

天体ダイナモにおける α 効果の 非局所性と非瞬間性

Non-localness and non-instantaneousness of the α -effect
in geophysical and astrophysical dynamos

堀 久美子

HORI, Kumiko

名古屋大学大学院環境学研究科地球環境科学専攻
学位論文 博士（理学）

2008年8月12日

要旨

地球および太陽を始めとする天体の多くは、磁場をもっている。例えば、地球はほぼ軸対称な双極子型の磁場を、太陽は周期 22 年で規則的に極性を変える軸双極子型の磁場をもつ。

このような磁場の源は、天体内部における流体運動が誘導する起電力であり、この流体運動によって磁場が生成および維持される作用はダイナモ作用と呼ばれる。天体におけるダイナモ作用は、20 世紀初頭以来、研究されてきたものの、現在でも十分に理解できているとはいえない状況にある。

未解決な問題の一つは、小スケールの流れが、どのようにして大スケールの磁場を生成するかという問題である。ここで想定している現象は、大きくわけて、天体内の流れおよび磁場と、乱流との 2 つであるが、この問題は、特に前者において重要であることが広く知られている。具体的には、地球磁場や太陽磁場のような、ほぼ軸対称な磁場の生成を理解するために重要である。従来、この小スケールの流れが大スケール磁場に与える影響（平均誘導起電力）は、 α 効果と呼ばれる効果で近似的に扱われてきた。 α 効果とは、平均誘導起電力が大スケール磁場に比例して生成するという近似モデルで、平均誘導起電力が大スケール磁場に対して局所的かつ瞬間的に生成するという近似をしている。この α 効果近似は、理論上の扱いやすさから考えられたもので、磁気レイノルズ数が 1 よりも十分小さい状況で正しく成り立つ。磁気レイノルズ数とは、磁場の拡散時間に対する移流時間の比を表すパラメータであり、内部磁場をもつような天体では $\mathcal{O}(1)$ よりも大きい。しかしながら、この α 効果によって、大スケール磁場の生成メカニズムを定性的に説明できるということから、長年、天体ダイナモを解釈する際に頻繁に使用されてきた。それは現在にも続いており、近年さかんに行われている地球ダイナモ直接数値シミュレーションや太陽ダイナモ平均場モデルシミュレーションでも、結果の解釈において α 効果は中心的な役割を果たしている。しかし、そもそも α 効果が実際の天体のような状況で適切に平均誘導起電力をモデルしているかどうかは明らかでない。むしろ、実際の天体ダイナモでは、磁気レイノルズ数が $\mathcal{O}(1)$ よりも大きいので、従来の狭義の α 効果は破綻するはずである。それにも関わらず、このことは長年のダイナモ理論の歴史の中で検討されてこなかった。本論文では、この点に注目する。

本論文の目的は、実際の天体ダイナモに近い磁気レイノルズ数での α 効果、つまり、平均誘導起電力の描像を確立することである。特に、従来の α 効果が仮定により排除していた非局所性と非瞬間性に注目する。

本論文では、第 1 章で天体磁場の観測的な特徴と近年のダイナモ研究について簡単に述べたあと、第 2 章で、伝統的に使用されてきた α 効果の効能と問題点を示すために、天体ダイナモ理論の枠組みを概観する。天体ダイナモ理論の基盤は、電磁流体力学によって与えられる。電気伝導度をもった流れがダイナモ作用をもつためには、磁気レイノルズ数が $\mathcal{O}(1)$ よりも大きくなくてはならない。実際に、磁場をもつ天体の多くは、これを満たしている。一方、ダイナモが駆動されるためには、磁気レイノルズ数だけでなく、流れ構造も重要である。天体ダイナモを駆動する天体内部の流れは、主に熱的に駆動された対流

である。地球外核や太陽対流層を想定した状況での線形安定論は、それらにおける熱対流が、3次元的なねじれ(ヘリシティ)を特徴的にもつということを示す。そして、流れにヘリシティがあることはダイナモの駆動にとって有利にはたらくということが、キネマティックダイナモ研究から知られている。キネマティックダイナモとは、流れ構造を仮定して、それから生成される磁場の性質を調べるという方法で、その結果はダイナモ理論の基礎をつくってきた。その代表的な例が、カウリングの反ダイナモ定理と平均場の理論である。カウリングの反ダイナモ定理は、完全に軸対称な天体磁場の存在を否定するものである。しかし、実際には、多くの天体でほぼ軸対称な磁場ができています。そこで、軸対称の枠組みにおいて非軸対称な現象を理解するために、非軸対称成分を平均量で置き換えるという平均場の理論が導入された。平均場の理論において、カウリングの反ダイナモ定理を回避して、ダイナモが駆動されるために重要となるのが平均誘導起電力で、これがヘリシティによって生成される。特に、平均誘導起電力が大スケール磁場に対して瞬間的かつ局所的に生成される場合、その応答係数が狭義の α 効果と呼ばれる。瞬間的かつ局所的な α 効果は、磁気レイノルズ数が1よりも小さいときに成立する。 α 効果に基づく平均場ダイナモ理論は、軸対称成分が卓越する磁場の生成を、さらには、太陽磁場のような振動磁場の生成を定性的に説明する。しかし、定量的に天体磁場の特徴を説明しようとした場合、単純な α 効果だけでは無理であることがわかっている。これらをいかに克服するかが、近年のダイナモ理論の主要課題となっており、 α 効果の空間分布や非線形性、 α 効果以外の平均誘導起電力のモデルの導入などが検討されている。

それに対し、本論文の第3章では、磁気レイノルズ数が $\mathcal{O}(1)$ よりも大きい状況で、 α 効果の前提となっていた局所性と瞬間性の仮定をせずに、広義の α 効果がどのような非局所性と非瞬間性をもつかを示す。平均誘導起電力の振る舞いを、磁気レイノルズ数の関数として、G.O.Roberts(1972)のキネマティックダイナモモデルにおいて調べる。その流れ構造は、天体内部の熱対流と類似し、ダイナモや平均誘導起電力の生成にとって重要なヘリシティをもち、さらに、2次元周期性があるので数学的に解析しやすい。Robertsの流れがつくる平均誘導起電力を数値計算で具体的に求めることによって、ヘリシティをもつ流れが生成する α 効果を厳密に調べることができる。その結果として、平均誘導起電力の振る舞いは、磁気レイノルズ数の大きさによって、3つのタイプに分類できることがわかった。まず、磁気レイノルズ数が $1/4$ よりも小さい場合は、平均誘導起電力は局所的かつ瞬間的で、従来の α 効果でまさに表現できる。しかし、磁気レイノルズ数が大きくなるにつれ、伝統的な α 効果からのずれが大きくなり、非局所性と非瞬間性が増す。そして、磁気レイノルズ数が4よりも大きい場合、平均誘導起電力の非局所性および非瞬間性が顕著に現れる。しかも、その非局所性と非瞬間性は大スケール磁場の生成にも強く影響を与え、天体のスケールと同程度のスケールの磁場成分を卓越させるという効果をもつ。つまり、実際の天体に近い状況では、非局所性と非瞬間性を考慮して α 効果を拡張する必要があるということである。このようにして拡張された α 効果は、地球や太陽を始めとする天体磁場における卓越波長成分の問題や、大規模数値シミュレーションを介した天体磁場との定量的な比較に貢献するだろう。

謝辞

本研究は、多くの方々のご指導とご支援をうけました。

地球惑星物理学講座 (以下、地物講座) の教員の皆さんには、数学の使い方、物理の考え方、文章の読み方を学びました。特に、指導教員の吉田茂生さんは、数学も何も知らなかった学部時代から、それなりにダイナモを語れるようになった現在に至るまで、気長につきあって下さいました。渡邊誠一郎さんと城野信一さんにも、学部時代以来、機会あるごとに話をきいて頂き、鋭いコメントを頂きました。また、過去に PD として地物講座に在籍された、川田佳史さんと小林浩さんは、学生生活を送る上での指針でもありました。

その他、地物およびダイナミクス講座の卒業生の皆さん、現学生の皆さんからは、多くの激励と刺激を受けました。特に、村上拓馬さん、木津貴章さんを始めとする同期の皆さんとは多くを語り合いました。

また、大学内外で話を聞いて下さった皆さんからは、プレゼンテーションの重要性を学びました。特に、清水久芳さん、陰山聡さん、櫻庭中さんには、最先端でダイナモ (やその周辺) を研究されている方の視点からのコメントも頂きました。

本研究は、名古屋大学 21 世紀 COE プログラム “太陽-地球-生命圏 相互作用の変動学”、環境学研究科学生研究活動支援事業、および、井上科学振興財団から、研究費用の援助を受けました。これらの援助により、安心して研究活動に専念し、また、国際学会や研究会に参加することができました。国際学会や研究会へ参加したことで、論文の執筆が研究者の義務であることをはっきりと認識することができました。

なお、本研究の数値計算の一部では、国立天文台天文シミュレーションプロジェクトにおける一般共同利用計算サーバ群、および、名古屋大学情報連携基盤センターの一般共同利用システムを利用しました。特に、3次元データの可視化には、名古屋大学情報連携基盤センターの可視化システム Vis Plus を使用し、高橋一郎さんに技術的な支援を頂きました。

最後に、本研究に直接には関わりませんが、本研究を行うに至るきっかけを与えて下さった小長谷誠さんと土井昭男さん、そして、大学院へ進学することを許してくれた家族に、感謝します。

目次

第1章	はじめに	5
第2章	天体ダイナモ理論の基礎	13
2.1	基礎方程式	13
2.1.1	磁場の誘導方程式	14
2.1.2	流れの方程式	20
2.2	流れ	24
2.2.1	回転する低粘性な流れ	24
2.2.2	熱対流	26
2.3	ダイナモ	29
2.3.1	キネマティックダイナモの基礎	30
2.3.2	反ダイナモ定理	31
2.3.3	ダイナモ作用をもつキネマティックダイナモの例	33
2.3.4	Rm が大きいときのダイナモ	37
2.4	平均場ダイナモ理論	39
2.4.1	基礎方程式	39
2.4.2	誘導起電力のモデル化	42
2.4.3	α 効果による平均場の基本解	44
2.4.4	α 効果の生成	50
2.4.5	α 効果による平均場理論のまとめ	54
第3章	G.O.Roberts の流れによる平均誘導起電力の非局所的なメモリー効果	60
3.1	はじめに	60
3.2	G.O.Roberts の問題	65
3.2.1	設定	65
3.2.2	磁場の分散関係	67
3.3	G.O.Roberts の流れにおけるカーネル ϕ_{qr}	69
3.3.1	定式化	69
3.3.2	数値計算	74
3.4	結果: 平均誘導起電力 ϕ_{qr} の特徴	75
3.4.1	領域 1: $Rm \lesssim 1/4$	76
3.4.2	領域 2 (遷移領域): $1/4 \lesssim Rm \lesssim 4$	80
3.4.3	領域 3: $Rm \gtrsim 4$	84
3.5	ϕ_{qr} による分散関係	86

3.5.1	$\tilde{\varphi}$ および $\tilde{\psi}$ による平均場の分散関係 : $Rm \ll 1$	86
3.5.2	$\tilde{\varphi}$ および $\tilde{\psi}$ による平均場の分散関係 : $Rm \gtrsim 4$	87
3.5.3	誘導起電力と磁力線、流れ構造の関係	90
3.6	まとめと議論	92
第 4 章	まとめと議論	98

第1章 はじめに

天体の磁場

天体の多くは磁場をもっており、様々な形態をもっている。

例えば、最もなじみのある地球の磁場は、全球的な特徴として、北半球に S 極、南半球に N 極をもつような双極子型であり、その双極子軸は自転軸に対して約 11 度の傾き (軸の向きを考えるなら 169 度) をもつ (e.g. Merrill *et al.*, 1998)。しかし、それは完全な双極子磁場ではなく、最も波長が長い双極子成分に加えて、非双極子成分、つまり、短波長成分も多く含むために、空間的に複雑な分布をしている (図 1.1)。また、地球磁場は、時間的にも様々な変動をもつ。例えば、速さ約 0.1–0.2 度/year で定常的に磁場分布が伝播していく永年変動や、数万年から数百万年の間隔をおいて不規則におこる極性の反転などが有名である。さらに、このような全球的な成分に加えて、より局所的な空間分布や、より短期的な時間変動も存在するが、本論文では、空間的かつ時間的に長いスケールの磁場に興味があるため、以下ではこれらを扱わない。

また、惑星¹の多くも磁場をもち、その空間構造は地球磁場とよく似た構造だったり異なる構造だったりする (e.g. Stevenson, 2003; Jones, 2007a)。地球以外の岩石惑星の中で磁場をもつのは、水星である。その磁場は、地球のように、自転軸に対し傾いた軸をもつ軸双極子型だろうと考えられている。しかし、地球に近い金星および火星は、現在、全球的な磁場をもたない。一方、ガス惑星は、すべての惑星が全球的な磁場をもつ。木星は、比較的地球に似た空間構造で、自転軸に対し 10 度程度傾いた軸双極子型の磁場をもつ。また、土星も軸双極子型の磁場をもつが、その双極子軸が自転軸とほぼ一致するということが大きな特徴である。さらに、天王星および海王星の磁場は、他惑星の磁場と異なる特徴をもち、双極子成分と四重極子成分を同程度に強く、双極子成分の軸は自転軸に対して 40 度から 60 度傾いているような構造をもつ。

恒星である太陽の磁場は、地球磁場と同様に、軸対称な双極子成分が卓越した磁場だが、地球磁場と異なり、周期 22 年で規則的に振動するということが特徴である (e.g. Ossendrijver, 2003)。この振動が、太陽黒点の周期的な振る舞いをおこしている。黒点は、太陽内部の磁場が表面に現れるために生成されるといわれており (Parker, 1955a)、その観測的な特徴として有名なものが、パタフライダイアグラム (図 1.2) である。黒点は、常に正負の極性をもったペアで、中緯度域 (約 ± 27 度) に現れ、時間とともに赤道方向へ伝播してく。そして、赤道域 (約 ± 8 度) で消滅した後、極性をかえて、再び中緯度域に出現する。この出現と消滅の周期が約 11 年、極性を含めると約 22 年で、これに応じて、太陽活動 (磁場強度) が周期的に変動している。

¹2006 年の名称の定義に従い、本論文中の「惑星」には冥王星は含めない。

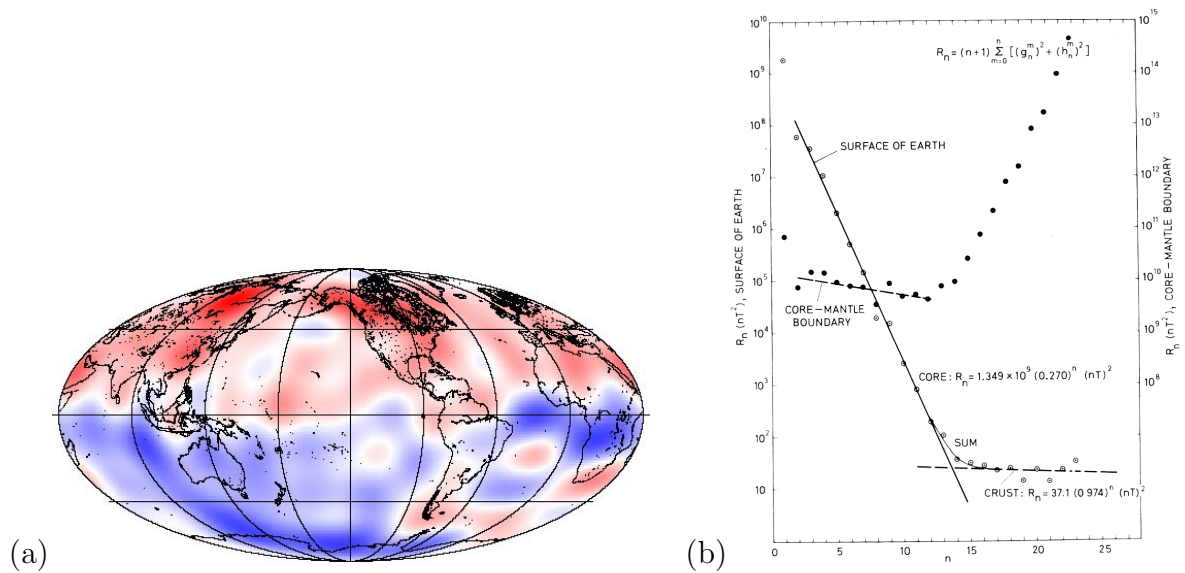


図 1.1: 地球磁場の空間構造。(a) コア表面での地球磁場の動径成分。2001 年 IGRF 12 次までのデータを使用。吉田 提供。青が正、赤が負を表す。(b) 磁場エネルギーのスペクトル。白丸および黒丸はそれぞれ、地表およびコア表面での各次数の強度を表す。線は丸印のデータから対数スケールで直線近似したもの。Langel (1987) より引用。

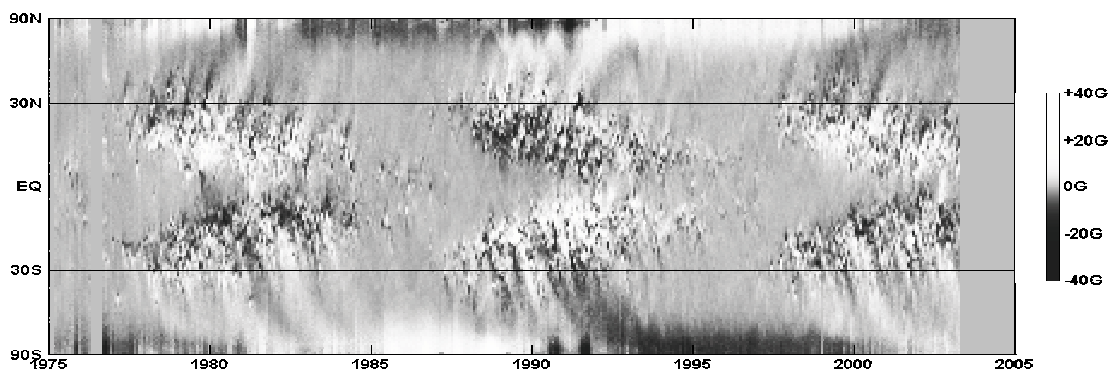


図 1.2: 太陽表面での磁場の動径成分の経度平均、通称バタフライダイアグラム。Ossendrijver (2003) より引用。

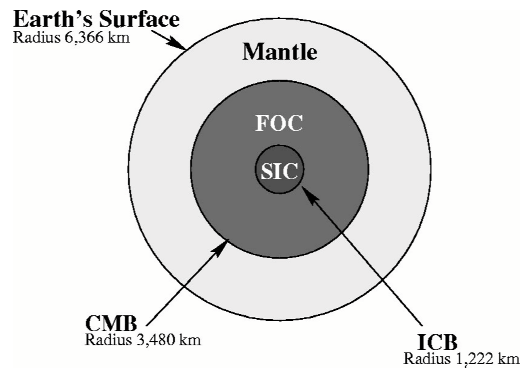


図 1.3: 地球内部構造の概念図。内側から、内核 (SIC)、外核 (FOC)、マントル、そして、地表。内核と外核、および、外核とマントルの境界はそれぞれ、ICB および CMB と呼ばれる。Roberts & Glatzmaier (2000) より。

また、その他の恒星、さらには銀河についても、磁場の存在が確認されている (e.g. Brandenburg & Subramanian, 2005; Shukurov, 2007)。

ダイナモ作用

これら天体の全球的な磁場の源は、天体内部における、電気伝導度をもった流体運動が誘導する起電力であり、その作用はダイナモ作用と呼ばれる (Larmor, 1919; Moffatt, 1978; Gubbins, 2007)。全球的な磁場の成因説として、永久磁石説などをはじめ諸説が唱えられたが、上述のような、空間的また時間的に複雑な磁場の振る舞いを説明できないことから、ダイナモ作用以外の説は棄却された (ダイナモ作用以外の磁場の成因説については、Stevenson (2007) などを参照)。現在では、天体内部構造の探査などから、天体内部に電気伝導度をもった液体や気体 (またはプラズマ) の層が存在することが知られている。例えば、地球には、流体鉄からなる外核 (図 1.3) が、太陽には、プラズマ化した水素およびヘリウムからなる対流層 (図 1.4) がある。それらでは、天体内部の熱を外部へ輸送するために熱対流がおこっており、その対流運動に伴う電流が、天体の磁場を生成している。

天体ダイナモ作用は、Larmor によって提唱されて以来、研究されてきたが、現在でも、その理論は十分に構築されたとはいえない。もちろん、多くのこともわかっており、太陽のような振動型磁場と地球のような定常型磁場の生成メカニズム、対称成分が卓越するメカニズムなどの定性的な理解は得られている。しかし、なぜ地球や太陽の磁場は双極子成分を卓越してもつのか、また、天王星や海王星の磁場のような構造の違いはなぜできるか、などの問いには、統一的な見解がまだない。これらは、天体ダイナモ作用のさらなる研究が必要だということを示している。本研究も、大目標として天体ダイナモ作用の解明を目指すものである。

なお、以下では、天体ダイナモの代表例として、地球と太陽を特にとりあげることにする。

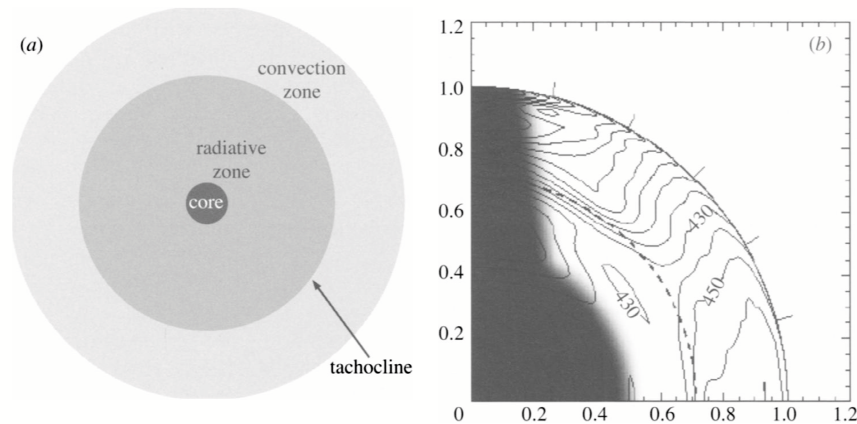


図 1.4: (a) 太陽内部構造の概念図。内側から、コア、放射層、対流層、そして、表面 (光球面)。中心から表面までの半径は $R \sim 6.96 \times 10^8 \text{m}$ で、対流層は半径 $0.7R$ から表面までに位置する。対流層の底には、厚さ約 $0.02R$ の tachocline と呼ばれる境界層が存在する。(b) 対流層における自転角速度の分布。横軸および縦軸の数字はともに、天体半径で規格化した天体中心からの距離。縦軸は自転軸方向にとり、横軸は自転軸からの距離を、等高線は自転角速度を周波数 $\Omega/2\pi$ [n Hz] で表す。点線は対流層の底を示す。底近くの、自転角速度が急激に変化する層が tachocline。(a)(b) ともに Tobias (2002) より。

近年のダイナモシミュレーションと本研究の立場

近年では、現実の天体磁場にきわめて似た構造が、数値シミュレーションによって再現できるようになった。

地球では、ダイナモ作用を記述する方程式系 (2.1 節で後述) をできるだけ多く使い、より現実的な状況を解こうという電磁流体力学 (以下、MHD) 直接数値シミュレーションがさかんに行われている (e.g. Roberts & Glatzmaier, 2000; Kono & Roberts, 2002)。その先駆的な結果として、実際の地球磁場によく似た双極子成分の卓越や磁場の反転が、数値計算によって再現され、その過程の様子が示された (Glatzmaier & Roberts, 1995)。近年では、より現実の状況に近い、高解像度の計算が試みられ、古地磁気的な反転頻度との比較などが議論されている (Takahashi *et al.*, 2005)。

しかし、その数値結果を解析して、その磁場構造の生成メカニズムを解釈することが簡単でなく、数値結果をいかに解析し解釈していくかが一つの問題となっている。Kageyama & Sato (1997) および Olson *et al.* (1999) は、過去のダイナモ基礎理論における概念を使用し、数値計算で得られた、双極子成分の卓越のメカニズムを説明しようと試みた。磁場が成長していく過程を磁力線を使って調べ、その磁力線の時間発展の様子から、磁場トロイダル成分がポロイダル成分に変換される過程は、 α 効果によって支配されていると解釈した。 α 効果とは、天体磁場のような大スケールの磁場の生成を議論する際に、天体内部の小スケールの現象が及ぼす効果を近似的に表現するモデルの一つで、3次元的なねじれをもつ流れがある場合、生成されやすく、大スケール磁場の生成に寄与すると考えられ

ている。しかし、Kageyama & Sato (1997) および Olson *et al.* (1999) が磁力線を使って示した、 α 効果の描像は、過去のダイナモ基礎理論において考えられてきた α 効果の描像とは異なる。これらは、解釈に適用しようとしたダイナモ基礎理論における概念、つまり、 α 効果という概念自体が、まだ十分に確立されていないことを示唆する。

太陽ダイナモ分野では、MHD 直接数値シミュレーションよりも、大規模な流れ構造をあらかじめ与えた、平均場モデルによる数値シミュレーションがさかんに行われている (e.g. Ossendrijver, 2003; Tobias & Weiss, 2007)。太陽では、近年の日震学の進展により、対流層内部の大スケールの流れ構造がわかってきたため (図 1.4b)、その大スケールの流れ構造による制約を与えた平均場モデルシミュレーションが主流となっている。平均場モデルでは、天体内部の小スケールの現象を α 効果などでモデル化をして、全球的な大スケール磁場の生成を扱う (2.4 節で後述)。例えば、Dikpati & Gilman (2001) らは、対流層の底の tachocline (図 1.4) における強いシア流に注目して α 効果モデルをたて、その α 効果モデルに基づく平均場ダイナモシミュレーションを行った。その結果、光球面で極向きに流れるような子午面循環がある場合、観測的に知られている太陽磁場の振る舞いをよく再現できることを示した。さらに、彼女らは、そのモデルに基づいて太陽活動の将来予測も行った (Dikpati *et al.*, 2006)。

