couette flow", *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 10, (1991), 267-274.
- (1-119) Munson, B. R. and M. Menguturk, "Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. Part 3. Linear stability and experiments", *J. Fluid Mech.* 69, (1975), 705.
- (1-120) 中林功一, "回転2球流れのテイラー・ゲルトラウズの構造", *機論*, B, 50巻, 449号, (1984), 11-18.
- (1-121) Munson, B. R. and D. D. Joseph, "Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. Part 1. Basic flow", *J. Fluid Mech.* 49, (1971),



289-303.

- (1-122) Munson, B.R. and D.D. Joseph, "Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. Part 2. Hydrodynamic stability", *J. Fluid Mech.* 49, (1971), 305-318.
- (1-123) Walton, I.C., "The linear stability of the flow in a narrow spherical annulus", *J. Fluid Mech.* 86, (1978), 673-693.
- (1-124) Soward, A.M. and C.A. Jones, "The linear stability of the flow in the narrow gap between two concentric rotating spheres", *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 36, (1983), 19-41.
- (1-125) Bartels, F., "Taylor vortices between two concentric rotating spheres", *J. Fluid Mech.*, vol. 119, (1982), 1-25.
- (1-126) Schrauf, G. "The first instability in spherical Taylor-Couette flow", *J. Fluid Mech.*, vol. 166, (1986), 287-303.
- (1-127) Marcus, P.S. and L.S. Tuckerman, "Simulation of flow between concentric rotating spheres. 1. Steady states", *J. Fluid Mech.* 185, (1987a), 1-30.
- (1-128) Marcus, P.S. and L.S. Tuckerman, "Simulation of flow between concentric rotating spheres. 2. Transitions", *J. Fluid Mech.* 185, (1987b), 31-65.
- (1-129) Wiener, R.J., P.W. Hammer, C.E. Swanson and R.J. Donnelly, "Stability of Taylor-Couette flow subject to an external coriolis force", *Phys. Rev. Lett.* 64, (1990), 1115-1118.
- (1-130) Ning, L., G. Ahlers, D.S. Cannell and M. Tveitereid, "Experimental and theoretical results for Taylor-Couette flow subjected to a coriolis force", *Physical Review Letters*, vol. 66, No. 12, (1991), 1575-1578.
- (1-131) Takhar, H.S., M.A. Ali, and V.M. Soundalgekar, "Effects of radial temperature gradient on the stability of flow in a narrow-gap annulus with constant heat flux at the inner rotating cylinder", *Warme-und Stoffubertragung* 22, (1988), 23-28.
- (1-132) Wu, M., C.D. Andereck and H.R. Brand, "The phase dynamics of turbulent Taylor Vortex Flow", *Europhysics Letters*, 19(7), (1992), 587-592.
- (1-133) Lueptow, R.M., A. Docter and K. Min, "Stability of axial flow an annulus

- with a rotating inner cylinder", Phys.Fluids A 4(11), (1992), 2446-2455.
- (1-134) Tagg, R., "A guide to literature related to the Taylor-Couette problem", Ordered and Turbulent Pattern in Taylor-Couette Flow, edited by Andereck, C.D. and F.Hayot., NATO ASI Series B, vol.297, (1992), 303.

## 第2章の文献

- (2- 1) 中村育雄, 戸谷順信, 山下新太郎, 植木良昇, "アスペクト比が小さいテイラー渦の実験 (第1報、自由端と固定端の比較)", 機論, B, 54巻, 504号, (1988), 1898-1905.
- (2- 2) Benjamin, T.B., "Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid I.Theory", Proc.R.Soc.Lond.A. 359, (1978), 1-26.
- (2- 3) Benjamin, T.B., "Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid II.Experiments", Proc.R.Soc.Lond.A. 359, (1978), の27ページ.
- (2- 4) Benjamin, T.B., "Applications of Leray-Schauder degree theory to problem of hydrodynamic stability", Math.Proc.Camb.Phil.Soc.(1976), 79, 373-392.
- (2- 5) Schaffer, D.G., "Qualitative analysis of a model for boundary effects in the Taylor problem", Math.Proc.Camb.Phil.Soc.(1980), 87, 307-337.
- (2- 6) Benjamin, T.B. and T.Mullin, "Anomalous modes in the Taylor experiment", Proc.Soc.Lond.A 377, (1981), 221-249.
- (2- 7) Schlichting, H., Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, (1979), 225.
- (2- 8) Cliffe, K.A. and T.Mullin, "A numerical and experimental study of anomolous modes in the Taylor experiment", J.Fluid Mech., (1985), 153, 243-258.
- (2- 9) Bolstad, J.H. and H.B.Keller, "Computation of Anomalous Modes in the Taylor Experiment", Journal of Computational Physics 69, (1987), 230-251.
- (2-10) Mullin, T., "Mutations of steady cellular flows in the Taylor experiment", J.Fluid Mech.(1982), vol.121, 207-218.