一方で、これらの平均場シミュレーションの結果、大スケール磁場の振る舞いが、モデル化して扱った小スケールの現象、つまり、 α 効果モデルに敏感であるということも明らかになった。つまり、小スケールの現象をいかにとらえるかということ次第で、太陽磁場の生成を説明できるかどうかは全く異なってしまうということである。しかしながら、これらの小スケールの現象を観測的に知ることは現段階では難しく、かつ、小スケールの現象に関する理論的な理解もまだ十分でない。これらより、小スケールの現象、つまり、 α 効果が太陽対流層でどのような振る舞いをするか、また、どのように生成されるかということが、全球スケールの磁場の特徴を理解する上で解決すべき問題であることがわかる。

ここまでで、近年のダイナモ研究の状況を、地球と太陽とのそれぞれで述べてきたが、注目すべきなのは、両者ともに α 効果を基礎とした議論になっているという点である。 α 効果は、長年、ダイナモ理論において中心的な役割をはたしてきた概念である。しかし、上述したように、 α 効果を用いた近年のダイナモ研究は、困難にあたっている。本研究では、その困難の源が α 効果自体にあるのではないかと考える。 α 効果という概念自体がまだ確立されていないために、近年の研究における困難が生じており、これを解決するためには α 効果を正しく知り、その概念を定義し直せばよいだろうと考える。

本研究の目的

そこで、本研究では、天体ダイナモ理論の中で、長年、中心的な概念となってきた α 効果を再検討する。 α の実体は、その有効性にも関わらず (むしろ、その有効性のために)、明確に基礎づけられていた訳ではない。特に、実際の天体に近い状況における α の描像が明らかでない。というのも、最初に α が導入されたのが、数学的に扱いやすい、実際の天体とかけ離れた状況だったためである。その α によってある程度の成功をみたため

に、そのモデルが適切かどうかはあまり検討されないまま、伝統的に使用されてきた。本論文は、この点を見直し、より天体に近い状況における α 効果を基礎づけることを目的とするものである。その結果として、従来使用されてきた「 α 」、および、天体ダイナモを考える際に使用されるべき「 α 」の描像が示される。なお、後者の α 効果は、従来のものと区別するために、「非瞬間的で非局所的な効果」または「非局所的なメモリー効果」と呼ぶ。この言葉の意味は、本文の中で、追々説明される。

ここで、 α 効果で想定する現象として、大きくわけて2つ、つまり、天体内部の流れおよび磁場と、乱流とがあることを明記しておく。 α 効果は、現象を大スケールのものと小スケールのものに分離して扱おうという考えに基づいて導入され、その枠組みは平均場理論と呼ばれる。平均場理論では、大スケール成分を平均、小スケール成分を平均からのずれで、それぞれ表現する。ここで、平均をどう定義するかが、2つのどちらの現象を考えるかによって異ってくる。天体内部の流れや磁場を考える際には、平均を自転軸周りの平均で定義する。このとき、平均成分は軸対称成分を、ずれ成分は非軸対称成分を表し、平均場理論の枠組みは、天体磁場の軸対称成分の生成を議論するための枠組みとなる。一方、乱流を考える際には、平均をある空間的長さやアンサンブル平均で定義し、平均場理論の枠組みを用いて、乱流の統計的な性質を議論する。つまり、平均場理論とは、この2つの現象を一般化して扱う枠組みと言える（これらは2.4節で整理される）。本論文は主に、前者の天体内部の流れや磁場を想定して、 α 効果の非瞬間性と非局所性を議論していくが、そこで得られた結果は、一般的に、平均場理論の枠組みで語る事ができる。本研究は、一般的な平均場理論に対して、 α 効果の非瞬間性と非局所性の重要性を示すことを目標とするものである。

本論文の構成は以下のようになっている。2章では、天体ダイナモ理論の基礎を概説する。特に、本研究で注目する α 効果という概念が、これまでの理論でどのように導入され、使用されてきたか、また、理論に対しどういう意味をもってきたかに重きをおく(2.4節)。つづく3章が本論である。そこでは、従来使用されてきた α 効果の問題点を述べた後、その問題点を検討するために行った数値解析の結果を示す。その解析方法は、従来のダイナモ理論の枠組みに従った、標準的な方法である。これまでに標準的とされてきた手順にのっとることで、従来の描像と本研究による新たな描像との違いが明確になる。そして、4章で、本研究の結果が天体ダイナモ理論に与える意味を述べ、結論とする。

関連図書

- Brandenburg, A., Subramanian, X., Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory. *Physics Reports*, 2005, **417**, 1–209.
- Dikpati, M., Gilman, P.A., Flux-transport dynamos with α -effect from global instability of tachocline differential rotation: A solution for magnetic parity selection in the Sun. *Astrophys. J.*, 2001, **559**, 428–442.
- Dikpati, M., de Toma, G., Gilman, P.A., Predicting the strength of solar cycle 24 using a flux-transport dynamo-based tool. *Geophys. Res. Lett.*, 2006, **33**, L05102.
- Glatzmaier, G.A., Roberts, P.H., A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature*, 1995, **377**, 203–209.
- Gubbins, D., Larmor, Joseph (1857–1942). In *Encyclopedia of Geomagnetism and paleomagnetism*, edited by D. Gubbins and E. Herrero-Bervera, Encyclopedia of earth sciences series, 2007, 468 (Springer: Dordrecht).
- Jones, C., Planetary Dynamos. edited by E. Dormy and A.M. Soward, 2007, 257–280 (CRC Press: Boca Raton).
- Kageyama, A., Sato, T., Generation mechanism of a dipole field by a magnetohydrodynamic dynamo. *Phys. Rev. E.*, 1997, **55**, 4617–4626.
- Kono, M., Roberts, P.H., Recent geodynamo simulations and observations of the geomagnetic field. *Reviews of Geophysics*, 2002, **40**, 4/1–53.
- Langel, R.A., The Main Field. In *Geomagnetism*, Vol.1, edited by J.A. Jacobs, 1987, 249–512 (Academic Press: London).
- Larmor, J., How could a rotating body such as the Sun become a magnet ? *Rep. Brit. Assoc.*, 1919, **87**, 159–160.
- Merrill, R.T., McElhinny, M.W., McFadden, P.L., *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*, 1998 (Academic Press: San Diego).
- Moffatt, H. K., *Magnetic Field Generation in Conducting Fluids*, 1978 (Cambridge University Press: Cambridge).

- Olson, P., Christensen, U., Glatzmaier, G.A., Numerical modeling of the geodynamo: Mechanisms of field generation and equilibration. *J. Geophys. Res.*, 1999, **104**, 10383–10404.
- Ossendrijver, M., The solar dynamo. *Astron. Astrophys. Rev.*, 2003, **11**, 287–367.
- Parker, E.N., The formation of sunspots from the solar toroidal field. *Astrophys. J.*, 1955, **121**, 491–507.
- Roberts, P.H., Glatzmaier, G.A., Geodynamo theory and simulations. *Reviews of Modern Physics*, 2000, **72**, 1081–1123.
- Shukurov, A., Galactic dynamos. In *Mathematical Aspects of Natural Dynamos*, edited by E. Dormy and A.M. Soward, 2007, 313–359 (CRC Press: Boca Raton).
- Stevenson, D.J., Planetary magnetic fields. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 2003, **208**, 1–11.
- Stevenson, D.J., Nondynamo theories. In *Encyclopedia of Geomagnetism and paleomagnetism*, edited by D. Gubbins and E. Herrero-Bervera, Encyclopedia of earth sciences series, 2007, 704–706 (Springer: Dordrecht).
- Takahashi, F., Matsushima, M., Honkura, Y., Simulations of a quasi-Taylor state geomagnetic field including polarity reversals on the Earth Simulator. *Science*, 2005, **309**, 459–461.
- Tobias, S., The solar dynamos. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A.*, 2002, **360**, 2741–2756.
- Tobias, S., Weiss, N., Stellar dynamos. In *Mathematical Aspects of Natural Dynamos*, edited by E. Dormy and A.M. Soward, 2007, 281–311 (CRC Press: Boca Raton).

第2章 天体ダイナモ理論の基礎

本章では、本論である3章で前提とされる概念や言葉の説明を中心にして、天体ダイナモの基礎理論を概観する。まず、2.1節では、ダイナモ問題を記述する磁気流体の基礎方程式について述べる。そして、地球と太陽を想定して、方程式の各項の寄与の大きさを見積もり、天体ダイナモ問題の特徴を明らかにする。つづく2.2節および2.3節で、磁気流体の基礎方程式、特に、流れの式と磁場の式の解の特徴を述べる。2.2節では、天体内部の流れとして特徴的な構造が説明され、それらの流れにおいて、非鏡映対称なねじれを表す helicity と呼ばれる量が0にならないことが多いということが示される。2.3節では、ダイナモ理論の基礎として、過去のキネマティックダイナモ研究から得られている性質を述べる。ここでは、ダイナモの存在を否定する反ダイナモ定理と、それを回避して、ダイナモを駆動する流れやモデルが紹介される。その経験的な結果として、helicity がダイナモの生成にとって重要だろう、ということが示される。2.4節では、ダイナモの生成を説明する枠組みの一つとして、現在でも重要だと考えられている、平均場の理論について述べる。そこで、helicity によってダイナモが駆動される過程が明らかになる。3章の本論は、平均場理論の枠組みに位置づけることができるため、2.4節では、平均場の理論における伝統的な考え方とその問題点を示す。

2.1 基礎方程式

この節では、天体ダイナモ問題を考える際に、標準的に使用される基礎方程式を与える。そして、それら基礎方程式の一般的な特徴を述べる。流れや磁場の解の特徴や、ダイナモ問題に特に関連する内容は、次節と次々節で扱う。

天体ダイナモ作用は、自転する天体の内部における電磁流体力学的な現象なので、その過程は、以下の方程式群で記述される。現象の基本法則を記述するのは、磁場の時間発展についての誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.1)$$

質量の保存についての連続の式

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.2)$$

流れの運動学的な時間発展についての Navier-Stokes 方程式

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] + 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla p - \delta\rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (2.3)$$

そして、熱輸送の方程式

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + (\mathbf{T} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\sigma \mu_0^2} |\nabla \times \mathbf{B}|^2 \quad (2.4)$$

である。そして、これらに、各物理量の特性を記述する方程式である、熱力学的な状態方程式

$$\rho = \rho(p, T), \quad S = S(p, T) \quad (2.5)$$

と流れの構成方程式

$$T_{ij} = T_{ij} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (2.6)$$

を加える。その結果、 g, Ω が与えられているとすると、未知数は $B, \rho, \mathbf{u}, T, p, S, T$ の 19 個、方程式は 19 本となり、系は閉じる。これらに、適当な境界条件を与えれば、問題は解ける。

本論 (3 章) では、流れ構造と磁場構造の関係に注目するため、本節でも、特に、誘導方程式 (2.1) および Navier–Stokes 方程式 (2.3) について述べることにする。電磁気学および流体力学の詳細はそれぞれ、砂川 (1999) や 今井 (1979) などを、磁気流体力学の定式化については Gubbins & P.H.Roberts (1987), 吉田など (2002), Desjardins *et al.* (2007) などを参照されたい。

2.1.1 磁場の誘導方程式

本節では、一般的な事項として、誘導方程式の導出、方程式中の各項の意味、無次元パラメータの導入、そして (2.1) から導かれる磁気エネルギーバランスを見る。ダイナモ問題に特に関連する話題は、2.3 節で扱う。また、この文では、MKSA 単位で扱うことにする。単位による違いは、ジャクソン (1994)、今井などを参照のこと。

非相対論的な磁気流体近似の下で、運動物体中における磁場の時間発展を記述するのは、誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.1)$$

である。ここで、 λ は磁気拡散率で、場所によらず一定とする。また、初期状態では、磁束に関する Gauss の法則

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.7)$$

が要請される。誘導方程式 (2.1) の右辺第 1 項は流れによる磁場の移流を、第 2 項は磁場の拡散を表し、磁場の時間発展が、その 2 つの効果のバランスで決まることを示す。

導出

誘導方程式 (2.1) は、以下のように導出される。

2.1. 基礎方程式

まず、出発点となるのは、電場 \mathbf{E} および磁場 \mathbf{B} に対する Maxwell 方程式群

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j} \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.11)$$

である。ここで、 \mathbf{j} は電流密度、 ρ は電荷密度で、 ε_0 と μ_0 はそれぞれ、真空中の誘電率と透磁率と呼ばれる定数である。

Maxwell 方程式群は独立ではなく、(2.8) (2.9) は (2.10) (2.11) を内包する。例えば、Faraday の法則 (2.8) の両辺に対し、発散をとると

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = -\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0 \quad (2.12)$$

となる。つまり、初期条件として、(2.10) が満たされてさえいれば、その後の時間の磁場 \mathbf{B} は、(2.10) を自動的に満たすということがわかる。同様のことは、電場 \mathbf{E} に対しても示すことができる。

光より遅い現象を扱う場合、Maxwell 方程式群は電磁場の時間スケールとを 2 つをもち、その片方を選択したときに磁気流体近似となる。一つは、(2.8) の時間スケール $\tau_M = LB/E$ で、もう一つは、(2.9) の時間スケール $\tau_E = \varepsilon_0 \mu_0 LE/B$ である。前者の時間スケールをとって現象を考える近似は、磁気流体 (MHD) 近似と呼ばれ、後者の時間スケールをとる近似は、電気流体 (EHD) 近似と呼ばれる。現実の興味ある世界では、多くの場合、MHD 近似が適当である。したがって、以下では、MHD 近似のみを扱う。このとき、(2.9) は、

$$\frac{|\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}|}{|(1/\mu_0) \nabla \times \mathbf{B}|} \sim \varepsilon_0 \mu_0 \frac{LE}{\tau_M B} = \frac{E^2}{c^2 B^2} \ll 1 \quad (2.13)$$

となる。ここで、光速 $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ を使った。したがって、MHD 近似下での Maxwell 方程式群は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (2.14)$$

$$0 = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{j} \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.17)$$

となる。

式 (2.14) (2.15) を解くためには、 \mathbf{j} と \mathbf{E} , \mathbf{B} についての構成方程式が必要である。ただし、電場や磁場などの物理量は系に異なってみえるということに注意しよう。いまは、

光速より十分遅い速度で運動する物体中における電磁場を、静止系から見た表現で、記述したい。速度 u で運動する系を考える。この運動系内で電流と電磁場との関係を表す構成方程式は、Ohm の法則

$$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}' \quad (2.18)$$

である。定数 σ は電気伝導度である。一方、この物体中における電磁場 \mathbf{E}' , \mathbf{B}' 、および電流 \mathbf{j}' は、静止系 $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{j})$ からみると、それぞれ

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad \mathbf{j}' = \mathbf{j} \quad (2.19)$$

と書ける¹。したがって、運動物体中での Ohm の法則を、静止系からみると、

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.20)$$

となる。物体中でみたときの (2.18) と比べて、右辺第 2 項が現れることが特徴である。

この運動物体中の Ohm の法則 (2.20) と、MHD 近似下の Maxwell 方程式群 (2.14)-(2.16) より、誘導方程式 (2.1) が得られる。電場 \mathbf{E} 、電流 \mathbf{j} を消去するように、変形していく。(2.14) と (2.20) より

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.21)$$

となる。さらに、(2.15) より、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \lambda \nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.22)$$

となる。ここで、磁気拡散率 $\lambda = 1/(\mu_0 \sigma)$ とした。これを、ベクトル公式と (2.10) を使って書き直すと、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\lambda \nabla \mathbf{B}) \quad (2.23)$$

となる。よって、磁気拡散率の空間変化が十分小さいとき、(2.23) より、(2.1) が得られる。

磁場の自由拡散

右辺第 2 項の意味をみるために、流れがない場合を考えよう。このとき、 $\mathbf{u} = 0$ となるので (2.1) は、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \lambda \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.24)$$

となる。これは、いわゆる拡散方程式である。つまり、流れが存在しない場合、磁場は自由拡散することを示している。その拡散速度は、 λ が決めており、その典型的な時間スケール (拡散時間) は、

$$\tau_d \sim \frac{L^2}{\lambda} \quad (2.25)$$

である。

¹これは、電磁場の Lorentz 変換に、非相対論近似 $u/c \ll 1$ を用いると導出できる。

2.1. 基礎方程式

いくつかの天体で、拡散時間を見積もってみよう。例えば、地球コアでは、 $L \sim 2 \times 10^6 \text{m}$, $\lambda \sim 2 \text{m}^2/\text{s}$ であることから (P.H.Roberts & Glatzmaier, 2000)²、

$$\tau_d^{(\text{earth})} \sim 2 \times 10^{12} \text{s} \sim 10000 \text{ years} \quad (2.26)$$

となる。また、太陽の対流層では、 $L \sim 10^8 \text{m}$, $\lambda \sim 2 \times 10^2 \text{m}^2/\text{s}$ より (Tobias & Weiss, 2007; Rädler, 2000)、

$$\tau_d^{(\text{sun})} \sim 10^{14} \text{s} \sim 10^6 \text{ years} \quad (2.27)$$

と見積もられる。これらは、もし地球コアおよび太陽対流層に流れがなくなった場合、それぞれ、数万年および数百万年で磁場がなくなること示している。したがって、地球や太陽の磁場は化石磁場ではあり得ず、流れによって維持されていることがわかる。実際、地球磁場および太陽磁場には、数十年といった短い時間スケールの全球的な変動があることでも、流れの存在が示唆される。

完全導体

次に、(2.1) の右辺第 1 項の効果を考える。そのために、完全導体 (磁気拡散率が 0) の場合を考える。(2.1) で磁気拡散率を 0 とすると、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad \text{or} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \quad (2.28)$$

となる。後者の表現では、(2.2) を用いた。流れとともに動く線素 $d\mathbf{l}$ の時間発展 (Lagrange 微分) が

$$\frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) d\mathbf{l} = (d\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (2.29)$$

と書けることからわかるように、(2.28) 式は、磁場 \mathbf{B} を連続的につないだ磁力線が、流れ \mathbf{u} の流線に「凍結されて」時間発展し、引き伸ばされていくことを意味する (Alfvén の磁力線凍結定理 Alfvén's frozen-in theorem)。したがって、このときの磁場の発展の時間スケールは、流れの速さによって決まる。この時間スケール

$$\tau_a = \frac{L}{U} \quad (2.30)$$

は、移流時間または turn-over time と呼ばれる。

拡散時間のときと同様に、実際の天体における移流時間を見積もってみよう。太陽では、観測的に、対流層の表面に 10^2m/s 程度の流れがあることと、表面と底における自転角速度に最大 $10^2 \text{nHz} \sim 10^{-5} \text{rad/s}$ 程度の差があることが知られている (Tobias & Weiss, 2007)。これより、対流層の底での流れを 10m/s 程度と考えると、

$$\tau_a^{(\text{sun})} \sim 10^7 \text{s} \sim 1 \text{ year} \quad (2.31)$$

²磁気拡散率は、構成物質の電気伝導度 σ と透磁率 μ_0 から $\lambda = \mu_0 \sigma$ によって求めることができる。電気伝導度は、液体鉄で $\sigma \sim 3 \times 10^5 \text{S/m}$ 、プラズマ H-He で $3 \times 10^3 \text{S/m}$ 。(P.H.Roberts & Glatzmaier, 2000; Rädler, 2000)

となる。これは、太陽磁場の変動の周期と近い値であることから、太陽では、移流の効果が拡散の効果よりも重要であることがわかる。一方、地球コアの場合、流れを観測することができないため、流れの速さ U は不確かである。しかしながら、大まかな見積もりの際によく用いられるのは、磁場の西方移動の速さが流れの速さに等しいと考える方法である。ここでも、これを採用し、磁場の西方移動の速さより、 $U \sim 5 \times 10^{-4} \text{m/s}$ とすると (P.H.Roberts & Glatzmaier, 2000)、地球コアでの移流時間は

$$\tau_a^{(\text{earth})} \sim 10^{10} \text{ s} \sim 100 \text{ years} \quad (2.32)$$

となる。これを前述の拡散時間と比べると、やや短い時間ではあるものの、太陽の場合のそれらと比較して、それほど大きく違わない。つまり、地球磁場は、移流の効果と拡散の効果と同程度に効いた磁場であることがわかる。

無次元化と磁気レイノルズ数

ここまでで述べて来たような、2項のバランス、または、2つの時間スケールの違いを考えるために、誘導方程式を無次元化しておくことと便利である。そうすると、本質的に重要な無次元パラメータが得られる。長さ、時間、流れ、および磁場を、それぞれ、

$$\mathbf{x} = L\mathbf{x}_*, \quad t = \tau t_*, \quad \mathbf{u} = U\mathbf{u}_*, \quad \mathbf{B} = B\mathbf{B}_* \quad (2.33)$$

とスケールする³。ここで、 L, τ, U, B はそれぞれ、長さ、時間、流れ、磁場の典型的な大きさである。下添字 $*$ は、無次元量を表す。これらを、(2.1) に代入すると、無次元化された誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}_*}{\partial t_*} = \frac{\tau}{L/U} \nabla_* \times (\mathbf{u}_* \times \mathbf{B}_*) + \frac{\tau}{L^2/\lambda} \nabla_*^2 \mathbf{B}_* \quad (2.34)$$

が得られる。誘導方程式の時間スケールを、移流時間でとることにすると、 $\tau = \tau_a$ として、

$$\frac{\partial \mathbf{B}_*}{\partial t_*} = \nabla_* \times (\mathbf{u}_* \times \mathbf{B}_*) + Rm^{-1} \nabla_*^2 \mathbf{B}_* \quad (2.35)$$

となる。ここで現れた Rm が、磁気レイノルズ数と呼ばれる無次元パラメータで、

$$Rm = \frac{\tau_d}{\tau_a} = \frac{UL}{\lambda} \quad (2.36)$$

と定義される。磁気レイノルズ数 Rm は、誘導方程式において、磁気拡散項に対する移流項の比を表す。上述の磁力線凍結定理が $Rm \rightarrow \infty$ の場合にあたるということから想像されるように、直観的には、 Rm が大きいほど、磁力線は流れによって移流されやすい、と考えればよい。ダイナモ問題においては、磁場を生成するのは移流項であるため、 Rm が大きいほど磁場が生成されやすい。ダイナモ駆動のためには、少なくとも

$$Rm \geq \mathcal{O}(1) \quad (2.37)$$

³以下でわかるように、線形論では、磁場のスケールはいかに取ってもよい。磁場のスケールは、非線形論で始めて意味を成す。

であることが必要である。

地球コアおよび太陽対流層における磁気レイノルズ数の値は、前述の見積もり (2.26)(2.27) および (2.32)(2.31) より、

$$Rm^{(\text{earth})} \sim 10^2, \quad Rm^{(\text{sun})} \sim 10^6 \quad (2.38)$$

と得られる。これから、太陽磁場では、移流の効果が強く効き、地球磁場では、太陽ほどではないものの、やや移流が効く、ということがわかる。これは、前述していた、太陽磁場および地球磁場の特徴であり、一つのパラメータ Rm で、このような特徴を議論できるということを示している。

上述のように、内部磁場を生成している天体における磁気レイノルズ数は、 $\mathcal{O}(1)$ よりも大きい有限の値をとる。ダイナモ作用が存在するためには、拡散項よりも移流項が効いている必要があるからである。さらに、有限の磁気レイノルズ数とは、実際の天体が完全導体ではない、ということの意味する。つまり、いくら強い移流効果をもっているとはいえ、弱い拡散効果を見捨ててはならない。つまり、いかに Rm が有限の大きい値をとるような状況を理解していくかということが、天体ダイナモ問題においてポイントとなる。なお、本論 (3 章) でも、このことに注目していく。

磁場のエネルギーバランス

磁場の時間発展を、エネルギー的にも考えておこう。そのために、磁場のエネルギー方程式を、誘導方程式 (2.23) から導出する。誘導方程式 (2.23) の両辺で、 B との内積をとって整理すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{|B|^2}{2\mu_0} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{\sigma} |\mathbf{j}|^2 \quad (2.39)$$

となる。ここで、(2.15) と (2.20) を用いた。これを、全体積で積分して、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{|B|^2}{2\mu_0} dV = -\frac{1}{\mu_0} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} - \int_V (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} dV - \int_V \frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma} dV \quad (2.40)$$

となる。右辺第 1 項は外部領域へ流れ出る電磁エネルギーの流れ (Poynting flux)、第 2 項は Lorentz 力が単位時間あたりに外部領域へする仕事、第 3 項は Joule 発熱である。これらの項のバランスに応じて、磁場エネルギーは時間とともに成長または減衰する。右辺第 1 項は、積分範囲を無限遠にとると 0 となり、その寄与は重要でない。また、右辺第 3 項は電流の強さ j^2 を含むため、その体積分 $\int j^2/\sigma dV$ は一般に正であるのに対して、第 2 項の $(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}$ は一般に正ではない。つまり、右辺第 2 項の積分が負であるとき、運動エネルギーから磁場エネルギーへの変換が起こる。

ダイナモ問題の立場では、(2.40) において磁場エネルギーが時間成長したとき、ダイナモが駆動された、と呼ぶ。式 (2.37) は誘導方程式から見たダイナモ生成条件だったが、工

エネルギー方程式 (2.40) によると、磁気エネルギーが時間成長するためには、

$$-\int_V (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} dV > \int_V \frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma} dV \quad (2.41)$$

が満たされなければならない。Poynting flux 項の寄与は、上述の理由で無視した。ここで注意すべきことは、ダイナモの生成条件が、流れの運動エネルギーが Joule 散逸よりも大きいことだけでなく、Lorentz 力による仕事が Joule 散逸よりも大きいことという点である。Lorentz 力による仕事は体積分として寄与すればよいため、流れが十分速くなくとも、流れの構造によっては効率的に仕事をすることができる。つまり、ダイナモが駆動されるかどうかは、流れの強さ（運動エネルギー）だけでなく、流れの構造や、Joule 散逸とのバランスにも依存する。したがって、流れ構造や磁気レイノルズ数の、ダイナモに対する影響を、詳細に解析していくことも重要である。後述するキネマティックダイナモ解析は、これを扱う。キネマティックダイナモでは、流れの起源を問わず、誘導方程式のみを解析することで磁場の性質を調べる。後述する本論 (3 章) でも、キネマティック解析を行う。

2.1.2 流れの方程式

MHD 近似下で、回転系にある流れの時間発展は、Navier-Stokes 方程式

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] + 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla p - \delta\rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (2.3)$$