- (2-11) Mullin, T. and T.B.Benjamin, "Transition to oscillatory motion in the Taylor experiment", Nature vol.288, (1980), 567-569.
- (2-12) 鳥谷隆"回転同軸円筒間の流れにおける有限円筒長の効果", 九州大学応用力学研究所所報, 第59号, (1983), 37-42.
- (2-13) (2-10) の219ページ.
- (2-14) 木内学, "半熔融加工法による複合材料の製造と加工", 生産研究, 34巻, 6号, (1982), 179-184.
- (2-15) Cole, J.A., "Taylor-vortex instability and annulus-length effects", J.Fluid Mech.(1976), vol.75, part 1, 1-15.
- (2-16) Snyder, H.A."Wave-number selection at finite amplitude in rotating Couette flow", J.Fluid Mech.(1969), vol.35, part2, 237-298.
- (2-17) Cognet, G., A.Bouabdallah and A.A.Aider, "Laminar turbulent transition in Taylor-Couette flow, Influence of geometrical parameters", Stability in the Mechanics of Continua 2nd Symposium, Springer, (1982), 330-340.
- (2-18) Gorman, M. and H.L.Swinney, "Visual observation of the second characteristic mode in a quasiperiodic flow", Physical Review Letters, 43, (1979), 1871-1875.
- (2-19) Cole, J.A., "Taylor vortex behavior in annular clearances of limited length", Proc.5th Aust.Conf.Hydraulics and Fluid Mech., (1974), 514-521.

### 第3章の文献

- (3- 1) 中村育雄, 戸谷順信, 山下新太郎, 植木良昇, "アスペクト比が小さいテイラー渦の実験(第2報、テイラー渦の不安定性)", 機論, B, 54巻, 505号, (1988), 2425-2432.
- (3- 2) Nakamura, I., Y.Toya, S.Yamashita and Y.Ueki, "An Experiment on a Taylor Vortex Flow in a Gap with a Small Aspect Ratio (Instability of Taylor Vortex Flows)", JSME Int.J., Ser. II, 32, 3, (1989), 388-394.
- (3- 3) 文献(2- 1)
- (3- 4) Benjamin, T.B., "Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous

- fluid I.Theory”, Proc.R.Soc.Lond.A. 359, (1978), 1-26.
- (3- 5) Benjamin, T.B., "Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid II.Experiments”, Proc.R.Soc.Lond.A. 359, (1978), 27-43.
- (3- 6) Mullin, T., "Mutations of steady cellular flows in the Taylor experiment”, J.Fluid Mech.(1982), vol.121, 207-218.
- (3- 7) Mullin, T. and T.B.Benjamin, "Transition to oscillatory motion in the Taylor experiment”, Nature vol.288, (1980), 567-569.
- (3- 8) Thompson, J.M., ., 吉澤修治、柳田英二 訳、”不安定性とカタストロフ”、産業図書、(1986)の157ページ.
- (3- 9) Joseph, D.D.(Swinney, H.L. and Gollub, J.P.), Hydrodynamic Instability and the Transition to Turblence, (1981), Springer, 27.

#### 第4章の文献

- (4- 1) 中村育雄, 戸谷順信, 山下新太郎, 植木良昇, ”アスペクト比が小さいテイラー渦の実験(第3報、固定端の場合の流れの分岐)”, 機論, B, 56巻, 522号, (1990), 307-313.
- (4- 2) Nakamura, I., Y.Toya, S.Yamashita and Y.Ueki, "An Experiment on a Taylor Vortex Flow in a Gap with a Small Aspect Ratio (Bifurcation of Flows in a Symmetric System)”, JSME Int.J., Ser. II, 33, 4, (1990), 685-691.
- (4- 3) Benjamin, T.B., "Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid II.Experiments”, Proc.R.Soc.Lond.A. 359, (1978), 27-43.
- (4- 4) 文献(2- 1)
- (4- 5) 文献(3- 1)
- (4- 6) Mullin, T., "Mutations of steady cellular flows in the Taylor experiment”, J.Fluid Mech.(1982), vol.121, 207-218.
- (4- 7) Thompson, J.M.T., 吉澤修治、柳田英二 訳、”不安定性とカタストロフ”、産業図書、(1986).
- (4- 8) Streett, C.L. and M.Y.Hussaini, "A numerical simulation of finite-

length Taylor-Couette flow”, Computational Fluid Dynamics, edited by G. de Vahl Davis and C. Fletcher, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), (1988), 663-675.

- (4- 9) Broomhead, D.S. and Ryrie, Susan C., "Particle paths in wavy vortices", Nonlinearity, 1, (1988), 409-434.
- (4-10) 例えば, 成島・小高, ブール代数とその応用, (1986), 東海大学出版会, 56.

#### 第5章の文献

- (5- 1) 戸谷順信, 中村育雄, 山下新太郎, 植木良昇, "アスペクト比が小さいテイラー渦の実験(第4報、自由端の場合の流れの分岐)", 機論, B, 56巻, 532号, (1990), 3617-3624.
- (5- 2) Toya, Y., I. Nakamura, S. Yamashita and Y. Ueki, "An experiment on a Taylor vortex flow in a gap with a small aspect ratio: Bifurcation of flows in an asymmetric system", Acta Mechanica, (Springer-Verlag), vol. 102, (1994), 137-148.
- (5- 3) Benjamin, T.B. and T. Mullin, "Notes on the multiplicity of flows in the Taylor experiment", J. Fluid Mech., vol. 121, (1982), 219-230.
- (5- 4) Benjamin, T.B., "Applications of Leray-Schauder degree theory to problem of hydrodynamic stability", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1976), 79, 373-392.
- (5- 5) Benjamin, T.B., "Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid I. Theory", Proc. R. Soc. Lond. A. 359, (1978), 1-26.
- (5- 6) Schaffer, D.G., "Qualitative analysis of a model for boundary effects in the Taylor problem", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1980), 87, 307-337.
- (5- 7) Bolstad, J.H. and H.B. Keller, "Computation of Anomalous Modes in the Taylor Experiment", Journal of Computational Physics 69, (1987), 230-251.
- (5- 8) Benjamin, T.B., "Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid II. Experiments", Proc. R. Soc. Lond. A. 359, (1978), 27-43.

- (5- 9) Streett, C.L. and M.Y.Hussaini, "A numerical simulation of finite-length Taylor-Couette flow", Computational Fluid Dynamics, edited by G.de Vahl Davis and C.Fletcher, Elsevier Science Publishers B.V.(North-Holland), (1988), 663-675.

#### 第6章の文献

- (6- 1) 戸谷順信, 中村育雄, 山下新太郎, 植木良昇, "アスペクト比が小さいテイラー渦の変異モードにおけるエクストラ渦とツイン渦の存在", 機論, B, 58巻, 546号, (1992), 305-312.
- (6- 2) 文献(4- 1)
- (6- 3) 文献(5- 1)
- (6- 4) Benjamin, T.B. and T.Mullin, "Anomalous modes in the Taylor experiment", Proc.Soc.Lond.A 377, (1981), 221-249.
- (6- 5) Cliffe, K.A. and T.Mullin, "A numerical and experimental study of anomalous modes in the Taylor experiment", J.Fluid Mech., (1985), 153, 243-258.
- (6- 6) Schaffer, D.G., "Qualitative analysis of a model for boundary effects in the Taylor problem", Math.Proc.Camb.Phil.Soc.(1980), 87, 307-337.
- (6- 7) Cliffe, K.A., A.D.Jepson and A.Spence, "The numerical calculation of bifurcation problem symmetry with application to the finite Taylor problem", Numerical methods for fluid dynamics II, (1986), 155-176.
- (6- 8) Bolstad, J.H. and H.B.Keller, "Computation of Anomalous Modes in the Taylor Experiment", Journal of Computational Physics 69, (1987), 230-251.
- (6- 9) Hill, N.A., "Numerical studies of "side-by-side" and other modes for the Taylor problem in a finite annulus", Computers and Fluids 16, (1988), 445-458.
- (6-10) Anson, D.K., T.Mullin and K.A.Cliffe, "A numerical and experimental investigation of a new solution in the Taylor vortex problem", J.Fluid

Mech., vol.207, (1989), 475-487.

- (6-11) Cliffe, K. A., "Numerical calculations of two-cell and single-cell Taylor flows", J.Fluid Mech., vol.135, (1983), 219-233.
- (6-12) Pfister, G., H.Schmidt, K.A.Cliffe and T.Mullin, "Bifurcation phenomena in Taylor-Couette flow in a very short annulus", J.Fluid Mech., (1988), 191, 1-18.
- (6-13) Streett, C.L. and M.Y.Hussaini, "A numerical simulation of finite-length Taylor-Couette flow", Computational Fluid Dynamics, edited by G.de Vahl Davis and C.Fletcher, Elsevier Science Publishers B.V.(North-Holland), (1988), 663-675.
- (6-14) Lucke, M., M.Mihelcic, K.Wingerath and G.Pfister, "Flow in a small annulus between concentric cylinders", J.Fluid Mech.140, (1984), 343-353.
- (6-15) Koschmieder, E.L., Private Communication
- (6-16) Rosenhead, L., ed., Laminar Boundary Layers, (1963), Oxford, 60-83.

#### 第7章の文献

- (7- 1) 中村育雄, 戸谷順信, "多重解テイラー渦におけるモードの形成条件(両端が固定の場合)", 機論, B, 60巻, 571号, (1994), 掲載予定.
- (7- 2) 戸谷順信, 中村育雄, "多重解テイラー渦におけるモードの形成条件(自由端の場合)", 長野工業高等専門学校紀要, 26号, (1993), 15-25.
- (7- 3) Benjamin, T.B., "Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid I.Theory", Proc.R.Soc.Lond.A.359, (1978), 1-26.
- (7- 4) Benjamin, T.B., "Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid II.Experiments", Proc.R.Soc.Lond.A.359, (1978), 27-43.
- (7- 5) Mullin, T., "Finite-Dimensional Dynamics in Taylor-Couette Flow", IMA J. Appl.Math.46, (1991), 109-119.
- (7- 6) 東尚史, 小河原加久治, 飯田誠一, "回転二重円筒間内流れの非定常三次元計算", 機論, B, 57, 535, (1991), 905-913.