が記述する。また、粘性応力テンソル \mathbf{T} を記述する、流れの構成方程式 (2.6) は、例えば、等方な Newton 流体の場合、

$$T_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \quad (2.42)$$

と与えられる。また、圧縮性の流れの場合、 \mathbf{u} は (2.3) に、 ρ は (2.2) に従って、時間発展する。

各項は、以下のような意味を表す。左辺第 1 項は、流体要素の運動量変化 (Lagrange 微分) を表す。左辺第 2 項は、角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転する系にのった場合に現れる慣性力である Coriolis 力で、自転の効果を表す。右辺第 1 項および第 3 項は、面積力を表す。第 1 項は、等方的に作用する成分（圧力）が、位置によって異なることで生じる項で、圧力勾配力である。右辺第 3 項は、速度勾配に依存する応力の勾配から生じる力で、粘性項を表す。右辺第 2 項および第 4 項は、体積力を表す。第 2 項は、重力の方向に密度成層しているときに、その静止密度分布から、密度が $\delta\rho$ だけずれた流体粒子がうける浮力を表す。密度成層が不安定なとき、この項により対流運動がおこる。第 4 項は MHD 近似下での電磁気力である Lorentz 力を表す。

本節の以下の部分では、特に、Coriolis 力、Lorentz 力と、浮力項および対流を扱う際に重要な Boussinesq 近似について説明する。これらは、ダイナモを駆動する天体内部の

流れを考える際に重要となるからである。その他の項については、一般的な流体力学の教科書などを参照されたい。また、最後に、各項の重要性をみるため、(2.3) の次元解析を行う。

回転

自転している天体内の流れを考えると、その流れを扱うためには、回転系からみた方程式に書き直す必要がある。静止系からみた流れ u_I の時間微分は、角速度ベクトル Ω で回転する系からみた流れ u_R を使って、

$$\left. \frac{du_I}{dt} \right|_I = \left. \frac{du_R}{dt} \right|_R + \frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{x} + 2\Omega \times \mathbf{u}_R + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{x}) \quad (2.43)$$

と書ける。この全体に ρ をかけたものが、運動方程式において、単位体積あたりの流れの慣性項である。右辺第1項による $\rho du_R/dt$ は、回転系における流れの時間発展そのものを表す。第2項から第4項は、基準系が変わったことによって、見かけ上、現れる慣性力を表し、それぞれ、Poincaré 力、Coriolis 力、遠心力である。Coriolis 力は、Poincaré 力や遠心力と異なり、仕事をしないということも特徴である。

以下では、回転の効果によって現れた3つの項の中で、運動の基本構造に寄与するのは Coriolis 力のみであるとする。遠心力項は、ポテンシャル量として表現できるため、通常は、重力ポテンシャルとまとめて、以下のように重力項の中で扱われる。

$$\rho \mathbf{g} = \rho \nabla \left(\Phi + \frac{|\Omega \times \mathbf{x}|^2}{2} \right) \quad (2.44)$$

本論でもこの形式に従う。一方、Poincaré 力には注意が必要である。例えば地球で考えると、液体コアでの Poincaré 力は、地球回転、つまり、固体マントルの回転の変化に回答して生じるため、その扱いは簡単でない。以下では、簡単のために角速度ベクトルは一定とし、Poincaré 力の寄与は考えないことにする。歳差による流れまたはダイナモへの影響についての解説は、Cardin (2007) などにある。

MHD 近似下の電磁気力

電磁氣的な力は一般に、静電力と Lorentz 力で

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.45)$$

と表されるが、MHD 近似下では、Lorentz 力のみを考えればよい。これを見るために、オーダー評価を行おう。静電力と Lorentz 力のスケールを比べると、

$$\frac{|\rho \mathbf{E}|}{|\mathbf{j} \times \mathbf{B}|} = \frac{|(\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}|}{|(\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}|} \sim \varepsilon_0 \mu_0 \frac{E^2}{B^2} = \frac{E^2}{c^2 B^2} \quad (2.46)$$

となる。ここで、前節で述べたように、MHD 近似下では、 $(E/cB)^2 \ll 1$ である。したがって、MHD 近似下では、静電力は無視してよい。また、Lorentz 力は、回転系においてもその形を変えない。

Lorentz 力は、一般に、非等方的に作用する力である。このことを強調するために、(2.3) を、

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] + 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \left(p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right) + \delta\rho \mathbf{g} + \nabla \cdot (\mathbf{T} + \mathbf{T}^M) \quad (2.47)$$

と書くことも多い。ここで現れた、圧力勾配項内の $|\mathbf{B}|^2/2\mu_0$ は、磁気圧と呼ばれる。粘性項内の T_{ij}^M は、Maxwell 応力

$$T_{ij}^M = \frac{1}{\mu_0} B_i B_j \quad (2.48)$$

であり、Lorentz 力の非等方性を表す。また、 $\nabla \cdot \mathbf{T}^M$ 項は磁気張力項とも呼ばれる。これらの表現は、一見、体積力である Lorentz 力が、面積力と解釈することもできることを示している。

Boussinesq 近似

方程式 (2.2)–(2.5) の解析は、磁場を考慮しない場合でも難しいため、Boussinesq 近似によって簡単化すると便利である。Boussinesq 近似では、密度変化が音速より十分遅く、熱的状态が温度によってのみ変化する状況を考える。つまり、流れは非圧縮 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ で、浮力を生じる密度変化、およびエントロピー変化は、

$$\delta\rho \sim -\rho_0 \alpha \delta T, \quad \delta s \sim c_p \delta T/T \quad (2.49)$$

のように、圧力によらず温度のみに依存するものとする。結果をかくと、Boussinesq 近似下では、(2.2)–(2.5) が、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \frac{p}{\rho_0} - \alpha(T - T_0) \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0 \mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T + \frac{1}{\rho_0 c_p} (T_{ij} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{|\mathbf{j}|^2}{\rho_0 c_p \sigma} \quad (2.52)$$

に帰着される。ここで、動粘性率 $\nu = \mu_0/\rho$ と熱拡散率 $\kappa = k/(\rho_0 c_p)$ は一定とした。詳しい導出については、木村 (1996) などを参照せよ。

この Boussinesq 近似は、天体ダイナモ問題を考える際にも有効である。地球のコアでは、液体金属の熱対流であるため、Boussinesq 近似は物理的にも適当だろうと考えられている。一方、プラズマからなる太陽の対流層では、圧縮性が強く、密度変化も速いため、Boussinesq 近似 (および非弾性近似) は、定量的には不適當だろうと考えられる。しかし、Boussinesq 近似下の方程式群から得られる描像は、熱対流、磁気対流やダイナモメカニズムの理解に役立つため、太陽の対流層を考える場合にもしばしば用いられる (Ossendrijver, 2003)。以下では、流れを記述する方程式として、Boussinesq 近似下の (2.50)–(2.52) を考えることにする。

無次元パラメータ

圧力勾配項を除いた、N-S 方程式 (2.3) の5項のバランスは、4つの無次元パラメータを使って、考えることができる。圧力勾配力は、その他の力とのバランスより、受動的に生成される力であるため、スケールは内的に決まるとする。2.1.1 節と同様に、Boussinesq 近似下の Navier-Stokes 方程式 (2.51) の無次元化を行おう。各物理量のスケールを

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= L\mathbf{x}_*, & t &= \frac{1}{\Omega}t_*, & \mathbf{u} &= U\mathbf{u}_*, & \mathbf{B} &= B\mathbf{B}_* \\ \Omega &= \Omega\Omega_*, & \mathbf{g} &= g\mathbf{g}_*, & T - T_0 &= \delta T \theta_*, & p &= \rho_0 L U \Omega p_*, \end{aligned} \quad (2.53)$$

ととる。これらを (2.51) に代入し、整理すると

$$\frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial t_*} + Ro(\mathbf{u}_* \cdot \nabla_*)\mathbf{u}_* + 2\Omega_* \times \mathbf{u}_* = -\nabla_* p_* - Bu \theta_* \mathbf{g}_* + Ek \nabla_*^2 \mathbf{u}_* + El(\nabla_* \times \mathbf{B}_*) \times \mathbf{B}_* \quad (2.54)$$

と得られる。ここで現れた、4つの無次元パラメータは、それぞれ、Rossby 数 Ro 、Ekman 数 Ek 、Elsasser 数 El 、そして、浮力パラメータ Bu

$$Ro = \frac{U}{L\Omega}, \quad Ek = \frac{\nu}{L^2\Omega}, \quad El = \frac{B^2}{\rho_0 \mu_0 L U \Omega}, \quad Bu = \frac{\alpha g \delta T}{U \Omega} \quad (2.55)$$

である。Rossby 数は、コリオリ項に対する移流項の比 Ekman 数は、コリオリ項に対する粘性項の比を表し、非回転系において粘性の弱さを表す Reynolds 数 $Re = UL/\nu$ とは、 $Ek = Ro Re^{-1}$ の関係にある。Elsasser 数は、コリオリ力に対する Lorentz 項の比を表す。浮力パラメータは、コリオリ力に対する浮力項の比を表す。また、浮力の強さを議論する際には、Rayleigh 数

$$Ra = \frac{\alpha g \delta T L^3}{\kappa \nu} \quad (2.56)$$

もよく使用される。Rayleigh 数がある臨界値 R_c を超えたとき、熱対流が駆動される。浮力パラメータとの関係は、 $Bu = Ra Pr^{-1} E^2$ である ($Pr = \nu/\kappa$ は Prantl 数)。

例として、地球と太陽における各パラメータの値を、現在、観測などによって知られている値から見積もり、天体内の流れの共通点やそれぞれの天体における特徴を考えよう。まず、地球の外核では、

$$\begin{aligned} Ro &= \mathcal{O}(10^{-6}), & Ek &= \mathcal{O}(10^{-15}), \\ El &= \mathcal{O}(10^{-3}), & Bu &= \mathcal{O}(10^4), & Ra &= \mathcal{O}(10^{25}) \end{aligned} \quad (2.57)$$

と見積もられる。各物理量の典型的な値は、P.H.Roberts & Glatzmaier (2000) の値を使用した。太陽では、対流層の底で、

$$\begin{aligned} Ro &= \mathcal{O}(10^{-2}), & Ek &= \mathcal{O}(10^{-15}), \\ El &= \mathcal{O}(1), & Bu &\sim Ra Pr^{-1} E^2 = \mathcal{O}(10^{-4}), & Ra &= \mathcal{O}(10^{20}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

と見積もられている。ここで Ra は Ossendrijver (2003) の値、 Ra 以外の無次元パラメータは Tobias & Weiss (2007) の値を用いた。両者の共通点は、Ekman 数が小さく、Rayleigh 数が大きいということである。これは、共に、低粘性で自転の効果が効く状況での、激しい熱対流であるということを示す。また、太陽は、地球に比べて、浮力の効果が弱く (Bu が大)、移流による非線形効果が強い (Ro が大)、強磁場 (El が大) となっているだろうと考えられる。これは、太陽の方が、より発達した、力学的また磁氣的乱流をもつだろうことを示唆する。

2.2 流れ

本節では、流れ、つまり、(2.51) の解の特徴をみていく。2.1.2 節で述べたように、天体内部の流れでは、高速回転し粘性が低いことと浮力が強いことが特徴であるため、これらの効果によって生成される流れの基本構造に特に注目していく。つまり、磁場の効果は無視し

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \alpha(T - T_0) \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.59)$$

を考える。2.2.1 節で、回転系における粘性の低い流れの基本構造をのべ、2.2.2 節で、熱対流、特に、回転系における熱対流の特徴を述べる。その結果、3 次元的なねじれをもった流れが生じやすいことが示される。Lorentz 力の効果を含め、一連の基礎的な研究が整理されている文献として、Gubbins & P.H.Roberts (1987) がある。また、Busse *et al.* (2007) には近年の進展も含まれている。詳細はそれらを参照されたい。

2.2.1 回転する低粘性な流れ

本節では、高速回転する粘性の低い流れの特徴、つまり、低エクマン数であることの効果をのべる。このような特徴をもつ流れの代表的な例として、天体表層の大気や海洋における運動があげられる。そのため、それらとのアナロジーで、天体内部の運動を理解していくことが可能で、また有益である。低エクマン数であることが本質的な流れを理解するための枠組みは、地球流体力学と呼ばれる。詳細は、Pedlosky (1987) や 木村 (1996) などを参照されたい。

Taylor–Proudman の定理

まず、非粘性な流れで、回転の効果を考えよう。このときの流れは、自転軸方向に一様な、2 次元的な流れとなる。流れの式 (2.59) で、 $\nu = 0$ としたとき ($Ek = 0$)、定常状態で

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p \quad (2.60)$$

とバランスする。これは地衡流バランスと呼ばれ、その流れは、Coriolis 力と圧力勾配力とがつりあうように流れていくことを表す。つまり、流線と等圧線とが一致し、かつ、その流れは、北半球 ($\Omega > 0$) の場合、高压側を右にして流れる。この自転軸方向の構造を見るために、(2.60) の回転をとると、

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0 \quad \text{or} \quad \mathbf{u}_H = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \times \nabla_{HP} p \quad (2.61)$$

となる。ここで、流れが非圧縮であること (2.50) を用いた。つまり、流れは、回転軸 $\boldsymbol{\Omega}$ の方向に一様であり、2 次元的な流れとなることがわかる。流線は、 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向に一様な円柱状の構造をとる。この制約 (2.61) は、Taylor–Proudman の定理と呼ばれ、高速回転系での流体力学において、最も重要な性質の一つである。後述するように、その他の効果を考える際にも、この状況からのずれとして理解していくことが多い。

境界層の形成と Ekman pumping

一方、粘性が極めて弱いものの、わずかに存在するような場合、ほとんどの領域では、Taylor–Proudman の定理が成り立つ一方、境界付近⁴ では、粘性が効く薄い層が形成される。式 (2.54) より、このとき、

$$\frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial t_*} + 2\boldsymbol{\Omega}_* \times \mathbf{u}_* = -\nabla_* p_* + Ek \nabla_*^2 \mathbf{u}_* \quad (2.62)$$

で $Ek \rightarrow 0$ の状況なので、空間のほとんどの領域では、(2.60) が成り立つ。しかし、長さスケールが

$$L = \mathcal{O}(Ek^{1/2}) \equiv \delta_E \quad (2.63)$$

であるような、ごく狭い領域では、

$$2\boldsymbol{\Omega}_* \times \mathbf{u}_* = -\nabla_* p_* + \nabla_*^2 \mathbf{u}_* \quad (2.64)$$

とバランスし、粘性の効果が現れることがわかる。このような層は、Ekman 層、または境界層、と呼ばれ、その厚さは、 δ_B で与えられる。これに対し、境界層以外の領域、つまり、粘性の効果が無視できるほとんどの領域のことは、内部領域と呼ぶ。

Ekman 境界層内では、粘性のために、Taylor–Proudman の定理 (2.61) が破られ、その結果、自転軸方向への運動が生じる。具体的に、自転軸の方向に対して垂直に壁が存在する場合の、境界層内の流れと内部領域へ与える影響とを考えよう。自転軸が z 軸と平行である ($\boldsymbol{\Omega}_* = e_z$) とし、それと垂直な面 ($z = 0$ とする) で粘着条件が要請されているとする。このようなとき、式 (2.64) を解くと、境界層内の水平方向の流れ \mathbf{u}_H が、

$$\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_I \left(1 - e^{-z/\delta_E} \cos \frac{z}{\delta_E} \right) + e_z \times \mathbf{u}_I e^{-z/\delta_E} \sin \frac{z}{\delta_E} \quad (2.65)$$

⁴物理的な境界付近でない場合もある。

と得られる (e.g. 木村, 1996)。ここで、 \mathbf{u}_I は内部領域における地衡流を表す。境界層内の流れは、 z とともに、向きをらせん状に変化させながら、等圧線の内部へと侵入する。これに伴って、質量保存のために Ekman 層で上昇流が形成される。(2.50) に (2.65) を代入し、Ekman 層内で鉛直方向に積分すると、Ekman 層の上端における鉛直流は、

$$w = \frac{1}{2} Ek^{1/2} \mathbf{e}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_I) \quad (2.66)$$

となる。鉛直流が、内部領域の渦度に比例して、 $\mathcal{O}(Ek^{1/2})$ の強さで生じることがわかる。この鉛直流は、Ekman 層の上端を通じて、内部領域へ侵入する。内部領域における Taylor–Proudman の定理は、鉛直流に対しては何も制約を与えないため、鉛直方向に一様であれば、上昇流が存在しても問題はない。このような、Ekman 境界層の形成に伴って鉛直流が生じる現象は、Ekman pumping と呼ばれ、Ekman 境界層の重要な特徴である。

加えて、このときの流れは helicity

$$h = \langle \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \rangle \quad (2.67)$$

をもっているということにも注目すべきである。helicity は、からみ度、または、らせん度と訳すことができる、helicity h の絶対値が大きいほど、強いらせん状の流線をもつような流れであることを示す。その符号は、正 (負) であるとき、右手 (左手) 系のらせん度であることを表す。この物理量は、2.3 節および 2.4 節で述べるように、ダイナモの駆動にとって重要な量であることが知られている。いまの Ekman 層をもつ流れの場合、(2.65) と (2.66) より、

$$w \mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_H) \sim \frac{1}{2} Ek^{1/2} |\nabla_H \times \mathbf{u}_I|^2 \left(1 - e^{-z/\delta_E} \cos \frac{z}{\delta_E} \right) \quad (2.68)$$

となる。ここで、平均を自転軸に垂直な平面 $x-y$ で定義するとき、地衡流 $\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_I(x, y)$ が 0 でない平均渦度をもてば、helicity h は値をもつ。つまり、高速回転する低粘性流は、ダイナモの駆動にとって効果的な流れ構造をもち得る、ということの意味している。一方で、ここまでの議論だけでは、流れの駆動源が存在しないため、 $\mathbf{u}_I(x, y)$ または、圧力分布 $P(x, y)$ が決まらない。それらは、熱対流の結果として、与えられる。

2.2.2 熱対流

ここまで、地衡流 \mathbf{u}_H, p がどう駆動されるかについては触れていなかった。それらは、本節で考える熱対流によって与えられる。

本節では、(2.59) より、対流が駆動される臨界の Rayleigh 数 $Ra = Ra_c$ (以下、対流のおこりはじめと呼ぶ) と、そのときの流れ構造をみる。特に、 $Ek \ll 1$ のときに注目する。流れは、 Ra がその臨界値を超え、大きくなるにつれて、その空間的および時間的構造が変化していくことが知られているが、ここでは扱わないことにする。また、対流を考える際に大事なもう一つのパラメータである Prandtl 数の効果も、ここでは考えない (以下では、 $Pr = \mathcal{O}(1)$ を想定する)。回転系における熱対流の近年の概説として、Busse (2002) や Soward (2007) がある。また、天体の大気における帯状流 (赤道ジェット) の問題と関連して解説された文献として、松田 (2000) がある。

Rayleigh–Bénard 対流

回転がない場合で、上下を 2 つの平面で挟まれた状況での熱対流を考えよう。重力の向きを $-z$ 方向にとり ($\mathbf{g} = -g\hat{e}_z$)、上下の壁は位置 $z = \pm d/2$ にあるとする。温度場は $T - T_0 = -\beta z$ で与えられており、上下の壁では等温的とする。このような状況でおこる熱対流は、Rayleigh–Bénard 対流と呼ばれ、対流理論の基礎を与える。

対流のおこりはじめ ($Ra \sim Ra_c$) は、以下のような性質をもつ。線形安定解析によると、上下の境界が共に自由境界の場合、対流がおこりはじめる Rayleigh 数は

$$Ra_c = \frac{(a^2 + n^2\pi^2)^3}{a^2} \quad (2.69)$$

である。ここで、解の形は

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_H &\sim \exp\left[i\frac{(lx + my)}{d}\right] \cos\left[\frac{n\pi}{d}\left(z + \frac{d}{2}\right)\right] \\ u_z &\sim \exp\left[i\frac{(lx + my)}{d}\right] \sin\left[\frac{n\pi}{d}\left(z + \frac{d}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (2.70)$$

とし、 $a = \sqrt{l^2 + m^2}$ は水平方向への波数とした。この臨界 Rayleigh 数が最小値をとるのは、

$$Ra_c = \frac{27\pi^4}{4}, \quad \text{for } n_c = 1, \quad a_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (2.71)$$

のときである。波数 $n_c = 1$ であることから、対流の起こり始めでは、 z 方向にセル構造を 1 つだけでもつような構造、すなわち、 z 方向に最も長い波長成分が、最も生じやすいことがわかる。また、水平方向への波数 l と m の比は、線形安定解析からは決まらない。非線形解析やアナログ実験によると、対流のおこりはじめでは (Ra がわずかに臨界値 Ra_c をこえたとき)、水平方向にロールの軸をもつような 2 次元セル構造の対流が卓越する。そして、少し対流が発達したとき (Ra が大きくなったとき)、3 次元的なセル構造をもつ流れへと遷移する。

回転の効果

次に、上と同じ状況で、その系全体が角速度ベクトル Ω で自転している場合を考える。

このとき、自転軸 Ω と重力 \mathbf{g} の向きによって、流れの振る舞いが異なる。それらの向きによって、Coriolis 力が運動に寄与する方向が変わり、Taylor-Proudman の定理 (2.61) による制約が異なるためである。以下では、対流の起こり始めで現れるロール状の流れを考えよう。前項と同じデカルト座標系で、重力の向きを $\mathbf{g} = -g\hat{e}_z$ とする。

まず、自転軸と重力の向きが一致するとき ($\Omega = \Omega\hat{e}_z$)、Taylor-Proudman の関係は、 z 方向への対流運動を抑制しようとする。Taylor-Proudman の関係 (2.61) は、自転軸方向に一様な流れにしようとは効くためである。このとき、対流が生じる臨界 Rayleigh 数は

$$Ra_c = \frac{(a^2 + n^2\pi^2)^3}{a^2} + \frac{4n^2\pi^2}{a^2Ek^2} \quad (2.72)$$

となる。回転の効果が存在しないとき ($Ek \rightarrow \infty$)、Rayleigh-Bénard 対流の臨界値と一致することからわかるように、第 1 項が熱対流による効果、第 2 項が回転による補正項を表す。回転によって、熱対流がおこりにくくなることがわかる。また、高速回転する低粘性流 ($Ek \ll 1$ の極限) では、対流が駆動される最小の臨界 Rayleigh 数、および、そのときの構造は、

$$Ra_c^{(Ek)} = 3(2\pi^2)^{2/3} E^{-4/3}, \quad \text{for } n_c = 1, \quad a_c = (2\pi^2)^{1/6} Ek^{-1/3} \quad (2.73)$$

となる (Gubbins & P.H.Roberts, 1987)。自転軸 z 方向には、最も長い波長成分が成長しやすい。

一方、自転軸と重力の向きが一致しない場合 ($\Omega = \Omega_x \hat{e}_x + \Omega_z \hat{e}_z$ とする)、自転軸ベクトルの重力方向への成分 Ω_z は、上と同様に、対流運動を抑制しようとするのに対し、その水平方向への成分 Ω_x は、水平方向のセル構造を自転軸 x 方向へ揃えようとする。つまり、水平面に投影された自転軸ベクトル Ω と平行な方向へ軸が伸びた、ロール状の対流セルが形成されやすくなる。このときの臨界状態は、(2.73) で $l = 0$ とした状況に相当し、

$$Ra_c = \frac{(m^2 + n^2\pi^2)^3}{m^2} + \frac{4n^2\pi^2}{m^2 Ek^2}, \quad \text{for } n_c = 1, \quad m_c = (2\pi^2)^{1/6} Ek^{-1/3} \quad (2.74)$$

となる。

そして、自転軸と重力の向きが直交するとき ($\Omega = \Omega \hat{e}_x$)、ロール状の流れが自転軸の方向に向くことによって、Taylor-Proudman の定理 (2.61) は満たされ、重力の方向への対流運動に回転は影響しない。したがって、このときの臨界状態での流れの性質は、回転なしの Rayleigh-Bénard 対流におけるそれと一致し、(2.69) (2.71) で表される。

これらの結果は、天体内部の流れを考える上で重要な示唆をあたえる。本論文で興味ある天体内部の流れとは、ダイナモを駆動するような、地球コアや太陽対流層などにおける全球的な流れである。それらは、球殻状の容器に入った流れである。この球殻状の容器を領域でわけ、局所的にみることで、上のデカルト座標系における議論を適用することができる。自転軸と重力の向きが一致するような状況とは高緯度帯に相当し、自転軸と重力の向きが直交する状況とは低緯度帯に相当する。

例として、地球コアにおける対流の臨界状態を考えてみよう。まず、地球コアにおいて自転軸と重力の向きが一致するような領域では、回転ありの Rayleigh-Bénard 対流の結果 (2.73) と (2.57) の Ek 値より、臨界 Rayleigh 数は $Ra_c \sim \mathcal{O}(10^{20})$ と見積もられる。これと (2.57) の Ra 値との比較より、地球コアの高緯度帯で対流が起こっているだろうこと ($Ra > Ra_c$) が確認できる。また、このときの水平方向の波数は、 $\mathcal{O}(10^4)$ となり、小さい対流セル構造を多くもつような流れとなっていることが予想できる。一方、自転軸と重力の向きが直交する低緯度帯でも、対流がおこっているだろうということが、(2.71) および (2.57) からわかる。その対流セルの空間スケールは、(2.71) より $a_c \sim 3$ となる。つまり、低緯度帯では対流セルが水平方向に 3 対程度と、高緯度帯と比べて、大きい空間スケールをもった流れだろうと考えられる。

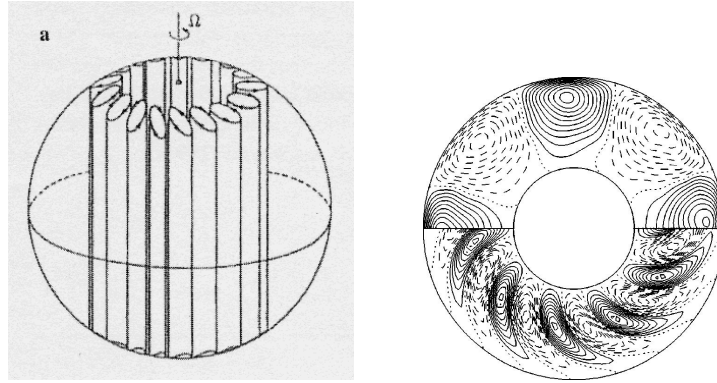


図 2.1: 高速に回転する球殻における熱対流。(左) 模式図。Busse (1970) より引用。(右) 全球モデルによる数値計算の結果。実線および点線は、赤道面での流線を表す。上半円は $Pr = 0.025$ で、下半円は $Pr = 1$ のとき。両半円で、Rayleigh 数は $Ra = 2 \times 10^5$ 、Coriolis 数 $\tau = 2Ek^{-1} = \mathcal{O}(10^4)$ 。Busse (2002) より引用。