- (7-7) 東 尚史、小河原加久治、飯田誠一、"テイラー渦流れの変異モード発生機構に関する数値的研究"、機論, B, 58巻, 555号, (1992), 3245-3250.
- (7-8) Bielek, C. A. and E.L.Koschmieder, "Taylor vortices in short fluid columns with large radius ratio", Phys.Fluids A 2, (1990), 1557-1563.
- (7-9) Nagata, M., "Bifurcations in Couette flow between almost corotating cylinders", J.Fluid Mech.vol.169, (1986), 229-250.
- (7-10) Snyder, H.A."Wave-number selection at finite amplitude in rotating Couette flow", J.Fluid Mech.(1969), vol.35, part2, 237-298.
- (7-11) Neitzel, G.P., "Numerical computation of time-dependent Taylor-vortex flows in finite-length geometries", J.Fluid Mech., 141, (1984), 51-66.
- (7-12) Lee, S. and Y.Park, "A study on the instability of Taylor vortices between concentric cylinders", 大韓機械学会論文集、第15巻、第4号(1991)、1324-1332.
- (7-13) Chen, C.F., Liu, D.S. and Skok, M.W., "Stability of circular Couette flow with constant finite acceleration", Trans. ASME, J. Appl. Mech. 40, (1973), 347-354.
- (7-14) Chen, J.C., Neitzel, G.P. and Jankowski, D.F., "The influence of initial condition on the linear stability of time-dependent circular Couette flow", Phys.Fluids, 28, 2, (1985), 749-751.
- (7-15) Barenghi, C.F., and C.A.Jones, "Modulated Taylor-Couette flow", J.Fluid Mech., (1989), 127-160.
- (7-16) Maløy, K.J. and Golburg, W., "Measurements on transition to turbulence in a Taylor-Couette cell with oscillatory inner cylinder", Phys Fluids A.5, 6, (1993), 1438-1442.
- (7-17) Murrage, B.T., McFadden, G.B. and Coriell, S.R., "Stabilization of Taylor-Couette flow due to time periodic outer cylinder oscillation", Phys. Fluids A 2, 12, (1990), 2147-2156.
- (7-18) Eagles, P.M., "Development of Taylor-Couette flow on an intermediate timescale", Proc. R. Soc. London, Ser. A 398, (1985), 289-305.
- (7-19) Wu, M. and Andereck, C.D., "Phase dynamics in the Taylor-Couette



system", Phys. Fluids A 4, 11, (1992), 2432-2445.

(7-20) 数理科学辞典 (広中編), 韓, XIV 情報理論, 大阪書店, (1991), 768.

(7-21) Bestehorn, M. and Haken, H., "Associative memory of a dynamical system: the example of the convection instability", Z.Phys.B., 82, (1991), 305-308.

## 付録

テイラー渦流れに関する文献はかなりの数になり、本論文に関するもので掲載できなかったもの、または直接関係ないものであっても重要な参考文献がかなりある。掲載しきれなかったテイラー渦に関する文献を以下に示す。

- Abboud, M., "Die numerische untersuchung von Taylor-Wirveln im spalt zwischen einem kegel und einem zylinder", ZAMM. Zangew. Math. Mech. 70(1990)5, 441-442.
- Ahlers, A., D.S.Cannell and M.A.D.Lerma, "Possible mechanism for transitions in wavy Taylor-vortex flow", Physical Review A, vol.27, No.2, (1983), 1225-1227.
- Aitta, A., G.Ahlers and D.S.Cannell, "Tricritical Phenomena in rotating Couette-Taylor flow", Physical Review Letters, vol.54, No.7, (1985), 673-676.
- Aitta, A., "Quantitative Landau model for bifurcations near a tricritical point in Couette-Taylor flow", Physics Review A, vol.34, (1986), 2086-2092.
- Andereck, C.D., R.Dickman and H.L.Swinney, "New flows in a circular Couette system with co-rotating cylinders", Phys.Fluids 26(6), (1983), 1395-1401.
- Babenko, K.I. and A.L.Afendikov, "Stability of Taylor vortices", Sov.Phys.Doki. 29, (10), (1984), 784-787.
- Ball, K.S. and B.Farouk, "Bifurcation phenomena in Taylor-Couette flow with bouyancy effects", J.Fluid Mech.(1988) vol.197, 479-501.
- Ball, K.S. and B.Farouk, "A flow visualization study of the effects of bouyancy on Taylor vortices", Phys.Fluids A1(9), (1989), 1502-1507.
- Barenghi, C.F., "Computations of transitions and Taylor vortices in temporally modulated Taylor-Couette flow", Journal of Computational Physics 95, (1991), 175-194.
- Barenghi, C.F. and C.A.Jones, "The stability of the Couette flow of helium II", J.Fluid Mech.(1988), vol.197, 551-569.
- Bar-Yoseph, P. and A.Solan, "Taylor vortex flow between eccentric coaxial rotating spheres", Phys.Fluids, A2(9), (1990), 1564-1573.
- Benjamin, T.B., "Applications of generic bifurcation theory in fluid mechanics

- Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations", North-Holland Publishing Company, (1978).45-73.
- Blennerhassett, P.J. and P.Hall, "Centrifugal instabilities of circumferential flows in finite cylinders:Linear theory", Proc.R.Soc.Lond.A.365, (1979), 191-207.
- Brandstater, A., J.Swift, H.L.Swinney, A.Wolf, J.D.Farmer, E.J. and P.J. Crutchfield, "Low-dimentinal chaos in a hydrodynamic system", Physical Review Letters, vol.51, No.16, (1983), 1442-1445.
- Buhler, K., "Visualization of flow instabilities in spherical gaps", Flow visualization III, Springer-Verlag, (1983), 358-362.
- Buhler, K."Instabilitaten spiralformiger stromungen im zylinderspalt", ZAMM 64, (1984), 180-184.
- Buhler, K., J.E.R.Coney, M.Wimmer and J.Zierep, "Advances in Taylor vortex flow: A report on the fourth Taylor vortex flow :Working party meeting", Acta Mechanica 62, (1986), 47-61.
- Buhler, K., "Symmetric and asymmetric Taylor vortex flow in spherical gaps", Acta Mechanica 81, (1990), (Springer-Verlag), 3-38.
- Buhler, K., "Dynamical behavior of instabilities in spherical gap flows: Theory and experiment", Eur.J.Mech., B/Fluids, vol.10, No.2, (1991), 187-192.
- Bust, G.S., B.C.Dornblaser and E.L.Koschmieder, "Amplitudes and wavelength of wavy Taylor vortices", Phys.Fluids 28(5), (1985), 1243-1247.
- Brindley, J., "Spatio-temporal behaviour of flows with circular constraints", Physica 23D, (1986), 240-245.
- Chen, C.F. and R.P.Kirchner, "Stability of time-dependent rotational Couette flow Part 2. Stability analysis", J.Fluid Mech.(1971), vol.48, part2, 365-384.
- Chen, J.-C. and G.P.Neitzel, "Strong stability of impulsively initiated Couette flow for both axisymmetric and nonaxisymmetric disturbances", J.Appl.Mech., vol.49, Trans.ASME(1982), 691-696.
- Cole, J.A., "Further experiments on Taylor vortices between eccentric rotating

- cylinders", Forth Australasian Conference on hydraulics and Fluid Mechanics, (1971), 27-34.
- Cole, J.A., "Taylor vortices with short rotating cylinders", J.Fluids Eng., Trans.ASME, (1974), 69-70.
- Cooper, E.R., D.F.Jankowski, G.P.Neitzel and T.H.Squire, "Experiments on the onset of instability in unsteady circular Couette flow", J.Fluid Mech.(1985), vol.161, 97-113.
- Coughlin, K.T. and P.S.Marcus, "Modulated waves in Taylor-Couette flow Part 1. Analysis", J.Fluid Mech.(1992), vol.234, 1-18.
- Coughlin, K.T. and P.S.Marcus, "Modulated waves in Taylor-Couette flow Part 2. Numerical simulation", J.Fluid Mech.(1992), vol.234, 19-46.
- Crawford, G.L., K.Park and R.J.Donnely, "Vortex pair annihilation in Taylor wavy-vortex flow", Phys.Fluids 28(1), (1985), 7-9.
- Cruickshank, J.O., "A new method for predicting the critical Taylor number in rotating cylindrical flows", Trans. ASME J.Appl.Mech., vol.54, (1987), 713-719.
- Dai, R.X. and A.Z.Szeri, "A numerical study of finite Taylor flows", Int.J.Non-Linear Mechanics, vol.25, No.1, (1990), 45-60.
- Dai, R.-X., Q.Dong and A.Z.Szeri, "Flow between eccentric rotating cylinders: Bifurcation and stability", Int.J.Engng Sci.vol.30, No.10(1992), 1323-1340.
- Daniels, P.G., "The effect of distant sidewalls on the transition to finite amplitude Benard convection", Proc.R.Soc.Lond.A 358, (1977), 173-197.
- Davey, A., "The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders", J.Fluid Mech.(1962), vol.14, 336-368.
- Davey, A., R.C.DiPrima and J.T.Stuart, "On the instability of Taylor vortices", J.Fluid Mech.(1968), vol.31, part 1, 17-52.
- Delgado, A. and H.J.Rath, "Handhabung von Fluiden in der Dchwereelosigkeit mittels induzierter rotation", ZAMM Z.angew.Math.Mech.69(1989)6, T614-616.
- Denier, J.-P. and P.Hall, "Nonlinear short wavelength Taylor vortices", Eur.J. Mech., B/Fluids, vol.10, No.2, (1991), 277-282.

- Donnelly, R.J., "Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders I. Torque measurements", Proc. Roy. Soc. A, 246(1958), 312-325.
- Donnelly, R.J. and D. Fultz, "Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders, II. Visual observations", Proc. Roy. Soc. A, 258(1960), 101-123.
- Eagles, P.M., "On stability of Taylor vortices by fifth-order amplitude expansions", J. Fluid Mech., vol. 49, part 3, (1971), 529-550.
- Eagles, P.M., "On the stability of slowly varying flow between concentric cylinders", Proc. R. Soc. Lond. A. 355, (1987), 209-224.
- Edwards, W.S., S.R. Beane and S. Varma, "Onset of wavy vortices in the finite-length Couette-Taylor problem", Phys. fluids A 386, (1991), 1510-1518.
- EI-Dujaily, M.J. and F.R. Mobbs, "The effect of end walls on subcritical flow between concentric and eccentric rotating cylinders", Int. J. Heat and Fluid Flow, vol. 11, No. 1, (1990), 72-78.
- Fasel, H. and O. Booz, "Numerical investigation of supercritical Taylor-vortex flow for a wide gap", J. Fluid Mech., vol. 138, (1984), 21-52.
- Gebhardt, Th. and S. Grossmann, "The Taylor-Couette eigenvalue problem with independently rotating cylinders", Z. Physw. B 90, (1993), 475-490.
- Gorman, M. and H.L. Swinney, "Recent results on instabilities and turbulence in Couette flow", Physica 106 A, (1981), 123-127.
- Green, A.E. and P.M. Naghdi, "A contribution to the Taylor-Couette flow problem", Proc. R. Soc. Lond. A 439, (1992), 227-245.
- Hall, P., "Centrifugal instabilities of circumferential flows in finite cylinders: nonlinear theory", Proc. R. Soc. Lond. A. 372, (1980), 317-356.
- Hall, P., "The stability of unsteady cylinder flows", J. Fluid Mech., vol. 67, No. 1, (1975), 29-63.
- Hall, P. and I.C. Walton, "The smooth transition to a convective regime in a two-dimensional box", Proc. R. Soc. Lond. A 358, (1977), 199-221.
- Hammer, P.W., R.J. Wiener and R.J. Donnelly, "Bifurcation phenomena in nonaxisymmetric Taylor-Couette flow", Physical Review Appl. 46, No. 12, (1992),

7578-7592.