この対流の起こり始めの流れ構造も、helicity をもちうる。自転軸と重力の向きが一致するとき、Ekman 数が小さく、定常な状態で、渦度は

$$\mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \sim \text{Re} \left[E^{(-1/3)} \exp \left[i \frac{(lx + my)}{d} \right] \cos \left[\frac{n\pi}{d} \left(z + \frac{d}{2} \right) \right] \right] \quad (2.75)$$

と得られるので (Gubbins & P.H.Roberts, 1987)、重力の方向に対し垂直な水平面 (x - y 面) で平均をとった helicity は、臨界 Rayleigh 数で

$$h = \langle u_z \mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \rangle \sim E^{-1/3} \sin \frac{2\pi z}{d} \quad (2.76)$$

となる。この対流構造による helicity は、ほとんどの x で値をもち、自転軸方向に対する基準面 $x = 0$ で符号を変える。一方、自転軸と重力の向きが直交するとき、つまり、回転の影響を受けない Rayleigh-Bénard 対流では、 $h = 0$ となる。高緯度帯で駆動される熱対流は、ダイナモにとって有利な構造だろう。

境界が球である効果

球内の熱対流でも、ロール状の対流セルが生じるものの、そのセルは波動伝播する。これは、球殻を局所的にとりだした円柱状のモデルで示された (Busse, 1970)。ここでは、自転軸方向の上下を斜めの壁で挟まれた容器を考える。解の形を $\exp i(m\phi - \omega t)$ で与えた線形安定論の結果、臨界状態は、

$$Ra_c = 3.382 Ek^{-4/3}, \quad \text{Re}[\omega_c] = 0.872 Ek^{1/3} \quad \text{for} \quad m_c = 0.6003 Ek^{-1/3} \quad (2.77)$$

となる。この Ra_c, m_c の値は、平面の系における結果 (2.73) と、オーダーで一致し、基本的には同じ熱対流であることがわかる (図 2.1)。一方、 $\omega_c \neq 0$ であることが、系の形状が

違うことによる効果である。その位相速度 $\text{Re}[\omega_c]/m_c$ は、符号が正であることから、東向きに位相が伝播することがわかる。その速さは、例えば、地球コアでは $\mathcal{O}(10^{10} \text{ m/s}) \sim \mathcal{O}(100 \text{ m/year})$ となる。このような波動の生成は、半径方向に層の厚さが変化することによって生じる地形性 Rossby 波として理解できる。この東向きに伝播するロール状の対流セルは、局所的な円柱モデルを使用せず、球の全領域を調べた実験および解析で、確認されている。さらに、これらの全球モデルでは、ロール状の対流セルが回転軸から遠ざかるほど東に傾くようになる (Zhang, 1992; Jones *et al.*, 2000)。これは、地球性 Rossby 波で考えると、azimuthal 方向への位相速度 $\text{Re}[\omega]/m$ が半径 r 方向に変化することによる振る舞いであると解釈される。これは、局所モデルでは扱うことができない振る舞いで、全球的な解析によって初めて明らかになった。近年では、球殻の幅の違いが対流にもたらす影響が注目されている。

2.3 ダイナモ

本節では、磁場の解、特に、キネマティックダイナモ研究で明らかになった性質をまとめる。キネマティックダイナモとは、誘導方程式 (2.1) のみで磁場の振る舞いとその生成メカニズムを考える方法である。そこでは、流れの構造は仮定される。これに対して、MHD 方程式群 (2.1)–(2.6) をすべて扱い、流れと磁場とを同時に扱う方法は、(ダイナミック) MHD ダイナモと呼ばれる。より現実的な状況を知るためには、後者の MHD ダイナモの方法が必要であるが、前者のキネマティックダイナモによって、多くの基礎的性質が見出されてきた。本節では、これを扱う。2.3.1 節で、キネマティックダイナモの考え方の基礎として、問題が固有値問題へ帰着されることを述べる。2.3.2 節では、ダイナモの存在を否定する定理である反ダイナモ定理を紹介し、その中でも最も重要な Cowling の定理について述べる。2.3.3 節では、その反ダイナモ定理を回避し、ダイナモを駆動できる流れ構造およびモデルとして、基本的なものを整理する。また、 Rm がきわめて大きくなった場合、誘導方程式は特異摂動問題としての性質をもつようになる。これに関する話題に 2.3.3 節でふれる。

2.3.1 キネマティックダイナモの基礎

キネマティックダイナモをいかに解析するか。一つの方法は、初期値問題として解析する方法で、適当な初期値を与え、その時間発展を直接的に追う。もう一つは、問題を固有値問題に帰着させ、磁場の固有モードを解析していくという方法である。前者が、キネマティック問題だけでなくダイナミック問題でも適用可能であるのに対し、後者は、キネマティック問題が線形問題であることを生かした方法である。数学的構造がみやすいということから、伝統的に固有モード解析が使用されてきた。

ここでは、伝統的な方法である、固有値問題としてのキネマティックダイナモの基礎をまとめ、それに関連して、誘導方程式の非自己共役性がもたらす性質をのべる。

固有値問題

定常な流れによるキネマティック問題では、解の形を指数関数型で定義できるため、数学的に、問題を固有値問題に帰着できる。定常な流れ u を考えたとき、誘導方程式の解は

$$B(x, t) = \tilde{B}(x, p) e^{pt} \quad (2.78)$$

という形でかける。ここで、 p は一般に複素数で、その実部は磁場の成長率、虚部は周波数を表す。変数 x は、空間座標を意味する。これを、(2.35) に代入すると、

$$p\tilde{B} = \nabla \times \tilde{B} + Rm^{-1}\nabla^2\tilde{B} \equiv \mathcal{L}\tilde{B} \quad (2.79)$$

となる。問題が、線形演算子 \mathcal{L} の固有値 p についての固有値問題に帰着されることがわかる。このとき、解は、固有値 p_i および固有関数 \tilde{B}_i の重ね合わせで、

$$B(x, t) = \sum_i^n \tilde{B}_i(x, p_i) e^{p_i t} \quad (2.80)$$

となる。

固有値問題において、ダイナモ作用が存在するかどうかの判定は、固有値の実数部 $\text{Re}[p]$ の符号で行う。解の形 (2.78) または (2.80) からわかるように、 $\text{Re}[p] \geq 0$ となる固有値が1つでも存在した場合、磁場 B は時間的に成長するか、または維持される。すべての固有値の中で、 $\text{Re}[p]$ 値が最大となる固有値（最大固有値）が、磁場の振る舞いを支配的に決める。つまり、キネマティック解析におけるダイナモ作用の存在は、少なくとも最大固有値が $\text{Re}[p] \geq 0$ ということと等しい。しかし、実数部が負でない固有値は、どんな流れの場合でも存在する訳ではない。後述するように（「反ダイナモ定理」の項）、対称性の高い流れ構造の多くは、ダイナモを駆動できないことがわかっている。どんな流れ構造のときに、正の成長率をもつ固有値が存在するかということは、キネマティック研究における主要課題の一つである。

非自己共役性

前項では、固有値でダイナモを判定するということを述べたが、固有ベクトル、特に、固有ベクトル間の角度が、磁場の増幅に寄与することもある。これは、誘導方程式の非自己共役性に起因している。誘導方程式 (2.1) における線形微分演算子は、一般に、非自己共役である。非自己共役な行列の場合、線形代数の基本性質より、それぞれの固有ベクトルは直交しない。このような場合、仮に、すべての固有値の実数部が負であったとしても、異なる減衰率をもつ固有ベクトルの合成によって、一時的に、初期値が増幅され得る。この一時的な増幅は、transient effect または transient growth などと呼ばれる。固有値解析では、そのような増幅の情報を見落とす可能性があることを認識しておくべきだろう。

この一時的な増幅を考慮すると、初期値問題として誘導方程式の時間発展を解析するとき、数値計算上の障害となりうるため、注意が必要である。transient growth は、初期

条件の影響が、ある継続時間の間、残るということを意味している。つまり、数値計算における初期条件が、物理的に適切でない場合、物理的に意味のない見かけの増幅が現れ得る。Livermore & Jackson (2006) の初期値問題解析によると、磁場の transient growth の継続時間は、拡散時間程度である。したがって、数値計算の実行時には、少なくとも、拡散時間の数倍程度の時間を計算する必要がある。

また、transient growth は、ダイナミック MHD ダイナモにおいて、物理的に重要な意味をもつかもされない。磁場の transient growth は、初期磁場の強度を、最大で数千倍にまで増幅させる (Livermore & Jackson, 2006)。このとき、MHD ダイナモで Lorentz 力の寄与が大きくなる。つまり、transient growth は、ダイナモの、非線形レジームへの移行を促進させる可能性がある。実際に、磁場なしの流れにおけるシア不安定理論では、このような transient growth が、層流から乱流への遷移過程を説明すると考えられている (Schmid & Henningson, 2001)。

2.3.2 反ダイナモ定理

前節で触れたように、いくつかの反ダイナモ定理が知られている。主なものを列挙すると、

1. 2次元ダイナモ (座標 2 成分のみに依存する磁場) は存在しない
2. 平面流 (デカルト座標系で z 成分をもたない流れ) はダイナモを駆動できない
また、トロイダル流 (極座標系で動径成分をもたない流れ) だけではダイナモを駆動できない
3. 完全に軸対称な磁場は存在しない (Cowling の定理)

などである。詳細や証明は Moffatt (1978) や Jones (2007b) などを参照されたい。これら多くの反ダイナモ定理からわかることは、単純で対称性の高い、「美しい」構造の流れや磁場では、ダイナモになりにくいということである。

反ダイナモ定理の中で最も重要なものは、Cowling の反ダイナモ定理である (Cowling, 1933; Braginsky, 1964)。これは、完全に軸対称な磁場が維持されないということである。以下で、これを示そう。円柱座標 (r, ϕ, z) で考える。まず、磁場と流れを、以下のように軸対称成分と非軸対称成分に分ける。

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}', \quad \mathbf{u} = \langle \mathbf{U} \rangle + \mathbf{u}' \quad (2.81)$$

ここで、軸対称成分は、azimuthal ϕ 方向への平均で与え、任意関数 f に対して

$$\langle f \rangle(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \phi, z, t) d\phi \quad (2.82)$$

と定義する。非軸対称成分は、それからのずれで、

$$\mathbf{b}' = \mathbf{B} - \langle \mathbf{B} \rangle, \quad \langle \mathbf{b}' \rangle = \mathbf{0} \quad (2.83)$$

とする。(2.81) を誘導方程式 (2.35) に代入すると、軸対称成分についての誘導方程式

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle) + Rm^{-1} \nabla^2 \langle \mathbf{B} \rangle \quad (2.84)$$

と非軸対称成分についての誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{U} \rangle \times \mathbf{b}' + \mathbf{u}' \times \langle \mathbf{B} \rangle + (\mathbf{u}' \times \mathbf{b}')') + Rm^{-1} \nabla^2 \mathbf{b}' \quad (2.85)$$

に分離できる。さらに、軸対称成分 $\langle \mathbf{B} \rangle, \langle \mathbf{U} \rangle$ をそれぞれ、以下のように子午面成分 (ポロイダル成分) と azimuthal 成分 (トロイダル成分) にわけると

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{B} \rangle_M + \langle \mathbf{B} \rangle_\phi = \nabla \times [A(r, z, t) \mathbf{e}_\phi] + B(r, z, t) \mathbf{e}_\phi \quad (2.86)$$

$$\langle \mathbf{U} \rangle = \langle \mathbf{U} \rangle_M + \langle \mathbf{U} \rangle_\phi = \nabla \times [r^{-1} \chi(r, z, t) \mathbf{e}_\phi] + r \xi(r, z, t) \mathbf{e}_\phi \quad (2.87)$$

これを誘導方程式の軸対称成分 (2.84) に代入して、子午面成分と azimuthal 成分に分けると

$$\frac{\partial A}{\partial t} + r^{-1} \langle \mathbf{U} \rangle_M \cdot \nabla (rA) = R_m^{-1} (\nabla^2 - r^{-2}) A \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + r \langle \mathbf{U} \rangle_M \cdot \nabla (r^{-1} B) = R_m^{-1} (\nabla^2 - r^{-2}) B + r \langle \mathbf{B} \rangle_M \cdot \nabla \xi \quad (2.89)$$

が得られる。

ここで、磁場が軸対称な場合 $\mathbf{b}' = 0$ を考えよう。このとき、 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle = 0$ となる。つまり、(2.88) は生成項をもたず、ポロイダル磁場 A は拡散時間で減衰する。これより、(2.89) の生成項 (右辺第 2 項) が時間とともに減衰するため、トロイダル磁場 B も減衰する。つまり、 $\mathbf{b}' = 0$ であるような、完全に軸対称な磁場は維持されない、ということがわかる。

一方、軸対称な流れはダイナモ作用をもってよいことに注意が必要である。流れが完全軸対称な場合 ($\mathbf{u}' = 0$)、 $\mathbf{b}' = 0$ のときと同様にすれば、磁場の軸対称成分 $\langle \mathbf{B} \rangle$ は維持されないことがわかる。しかし、誘導方程式の非軸対称成分 (2.85) には生成項 $\nabla \times (\langle \mathbf{U} \rangle \times \mathbf{b}')$ が残るため、磁場の非軸対称成分は生成されうる。つまり、完全軸対称な流れは磁場を生成し得るが、その磁場は、軸対称成分をもたない非軸対称磁場となる。

Cowling の反ダイナモ定理が重要である理由は、完全に軸対称な磁場の存在を否定するというだけでなく、非軸対称磁場の重要性を示すためである。つまり、非軸対称成分の存在による対称性の崩れという、一見、美しくない特徴が、ダイナモ作用にとって本質的であるということである。実際の天体の磁場を考えてみると、その多くは、ほぼ軸対称な磁場で、完全な軸対称磁場でない。Cowling の定理は、この非軸対称な磁場がダイナモ生成にとっては reasonable であることを示すとともに、その生成のためには、非軸対称成分、特に、 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$ の項が重要であることを主張する。この項が、後述する近似的理論において鍵となる。特に、近似的理論の代表である平均場理論は、非軸対称な磁場成分を介して、軸対称な磁場成分がいかに生成されるかという視点を中心に構築される。平均場理論については、2.4 節で概説する。

2.3.3 ダイナモ作用をもつキネマティックダイナモの例

この節では、反ダイナモ定理を回避し、ダイナモを駆動できる流れ構造と近似的モデルについて述べる。比較的単純なものから順に、Ponomarenko および G.O.Roberts の helical な筒状の流れによるダイナモ、球内の流れによるダイナモの特徴と、その解の主な性質をあげていく。そこで、2.2 節で述べられたように、力学的に、つまり、天体内部の熱対流として基本的な構造だった helical な構造が、ダイナモにとって有利であることが示唆される。

なお、本論 (3 章) の解析で、G.O.Roberts (1972) のダイナモモデルを使用する。その理由の一つは、本節で示すように、ダイナモ作用を有する流れの中でも対称性が高く、そのダイナモ作用の性質が過去にもよく調べられていることである。また、本論が注目する、平均場理論の解析にも適している (2.4 節で後述)。

helical な流れによるダイナモ

まず、ねじ型の流れで、Ponomarenko (1973) の流れ

$$\mathbf{u}(r) = \begin{cases} r\Omega\mathbf{e}_\phi + U\mathbf{e}_z & \text{for } r \leq a \\ 0 & \text{for } r > a \end{cases} \quad (2.90)$$

である (screw dynamo)。ここで、 a, Ω, U は定数。これは、無限に長い円柱の筒の中に、らせん状の流れを一つだけ含むような、軸対称な流れである。特徴は、helicity (2.67) を有限な値でもつことと、不連続面 $r = a$ で無限大のシア $\partial u_\phi / \partial r \rightarrow -\infty$ をもつことである。その解

$$\mathbf{B}(r, \phi, z, t) = \tilde{\mathbf{B}}(r) \exp(im\phi + ikz + pt) \quad (2.91)$$

は、非 2 次元的な磁場で与えられるため、上述の反ダイナモ定理 1 を回避することができる。軸対称成分 $m = 0$ は Cowling の定理により存在しない。

この screw dynamo は、ダイナモを駆動する。ダイナモが駆動する臨界状態 ($\text{Re}[p] = 0$) では

$$Rm_c \sim 17.7, \quad \text{Im}[p] \sim 0.410(Rm a^2)^{-1} \quad \text{for } m = 1, \quad ka \sim -0.388, \quad \frac{U}{\Omega a} \sim 1.31 \quad (2.92)$$

である (Gailitis & Freiberg, 1976)。また、 $Rm \rightarrow \infty$ の極限でもダイナモ作用をもつ (Ponomarenko, 1973)。これは、不連続面 ($|\omega| \rightarrow \infty$ となる面) が存在するためであり、不連続面がないように修正された、滑らかな Ponomarenko の流れでは、 $Rm \rightarrow \infty$ の極限でダイナモ作用をもたない (Desjardins *et al.*, 2007)。一方、 Rm が有限な大きい値である場合には、滑らかな Ponomarenko の流れでも、ダイナモを駆動する。

次に、周期性をもった helical な流れで、G.O.Roberts (1972) の流れ

$$\mathbf{u}(x, y) = (\sin y, \sin x, \cos x - \cos y) \quad (2.93)$$

があげられる (periodic dynamo)。これは、Ponomarenko の流れを上昇流と下降流の対にして、それらを無限平面に並べたような流れである。また、この流れ (2.93) は、Arno'ld–Beltrami–Childress の流れ (ABC flows)

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (C \sin z + B \cos y, A \sin x + C \cos z, B \sin y + A \cos x) \quad (2.94)$$

の特殊な場合 ($A = B = 1, C = 0$) に相当して、2次元座標 (x, y 成分) にのみ依存し、その2方向に対し周期性をもつような流れとなっている。ともに、正の helicity をもつ。

G.O.Roberts の流れ (2.93)、および、ABC flow (2.94) のもう一つの特徴は、渦度と速度が一致すること ($\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{u}$) である。このような流れは Beltrami flow と呼ばれ、次の2つの意味をもつ。一つ目に、helicity が $|h| \sim |\mathbf{u}|^2$ となることからわかるように、Beltrami flow は最も効率よく helicity をもつような流れということである。これはダイナモの生成にとって有利である。もう一つは、Beltrami flow が、磁場なし、非回転かつ非粘性な Navier-Stokes 方程式の定常解であることである。このようなとき、Navier-Stokes 方程式 (2.51) は、

$$\nabla \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + \Phi \right) = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (2.95)$$

となる。ここで、 Φ は重力ポテンシャル ($\mathbf{g} = -\nabla\Phi$) とした。つまり、Beltrami flow は、流体中で $H = u^2/2 + p/\rho_0 + \Phi$ が一定値をとるような、完全流体の定常流を表す。

流れ (2.93) は、任意の Rm で磁場が成長できるようなダイナモを駆動する。G.O.Roberts は、空間的かつ時間的に周期的な流れのほとんどはダイナモをもつということを解析的に示した後 (G.O.Roberts, 1970)、その具体的な例として、(2.93) などの2次元周期的な流れによって生成される磁場

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) \propto \exp(iz + pt) \quad (2.96)$$

を数値的に調べた (G.O.Roberts, 1972)。その結果、 z 方向への波数 j が十分に小さければ、流れ (2.93) は、任意の Rm で $\text{Re}[p] > 0$ の固有値をもつということを示した。ただし、 $j = 0$ のモードは、反ダイナモ定理 1 により存在しない。また、 Rm が十分に大きい極限では、 $\text{Re}[p] \sim Rm^{-1/2}$ に漸近し、成長率が 0 に近づいていく (Childress, 1979; Soward, 1987)。磁気拡散がつよい $Rm \ll 1$ でもダイナモが起こるといふ振る舞いは、helical な流れが無限に広がっていることに起因している。流れ (2.93) がつくるダイナモ作用については、本論 (3章) で詳しく述べる。

また、Roberts は、helicity の重要性を示す一方で、その存在がダイナモ作用の十分条件とはならないことも示した。G.O.Roberts (1972) では、流れ (2.93) の他に、helicity をもたない2次元周期的な流れ

$$\mathbf{u}(x, y) = (\sin 2y, \sin 2x, \sin(x + y)) \quad (2.97)$$

によるダイナモ作用も調べられた。その結果、 $Rm \gtrsim 5$ であれば、この流れ (2.97) もダイナモを駆動することがわかった。つまり、helicity は、ダイナモを起こしやすくはする

が、ダイナモ生成の必要条件となるものではないということである。実際に、helicity をもたない流れでも、負の渦拡散係数 (Lanotte *et al.*, 1999; Zheligovsky *et al.*, 2001)、時間依存性を伴う波状の構造 (Gilbert *et al.*, 1988) や、カオス状の流体粒子軌道 (fast dynamo の項で後述; e.g. Desjardins *et al.* (2007)) をもてば、磁場が時間的に成長することが示されている。流れ (2.97) によって駆動されたダイナモ作用は、負の乱流拡散係数の効果だろうと考えられている。

Ponomarenko および G.O.Roberts の流れは、近年、アナログ実験への応用や、fast dynamo と呼ばれる現象との関連で、注目されている。fast dynamo については、 Rm が大きいときの振る舞いに関する話題であるため、次節で述べることにして、ここでは、実験について触れよう。例えば、Ponomarenko のダイナモモデルは、Riga (ラトビア) の実験の基礎となっている (Gailitis *et al.*, 2002)。その流れ構造は、中心に一つの helical な上昇流があり、その周囲で下降流をかえすような構造である。これは、Ponomarenko のオリジナルのモデルが、流れの筒が無限に長いために駆動されていたダイナモだったので、有限な系でもダイナモが駆動されるように改良された流れである (Gailitis & Freiberg, 1980)。そのダイナモの駆動は、1999 年に確認された。また、Karlsruhe (ドイツ) のアナログ実験は、G.O.Roberts のダイナモモデルを基に設計され、Riga の実験と同じく 1999 年に、そのダイナモ生成が確認された (Stieglitz & Müller, 2001)。この実験結果の解釈のために、境界条件の影響や、磁場による流れへの back reaction の影響などが調べられている (Rädler *et al.*, 2002)。

球内の流れによるダイナモ

球殻の流れ (spherical dynamo) では、Dudley & James (1989) の軸対称な流れ

$$\mathbf{u}(r, \theta) = t_2^0 + \epsilon s_2^0 (a), \quad t_1^0 + \epsilon s_2^0 (b), \quad t_1^0 + \epsilon s_1^0 (c) \quad (2.98)$$

が、ダイナモをもつ最も単純な流れであると言われている。ここで、 t, s はそれぞれ、トロイダル流、ポロイダル流

$$t_l^m = \nabla \times \mathbf{e}_r t_l^m(r, \theta) Y_l^m(\phi, \theta), \quad s_l^m = \nabla \times \mathbf{e}_r s_l^m(r, \theta) Y_l^m(\phi, \theta) \quad (2.99)$$

を表し (球面調和関数 $Y_l^m(\phi, \theta)$)、係数 ϵ は、トロイダル流に対するポロイダル流の強さの比を表す。Dudley & James (1989) では、成分 t_l^m, s_l^m は

$$t_1^0(r) = s_1^0(r) = r \sin \pi r, \quad t_2^0(r) = s_2^0(r) = r^2 \sin \pi r \quad (2.100)$$

と与えられた。軸対称な流れ (2.98b) は、Kumar & P.H.Roberts (1975) の非軸対称な流れ

$$\mathbf{u} = \epsilon_0 t_1^0 + \epsilon_1 s_2^0 + \epsilon_2 s_2^{2c} + \epsilon_3 s_2^{2s} \quad (2.101)$$

において $\epsilon_0 = 1, \epsilon_1 = \epsilon, \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ とした場合に相当する (ただし、 t_1^0, s_2^0 の形は違う)。ここで、 s_2^{2c}, s_2^{2s} は非軸対称成分を表し、現実存在するであろう熱対流と似た構造を表

現する。その上添字 $2c, 2s$ は、 ϕ 依存性がそれぞれ $\cos 2\phi, \sin 2\phi$ のモードであることを意味する。(2.98) は、トロイダル流に対して割合 ϵ でポロイダル流を含むため、前節の反ダイナモ定理 2 を回避できる。また、Cowling の定理より、軸対称な磁場成分をもたない。

これらの流れによるダイナモは、 ϵ_i のわずかな違いにかなり敏感である。Dudley & James (1989) は、流れ (2.98) が、いくつかの ϵ でダイナモを駆動することを示した。その臨界磁気レイノルズ数を、いくつかの ϵ で示すと、

$$\begin{aligned} (a) \quad & \epsilon = 0.14 \quad \text{のとき} \quad Rm_c \sim 54, \quad \text{Im}[p] = 0 \\ (b) \quad & \epsilon = 0.13 \quad \text{のとき} \quad Rm_c \sim 95, \quad \text{Im}[p] \sim -18 \\ (c) \quad & \epsilon = 0.17 \quad \text{のとき} \quad Rm_c \sim 155, \quad \text{Im}[p] \sim -33 \end{aligned} \tag{2.102}$$

である。その磁場の構造は赤道双極子型で、流れ (b) (c) の場合は振動が伴う。また、Gubbins *et al.* (2000a,b) は、 $\epsilon_2 = \epsilon_3 \neq 0$ とした (ϵ_0, ϵ_1) パラメータ空間で、(2.101) の流れによるダイナモの存在領域とその磁場構造の分布を調べた (ちなみに、Kumar & P.H.Roberts (1975) が調べたのは、 $\epsilon_0 = 1, \epsilon_1 = 0.03, \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0.04$ の場合を中心とした、ほぼ軸対称な流れの場合)。その結果、ダイナモが駆動されるのは (ϵ_0, ϵ_1) 空間の約 5 割の領域で、その磁場構造の内訳は、軸双極子型が 3 割強、赤道双極子型と軸四重極子型がそれぞれ 1 割程度であることが、示された。しかも、 (ϵ_0, ϵ_1) 空間におけるダイナモ存在領域や磁場構造の分布は、あまり系統的なものではなかった。また、Holme (1997) は、(2.101) の s_2^0 成分の形をわずかに改訂した流れが、 ϵ_i の値によっては、赤道双極子型や赤道四重極子型の磁場を生成するというを示している。これらの結果からわかることは、流れ構造のわずかな違いによって、生成される磁場の構造が大きく変わることである。そして、これらの振る舞いは、まだ十分に解釈されていない。このような、流れに対する磁場の敏感さが、ダイナモ問題の解釈が困難な理由の一つである。