- Hegseth, J., C.D. Andereck, F. Hayot and Y. Pomeau, "Spiral turbulence: development and steady state properties", *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 10, No. 2, (1991), 221-226.
- Heinrichs, R.M., D.S. Cannell, G. Ahlers and M. Jefferson, "Experimental test of the perturbation expansion for the Taylor instability at various wavenumbers", *Phys. Fluids* 31(2), (1988), 250-255.
- Ho, S.-P., "Linear Rayleigh-Taylor stability of viscous fluids with mass and heat transfer", *J. Fluid Mech.*, vol. 101, part 1, (1980), 111-128.
- 今尾茂樹, 山田豊, 伊藤基之, "テイラー渦流れの速度と速度変動", *機論*, B, 55巻, 514号, (1989), 1546-1552.
- Joanicot, M. and P. Pieranski, "Taylor instabilities in colloidal crystals", *J. Physique Letter* 46, (1985), 91-96.
- Jones, C.A., "Nonlinear Taylor vortices and their stability", *J. Fluid Mech.*, (1981), vol. 102, 249-261.
- Jones, C.A., "Numerical methods for the transition to wavy Taylor vortices", *J. Computational. Phys.*, 61, (1985), 321-344.
- Jones, C.A., "The transition to wavy Taylor vortices", *J. Fluid Mech.*, vol. 157, (1985), 135-162.
- Joo, Y.L. and E.S.G. Shawfeh, "The effects of inertia on the viscoelastic Dean and Taylor-Couette flow instabilities with application to coating flows", *Phys. Fluids A* 4(110), (1992), 2415-2431.
- Kachoyan, B.J., "Neutral curve behaviour in Taylor-Dean flow", *J. Appl. Mathematics and Physics(ZAMP)*, vol. 38, (1987), 905-924.
- Kataoka, K. and T. Deguchi, "Generation and evolution of turbulence in an annulus between two concentric rotating cylinders", *Heat transfer and fluid flow in rotating machinery*, Springer-Verlag, (1987), 245-254.
- Kataoka, K., T. Mizusugi, H. Ueno and N. Ohmura, "Hysteresis of dynamical transitions in Taylor-Couette flow", *Heat transfer and fluid flow in rotating machinery*, Springer-Verlag, (1987), 270-277.

- Kawamura, T. and R. Iwatsu, "Numerical Simulation of Taylor-Couette flow", ISCFD NAGOYA (1989), 695-700.
- Kirchgassner, K. and P. Sorger, "Branching analysis for the Taylor Problem", Quart. Journ. Mech. and Applied Math., vol. XXII, Pt. 2, (1969), 183-209.
- Koga, J. K. and E. L. Koschmieder, "Taylor vortices in short fluid columns", Phys. Fluid A1(9), (1989), 1475-1478.
- 小林睦夫, 前川博, 高野剛, 山田幸英, "同心円筒間の乱流テラー渦流れに関する実験的研究", 機論, B, 55巻, 517号, (1989), 2581-2589.
- Kuhlmann, H., "Model for Taylor-Couette flow", Physical Review A, vol. 32, No. 3, (1985), 1703-1707.
- Lathrop, D. P., J. Fineberg and H. L. Swinney, "Transition to shear-driven turbulence in Couette-Taylor flow", Physical Review A vol. 46., No. 10, (1992), 6390-6405.
- Laure, P. and Y. Demay, "Symbolic computation and equation on the center manifold: Application to the Couette-Taylor problem", Computers and Fluids vol. 16, No. 3, (1988), 229-238.
- Laurien E. and H. Fasel, "Numerical investigation of the onset of chaos in the flow between rotating cylinders", ZAMM-Z, angew. Math. Mech., 68, 5, (1988), 311-313.
- Legrand, J. and F. Coeuret, "Circumferential mixing in one-phase and two-phase Taylor vortex flows", Chemical Engineering Science, vol. 41, No. 1, (1986), 47-53.
- Lewis, E., "Steady flow between a rotating circular cylinder and fixed square cylinder", J. Fluid Mech., vol. 95, part 3, (1979), 497-513.
- Matsuda, Y., "Classification of critical points and symmetry-breaking in fluid phenomena and its application to dynamic meteorology", J. Meteorological society of Japan, vol. 61, No. 6, (1983), 771-788.
- Matsuda, Y., "Further study on the structure of critical points in fluid systems -Effects of disturbance on the bifurcation point", J. Meteorological society of Japan, vol. 65, No. 1, (1987), 1-12.