近似的ダイナモ

前項で述べた、具体的な流れ構造によるダイナモに対し、流れの具体的な構造は考えずに、近似的な解析で、ダイナモを調べるということも行われてきた。代表的な例は、Braginsky–Soward のほぼ軸対称なダイナモモデル (Braginsky, 1964)、Parker のダイナモ波モデル (Parker, 1955b)、そして、Steenbeck らの乱流ダイナモモデル (Steenbeck *et al.*, 1966) である。これらはいずれもダイナモを駆動でき、しかも、Cowling の反ダイナモ定理を回避して、軸対称成分が卓越した磁場の生成を説明できる。この 3 つの理論は、現在では、後述する平均場理論の枠組みで整理することができ (Moffatt, 1978)、この平均場の理論は、ダイナモを近似的に説明する枠組みとして、現在でも重要である。平均場の理論の大枠は、2.4 節で述べられる。

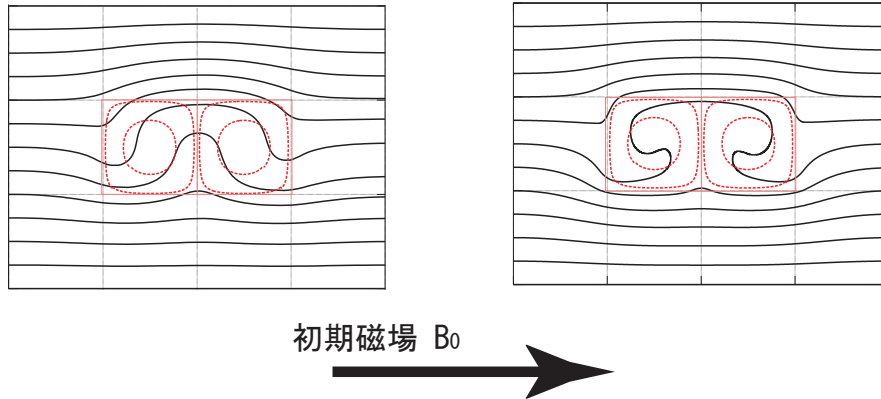


図 2.2: ある流れの対による磁力線の掃き出し (flux expulsion)。中央の赤い長方形の中に、時計回りと反時計周りの流れを一つずつ置き、初期磁場を右向きに与えたときの時間発展を 2 次元で計算した。赤点線が流線、黒実線が磁力線を表す。図は定常状態に達している。(左) $Rm = 10$ のとき $[t = 1.0]$ 、(右) $Rm = 50$ のとき $[t = 2.4]$ 。

2.3.4 Rm が大きいときのダイナモ

境界層と flux expulsion

2.2.1 節で流れの境界層が形成されることを述べたが、 Rm が大きい有限の値であるとき、磁場の境界層が形成される。磁気レイノルズ数が有限の大きい値であるような場合 ($Rm \gg 1$)、誘導方程式 (2.1) の最高微分階の項はきわめて小さくなる。これは、流れの式 (2.59) において Ek が小さいときと同様の問題である。したがって、そのアナロジーから予想されるように、磁場に対して、境界層とそれ以外の領域 (内部領域) とで現象が分離される。ほとんどの領域では拡散が弱く、誘導方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{B}_*}{\partial t_*} = \nabla_* \times (\mathbf{u}_* \times \mathbf{B}_*) \quad (2.103)$$

とバランスする。つまり、内部領域では、完全導体における磁場のように、磁力線が流れに凍結されたように振る舞う。しかし、わずかに存在する拡散のために、拡散の効果が現れる境界層ができる。その厚さは、誘導方程式 (2.35) で拡散項が他の 2 つの項とバランスするスケールであり、無次元では、

$$\delta_{*B} = \mathcal{O}(Rm^{-1/2}) \quad (2.104)$$

である。次元付きの量で書くと、

$$\delta_B \sim Rm^{-1/2} L \quad (2.105)$$

であり、地球で $\mathcal{O}(10^2 \text{km})$ 、太陽でも $\mathcal{O}(10^2 \text{km})$ と見積られる。空間スケールを境界層の厚さで取り直し、 $\mathbf{x} = Rm^{-1/2} L \mathbf{x}_*$ とすると、境界層における誘導方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{B}_*}{\partial t_*} = \nabla_* \times (\mathbf{u}_* \times \mathbf{B}_*) + \nabla_*^2 \mathbf{B}_* \quad (2.106)$$

となる。流れに対する Ekman 境界層が内部領域の運動にも影響を与えたのと同様に、磁場に対する境界層も、内部領域を含む全体の磁場の振る舞いに寄与する。

境界層と関連する性質として、flux expulsion がある (図 2.2)。これは、 Rm が大きくなるにつれて、磁力線が対流セルから掃き出され、 $Rm \rightarrow \infty$ の極限の定常状態では、閉じた流れ関数の中で磁場が 0 になるという現象である (Weiss, 1966)。これは、流れの中に回転角速度の違いがあることから生じるもので、拡散の強さによって、流線と磁力線との交差の度合いが決まる (Moffatt, 1978; Davidson, 2001)。そして、掃き出された磁力線は流れセルの境界部に集中し、そこで磁場が強化されていく。この flux expulsion がおこるとき、回転角速度が異なる部分の間に境界層が形成される。例えば、Childress (1979) および Soward (1987) は、flux expulsion によって形成される境界層を想定し、G.O.Roberts のキネマティックダイナモに対して、境界層解析を行った。その結果、境界層が Rm が大きいときのダイナモの振る舞いを支配的に決めるということを示している (3 章で後述)。

fast dynamo

また、 Rm が大きいときのダイナモの振る舞いとして、近年注目されているのが、fast dynamo である。fast dynamo とは、 $Rm \rightarrow \infty$ の極限で、 $\text{Re}[p] \neq 0$ となるダイナモを指し、それに対して、 $Rm \rightarrow \infty$ のとき、成長率が 0 の値に近づくダイナモは、slow dynamo と呼ばれる。特異摂動問題としての応用数学的な興味や、 Rm が大きい天文ダイナモへの応用という点から、さかんに研究されている (Childress & Gilbert, 1995; Desjardins *et al.*, 2007)。

fast dynamo 研究において基礎的な役割を果たしたのが、Ponomarenko や G.O.Roberts のダイナモモデル (2.3.3 節) である。2.3.3 節で触れたように、滑らかな Ponomarenko のダイナモと G.O.Roberts のダイナモは slow dynamo であるが、ともに、流れの特性が少し変化すると fast dynamo になる。例えば、Ponomarenko の流れが境界で不連続面をもつ場合、Roberts の 2 次元周期性を 3 次元周期性に拡張した場合 (ABC flow, (2.94)) や、Roberts の流れをある時間周期で回転させた場合 (Galloway & Proctor, 1992) である。これらの流れは、fast dynamo と slow dynamo の違いをつくる性質やメカニズムを調べるのに適しているということから、fast dynamo の理論において基礎的な役割を果たしている。その主な結果として、fast dynamo が作用するためには、流体粒子の軌道がカオス状であることが重要であることが知られている。流体粒子の軌道がカオス状になるような流れ (リアプノフ指数が正) であれば、たとえ helicity をもたずとも、 Rm が大きいときに磁力線を効率よく引き伸ばすためである。実際、前述した流れのうちの 2 つ (ABC flow と Galloway & Proctor の流れ) は、Roberts の流れと異なり、そのようなカオス状の流れである (ラグランジアンカオス)。このような性質から、fast dynamo は、helicity をもたないだろう太陽の粒状斑や超粒状斑などにおける、(全球的なスケールと比べて) 小さい空間スケールのダイナモ作用 (small-scale dynamo) との関連でも議論されている (Cattaneo & Hughes, 2001; Ossendrijver, 2003)。

2.4 平均場ダイナモ理論

平均場理論とは、天体の大規模な磁場構造を理解するのに有益な枠組みである。これを用いると、非軸対称磁場の効果をパラメタ化し、軸対称磁場の生成を議論できるようになる。軸対称型磁場の生成を可能にする。本節では、その基礎方程式を導出した後、誘導起電力の重要性、その一つのモデルとしての α 効果、そして、 α 効果に基づく平均磁場の解の特徴をまとめる。結果として、流れの helicity によって大スケールのダイナモが駆動される過程が、説明される。

2.4.1 基礎方程式

スケール分離

平均場理論では、磁場と速度場を、大スケールの場と小スケールの場に分離し、その相互作用として、大スケールの場の時間発展や空間構造などを扱う。そして、「大スケール」は物理量の平均量、「小スケール」はその平均量からのずれで表現する。具体的な現象でいうと、天体内の流れの軸対称成分や、乱流の統計的な振る舞いが、大スケールの速度場の典型的な例である。以下では、それらの具体的な現象を一般化し、平均量とずれ量を議論するための枠組みを示していく。

磁場 B と流れ u が、それぞれ、平均成分 (mean part) $\langle B \rangle, \langle U \rangle$ とずれ成分 (fluctuation part) b', u' に分離でき、

$$B = \langle B \rangle + b', \quad u = \langle U \rangle + u' \quad (2.107)$$

と書けるとする。ここで、平均とは、Reynolds' rule がなりたつ操作とする。Reynolds' rule とは、任意関数 f, g に対して

$$\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle, \quad (2.108)$$

$$\langle \nabla f \rangle = \nabla \langle f \rangle, \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t}, \quad (2.109)$$

$$\langle \langle f \rangle \rangle = \langle f \rangle \quad (2.110)$$

および

$$\langle \langle f \rangle g \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle \quad (2.111)$$

である。定義 (2.108) と (2.110) より $\langle f' \rangle = 0$ 、(2.108), (2.110) と (2.111) より

$$\langle fg \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle + \langle f'g' \rangle \quad (2.112)$$

が導かれる。具体的な平均操作としては、考える現象に応じて様々にあり得て、例えば

- 局所的な平均： 空間平均、時間平均、アンサンブル平均
- 非局所的な平均： 座標平均 (azimuthal 平均、水平面平均など)

などがありうる。前者は乱流を、後者は天体内の現象を想定したものである。ダイナモ問題における平均操作が整理されている文献として、Rädler (2007a) などがある。理論上、便利なアンサンブル平均については、Drew & Passman (1999) が詳しい。

平均場の式とずれ場の式

さらに、誘導方程式をスケール分離すると、平均場とずれ場に対する式が得られる。式 (2.107) を誘導方程式 (2.1) に代入し、式全体の平均をとると、(2.109) より、平均成分の時間発展の式が、

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} - \nabla \times (\langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) - \lambda \nabla^2 \langle \mathbf{B} \rangle = \nabla \times \mathcal{E} \quad (2.113)$$

と得られる。ここで、 \mathcal{E} は平均誘導起電力

$$\mathcal{E} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle \quad (2.114)$$

である。また、この操作の残りの項より、ずれ成分の時間発展は

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} - \nabla \times (\langle \mathbf{U} \rangle \times \mathbf{b}') - (\nabla \times (\mathbf{u}' \times \mathbf{b}'))' - \lambda \nabla^2 \mathbf{b}' = \nabla \times (\mathbf{u}' \times \langle \mathbf{B} \rangle) \quad (2.115)$$

と得られる。ここで

$$(\nabla \times (\mathbf{u}' \times \mathbf{b}'))' = \nabla \times (\mathbf{u}' \times \mathbf{b}') - \nabla \times \mathcal{E} \quad (2.116)$$

とした。式 (2.113) は、平均磁場 $\langle \mathbf{B} \rangle$ の時間発展が、それ自身の自励的な作用 (左辺第 2 項と第 3 項) と \mathbf{b}' による強制的な作用 (右辺) によって決まる、ということを示す。式 (2.113) の特徴は、右辺の誘導起電力 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$ による強制で、平均磁場 $\langle \mathbf{B} \rangle$ の生成源を意味するため重要である。たとえ、平均場自身の自励的な成長 (または、平均流による移流効果) がなくとも、誘導起電力による強制を受けて、平均磁場が成長しうる。このとき、平均電流 $\langle \mathbf{J} \rangle$ に対する Ohm の法則は

$$\langle \mathbf{J} \rangle = \sigma (\langle \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathcal{E}) \quad (2.117)$$

となる。その誘導起電力 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$ は、(2.115) により決まる。ずれ磁場 \mathbf{b}' の時間発展は、自身 \mathbf{b}' の自励的な作用 (左辺) と平均場 $\langle \mathbf{B} \rangle$ による強制 (右辺) によって決まる。

平均場の式 (2.113) とずれ場の式 (2.115) は、誘導起電力項を相互作用項として、大スケールの現象と小スケールの現象の相互作用を表す。これは、2 式の和をとったときに、誘導起電力項が打ち消し合い、誘導方程式 (2.1) と厳密に一致することからもわかる。誘導起電力は、大スケールの現象 (2.113) において、小スケールの現象の情報をもつ唯一の項である。

平均誘導起電力

平均誘導起電力は、どんな数学的形式で表現されるだろうか。基礎となるのは、ずれ磁場の式 (2.115) である。式 (2.115) の一般解は、斉次解 $\mathbf{b}'(0)$ と特解 $\mathbf{b}'^{((B))}$ との和で、

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b}'^{(0)} + \mathbf{b}'^{((B))} \quad (2.118)$$

と与えられる。右辺第1項は、平均場がなくとも自己励起的に生成されるずれ磁場を表し、small-scale dynamo と呼ばれることもある。第2項は、平均場による強制を受けて生成するずれ磁場を表し、平均場の線形汎関数でかける⁵。したがって、これから生成する誘導起電力も、

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(0)} + \mathcal{E}^{((B))} \quad (2.119)$$

と表すことができる。このとき、 $u', \langle U \rangle$ が定常であれば、第2項は平均場の線形汎関数であり、

$$\mathcal{E}_q^{((B))}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{qr}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \tau) \langle B \rangle_r(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\boldsymbol{\xi} d\tau \quad (q, r = 1, 2, 3) \quad (2.120)$$

と書ける。関数 ϕ_{qr} は、汎関数のカーネル、または、応答関数と呼ばれ、流れ構造 $u', \langle U \rangle$ 、および、磁気レイノルズ数 Rm から決まる。つまり、カーネル ϕ_{qr} と、small-scale dynamo による $\mathcal{E}^{(0)}$ がわかれば、 \mathcal{E} が決まる。これは、誘導起電力を平均場で表現する構成方程式

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\langle B \rangle) \quad (2.121)$$

が与えられるということである。

長年、平均場理論では、small-scale dynamo による $\mathcal{E}^{(0)}$ の寄与はほとんど検討されず、平均場によって強制される誘導起電力 $\mathcal{E}^{((B))}$ が注目されてきた。その理由の一つは、もし $\mathcal{E}^{(0)} \neq 0$ が存在したとしても、平均場が時間成長した後は $\langle B \rangle$ 自体が大きくなり、 $\mathcal{E}^{((B))}$ の寄与の方が十分大きくなるだろうということだったようである (Rädler, 2000)。しかし、その平均場への寄与が小さいかどうかは自明でない。small-scale dynamo が存在する場合、kinematic regime であれば $\mathcal{E}^{(0)}$ は指数関数的に成長していく。このとき、平均場は、 $\mathcal{E}^{(0)}$ 項によって強制的に生成されうる。特に、平均場が十分増幅されるまでの初期的段階で、 $\mathcal{E}^{(0)}$ は平均場の成長に寄与すると考えられる。この項の寄与が検討された例は、ごくわずかしかない。

2.4.2 誘導起電力のモデル化

前節で述べたように、誘導起電力 $\mathcal{E}^{((B))}$ が平均場の汎関数としていかに表わされるかということが、これまでの平均場ダイナモ理論で主要課題となってきた。カーネル ϕ_{qr} および平均流 $\langle U \rangle$ がわかれば、平均場は、(2.113) の自励的な解として決まる。多くの場合、カーネル ϕ_{qr} をモデル化して扱い、平均場の時間発展 (2.113) を議論する。この節では、カーネル ϕ_{qr} 、または、平均場の汎関数としての誘導起電力 $\mathcal{E}^{((B))}$ を表現するモデルについて述べる。small-scale dynamo による寄与 $\mathcal{E}^{(0)}$ は無視し、 $\mathcal{E}^{((B))}$ の上添字は省略する。

⁵線形応答に関する言葉と概念は、吉田 (2002) で整理されている。

瞬間局所モデル： α 効果

誘導起電力のモデルとして、最も単純で、最も広く使用されているのが、 α 効果である。

α 効果は、誘導起電力が、平均場に対して瞬間的かつ局所的であると近似して、導入される。(2.120) 式を少し書き直して、

$$\mathcal{E}_q(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi_{qr}(\boldsymbol{\xi}, \tau) \langle B \rangle_r(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \tau) d\boldsymbol{\xi} d\tau \quad (q, r = 1, 2, 3) \quad (2.122)$$

としておく。ここで、平均磁場の変化が空間的に時間的に小さいとき、または、平均磁場に対する局所的で瞬間的な応答のみに注目するとき、 $\boldsymbol{\xi}, \tau$ を微量として

$$\langle B \rangle_r(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \tau) = \langle B \rangle_r(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \langle B \rangle_r(\mathbf{x}, t)}{\partial x_s} \xi_s - \frac{\partial \langle B \rangle_r(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \tau + \dots \quad (2.123)$$

と展開できる。これを (2.122) 式に代入して、0 次項と空間に対する 1 次項とを残すと、

$$\mathcal{E}_q(\mathbf{x}, t) = \alpha_{qr} \langle B \rangle_r(\mathbf{x}, t) + \beta_{qrs} \frac{\partial \langle B \rangle_r(\mathbf{x}, t)}{\partial x_s} \quad (q, r = 1, 2, 3) \quad (2.124)$$

となる。ここで、

$$\alpha_{qr} = \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty d\boldsymbol{\xi} \phi_{qr}(\boldsymbol{\xi}, \tau), \quad \beta_{qrs} = - \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty d\boldsymbol{\xi} \phi_{qr}(\boldsymbol{\xi}, \tau) \xi_s \quad (2.125)$$

である。さらに、平均流がなく ($\langle \mathbf{U} \rangle = 0$)、小スケールの場合 \mathbf{u}' が等方的であるとする、(2.124) は

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{x}, t) = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle(\mathbf{x}, t) - \beta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle(\mathbf{x}, t) \quad (2.126)$$

となる。ここで、 α, β はスカラー量であり、 \mathbf{u}' と Rm で決まる。式 (2.126) における右辺第 1 項が、狭義での α 効果である。また、平均場に対する空間微分の 1 次項 (右辺第 2 項) は β 効果と呼ばれる。

これらの項の意味は、平均磁場に対する効果を考えるとわかる。式 (2.126) を平均磁場の式 (2.113) に代入すると、

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\alpha \langle \mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) + (\lambda + \beta) \nabla^2 \langle \mathbf{B} \rangle \quad (2.127)$$

となる。ここで (2.16) を使った。また、このとき、平均電流に対する Ohm の法則 (2.117) は

$$\langle \mathbf{J} \rangle = \sigma (\langle \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \alpha \langle \mathbf{B} \rangle + \beta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) \quad (2.128)$$

となる。 α 項は、平均場に対して平均電流を生成するような効果をもち、移流に関連して平均場の成長に寄与する項であることがわかる。後述するように、helicity をもつ流れは、自然に α 効果を生成する。生成された α 効果は、誘導起電力を介して、平均電流を誘導し、その平均電流を基に、平均磁場が生成される (図 2.3)。また、 β 項は、平均磁場の拡散に寄与する項で、小スケールの現象による磁場の散逸を表すということから、乱流拡散

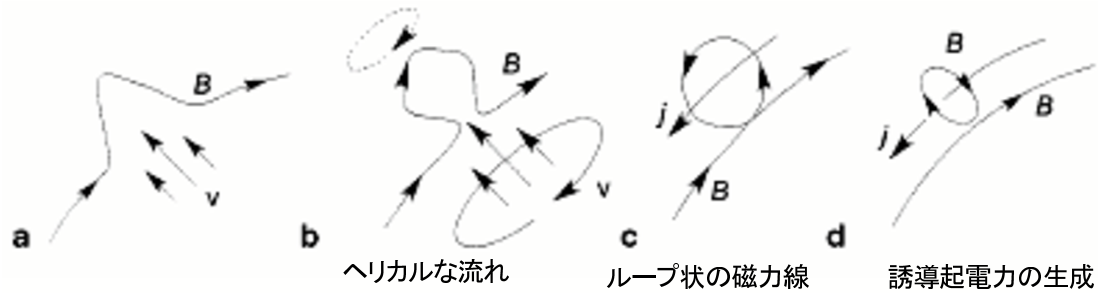


図 2.3: α 効果の概念図 (Merrill *et al.* (1998) を改変)。ある磁場中に 3 次元的なねじれをもった流れがあると (a,b)、磁力線がねじられループ状の構造ができる (c)。ループ状の磁力線は誘導起電力、または電流の生成を意味する。この電流が初期磁場と垂直な平面に磁場を誘導する。初期磁場に対する誘導起電力の生成率を表すのが α 効果。

係数とも呼ばれる。平均場モデルでは、しばしば、実効的な磁気拡散率 (または渦磁気拡散係数) $\lambda_e = \lambda + \beta$ として表現される。ここで特筆すべきなのは、この渦磁気拡散項も、平均磁場の成長に寄与するという点である。分子磁気拡散率 λ は正であるのに対し、乱流拡散係数 β は負の値もとるため、渦磁気拡散率 λ_e は正負のどちらも取りうる。渦磁気拡散率が負になる場合、平均磁場を生成させるような効果となる。実際に、負の渦磁気拡散率の存在、および、その平均磁場の成長への寄与が示されている (Lanotte *et al.*, 1999; Zheligovsky *et al.*, 2001)。

その他のモデル

α 効果を中心とする瞬間局所モデルは、後述するように極めて有効で、伝統的に使用されてきたが、一方で、その導入時の仮定である、局所性、瞬間性 ((2.124) の前) と等方性 ((2.126) の前) が妥当かどうかは自明でない。後者の非等方性については、比較的によく調べられており、その平均磁場への寄与も示されている (Rädler, 2000)。しかし、非局所性や非瞬間性、特に非瞬間性については、近年までほとんど検討されていない。

後述する本論 (3 章) では、その非局所性および非瞬間性を検討する。これによって、従来の瞬間局所的な α 効果の描像もはっきりとする。これらの誘導起電力のモデルに関する研究は、本論 3.1 節で整理される。

2.4.3 α 効果による平均場の基本解

本節および 2.4.4 節では、瞬間局所的な α 効果に基づく平均場理論を具体的にみていく。本節では、 α はあらかじめ決まっていると、そのときに生成される平均場の解を考える。これは、2.3.3 節の終わりで触れた、近似的ダイナモにあたり、流れ構造を具体的に考えることなく、その磁場に対する実効的な効果を考えるだけで、磁場の大スケール構造を議論しようという立場である。この立場から平均場理論の有効性をみた後に、次節

で、 α 効果の生成を扱う。また、本節および次節で示すような α に基づく平均場理論は、瞬間的かつ局所的な α 効果以外の誘導起電力のモデルを考える際にも重要となる。以下の議論を適宜、改訂していくことで、 α を拡張した場合に適用できるためである。本節および次節で概観する枠組みは、本論 (3 章) で α 効果の限界と拡張を議論していく際に基礎となる。

α^2 ダイナモと $\alpha\omega$ ダイナモ

平均場モデルは、大きく、 α^2 ダイナモと $\alpha\omega$ ダイナモの 2 つにわけられる。まず、この 2 つの違いを、平均場の式のバランスからみる。

箱形の系にある (x, y, z) 座標で、以下のような状況を考える。箱形の系というのは、球における局所モデルと考えてもよく、球座標 (r, ϕ, θ) の各方向がそれぞれ (x, y, z) 座標に対応する。つまり、 x 方向は鉛直上向き、 y 方向は東向き、 z 方向は北向きと考えればよい。平均流が y 方向にあり、 x 方向にのみシアをもつとする。式で書くと

$$U = U_y(x)e_y, \quad \frac{\partial U_y}{\partial x} = \text{Const.} = \omega \quad (2.129)$$

である。 α 効果は、 x, y 方向に等方的に存在するとする。

$$\alpha B_H = \alpha(B_x, B_y) \quad (2.130)$$

このとき、トロイダル磁場 $B_T = B_y e_y$ と、ポロイダル磁場 $B_P = B_x e_x$ の生成を考えよう。解は、 z 方向にのみ依存し、 $B_H = B_H(z, t)$ であるとする。すると、平均場の式 (2.113) は、

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \nabla^2 \right] B_H = \nabla \times \alpha B_H + \omega \cdot B_H \quad (2.131)$$

(ここで $\omega = \omega e_y$)、または

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha \frac{\partial}{\partial z} + \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \quad (2.132)$$

となる。磁気拡散率は乱流拡散を含めた実効的な値 λ_e とし、下添字を省略する。式 (2.131) および (2.132) より、トロイダル磁場 B_y からポロイダル磁場 B_x が α 効果 (図 2.3) によって生成され、ポロイダル磁場 B_x からトロイダル磁場 B_y は α 効果と平均流シア (ω 効果; 図 2.4) によって生成されることがわかる。

トロイダル磁場の生成に対して、 α 効果と ω 効果のどちらがより効くかによって、磁場の解は 3 通りの異なる振る舞いをする。その 3 つとは、大スケール磁場の z 方向への典型的な空間スケールを H と書けるとして、

1. $\alpha/H \gg \omega$ のとき、主に α 効果でトロイダル磁場が生成
2. $\alpha/H \ll \omega$ のとき、主に ω 効果でトロイダル磁場が生成

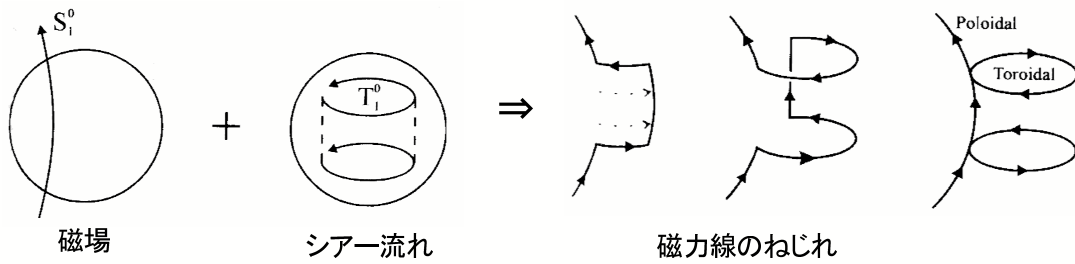


図 2.4: ω 効果の概念図 (Merrill *et al.* (1998) を改変)。ポロイダル磁場 (左図) 中に平均流シア (中図) があると、そのシア流によって磁力線がトロイダル方向へ引き伸され、ポロイダル磁場が生成する (右図)。ポロイダル磁場に対するトロイダル磁場の生成率を表すのが ω 効果。

3. $\alpha/H \sim \omega$ のとき、 α 効果および ω 効果が同等に効いてトロイダル磁場が生成する場合である。上から順に、 α^2 ダイナモ、 $\alpha\omega$ ダイナモ、そして、 $\alpha^2\omega$ ダイナモと呼ばれる。以下では、 α^2 ダイナモ、および、 $\alpha\omega$ ダイナモの基本解をみていこう。 $\alpha^2\omega$ ダイナモは、この2つの組み合わせで考えることができる。

α^2 ダイナモ

α^2 ダイナモは、定常型の磁場を生成する。 $\alpha/H \gg \omega$ のとき、(2.132) は、

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \quad (2.133)$$

となる。解を

$$\mathbf{B}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}} e^{pt + ikz} \quad (2.134)$$

とすると (k は正の実数)、問題は固有値問題

$$\{p + \lambda k^2\} \begin{pmatrix} \tilde{B}_y \\ \tilde{B}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ik\alpha \\ ik\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_x \\ \tilde{B}_y \end{pmatrix} \quad (2.135)$$

に帰着される。このとき、固有値方程式は

$$p^{*2} - \alpha^2 k^2 = 0 \quad (2.136)$$

$$\text{where } p^* = p + \lambda k^2 \quad (2.137)$$

となる。よって、固有値および固有ベクトルは

$$p = \alpha k - \lambda k^2, \quad \tilde{\mathbf{B}} = i\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{B}} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \tilde{B}_x \\ \tilde{B}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (2.138)$$

$$p = -\alpha k - \lambda k^2, \quad \tilde{\mathbf{B}} = -i\mathbf{e}_z \times \tilde{\mathbf{B}} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \tilde{B}_x \\ \tilde{B}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} \quad (2.139)$$

と得られる。まず、 α^2 ダイナモは、 α の符号に関わらず、成長解と減衰解の対をつねにもつ。そして、単純な α^2 ダイナモでは、振動を伴わない。

ダイナモの生成条件および磁場構造の特徴は、以下の通りである。ダイナモが生成されるためには、波数 k を正として、

$$|Rm_\alpha| = \frac{|\alpha|}{\lambda k} \geq 1 \quad (2.140)$$

を満たすことが必要である。波数 k の絶対値が十分小さければ、任意の α に対して、この条件は満たされる。この条件を与える $Rm_\alpha = \alpha/(\lambda k)$ は、 α を速度スケールとした磁気レイノルズ数である。また、成長率 $\text{Re}[p]$ で見ると、波数 $k_{\max} = |\alpha|/(2\lambda)$ が最も卓越して成長することがわかる。長波長成分 ($k \sim 0$) では、 α 効果によって、波数 k に比例して成長率が上がり、短波長成分では、磁気拡散 λk^2 によって、成長率が抑えられる。

固有関数より、その生成メカニズムを見てみよう。 $p^* = \alpha k$ の固有関数は

$$\frac{B_x}{B_y} = -i = e^{-i\pi/2} \quad (2.141)$$

となる。つまり、 B_x と B_y の振幅は等しく、その位相は B_x が $\pi/2$ だけ遅れる。これは、 $\alpha k > 0$ のとき、成長解となり、 $\alpha k < 0$ のときは減衰解となる。一方、 $p^* = -\alpha k$ の固有関数は

$$\frac{B_x}{B_y} = i = e^{i\pi/2} \quad (2.142)$$

となり、逆に、 B_x の位相が $\pi/2$ だけ先行する。 $\alpha k > 0$ のときには減衰解、 $\alpha k < 0$ のときには成長解となる。

$\alpha\omega$ ダイナモ

一方、 $\alpha\omega$ ダイナモは、振動型の磁場を生成する。 $\alpha/H \ll \omega$ のとき、(2.132) は、

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \quad (2.143)$$

となる。解の形を、 α^2 ダイナモの場合と同様に、(2.134) で与えると、問題は、

$$\{p + \lambda k^2\} \begin{pmatrix} \tilde{B}_x \\ \tilde{B}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ik\alpha \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_x \\ \tilde{B}_y \end{pmatrix} \quad (2.144)$$

となる。したがって、固有値方程式は

$$p^{*2} + ik\alpha\omega = 0 \quad (2.145)$$

である。よって、固有値は

$$p^* = \sqrt{\frac{k|\alpha\omega|}{2}}(\pm 1 \mp i), \quad \text{for } \alpha\omega > 0 \quad (2.146)$$

$$p^* = \sqrt{\frac{k|\alpha\omega|}{2}}(\pm 1 \pm i), \quad \text{for } \alpha\omega < 0 \quad (2.147)$$

と得られる。つまり、 $\alpha\omega$ ダイナモは、振動を伴った成長解および減衰解をもち、この性質よりダイナモ波とも呼ばれる (Parker, 1955b)。

特に、成長解に注目しよう。式 (2.146) (2.147) より、成長解をまとめて書くと、

$$p^* = \sqrt{\frac{k|\alpha\omega|}{2}}(1 - i\text{sgn}[\alpha\omega]) \quad (2.148)$$

となり、このときの位相速度は、

$$c_p = -\frac{\text{Im}[p]}{k} = \sqrt{\frac{k|\alpha\omega|}{2}}\text{sgn}[\alpha\omega] \quad (2.149)$$

と得られる。つまり、位相速度の向きは、 $\alpha\omega$ の符号で決まり、 $\alpha\omega < 0$ のとき、位相は南向きに伝播する。その振動の周期 $T = 2\pi/\text{Im}[p]$ は、 $|\alpha\omega|$ の絶対値で決まる。式 (2.148) より、この振動周期 T と磁気拡散率 λ との間には

$$\lambda = \frac{1}{k^2}\sqrt{k|\alpha\omega|}2 = \frac{2\pi}{k^2T} \quad (2.150)$$

の関係がある。また、成長率 $\text{Re}[p]$ は、 $k \sim 0$ のとき、波数 k の $1/2$ 乗に比例して大きくなり、 α^2 ダイナモに比べて速く増幅される。このような $\alpha\omega$ ダイナモの生成条件は

$$|D| = |R_\alpha R_\omega| = \frac{|\alpha\omega|}{\lambda^2 k^3} \geq 2 \quad (2.151)$$

である。ここで、 $R_\omega = \omega/(\lambda k^2)$ は ω 効果に基づく磁気レイノルズ数であり、 $\alpha\omega$ ダイナモの生成条件を与える $D = R_\alpha R_\omega$ はダイナモ数と呼ばれる。

固有関数を見てみよう。固有ベクトルが

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_x \\ \tilde{B}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^* \\ \omega \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} -ik\alpha \\ p^* \end{pmatrix} \quad (2.152)$$

となることから、 B_x と B_y の比は、 $\alpha\omega > 0$ のとき、

$$\frac{B_x}{B_y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k|\alpha|}{|\omega|}}e^{-i\pi/4} \quad \text{for } \omega > 0, \quad \alpha > 0 \quad (2.153)$$

$$\frac{B_x}{B_y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k|\alpha|}{|\omega|}}e^{+i3\pi/4} \quad \text{for } \omega < 0, \quad \alpha < 0 \quad (2.154)$$

さらに、 $\alpha\omega < 0$ のとき、

$$\frac{B_x}{B_y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k|\alpha|}{|\omega|}} e^{+i\pi/4} \quad \text{for } \omega > 0, \quad \alpha < 0 \quad (2.155)$$

$$\frac{B_x}{B_y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k|\alpha|}{|\omega|}} e^{-i3\pi/4} \quad \text{for } \omega < 0, \quad \alpha > 0 \quad (2.156)$$

と得られる。まず、 B_x の振幅は B_y の $\sqrt{|k\alpha/\omega|}$ 倍となることがわかる。これは、 $\alpha\omega$ メカニズムでは、 α^2 メカニズムと異なり、ポロイダル磁場とトロイダル磁場の強度に差がでることを意味する。また、 B_x と B_y は、 $\pi/4$ または $3\pi/4$ の位相差をもつ。この位相差は、 α 効果に起因する。 ω 効果は、位相を変えることなく、ポロイダル磁場 B_x からトロイダル磁場 B_y を生成するのに対し、 α 効果は、 B_y を位相 $\pi/4$ または $3\pi/4$ だけずらして、 B_x を生成する。この α によって、位相のずれ $\pi/4$ が生じることは、 α 効果を 2 回繰り返して生成される α^2 ダイナモで、位相差が $\pi/2$ になることの原因である。

球における α^2 と $\alpha\omega$

前 2 項では、局所的な箱形の系で考えたが、球状の系の場合でも、平均磁場は生成される。最も簡単な解析は、絶縁体で囲まれた球内に、一様な α が存在する場合の球 α^2 ダイナモである (Krause & Steenbeck, 1967; Moffatt, 1978)。その結果、 $|Rm_\alpha| = |\alpha|r_0/\lambda \gtrsim 4.49$ のときに、振動しない磁場が成長することが示された (r_0 は球の半径)。また、このモデルでは、双極子成分が最も速い成長率をもつのは $4.49 \lesssim |Rm_\alpha| \lesssim 10.26$ の範囲だけであり、 $|Rm_\alpha|$ が大きくなるにつれ、より高次数成分 (短波長成分) が卓越する。これは、局所箱形 α^2 モデルにおける (2.138) (2.139) と一致する振る舞いである。それに対し、 α が分布をもつ場合の α^2 ダイナモが、Steenbeck & Krause (1966) や P.H.Roberts (1972) によって、数値的に調べられた。 α の分布としては、北半球と南半球で符号が反対となるように、 $\alpha \sim -\cos\theta$ が考えられた (θ は余緯度)。これは、後述する、 α の生成過程を考えると、自然な分布である。この場合でも、 α^2 モデルは、振動しない平均磁場を生成することがわかった。また、その磁場構造については、双極子成分の成長が $|Rm_\alpha| \gtrsim 7.6$ で、四重極子成分が $|Rm_\alpha| \gtrsim 7.8$ で起こることから、双極子成分と四重極子成分が同程度に起こりやすいことがわかった。 α^2 メカニズムがつくるダイナモは、長波長成分である双極子成分だけでなく、その同程度かそれ以上に強く、短波長成分を含む。

また、球状 $\alpha\omega$ モデルでも、箱形モデルから期待されるような、振動型の平均磁場の生成が確認されている。P.H.Roberts (1972) は上述の α^2 モデルに加えて、多くの $\alpha\omega$ モデルによる解を調べた。その結果、そのダイナモの振動と空間構造が、 $\alpha\omega$ の符号に敏感であることを示した。北半球で $\alpha\omega > 0$ 、南半球で $\alpha\omega < 0$ のときには、振動する双極子型となり、その位相伝播は低緯度方向に進む。これは、局所箱形モデルにおける結果 (2.149) と一致する。それに対し、球モデルで $\alpha\omega$ の符号が両半球で逆になった場合、振動する四重極子成分が卓越し、その位相伝播は高緯度方向に進むことがわかった。これは、局所箱形モデルと一致しない振る舞いである。この結果は、ダイナモが α および ω の分布に敏

感であることを示している。実際の天体へ応用し、磁場構造まで議論するためには、天体内部の状況を表現するのに適切な α (または誘導起電力) と ω を知ることが重要である。

α^2 および $\alpha\omega$ ダイナモモデルの意味

上述の研究とその結果は、ダイナモ理論においてきわめて重要である。上述した、球形モデルにおける平均場は、軸対称磁場にあたる。つまり、そこにおける平均場の生成は、軸対称磁場の生成を示したことを意味する。これは、Cowling の反ダイナモ定理による制約を回避し、非軸対称成分の存在 ($\alpha \neq 0$) を認めた上で、実際の天体磁場のような軸対称磁場の生成を可能としている。このような成功により、 α 効果モデルおよび平均場理論は、現在でも有効な枠組みであると考えられている。

また、天体ダイナモ問題への直接的な適用としては、 $\alpha\omega$ ダイナモは、太陽磁場を説明する基礎メカニズムと考えられている。 $\alpha\omega$ メカニズムによるダイナモ波が、観測的に知られている、太陽磁場の振動および赤道伝播の存在可能性を説明するためである⁶。ここで、 $\alpha\omega$ 型として太陽を、局所箱形モデルの結果から考えてみよう。典型的な空間スケールを 10^8m として、 $k \sim 10^{-8}\text{m}^{-1}$ とする。これと振動周期 $22\text{year} \sim 10^9\text{s}$ より、実効的な磁気拡散率が $\lambda_e \sim 10^7\text{m}^2/\text{s}$ と見積もられる。プラズマ水素およびヘリウムの磁気拡散率が $\lambda \sim 10^2\text{m}^2/\text{s}$ だったことを思い出すと、太陽では乱流拡散が極めて強いだろうと解釈される。また、差動回転の強さは、東西流の速さを表面での速さ $U_y \sim 10^2\text{m/s}$ 、厚さ方向の空間スケールも水平方向の空間スケールと同じオーダーとすると、 $\omega \sim 10^{-6}\text{1/s}$ となる。これと振動周期を (2.148) に代入して、 $\alpha \sim 10^{-2}\text{m/s}$ と見積もられる。さらに、ポロイダル磁場とトロイダル磁場の振幅比を考えると、 $B_x/B_y \sim 10^{-2}$ となり、表面には現れないものの、太陽では強いトロイダル磁場が存在すると考えられる。これは、内部のトロイダル磁場が表面に現れたものである黒点が、太陽のポロイダル磁場の典型的強度 $\mathcal{O}(10^{-3}\text{T})$ よりも、強い磁場強度 $\mathcal{O}(10^{-1}\text{T})$ をもつことから支持される。

一方で、単純な $\alpha\omega$ メカニズムでは、太陽磁場の特徴でうまく説明できない点が、大きく2つある。

一つは、位相伝播の向きについての問題である。単純な $\alpha\omega$ 解 (2.149) によると、観測で得られているように、位相が赤道方向へ伝播するためには、北半球で $\alpha\omega < 0$ であることが要請される。しかし、陽震学からは、北半球の低緯度帯で $\omega > 0$ であることが示され、 α の生成過程の単純な考察からは (次節)、北半球で $\alpha > 0$ であることが示唆される。つまり、北半球の低緯度域で $\alpha\omega > 0$ となってしまう、上述の $\alpha\omega$ 解による要請と一致しない。この不一致を回避するために、多くの太陽ダイナモモデルが提出され、 α の空間分布、子午面循環などを考慮することで、赤道方向への位相伝播を説明できることが示されてきている (Dikpati & Gilman, 2001)。しかし、現段階では、対流層内部の α や誘導起電力、子午面循環に関する観測的制約が少ないため、どのモデルがもっとも正しいかを議論するのは難しいようである。

⁶ それに対し、定常型の地球磁場は α^2 ダイナモといえるかもしれない。しかし、内核の存在によって逆転が抑えられているという説もあり、太陽ほど確信的に議論されることが多くない。

もう一つは、磁場の卓越成分についての問題である。上述したように、単純な $\alpha\omega$ ダイナモでは、双極子成分も四重極子成分も同様に生成されやすい。この卓越成分の問題に対して、 α の空間分布と子午面循環の強度の影響が調べられた (Bonanno *et al.*, 2002)。その結果、双極子卓越型の磁場となるのは、子午面循環が特定の強度をもち、かつ、 α が対流層の底にきわめて強く集中している場合のみであることが示された。対流層の底にある tachocline が大きく影響を与えているだろうことを示唆する一方で、これらの分布は自然でない。この問題も未解決のままである。

2.4.4 α 効果の生成

では、 α の大きさや向きは何で決まるだろうか。最も重要な要素と考えられてきたのは、流れの helicity (2.67) である。 α 効果は、流れの helicity h によって、

$$\alpha \propto -h \quad (2.157)$$

のように決まることが、磁気拡散率が大きい場合と、磁気拡散率が小さく、ずれ磁場の時間スケールが十分短い場合との 2 つの場合で、解析的に示される。その一方、流れの helicity が α 効果の必要条件ではなく、helicity 以外の要素でも α 効果は生成されるということがわかっている。

本節では、まず、ずれ磁場の式の第 0 次的な解析から (2.157) の関係が導かれることを確かめ、最後に、helicity 以外の α 効果をつくる原因について簡単にのべる。

ずれ式のスケールリング

2 つの状況をクリアにするために、ずれ磁場の式 (2.115) のバランスを考える。ここでは、簡単のために、平均流がない場合 ($\langle U \rangle = 0$) を考える。各物理量のスケールを

$$\mathbf{x} = l_0 \mathbf{x}_*, \quad t = \tau t_* \quad (2.158)$$

$$\mathbf{u}' = u_0 \mathbf{u}'_*, \quad \mathbf{b}' = b_0 \mathbf{b}'_*, \quad \langle \mathbf{B} \rangle = B_0 \langle \mathbf{B}_* \rangle \quad (2.159)$$

ととる (下添字 $*$ つきは無次元量) とすると、(2.115) は、

$$\frac{\partial \mathbf{b}'_*}{\partial t_*} - St (\nabla_* \times (\mathbf{u}'_* \times \mathbf{b}'_*))' - St Rm^{-1} \nabla_*^2 \mathbf{b}'_* = St \frac{B_0}{b_0} \nabla_* \times (\mathbf{u}'_* \times \langle \mathbf{B}_* \rangle) \quad (2.160)$$

となる。ここで、磁気レイノルズ数 $Rm = l_0 u_0 \lambda$ 、Strouhal 数 $St = \tau u_0 / l_0$ である。これより、 Rm, St と B_0/b_0 の大きさによって、式のバランスが異なることがわかる。式 (2.160) を解く際に問題となるのは、左辺第 2 項である。しかし、この項は、ずれの 2 次項であるため、スケールの取り方によっては、無視することができ、(2.160) を解析的に扱うことができる。以下では、この左辺第 2 項が無視できる状況を、 Rm の大小でわけて扱う。

First-Order Smoothing approximation

まず、 $Rm \ll 1$ のとき、左辺第2項は無視できる。以下では、次元つきの (2.115) で考えよう。バランスには2通りあり、1つは $b_0 \sim Rm B_0$ のときで

$$-\lambda \nabla^2 \mathbf{b}' = \nabla \times (\mathbf{u}' \times \langle \mathbf{B} \rangle) \quad (2.161)$$

、もう1つは $b_0 \sim Rm B_0$ かつ $\tau \sim Rm l_0/u_0 = l_0^2/\lambda \ll l_0/u_0$ のときで

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} - \lambda \nabla^2 \mathbf{b}' = \nabla \times (\mathbf{u}' \times \langle \mathbf{B} \rangle) \quad (2.162)$$

である。前者は、後者のバランスにおける定常状態と考えることができるため、これらは (2.162) で代表して扱ってよい。このような近似は、First-Order Smoothing Approximation (以下、FOSA 近似) または Second-Order Correlation Approximation と呼ばれる。

FOSA 近似下で、流れ

$$\mathbf{u}' = \text{Re} \left[\tilde{u} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] = \text{Re} \left[\tilde{u}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] \quad (2.163)$$

が生成する α 効果を求めてみよう。ここで、 k は流れの波数、 ω は流れの周波数、上添字 * は複素共役を表す。また、簡単のために、平均磁場 $\langle \mathbf{B} \rangle$ は一定であるとする。このとき、(2.162) より、ずれ磁場は、

$$\mathbf{b}' = \text{Re} \left[\frac{i \mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{B} \rangle}{\lambda k^2 - i \omega} \tilde{u} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] \quad (2.164)$$

と書ける ($k^2 = |\mathbf{k}|^2$)。したがって、誘導起電力 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle$ は

$$\mathcal{E}_q = \varepsilon_{qrs} \tilde{u}_r^* \tilde{u}_s (i k_t \langle B_t \rangle) \frac{\lambda k^2 + i \omega}{\lambda^2 k^4 + \omega^2} \quad (2.165)$$

となる。ここで、 $\mathcal{E}_i = \alpha_{ij} \langle B_j \rangle$ とすると、

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_{irs} \tilde{u}_r^* \tilde{u}_s (i k_j) \frac{\lambda k^2 + i \omega}{\lambda^2 k^4 + \omega^2} \quad (2.166)$$

と得られ、さらに、等方な場合、

$$\alpha = \frac{1}{3} \alpha_{ii} = \frac{1}{3} \varepsilon_{irs} \tilde{u}_r^* \tilde{u}_s (i k_i) \frac{\lambda k^2 + i \omega}{\lambda^2 k^4 + \omega^2} \quad (2.167)$$

となる。ここで、流れ (2.163) の helicity h は、(2.67) より、

$$h = \tilde{u}_i^* \varepsilon_{lmn} (i k_m) \tilde{u}_n = -\varepsilon_{mln} \tilde{u}_i^* \tilde{u}_n (i k_m) \quad (2.168)$$

と書ける。したがって、(2.167) は、helicity h を使って

$$\alpha = \frac{1}{3} \alpha_{ii} = -\frac{1}{3} h \frac{\lambda k^2 + i \omega}{\lambda^2 k^4 + \omega^2} \quad (2.169)$$

と表せる。 α 効果は、helicity h の大きさに比例した強さを持ち、その向きは、 h の符号に対して反対向きになる。これは、直観的にも理解しやすい関係である (図 2.3)。また、流れが時間変化をもたないとき ($\omega = 0$)、 α は $1/\lambda$ に比例し、拡散の効果が弱くなるほど、 α の生成率が大きくなる。これは、拡散の効果が小さくなるほど、磁力線はねじられやすく、誘導起電力または α 効果が生成されやすくなるだろうという直観と一致する。ただし、この近似は、 $Rm \ll 1$ の状況を考えているということからもわかるように、磁力線がねじられにくい状況下での磁力線のねじれを考えているということに注意が必要である。

Short-Correlation Time Approximation

次に、 $Rm \gg 1$ の場合を考える。式 (2.160) において、 $St = \tau u_0/l_0 \ll 1$ かつ $B_0/b_0 \ll 1$ であれば、左辺第 2 項の寄与なしに、ずれ場 \mathbf{b}' が生成される。ここで注意すべきことは、この近似下では、ずれ磁場の特徴的時間 τ が移流時間および拡散時間よりも十分短いこと

$$\tau \ll u_0/l_0 \ll l_0^2/\lambda \quad (2.170)$$

を仮定するという点である。これを満たすような状況としては、流れが乱流的で、 l_0 よりも小さいスケールのゆらぎや相関時間 τ_c をもつような場合を考えるとよい。このようなとき、磁場にもこの相関時間が現れるだろう。したがって、式 (2.170) を満たすような時間スケールとしては、乱流的な流れの τ_c を考えるとよい。これらより、この近似は Short-Correlation Time Approximation (以下、SCTA 近似) または Short-Sudden Approximation などと呼ばれる。このとき、ずれ式は

$$\frac{\partial \mathbf{b}'}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}' \times \langle \mathbf{B} \rangle) \quad (2.171)$$

とバランスする。

SCTA 近似下の α を求めよう。ここでも、平均磁場は一定とする。流れ \mathbf{u} に対し Lagrange 的に現象をみたとき、解 \mathbf{b}' は、(2.171) の両辺の時間積分で

$$\mathbf{b}'(t) = \int_0^t (\langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla) \mathbf{u}'(t') dt' \quad (2.172)$$

と書ける。初期状態では $\mathbf{b}'(t=0)$ とした。よって、誘導起電力は

$$\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle(t) = \int_0^t \langle \mathbf{u}'(t) \times (\langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla) \mathbf{u}'(t') \rangle dt' \quad (2.173)$$

となる。したがって、 α_{ij} は

$$\alpha_{il}(t) = \varepsilon_{ijk} \int_0^t \langle u_j(t) \frac{\partial u_k(t')}{\partial x_l} \rangle dt' \quad (2.174)$$

となり、等方 α は、

$$\alpha(t) = \frac{1}{3} \alpha_{ii} = -\frac{1}{3} \int_0^t \langle \mathbf{u}(t) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}(t')) \rangle dt' \quad (2.175)$$

と得られる。ここで、SCTA 近似より、流れの相関が、積分時間 t に比べて十分に小さい時間 τ_c で失われるとすると、上の式は、

$$\alpha(t) \sim -\frac{\tau_c}{3} \langle \mathbf{u}(t) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}(t)) \rangle \quad (2.176)$$

と帰着される。ここでも、 α 効果は、 $-h$ に比例することがわかる。そして、SCTA 近似下では、拡散 λ によらず、流れの相関時間 τ_c で、 α が決まる。これは、 $\lambda = 0$ の完全導体の場合の α に相当し、流れのねじれが、そのまま磁力線のねじれに反映されているような状況である。また、この極めて短い時間スケールでは、流れが helicity を維持する時間 τ_c が長いほど、 α の生成率があがることがわかる。

helicity 以外の原因による α 効果

ここまでで、 α の生成には、流れの helicity が効果的であることを述べてきたが、helicity をもたない流れでも、 α 効果は生成しえ、ダイナモを生成しうる。Gilbert *et al.* (1988) は、helicity をもたず（鏡映対称性をもち）かつ時間依存性をもつような流れが生成する α を考え、 $Rm \ll 1$ の状況で、大きい Rm の方向へ拡張した FOSA 解析を行った。その結果、流れが時間依存性を伴った波状の構造をもつとき、流れの 3 重積 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{u}$ に比例するような α が生成されることを示した。また、この α は Rm^2 ($\sim 1/\lambda^2$) に比例する。これは、 Rm ($\sim 1/\lambda$) に比例した、helicity による α (2.167) との違いを示している。