- Meyer-Spasche, R. and H.B.Keller, "Some bifurcation diagrams for Taylor vortex flows", Phys.Fluids vol.28, No.5, (1985), 1248-1252.
- Meyer J.A. and H.Fasel, "Numerische untersuchungen zur stabilitat der Taylor-Wirbel-Stromung im weiten spalt", ZAMM•Z.angew.Math.Mech.68, 5, (1988), 317-319.
- Mullin, T., T.B.Benjamin, K.Schatzel and E.R.Pike, "New aspects of unsteady Couette flow", Physics Letters, vol.83A, No.7, (1981), 333-336.
- Mullin, T., "Onset of time dependence in Taylor-Couette flow", Physical Review A, vol.31, No.2, (1985), 1216-1218.
- Mullin, T. and T.J.Price, "An experimental observation of chaos arising from the interaction of steady and time-dependent flows", Letters to Nature, vol.340, 27, (1989), 294-296.
- Nagata.M., "On wavy instabilities of Taylor-vortex flow between corotating cylinders", J.Fluid Mech., vol.188, (1988), 585-598.
- Neitzel, G.P., "Stability of circular Couette flow with variable inner cylinder speed", J.Fluid Mech., vol.123, (1982), 43-57.
- Neitzel, G.P., "Numerical computation of time-dependent Taylor-vortex flows in finite-length geometries", J.Fluid Mech., vol.141, (1984), 51-66.
- 中林功一, 山田豊, 岸本敏則, "回転二円筒流れの粗面の影響", 機論, B, 47巻, 415号, (1981), 443-449.
- 中林功一, "内球回転2球間クエット流の超臨界流れモードの影響因子", 機論, B, 55巻, 511号, (1989), 624-630.
- 中林功一, 土田陽一, "2球間クエット超臨界流における非一意性", 機論, B, 55巻, 517号, (1989), 2568-2578.
- Ogawa, A., Y.Fjita and N.Nagabayashi, "Development and collapse of Taylor vortex on the rotating inner cylinder in the coaxial rest outer cylinder", Chem.Eng. Commun., vol.37, (1985), 209-222.
- Ogawa, A."Time dependent phenomena of development processes of Taylor-Vortices in the co-aximal cylinders", J.Coll Engng.Nihon Univ.A-26, (1985).
- 大路道雄, "回転同心円筒間の前乱流状態", 京都大学数理解析研究所, 数理解析研究所講



- 究録, 606, (1987)、60-77.
- Paap, H.-G. and H.Riecke, "Wave-number restriction and mode interaction in Taylor vortex flow: Appearance of a short-wavelength instability", Physical Review A, vol.41, No.4, (1990), 1943-1951.
- Paap, H.-G. and H.Riecke, "Drifting vortices in ramped Taylor vortex flow: Quantitative results from phase equation", Phys.Fluids A 3(6), (1991), 1519-1532.
- Park, K., G.L.Crawford, and R.J.Donnely, "Determination of transition in Couette flow in finite geometries", Physical Review Letters, vol.47, No.20, (1981), 1448-1450.
- Park, K. and R.J.Donnely, "Study of the transition to Taylor vortex flow", Physical Review A, vol.24, No.4, (1981), 2277-2279.
- Park, K., G.L.Crawford and R.J.Donnely, "Characteristic length in the wavy vortex state of Taylor-Couette flow", Physical Review Letters, vol.51, No.15, (1983), 1352-1354.
- Pfister, G., A.Schulz and B.Lensch, "Bifurcation and a route to chaos of an one-vortex-state in Taylor-Couette flow", Eur.J.Mech., B/Fluids, 10, No.2, (1991), 247-252.
- Price, T.J. and T.Mullin, "An experimental observation of a new type of intermittency", Physica D 48, (1991), 29-52.
- Riecke, H. and H.-G.Paap, "Stability and wave-vector restriction of axisymmetric Taylor vortex flow", Physical Review A, vol.33, No.1, (1986), 547-553.
- Riecke, H. and H.-G.Paap, "Parity-breaking and Hopf bifurcation in axisymmetric Taylor vortex flow", Physical review A, vol.45, No.12(1991), 8605-8609.
- Rilley, D.S. and K.H.Winters, "Model exchange mechanisms in Lapwood convection", J.Fluid Mech., vol.204, (1989), 325-358.
- Savas, O., "On flow visualization using reflective flakes", J.Fluid Mech., vol.152, (1985), 235-248.
- Schroder, W. and H.B.Keller, "Wavy Taylor-Vortex flows via multigrid-continuation methods", J.Computational Physics 91, (1990), 197-227.

- Schumack, M.R. and W.W.Schultz, "Taylor vortices between elliptical cylinders"  
Phys.Fluids A 4(11), (1992), 2578-2581.
- Sen, M., "The influence of developments in dynamical system theory on  
experimental fluid mechanics", Frontiers in experimental fluid mechanics,  
Springer-Verlag, (1989), 1-23.
- Snyder, H.A., "Change in wave-form and mean flow associated with wavelength  
variations in rotating Couette flow. Part 1", J.Fluid Mech.(1969), vol.35,  
part 2, 337-352.
- Sparrow, E.M., W.D.Munro and V.K.Jonsson, "Instability of the flow between  
rotating cylinders:the wide-gap problem", J.Fluid Mech.(1964), vol.20,  
part 1, 35-46.
- Stern, C., P.Chossat and F.Hussain, "Azimuthal mode interaction in counter-  
rotating Taylor-Couette flow", European Journal of Mech., B/Fluids, vol.9,  
No.1, (1990), 93-106.
- Stern, C. and P.Chossat, "Experimental and numerical study of mode interaction  
and chaos in counter-rotating Taylor-Couette flow", Eur.J.Mech., B Fluids,  
10, No.2-Suppl, (1991), 261-266.
- Stuart, J.T. and R.C.DiPrima, "On the mathematics of Taylor-vortex flows in  
cylinders of finite length", Proc.R.Soc.Lond.A 372, (1980), 357-365.
- Tabeling, P., "Magnetohydrodynamic Taylor vortex flows", J.Fluid Mech., vol.112,  
(1981), 329-345.
- Tabeling, P., "Dynamics of the phase variable in the Taylor vortex system", J.  
Physique Letters 44, (1983), 665-672.
- 鳥谷隆, "非同軸回転円筒間に生じるテイラー渦流", 九州大学応用力学研究所所報、第60  
号、(1984), 39-44.
- Vastano, J.A. and R.D.Moser, "Short-time Lyapunov exponent analysis and the  
transition to chaos in Taylor-Couette flow", J.Fluid Mech., (1991), vol.233,  
83-118.
- Walgraef, D., "End effects and phase instabilities in a model for Taylor-Couette  
systems", Physical Review A, vol.34, No.4, (1986), 3270-3278.