前項までで述べたのは、キネマティック理論における基礎論だったが、力学的な効果をうけた α の振る舞いも重要視されている (e.g. Ossendrijver, 2003)。前者が、きわめて弱い磁場でもおこるのに対し、後者は、磁場がある程度成長した後の話である。その代表例は、磁気浮力による α の生成である (e.g. Moffatt, 1978)。磁場強度がある臨界値をこえたとき、磁気浮力による不安定 (Parker 不安定) がおこる。Parker 不安定は、太陽黒点を形成するメカニズム (1 章) で、対流層深部の磁場を表面に上昇させる。その磁力線の上昇の過程で自転の影響を受けると、誘導起電力が生成しうる。その結果、平均磁場の強化に寄与するというシナリオである。太陽表面で観測されている磁束管のループ構造は、このシナリオで α を生成し、太陽磁場の大スケール構造に寄与していると考えられている (Babcock–Leighton ダイナモモデル)。

また、力学的な効果に関して、もう一つの重要な話題は、 α 効果の抑制である (α -quenching; e.g. Rädler (2000))。磁場がある程度成長した場合、Lorentz 力の寄与が大きくなり、流れが抑制されたり、磁力線のねじれが抑えられたりするだろう。その結果、誘導起電力および α の生成率がおち、飽和状態に達する、というのが quenching である。これによって、キネマティックだった平均場理論を、ダイナミックな MHD 平均場理論に発展させることができ、大スケール磁場の強度がいかにかに決まるかといった問題を議論できるようになる。この観点から、近年では、誘導起電力および α の性質を局所 MHD 乱流の直接数値シミュレーションで調べることがさかんに行われている。

2.4.5 α 効果による平均場理論のまとめ

ここまでで、これまでのダイナモ理論において中心的な概念となってきた α 効果と、それに基づく平均場の理論について述べてきた。その結果、2.2 節および 2.3.3 節で指摘していた、流れの helicity が、 α 効果または誘導起電力を介してダイナモの生成に寄与するということが示された。ただし、この α 効果は、helicity から生成される平均誘導起電力を第 0 近似的に扱うものであること、 α の生成過程は自明でないこと、に注意が必要である。特に、その近似の妥当性は、あまり検討されずにきている。

また、 α 効果が寄与する磁場の生成メカニズムは、平均流シアの寄与の大きさによって、 α^2 型と $\alpha\omega$ 型との 2 種類に分けられることを示した。それらは、単純なモデルの場合ですでに、定常型磁場と振動型磁場の生成を説明することから、天体ダイナモ問題を考える上での基礎メカニズムと考えられている。現在では、 α および ω の分布や、力学的な効果による quenching を考慮し、より定量的な議論が行われている。

一方で、上述したように、 α 効果の生成過程や妥当性は未だ明らかでないため、 α 効果、さらには、 α^2 および $\alpha\omega$ 型ダイナモの解の構造を調べることも重要である。そこで、2.3.3 節でふれたような、具体的な流れ構造によるキネマティック問題の解析が有益となる。2.3.3 節で扱ったキネマティック問題でいうと、G.O.Roberts のモデルは α^2 型ダイナモ、Ponomarenko と Dudley & James のモデルは $\alpha\omega$ 型ダイナモである。本論 (3 章) では、 α 効果の妥当性を調べるために、 α^2 型である G.O.Roberts のキネマティックモデルを使用した解析を行う。

関連図書

- Braginsky, S.I., Self-excitation of a magnetic field during the motion of a highly conducting fluid. *J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.)*, 1964, **47**, 1084-1098. [English translation: Braginskii, *Soviet Physics JETP*, 1965, **20**, 726-735.]
- Bonanno, A., Elstner, D., Rüdiger, G., Belvedere, G., Parity properties of an advection-dominated solar $\alpha^2\Omega$ -dynamo. *Astron. Astrophys.*, 2002, **390**, 673–680.
- Busse, F.H., Thermal instability in rapidly rotating systems. *J. Fluid. Mech.*, 1970, **44**, 441–460.
- Busse, F.H., Convective flows in rapidly rotating spheres and their dynamo action. *Phys. Fluids.*, 2002, **14**, 1301–1314.
- Busse, F., Dormy, E., Simitev, R., Soward, A., Dynamics of rotating fluids. In *Mathematical Aspects of Natural Dynamos*, edited by E. Dormy and A.M. Soward, 2007, 119–198 (CRC Press: Boca Raton).
- Cardin, P., Precession and core dynamics. In *Encyclopedia of Geomagnetism and paleomagnetism*, edited by D. Gubbins and E. Herrero-Bervera, Encyclopedia of earth sciences series, 2007, 842–843 (Springer: Dordrecht).
- Childress, S., Alpha-effect in flux ropes and sheets. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 1979, **20**, 172–180.
- Cattaneo, F., Hughes, D.W., Solar dynamo theory: a new look at the origin of small-scale magnetic fields. *Astron. Geophys.*, 2001, **42**, 3.18–3.22.
- Cowling, T.G., The magnetic field of sunspots. *Month. Not. Roy. Astr. Soc.*, 1933, **94**, 39–48.
- Childress, S., Gilberts, A.D., *Stretch, twist, fold: the fast dynamo*, Lecture Notes in Physics: Monographs, 1995 (Springer: Berlin).
- Desjardins, B., Dormy, E., Gilbert, A., Proctor, M., Introduction to self-excited dynamo action. In *Mathematical Aspects of Natural Dynamos*, edited by E. Dormy and A.M. Soward, 2007, 4–57 (CRC Press: Boca Raton).

- Davidson, P.A., *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge texts in applied mathematics, 2001 (Cambridge University Press: Cambridge).
- Dikpati, M., Gilman, P.A., Flux-transport dynamos with α -effect from global instability of tachocline differential rotation: A solution for magnetic parity selection in the Sun. *Astrophys. J.*, 2001, **559**, 428–442.
- Drew, D.A., Passman, S.L., *Theory of multicomponent fluids*, Applied Mathematical Sciences, 1999 (Springer-Verlag: New York).
- Dudley, M., James, R., Time dependent dynamos with stationary flows. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 1989, **425**, 407–429.
- Gailitis, A., Freibergs, Ya., Theory of a helical MHD dynamo. *Magnetohydrodynamics*, 1976, **12**, 127–130.
- Gailitis, A., Freibergs, Ya., Nature of the instability of a turbulent dynamo. *Magnetohydrodynamics*, 1980, **16**, 116–122.
- Gailitis, A., Lielausis, O., Platacis, E., Gerbeth, G., Stefani, F., Colloquium: Laboratory experiments on hydromagnetic dynamos. *Rev. Mod. Phys.*, 2002, **74**, 973–990.
- Galloway, D.J., Proctor, M.R.E., Numerical calculations of fast dynamos in smooth velocity fields with realistic diffusion. *Nature*, 1992, **356**, 691–693.
- Gilbert, A.D., Frisch, U., Pouquet, A., Helicity is unnecessary for alpha effect dynamos, but it helps. *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.*, 1988, **42**, 151–161.
- Gubbins, D., Roberts, P.H., Magnetohydrodynamics of the Earth's Core. In *Geomagnetism*, Vol.2, edited by J.A. Jacobs, 1987, 1–183 (Academic Press: London).
- Gubbins, D., Barger, C.N., Gibbons, S., Love, J.J., Kinematic dynamo action in a sphere. I Effects of differential rotation and meridional circulation on solutions with axial dipole. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 2000, **456**, 1333–1353.
- Gubbins, D., Barger, C.N., Gibbons, S., Love, J.J., Kinematic dynamo action in a sphere. II Symmetry selection. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 2000, **456**, 1669–1683.
- Holme, R., Three-dimensional kinematic dynamos with equatorial symmetry: application to the magnetic field of Uranus and Neptune. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 1997, **102**, 105–122.
- Jones, C.A., Soward, A.M., Mussa, A.I., The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere. *J. Fluid. Mech.*, 2000, **405**, 157–179.

- Jones, C., Dynamo theory. Lecture notes for Les Houches Summer School, <http://www-lgit.obs.ujf-grenoble.fr/houches/notes.html>, 2007.
- Krause, F., Steenbeck, M., Some simple models of magnetic field regeneration by non-mirror-symmetric turbulence. *Z.Naturforsch.*, 1967, **22a**, 671-675 [English transl.: P.H.Roberts & Stix (1971), 81–95.].
- Kumar, S., Roberts, P.H., A three-dimensional kinematic dynamo. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 1975, **344**, 235–238.
- Lanotte, A., Noullez, A., Vergassola, M., Wirth, A., Large-scale dynamo produced by negative magnetic eddy diffusivities. *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.*, 1999, **91**, 131–146.
- Livermore, P.W., Jackson, A., Transient magnetic energy growth in spherical stationary flows. *Proc. R. Soc. A*, 2006, **462**, 2457–2479.
- Merrill, R.T., McElhinny, M.W., McFadden, P.L., *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*, 3rd edition, 1998 (Academic Press: San Diego).
- Moffatt, H. K., *Magnetic Field Generation in Conducting Fluids*, 1978 (Cambridge University Press: Cambridge).
- Ossendrijver, M., The solar dynamo. *Astron. Astrophys. Rev.*, 2003, **11**, 287–367.
- Parker, E.N., Hydromagnetic dynamo models. *Astrophys. J.*, 1955, **122**, 293-314.
- Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, 2nd edition, 1987 (Springer-Verlag: New York).
- Ponomarenko, Yu.B., On the theory of the hydromagnetic dynamo. *Zh. Prikl. Mech. Tech. Fiz. SSSR*, 1973, **6**, 47–51 [English transl.: *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1973, **14**, 775–778].
- Rädler, K.-H., The generation of cosmic magnetic fields. In *From the Sun to the Great Attractor, 1999 Guanajuato Lectures on Astrophysics*, Lecture Notes in Physics, edited by D. Page and J. Hirsch, 2000, 101–172 (Springer: Berlin).
- Rädler, K.-H., Rheinhardt, M., Apstein, E., Fuchs, H., On the mean-field theory of the Karlsruhe dynamo experiment. *Nonlin. Proc. Geophys.*, 2002, **9**, 171–187.
- Raedler, K.-H., Dynamos, Mean-Field. In *Encyclopedia of Geomagnetism and paleomagnetism*, edited by D. Gubbins and E. Herrero-Bervera, Encyclopedia of earth sciences series, 2007a, 192–200 (Springer: Dordrecht).

- Raedler, K.-H., Mean-field dynamo theory: Early ideas and today's problems. *Magneto-hydrodynamics, Historical evolution and trends*, edited by S. Molokov, R. Moreau and H.K. Moffatt, Fluid mechanics and its applications, 2007b, 55-72 (Springer: Dordrecht).
- Roberts, G.O., Spatially periodic dynamos. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A.*, 1970, **266**, 535–558.
- Roberts, G.O., Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A.*, 1972, **271**, 411–454.
- Roberts, P.H., Kinematic dynamo models. *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1972, **272**, 663–698.
- Roberts, P.H., Fundamentals of dynamo theory. In *Lectures on Solar and Planetary Dynamos*, edited by M.R.E. Proctor and A.D.Gilbert, 1994, 1–58 (Cambridge University Press: Cambridge).
- Roberts, P.H., Glatzmaier, G.A., Geodynamo theory and simulations. *Rev. Mod. Phys.*, 2000, **72**, 1081–1123.
- Roberts, P.H., Stix, M., *The Turbulent Dynamo: A translation of a series of papers by H. Krause, K.-H. Rädler, and M. Steenbeck*, NCAR Technical Notes, 1971 (NCAR : Boulder).
- Schmid, P.J., Henningson D.S., *Stability and Transition in Shear Flows*, 2001, (Springer: New York).
- Soward, A.M., Fast dynamo action in a steady flow. *J. Fluid. Mech.*, 1987, **180**, 267-295.
- Soward, A.M., Convection, nonmagnetic rotating. In *Encyclopedia of Geomagnetism and paleomagnetism*, edited by D. Gubbins and E. Herrero-Bervera, Encyclopedia of earth sciences series, 2007, 74–76 (Springer: Dordrecht).
- Steenbeck, M., Krause, F., Rädler, K.-H., A calculation of the mean electromotive force in an electrically conducting fluid in turbulent motion, under the influence of Coriolis forces. *Z.Naturforsch.*, 1966, **21a**, 369-376 [English transl.: P.H.Roberts & Stix (1971), 29–47.].
- Steenbeck, M., Krause, F., The generation of stellar and planetary magnetic fields by turbulent dynamo action. *Z.Naturforsch.*, 1966, **21a**, 1285–1296 [English transl.: P.H.Roberts & Stix (1971), 49–79.].
- Stieglitz, R., Müller, U., Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo, *Phys. Fluids.*, 2001, **13**, 561–564.

2.4. 平均場ダイナモ理論

Tobias, S., Weiss, N., Stellar dynamos. In *Mathematical Aspects of Natural Dynamos*, edited by E. Dormy and A.M. Soward, 2007, 281–311 (CRC Press: Boca Raton).

Weiss, N.O., The expulsion of magnetic flux by eddies. *Proc. Roy. Soc. A*, 1966, **293**, 310–328.

Zhang, K., Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical fluid shells. *J. Fluid. Mech.*, 1992, **236**, 535–556.

Zheligovsky, V.A., Podvigina, O.M., Frisch, U., Dynamo effect in parity-invariant flow with large and moderate separation of scales. *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.*, 2001, **95**, 227–268.

今井 功, 流体力学 (前編), 第 8 版, 1979 (裳華房: 東京).

木村 竜治, 地球流体力学入門, 気象学のプロムナード 13, 第 10 版, 1996 (東京堂出版: 東京).

ジャクソン, J.D., 電磁気学, 原書第 2 版, 西岡稔 訳, 1994 (西岡書店: 京都).

砂川 重信, 理論電磁気学, 第 3 版, 1999 (紀伊国屋書店: 東京).

松田 佳久, 惑星気象学, 2000 (東京大学出版会: 東京).

吉田 茂生, システムに関係した言葉と概念の整理, 「全地球史解説」, 熊澤峰夫・伊藤孝士・吉田茂生 編, 2002, 55–76 (東京大学出版会: 東京).

吉田 茂生, 竹広 真一, 佐々木 洋平, 林 祥介, 磁気流体力学の定式化, 地球流体電脳倶楽部理論ノート, <http://www.gfd-dennou.org/library/riron/mhd/teishiki/pub/index.htm>, 2002.

第3章 G.O.Roberts の流れによる平均誘導起電力の非局所的なメモリー効果

平均場ダイナモ理論において、誘導起電力項 $\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle$ は、大スケール磁場に対する小スケール磁場の効果を表す。この項は、通常、時間に対し瞬間的で、空間に対し局所的であると仮定された、 α 効果で近似される。しかし、この近似は磁気レイノルズ数 Rm が $\mathcal{O}(1)$ よりも十分に小さいときのみ適切なもので、 $Rm \gtrsim 1$ の場合には適切でない。 $Rm \gtrsim 1$ というのは、地球のコアや太陽の対流層で考えられている値に相当する。そこで、私たちは、 α 効果を非局所的かつ非瞬間的に一般化した関数 ϕ_{qr} を導入し、その振る舞いを、 Rm の関数として、あるキネマティックダイナモモデルにおいて調べた。調べたのは、 $1/64 \leq Rm \leq 10$ の範囲である。ここで使用したのは、G.O.Roberts (1972) の流れで、helicity と 2次元周期性をもつ、定常な流れである。その結果、関数 ϕ_{qr} の振る舞いによって、 Rm の領域を以下の3つに分けられることがわかった。(i) $Rm \lesssim 1/4$ のとき、関数 ϕ_{qr} は局所的かつ瞬間的であり、伝統的な α および β 効果で近似できる。(ii) $1/4 \gtrsim Rm \gtrsim 4$ のとき、伝統的な α および β 効果からのずれが増加し、非局所性と非瞬間性が大きくなる。(iii) $Rm \gtrsim 4$ のとき、境界層が十分に発達し、非局所性と非瞬間性が顕著に現れる。さらに、 $Rm \gtrsim 4$ のときの非局所的なメモリー効果が、このときのダイナモ作用にも強く影響を与え、分散関係における成長率の強化を説明することを示す。これらの結果は、地球ダイナモや太陽ダイナモで、誘導起電力の非局所的なメモリー効果が重要になるだろうことを示唆する。

3.1 はじめに

平均場理論は、ダイナモの生成を解釈する上で有用な考え方である。電磁流体力学系で、磁場 B の生成を記述する式は、誘導方程式

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times B) + Rm^{-1} \nabla^2 B, \quad (3.1)$$

である。ここで、 \mathbf{u} は流れの速度で、 $Rm = U\mathcal{L}/\lambda$ は磁気レイノルズ数である (λ は磁気拡散率、 \mathcal{L} は典型的な長さ、そして、 U は典型的な速さ)。また、 t は、移流時間スケール

ル $\tau_a = \mathcal{L}/U$ で無次元化された時間である。磁気レイノルズ数 Rm は、移流時間 τ_a に対する拡散時間 $\tau_d = \mathcal{L}^2/\lambda$ の比で、磁力線のねじられやすさを表す。その値は、地球で $Rm = \mathcal{O}(10^{0-2})$ 、太陽で $Rm > \mathcal{O}(10^5)$ である。平均場理論では、流れ \mathbf{u} と磁場 \mathbf{B} がそれぞれ、平均部分 $\langle \mathbf{u} \rangle, \langle \mathbf{B} \rangle$ と、それからのずれ \mathbf{u}', \mathbf{B}' に分けられる、と考える。このとき、(3.1) の平均成分は、

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} - \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) - Rm^{-1} \nabla^2 \langle \mathbf{B} \rangle = \nabla \times \mathcal{E}, \quad (3.2)$$

となる。ここで、

$$\mathcal{E} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle, \quad (3.3)$$

である。ずれ成分は、(3.1) から (3.2) を引いて、

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} - \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{B}') - \nabla \times (\mathbf{u}' \times \mathbf{B}') + \nabla \times \mathcal{E} - Rm^{-1} \nabla^2 \mathbf{B}' = \nabla \times (\mathbf{u}' \times \langle \mathbf{B} \rangle). \quad (3.4)$$

と得られる。平均場理論では、磁場の生成を、小スケールの現象 (3.4) と大スケールの現象 (3.2) の相互作用で理解する。大スケール磁場に対する小スケール磁場の効果は、誘導起電力項 \mathcal{E} が表し、この項は、平均場 $\langle \mathbf{B} \rangle$ に対し生成源として働く。一方、(3.4) は、右辺を生成源とみたとき、平均場 $\langle \mathbf{B} \rangle$ による、小スケール磁場 \mathbf{B}' の生成を表す。ここで、注意すべきことは、 $\langle \mathbf{B} \rangle = 0$ であっても、(3.4) が、0 でない \mathbf{B}' をもってよいことである。これは、small-scale dynamo と呼ばれる (e.g. Rädler, 2000; Desjardins *et al.*, 2007; Tobias & Weiss, 2007)。しかし、本研究では、この磁場成分を無視し、平均磁場 $\langle \mathbf{B} \rangle$ によって誘導される \mathbf{B}' のみを扱う¹。

平均場理論におけるカギは、誘導起電力項 \mathcal{E} を、平均場 \mathbf{B} の線形汎関数としていかに表すかということである。(3.4) で右辺を生成項とみたとき、ずれ場 \mathbf{B}' が平均場 $\langle \mathbf{B} \rangle$ の線形汎関数である、ということがわかる。これより、誘導起電力 \mathcal{E} もまた、平均場 $\langle \mathbf{B} \rangle$ の線形汎関数となる。したがって、流れからなる相関量の平均的性質が定常かつ一様な場合、その一般形は、

$$\mathcal{E}_q(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{qr}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \tau) \langle B \rangle_r(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\boldsymbol{\xi} d\tau \quad (q, r = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

と書ける (e.g. P.H.Roberts, 1994; Rädler, 2000)。ここで、 ϕ_{qr} は汎関数のカーネルである。このカーネルは、通常、局所的かつ瞬間的であると近似される。この近似により、誘導起電力項は、テイラー級数の形で

$$\mathcal{E}_q(\mathbf{x}, t) = \alpha_{qr} \langle B \rangle_r(\mathbf{x}, t) + \beta_{qrs} \frac{\partial \langle B \rangle_r(\mathbf{x}, t)}{\partial x_s} + \dots \quad (q, r = 1, 2, 3) \quad (3.6)$$

と書ける (e.g. Steenbeck *et al.*, 1966; Krause & Rädler, 1980)。テンソル α_{qr}, β_{qrs} の各成分は定数である。この α と磁場勾配テンソルを、対称部分と非対称部分に分離すると、

$$\mathcal{E}_q = \alpha_{qr}^{(s)} \langle B \rangle_r + [\boldsymbol{\gamma} \times \langle \mathbf{B} \rangle]_q - \beta_{qrs}^{(s)} [\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle]_r - [\boldsymbol{\delta} \times (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle)]_q - \kappa_{qrs} (\nabla \langle B \rangle)_{rs}^{(s)} \quad (3.7)$$

¹正確にいうと、本章で対象とする範囲では small-scale dynamo が作用しないため、その寄与は考えなくてよい。

となる (Rädler, 2000)。ここで、 $\alpha_{qr}^{(s)}$ と $\beta_{qr}^{(s)}$ は対称テンソル、 γ と δ はベクトル、 κ_{qrs} は 3 階テンソル、そして、 $(\nabla\langle B \rangle)^{(s)}$ は $\langle B \rangle$ の勾配テンソルの対称部分である。また、 $\langle B \rangle$ の 2 階以上の微分項は無視した。

小スケールの流れおよび磁場が等方な場合、(3.7) は

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \alpha\langle B \rangle(\mathbf{x}, t) - \beta\nabla \times \langle B \rangle(\mathbf{x}, t), \quad (3.8)$$

に帰着される。ここで、 α と β は定数。右辺第 1 項の α を含む項は、 α 効果と呼ばれ、大スケール磁場の生成を表す。第 2 項の β を含む項は、 β 効果と呼ばれ、符号が正の場合、大スケール磁場の散逸を表す。ただし、 β は負の値も取りえ、その場合、大スケール磁場の生成に寄与する (Lanotte *et al.*, 1999; Zheligovsky *et al.*, 2001)。流れの相関量の平均的性質が非定常で非一様な場合は、係数 α および β は、時間と空間の滑らかな関数として扱われる。

式 (3.8) は、誘導起電力の表現として、もっともよく使われる形で、キネマティックダイナモや電磁流体力学的 (MHD) ダイナモを説明するために、伝統的に使用されてきた。この瞬間局所的な α 効果に基づいた、 α^2 ダイナモメカニズムや $\alpha\omega$ ダイナモメカニズムは、大スケール磁場を生成できることが、知られている (e.g. Steenbeck & Krause, 1966; P.H.Roberts, 1972)。このことより、3次元 MHD ダイナモ数値計算が、 α 効果や β 効果という概念を使って解釈されることも、多い (e.g. Kageyama & Sato, 1997; Olson *et al.*, 1999)。近年では、このような解釈は定量的になってきている。数値計算における誘導起電力と磁場の相関を使って、係数 α と β を求め、さらに、これらの係数を代入した平均場の式を解いて、元の平均磁場を再現できるか、ということも調べられている (Brandenburg & Sokoloff, 2002; Schrunner *et al.*, 2005; Kowal *et al.*, 2006; Schrunner *et al.*, 2007)。その結果は様々で、再現できた場合もあり、再現できなかった場合もある。

要約すると、(3.5) の (3.8) への帰着は、等方性、瞬間性そして局所性の 3 つの仮定の基で許される。しかし、これらの仮定は、多くの状況で成り立たない。地球や太陽では、自転と重力の強い影響のために、非等方性がしばしば重要になる。(3.7) における非等方性は、古くから研究されてきた (e.g. Rädler, 2000)。近年では、局所的な数値計算より、地球や太陽における非等方性の、緯度や深さに対する依存性が調べられた (e.g. Matsushima, 2005; Käpylä *et al.*, 2006)。

本研究では、残りの 2 つの仮定である、瞬間性と局所性の妥当性に注目する。瞬間局所近似は、流れによる磁力線のねじれがごく小さい、 $Rm \ll 1$ の場合にのみ、妥当である (図 3.1)。つまり、この近似は、地球ダイナモや太陽ダイナモの状況に対応する、 $Rm \gtrsim 1$ の場合、破綻する。磁気レイノルズ数 Rm が大きくなるにつれ、磁力線は強くねじられ (図 3.1)、この強いねじれは、非瞬間的で非局所的な効果をひきおこす。実際、この近似の限界は、キネマティックダイナモ研究や MHD ダイナモ研究において、過去に指摘されている。例えば、G.O.Roberts (1972) は、単純化された円柱状の流れによって誘導されるキネマティックダイナモを数値的に解き、 α 効果を使って、その結果の説明を試みた。そして、局所的な α 効果は、 $Rm \ll 1$ のときの結果を説明する一方で、 $Rm \gtrsim 1$ のときの結果を説明できないことを、示した。もう一つの例は、近年の Schrunner *et al.* (2005, 2007) らの解析で、それらは、 $Rm \gtrsim 1$ のときの MHD ダイナモ数値計算に対して行われ

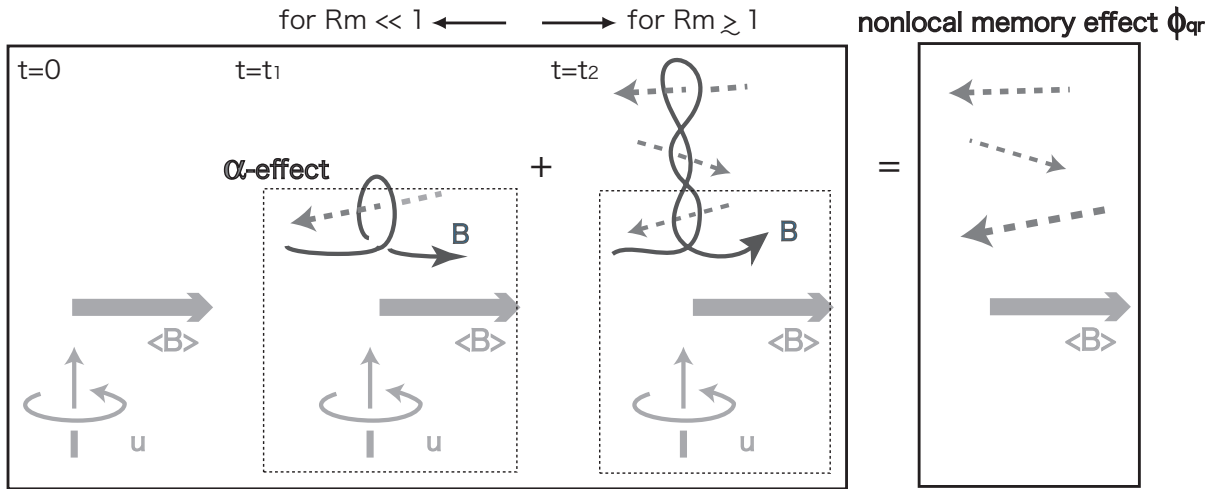


図 3.1: 非局所的なメモリー効果の生成の概念図。ヘリカルな流れ場 u にある磁力線の時間発展を表す。初期状態の磁力線は、直線状で、 $\langle B \rangle$ で表されている。ヘリカルな流れはまず、磁力線を曲げてねじり、誘導起電力を平均場のすぐ近くに生成する ($t = t_1$)。これがいわゆる α 効果。 Rm は小さいときは、磁気拡散が効くため、このねじりは時間に対し定常に保たれる。一方、 $Rm \gtrsim 1$ のとき、磁力線のねじりは時間とともに増加し、時間的かつ空間的に変化する誘導起電力を生成する ($t = t_2$)。この振る舞いは、 α 効果の表現を、非局所的かつ非瞬間的な関数 ϕ_{qr} へ拡張する必要があることを示唆する。