- Walsh, T.J. and R.J. Donnelly, "Taylor-Couette flow with periodically corotated and counterrotated cylinders", Physical Review letters, vol.60, No.8, (1988), 700-703.
- Wei, T., E.M. Kline, S.H.-K. Lee and S. Woodruff, "Gortler vortex formation at the inner cylinder in Taylor-Couette flow", J. Fluid Mech. (1992), vol.245, 47-68.
- Wimmer, M., "Experiment on the stability of viscous flow between two concentric rotating spheres", J. Fluid Mech., vol.103, (1981), 117-131.
- Wimmer, M., "Stromungen zwischen rotierenden Ellipsen", ZAMM Z. angew. Math. Mech. 69, 6, (1989), T616-619.
- Wu, M. and C.D. Andereck, "Phase dynamics in the Taylor-Couette system", Phys. Fluids A4(11), (1992), 2432-2445.
- Wu, X. and J.B. Swift, "Onset of secondary flow in the modulated Taylor-Couette system", Physical review A, vol. 40, No.12(1989), 7197-7201.
- 山田豊, 今尾茂樹, 間宮光義, "両管回転同心二重管内流れの摩擦モーメント", 機論, B, 47巻, 429号, (1981), 1494-1501.

# 論 文 目 録

氏 名 戸 谷 順 信

(発 表 し た 論 文)

論 文 題 目	公表の方法及び時期	著 者
1. 学会誌等		
1. アスペクト比が小さいテイラー渦の実験 (第1報、自由端と固定端の比較)	日本機械学会論文集 B編, 54巻, 第504号 (1988), 1898-1905.	中村育雄 戸谷順信 山下新太郎 植木良昇
2. アスペクト比が小さいテイラー渦の実験 (第2報、テイラー渦の不安定性)	日本機械学会論文集 B編, 54巻, 第505号 (1988), 2425-2432.	中村育雄 戸谷順信 山下新太郎 植木良昇
3. An Experiment on a Taylor Vortex Flow in a Gap with a Small Aspect Ratio (Instability of Taylor Vortex Flows)	JSME Int. J., Ser. II Vol. 32, No. 3. (1989), 388-394.	I. NAKAMURA Y. TOYA S. YAMASHITA Y. UEKI
4. アスペクト比が小さいテイラー渦の実験 (第3報、固定端の場合の流れの分岐)	日本機械学会論文集 B編, 56巻, 第522号 (1990), 307-313.	中村育雄 戸谷順信 山下新太郎 植木良昇
5. An Experiment on a Taylor Vortex Flow in a Gap with a Small Aspect Ratio (Bifurcation of Flows in a Symmetric System)	JSME Int. J., Ser. II Vol. 33, No. 4. (1990), 685-691.	I. NAKAMURA Y. TOYA S. YAMASHITA Y. UEKI
6. アスペクト比が小さいテイラー渦の実験 (第4報、自由端の場合の流れの分岐)	日本機械学会論文集 B編, 56巻, 第532号 (1990), 3617-3624.	戸谷順信 中村育雄 山下新太郎 植木良昇
7. アスペクト比が小さいテイラー渦の 変異モードにおけるエクストラ渦と ツイン渦の存在	日本機械学会論文集 B編, 58巻, 第546号 (1992), 305-312.	戸谷順信 中村育雄 山下新太郎 植木良昇
8. An experiment on a Taylor Vortex flow in a gap with a small aspect ratio, Bifurcation of flows in an asymmetric system	ACTA MECHANICA, Springer-Verlag vol. 102. (1994) 137-148.	Y. TOYA I. NAKAMURA S. YAMASHITA Y. UEKI

# 論 文 目 録

氏 名 戸 谷 順 信

(発 表 し た 論 文)

論 文 題 目	公表の方法及び時期	著 者
9. 多重解テイラー渦におけるモードの形成条件 (両端が固定の場合)	日本機械学会論文集 B編, 60巻, 第571号 (1994), 掲載予定	中村育雄 戸谷順信
II. その他		
1. 自由表面を持つテイラー渦の流れの変化と波状テイラー渦への遷移 (主として奇数セルの場合)	長野工業高等専門学校 紀要, 第17号, (1987) 41-48.	戸谷順信 植木良昇
2. テイラー渦流れの様子と波動テイラー渦への遷移 (固定端における偶数セルの場合)	長野工業高等専門学校 紀要, 第18号, (1988) 75-81.	戸谷順信 植木良昇
3. パソコンを使用した流れ場の画像処理システムの開発	長野工業高等専門学校 紀要, 第20号, (1989) 55-60.	戸谷順信 八田陽平
4. テイラー渦流れの2次元画像解析	長野工業高等専門学校 紀要, 第24号, (1991) 25-30.	戸谷順信 平林利裕
5. 多重解テイラー渦におけるモードの形成条件 (自由端の場合)	長野工業高等専門学校 紀要, 第27号, (1993) 15-25.	戸谷順信 中村育雄