た。彼らは、MHD ダイナモ数値計算の結果を、瞬間局所的な α 効果と β 効果のみでは説明できないことを示した。これらの解析結果は、誘導起電力の一般形 (3.5) に立ち戻るべきであることを意味する。

それに対し、近年、誘導起電力の非瞬間的または非局所的なカーネルの導入が、誘導される磁場に大きく影響する、ということが報告されている。Fedotov *et al.* (2002, 2003) は、乱流が有限の相関時間をもつことを仮定し、非瞬間的な効果 (彼らは「メモリー効果」と呼んだ) の平均場に対する影響を調べた。その結果、 α におけるメモリー効果が平均場の成長を抑制するのに対し、 β におけるメモリー効果はその成長を促進することを、示した。しかし、彼らの研究は局所的な効果に限定され、かつ、非瞬間的な効果は指数関数型 $e^{-t/\tau}$ と仮定された (τ は相関時間)。指数関数型の非瞬間的な効果が妥当かどうかは自明でない。一方、Urpin (2002) は、時間相関をもった等方均質乱流によって生成される誘導起電力を、非局所的な効果は考慮せずに、計算した。その結果、非瞬間的な β 効果が、運動学的な乱流の相関時間で減衰するモードをうむことを、示した。さらに、Courvoisier *et al.* (2006) は、時間依存性をもつように改訂した G.O.Roberts の流れを扱い、それが生成する α 効果を計算した。彼女らは、流れの時間依存性によって、 α の符号の変化が起こり得る、ということを示している。

ここで、カーネルの非瞬間性は、流れが定常な場合でも存在してよい、ということの特筆しておく。流れが定常であるということは、 ϕ_{qr} が $t - \tau$ に依存するということを保証するだけである (3.5)。誘導起電力 $\mathcal{E} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle$ のメモリー効果には 2 つの源がある。

一つは、流れ u' の時間依存性で、もう一つは、磁場 B' の時間依存性である。そこで、前者を力学的メモリー効果、後者を磁氣的メモリー効果と呼び、区別することにする。過去の研究 (Fedotov *et al.*, 2002, 2003; Uрпи, 2002) が扱ったのは、力学的メモリー効果である。それに対し、本論文で扱うのは磁氣的メモリー効果であり、その計算を明示的に示すのは本研究が初めてである。

また、非局所的な効果も、平均場の生成に寄与することが示されている (Rädler *et al.*, 1997; Brandenburg & Sokoloff, 2002; Rädler & Brandenburg, 2003; Kowal *et al.*, 2006; Brandenburg *et al.*, 2008)。Brandenburg & Sokoloff (2002) は、降着円盤の MHD 数値計算を解析し、係数 α と β を決めた。彼らは、直接数値シミュレーションと、2 つの平均場シミュレーションを比較した。2 つの平均場シミュレーションとは、係数 α, β が局所的で非一様な場合と、それらが非局所的で一様な場合である。その結果、後者の場合の α および β 効果の方が、MHD 直接計算の特徴をよく再現することがわかった。これは、非局所的な振る舞いの重要性を示唆する。また、Brandenburg *et al.* (2008) は、G.O.Roberts (1972) の流れによるキネマティック問題において、誘導起電力に非局所性があることを示した。しかし、彼らはともに、非局所的な効果のみを考え、非瞬間的な効果は無視した。

それに対し、本研究の目的は、非局所的な効果と磁氣的メモリー効果を、同時に調べることである。現実的な MHD ダイナモシミュレーションでは、この 2 つの効果を識別することが難しいため、本研究では、単純なキネマティックダイナモを使用する。使用するのは、G.O.Roberts (1972) の 2 次元周期的な流れによるキネマティックダイナモモデルで、これは次の 3 つの理由からである。1 つ目に、Roberts の流れが、高速回転系における熱対流として期待される構造 (e.g. Busse, 1970, 2002) とよく似た、円柱状の構造をもっていることである。実際に、そのような構造は、MHD ダイナモシミュレーションでも得られている (Kageyama & Sato, 1997, e.g)。2 つ目に、この流れはダイナモを駆動するという事実と、瞬間局所的な α 効果が $Rm \ll 1$ のときに実証できるということである。そして、3 つ目に、流れの 2 次元周期性によって、水平平均を厳密に定義でき、かつ、その定義が非一様になることを防ぐことができることである。本研究では、(3.5) に立ち返り、非瞬間的かつ非局所的なカーネル ϕ_{qr} を使って、 $Rm \gtrsim 1$ のときの G.O.Roberts (1972) のキネマティックダイナモを検討する。その結果として、その分散関係の振る舞いを説明するために、非瞬間的かつ非局所的なカーネルが必要であることを示す。また、近年、Karlsruhe で行われたダイナモ実験 (Stieglitz & Müller, 2001; Müller & Stieglitz, 2002) は、G.O.Roberts のダイナモモデルを基に設計され、その実験結果の解釈のために、研究が多くなされた (e.g. Rädler *et al.*, 2002; Rädler & Brandenburg, 2003)。

本章の構成は、以下のようになっている。まず、3.2 節では、G.O.Roberts (1972) の設定と結果を概観し、局所的な α 効果が分散関係を説明できなくなる状況を明確にする。3.3 節では、Roberts の問題における非瞬間的かつ非局所的な誘導起電力を定式化し、その数値計算の方法を記す。そして、3.4 節で、(3.5) における非瞬間的かつ非局所的なカーネル ϕ_{qr} の計算結果を示す。そこでは、領域 $1/4 \lesssim Rm \lesssim 4$ で Rm の増加とともに非瞬間性および非局所性が強化され、 $Rm \gtrsim 4$ でそれらの振る舞いが顕著となる、ということが示される。3.5 節で、その非瞬間性および非局所性が、平均場の分散関係にもたらす効果を考える。そこでは、Roberts の解の振る舞いの直観的な説明も与える。最後に、3.6

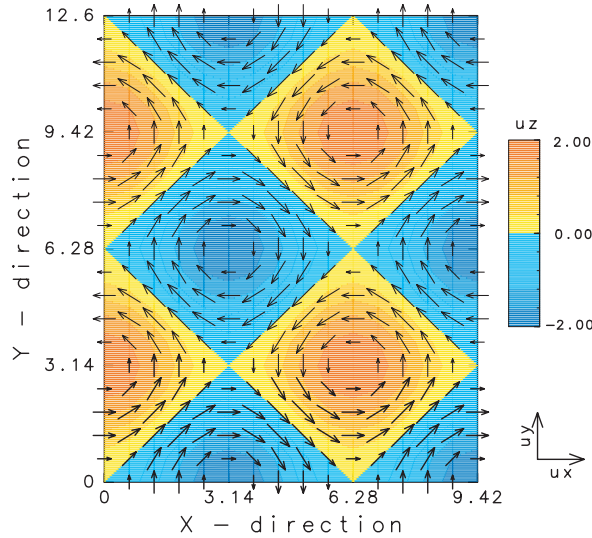


図 3.2: G.O.Roberts (1972) の流れ。ベクトルは 2 次元的速度場 (u_x, u_y) を、色は u_z の大きさと向きを表す。流れは、 z 方向に軸をもった、ヘリカルな柱状流から成る。 x - y 平面に、周期 $2\pi \times 2\pi$ で、2 次元周期性をもつ。

節で、本研究の結果をまとめる。

3.2 G.O.Roberts の問題

3.2.1 設定

G.O.Roberts (1972) は、0 でないヘリシティと 2 次元周期性をもつ流れ

$$\mathbf{u}(x, y) = (\sin y, \sin x, \cos x - \cos y) \quad (3.9)$$

によって駆動される、キネマティックダイナモ問題を考えた (図 3.2)。この流れは、 x および y 方向に周期的であり、 m と n を整数として、 $\mathbf{u}(x + 2n\pi, y + 2m\pi) = \mathbf{u}(x, y)$ と書ける。流れのヘリシティ $\langle \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \rangle$ は、正なので、その α 効果の符号は、first-order smoothing approximation (e.g. Moffatt, 1978) より、負であることが期待される。また、この流れは Beltrami 流 ($\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{u}$) であり、完全流体の定常流を表している。

固有関数は、Bloch の定理により

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(x, y; \mathbf{j}, p) e^{pt + i\mathbf{j} \cdot \mathbf{x}}, \quad (3.10)$$

という形で書ける。ここで、 \mathbf{H} は、流れ \mathbf{u} と同じ周期性をもち、 $\mathbf{H}(x + 2n\pi, y + 2m\pi) = \mathbf{H}(x, y)$ である。Roberts は、Bloch 波数 \mathbf{j} の方向が円柱状の流れの軸と同じである場合、つまり、

$$\mathbf{j} = j\mathbf{e}_z, \quad (3.11)$$

の場合のみを考えた (e_z は z 方向への単位ベクトル)。Tilgner & Busse (1995) および Plunian & Rädler (2002a) は、(3.11) を仮定せずに解を調べ、その成長率は、どの Rm でも、(3.11) の状況が満たされる場合で最も大きくなるということを示した。それゆえ、本研究でも、仮定 (3.11) を使用することにする。

流れ (3.9) は x と y に依存し、周期 2π で空間的に周期的であるため、その平均成分を

$$\langle f \rangle(z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y, z, t) dx dy \quad (3.12)$$

、ずれ成分を

$$f'(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) - \langle f \rangle(z, t), \quad \langle f' \rangle = 0 \quad (3.13)$$

と定義することができる。ここで、 f は、周期 2π で空間的に周期的な任意関数とした。これにより、(3.9) は、

$$\langle \mathbf{u} \rangle = 0 \quad (3.14)$$

で、平均流をもたない。そして、誘導起電力 \mathcal{E} は、(3.3) と (3.12) より、 z と t の関数となる。上述の平均の定義によって、(3.2) の z 成分の右辺は消えるため、平均場 $\langle B_z \rangle$ は時間とともに減衰し、この成分に興味はない。したがって、本研究では、

$$\langle B_z \rangle = 0 \quad (3.15)$$

とする。また、式 (3.10) を (3.12) に代入すると、

$$\langle \mathbf{B} \rangle(z, t) = \langle \mathbf{H} \rangle(j, p) e^{pt+ijz} \quad (3.16)$$

となる。平均磁場は、 z 成分をもたず、 x と y に依存しないような磁場となる。ずれ場は、式 (3.10) から (3.16) を引いて、

$$\mathbf{B}'(x, y, z, t) = \mathbf{H}'(x, y; j, p) e^{pt+ijz} \quad (3.17)$$

と得られる。

3.2.2 磁場の分散関係

G.O.Roberts は、磁場の最大成長率のブランチの分散関係を数値的に求め、このキネマティック問題が、任意の Rm で少なくとも 1 つは成長解をもつことを示した。図 3.3 は、 (Rm, j) 空間で最大固有値 p を示している。最大固有値は、つねに純実数である。この図から、波数 j が十分に小さければ、どの Rm でも、正の成長率をもつことがわかる。これは、流れ (3.9) が、任意の Rm でダイナモ作用をおこすということを示す。

G.O.Roberts (1972) で求められたのは最大固有値のブランチだけだったが、本研究では全固有値を求めた (Hori, 2005)。固有値問題の数値計算には、QR 法に基づく LAPACK コードを用いた。数値結果は、打ち切り次数に対する固有値の収束性と、G.O.Roberts (1972) の値との一致とを確認している。

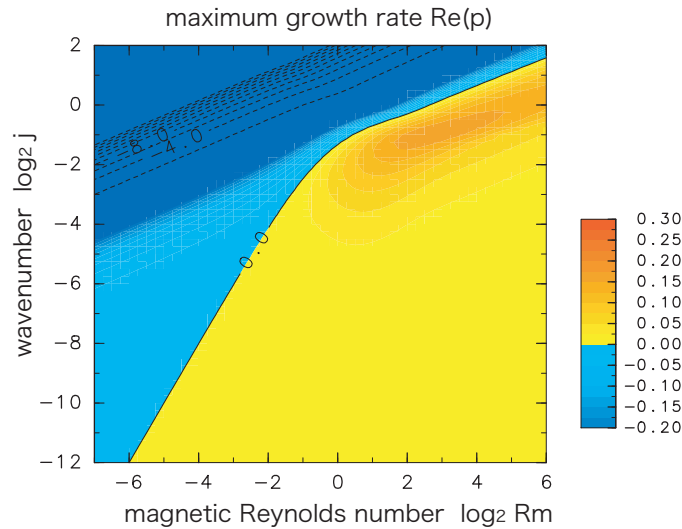


図 3.3: G.O.Roberts (1972) のキネマティックダイナモにおける最大成長率 $\text{Re}[p]$ 。等高線の間隔は 2.0。波数 j が十分小さければ、任意の Rm で正の値をもつ。また、 $Rm \gtrsim 1$ のとき、 $j \sim Rm^{0.3}$ に沿ってピークをもち、全ての Rm 領域での最大成長率は、 $Rm = 8$ のとき、 $j \sim 0.5$ の $\text{Re}[p] \sim 0.17$ である。

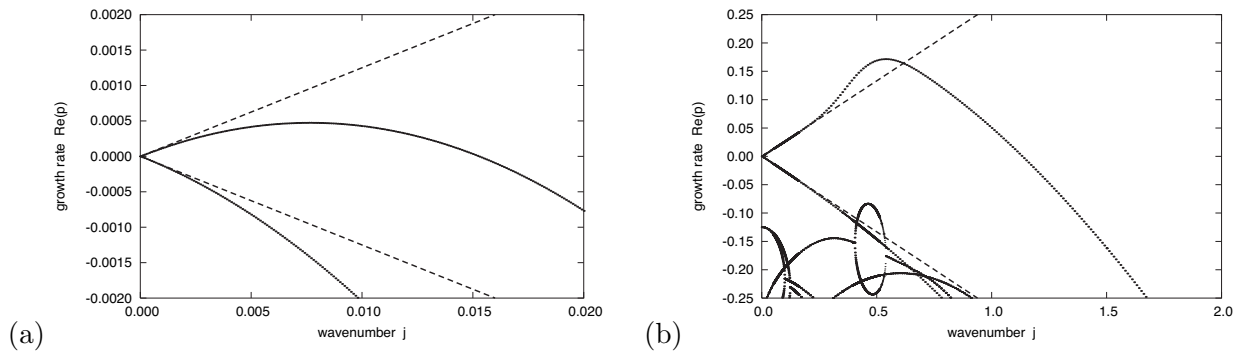


図 3.4: G.O.Roberts のキネマティックダイナモの分散関係。(a) $Rm = 1/8$ のとき、(b) $Rm = 8$ のとき。点線が分散関係を表し、破線は、伝統的な局所 α 効果 ((3.48) または (3.49)) から期待される分散関係を表す。ここで、 β 効果は考慮されていない。 $Rm = 1/8$ のときのダイナモは、 α 効果のみによるダイナモ以上に速く成長することはないのに対して、 $Rm = 8$ のときのそれは、 $j \sim 1/2$ 付近で、 α 効果のみによるそれよりも速く成長する。

図 3.4 は、本研究で求め直した全固有値のうち、最大固有値に近いものの分散関係を、2 つの Rm で示す。磁気レイノルズ数 Rm の値に関わらず、全固有値がもつ特徴は、 $j = 0$ で $\text{Re}[p] = 0$ となるブランチと $\text{Re}[p] = -\lambda$ となるブランチが、それぞれ 2 本ずつあり、その以下に、 $j = 0$ で $\text{Re}[p] < -\lambda$ となるブランチが無限個、存在するということである。時間的に成長できるのは、 $j = 0$ で $\text{Re}[p] = 0$ をとるブランチの内の上方のものだけであり、これが最大固有値のブランチとなっている。波数 $j = 0$ で $\text{Re}[p] = 0$ となる 2 本のブランチでは、固有値はつねに純実数で、固有関数は平均値をもつ ($\langle \mathbf{H} \rangle \neq 0$)。また、 $j = 0$ で $\text{Re}[p] = -\lambda$ となる 2 本のブランチでも、固有値は純実数だが、その他のブランチでは虚数部をもったりと様々である。もう一つの特徴的な構造として、 $Rm = \mathcal{O}(1)$ のとき、 $j = \mathcal{O}(1)$ の減衰解に現れる環状の構造がある。図 3.4b の $Rm = 8$ のときでいうと、 $j \sim 0.5$ で $-0.25 \lesssim \text{Re}[p] \lesssim -0.10$ にある環である。この環とつながって、 $j \lesssim 0.4$ および $0.6 \lesssim j$ へ伸びるブランチの上では、固有値が複素共役となっている。そして、つながる環状構造の上では、固有値は縮退して純実数となり、固有関数は平均値をもつ。このブランチは、 Rm が大きくなるとともに、 $\text{Re}[p]$ が大きい方向へ移動し、 $Rm = 1/32$ ではすでに $\text{Re}[p] > 0$ の領域へ入る。

ここでは、磁場の全体の構造を支配する最大成長率のブランチに注目しよう。最大成長率のブランチでは、 $j \ll 1$ のとき、 $\text{Re}[p]$ が j に対し線形に増加する。これによって、上述の、 j が小さければつねにダイナモ作用が存在する、という特徴がもたらされている。Roberts は、 j が小さいときの $\text{Re}[p] \propto j$ という振る舞いが、説明瞬間局所的な α 効果に基づいた平均場理論によって説明できる、ということを示した。瞬間局所近似下では、2 次元的に改訂された (3.8) 式、

$$\tilde{\mathcal{E}}(j, p) \sim \alpha \langle \mathbf{H} \rangle - ij\beta \mathbf{e}_z \times \langle \mathbf{H} \rangle + \dots \quad (3.18)$$

$$\text{where } \tilde{\mathcal{E}} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{H}' \rangle. \quad (3.19)$$

がなりたつ。ここで、(3.16) と (3.17) を使用した。式 (3.14)、(3.16) と (3.18) を (3.2) に代入すると、 j が小さいとき、平均場の成長率は

$$p \cong \pm |\alpha| j \quad (3.20)$$

と得られる。つまり、 α 効果は、 $j \sim 0$ の分散関係における、 j に対する $\text{Re}[p]$ の線形性を、説明できる。さらに、(3.20) は、2 つのブランチの内、1 つは、つねに成長解であることを示している。

しかし、 j が大きくなるにつれ、 $\text{Re}[p]$ の振る舞いは、 $Rm \ll 1$ のときと $Rm \gtrsim \mathcal{O}(1)$ とで異なってくる。例えば、 $Rm = 8 \sim \mathcal{O}(1)$ では、 $j \sim 1/2$ 成分の成長率が、 α 効果近似 (3.18) から予想される値よりも大きくなる。それに対し、 $Rm = 1/8 < 1$ のときの成長率は、どの j でも (3.20) を超えることはない (図 3.4)。特に、 $Rm = 8$ のときの波数 $j \sim 1/2$ 成分の成長率は、すべての Rm の中で最も大きい値である。この特徴は、地球コアにおける Rm が $1 \sim 10^2$ と見積もられるため、重要である。また、 $j = \mathcal{O}(1)$ のときの j に対する $\text{Re}[p]$ の振る舞いは、 α と β の非等方性を考慮しても、説明することができない。以下の節で、誘導起電力の非瞬間的かつ非局所的な効果が、 $Rm \gtrsim 1$ Roberts の分散関係における、非線形な振る舞いを説明するために必要である、ということを示す。

3.3 G.O.Roberts の流れにおけるカーネル ϕ_{qr}

3.3.1 定式化

この節では、(3.5) で定義された、非瞬間的かつ非局所的なカーネル ϕ_{qr} を、Roberts の問題に適切な形へ書き下す。そのために、その定式化方法を、キネマティックダイナモ問題の伝統的な形式である固有値問題から、時間発展問題へと変える。

本研究では、この問題を扱うために フーリエ-ラプラス変換を使う。フーリエ-ラプラス問題は、時間発展問題と固有値問題との関係を理解する際に、有用である。というのは、フーリエ-ラプラス変換では、 (z, t) の関数を $\exp(pt + ijz)$ で展開できるためである。この $\exp(pt + ijz)$ は、固有値問題の固有関数 (3.10) と (3.11) の形をもつ。磁場 B 、水平平均した $\langle B \rangle$ とずれ成分 B' を、それぞれ、

$$B(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dj \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} dp \mathbf{H}(x, y, j, p) \exp(pt + ijz), \quad (3.21)$$

$$\langle B \rangle(z, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dj \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} dp \langle \mathbf{H} \rangle(j, p) \exp(pt + ijz), \quad (3.22)$$

と

$$B'(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dj \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} dp \mathbf{H}'(x, y, j, p) \exp(pt + ijz), \quad (3.23)$$

のように展開する。ここで、水平平均は (3.12) で定義されており、 ν は、積分経路が、ラプラス変換された関数の収束域の中にあるように選ばれた、正の数である。同様に、誘導起電力 \mathcal{E} のフーリエ-ラプラス変換は、

$$\mathcal{E}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dj \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} dp \tilde{\mathcal{E}}(j, p) \exp(pt + ijz) \quad (3.24)$$

と与えられる。ここで、 $\tilde{}$ は、フーリエ-ラプラス変換された関数を表す。式 (3.21)、(3.22)、(3.23) と (3.24) を、誘導方程式のずれ成分 (3.4) に代入すると、

$$p\mathbf{H}' - \tilde{\nabla} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}') + ij \times \tilde{\mathcal{E}} - Rm^{-1} \tilde{\nabla}^2 \mathbf{H}' = \tilde{\nabla} \times (\mathbf{u} \times \langle \mathbf{H} \rangle) \quad (3.25)$$

が得られる。ここで、 $\tilde{\nabla}$ は

$$\tilde{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, ij \right) \quad (3.26)$$

で定義した。ずれ磁場 \mathbf{H}' は、右辺の $\tilde{\nabla} \times (\mathbf{u} \times \langle \mathbf{H} \rangle)$ によって生成される。以下では、ずれ式 (3.25) または (3.4) において、強制項として作用する平均場 $\langle \mathbf{H} \rangle$ または $\langle B \rangle$ を、「種磁場」と呼ぶことにする。式 (3.25) は、 \mathbf{H}' が $\langle \mathbf{H} \rangle$ の線形汎関数で、 j, p, x と y の関数であることを、示す。したがって、(3.19) で定義された誘導起電力 $\tilde{\mathcal{E}}$ は、 $\langle \mathbf{H} \rangle$ に比例し、 j と p の関数となる。これより、 (j, p) 空間における $\tilde{\mathcal{E}}$ の一般形は、

$$\tilde{\mathcal{E}}_q(j, p) = \tilde{\phi}_{qr}(j, p) \langle H \rangle_r(j, p) \quad (q, r = 1, 2, 3), \quad (3.27)$$

と表せる。ここで、 $\tilde{\phi}_{qr}$ は、 j と p の複素関数である、2 階テンソルで、その関数は流れ \mathbf{u} によって決まる。さらに、 $z = 0$ 面に対する対称性より、 $\tilde{\mathcal{E}}_z = 0$ である。式 (3.15) より $\langle H_z \rangle = 0$ なので、(3.27) は必然的に 2 次的で、

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_x \\ \tilde{\mathcal{E}}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{xx}(j, p) & \tilde{\phi}_{xy}(j, p) \\ \tilde{\phi}_{yx}(j, p) & \tilde{\phi}_{yy}(j, p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle H_x \rangle \\ \langle H_y \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

のように書ける。この式は、(3.18) の一般的な表現となっている。式 (3.28) を (z, t) 空間へ変換すると、

$$\mathcal{E}_q(z, t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{qr}(z - z', t - t') \langle B \rangle_r(z', t') dz' dt' \quad (q, r = 1, 2), \quad (3.29)$$

$$\text{where } \phi_{qr}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dj \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} dp \tilde{\phi}_{qr}(j, p) \exp(pt + ijz), \quad (3.30)$$

となり、そして、その逆変換は

$$\tilde{\phi}_{qr}(j, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dt \phi_{qr}(z, t) \exp(-pt - ijz) \quad (3.31)$$

と与えられる。式 (3.29) は、2 次的に問題における誘導起電力の一般形で、(3.5) の 2 次的な表現となっている。式 (3.6) における α が瞬間的かつ局所的な効果しか表していないのに対し、関数 ϕ_{qr} は、誘導起電力の非瞬間的かつ非局所的な効果を含む。このとき、メモリー効果は、 $\tilde{\phi}_{qr}$ の p に対する依存性によって、表現されている。

対称性より、テンソル $\tilde{\phi}_{qr}$ の独立成分の数を減らすことができる (e.g. Rädler & Brandenburg, 2003)。流れ \mathbf{u} を x または y 方向へ π だけ平行移動し、 z 軸の周りの 90° 回転したとき、 \mathbf{u} は不変なので、 $\tilde{\phi}_{qr}$ は e_z に対し軸対称である。軸対称な 2 次元 2 階テンソルの一般形は、

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{xx}(j, p) & \tilde{\phi}_{xy}(j, p) \\ \tilde{\phi}_{yx}(j, p) & \tilde{\phi}_{yy}(j, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(j, p) & ijc_2(j, p) \\ -ijc_2(j, p) & c_1(j, p) \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

と与えられる。ここで、 c_1 と c_2 は任意の複素関数である。この ϕ_{qr} は (z, t) 空間で実数でなければならないので、 $c_i^\dagger(j, p) = c_i(-j, p)$ が要請される。上添字 \dagger は複素共役を表し、 $i = 1, 2$ である。さらに、面 $z = 0$ に対する対称性より、 $c_i(j, p) = c_i(-j, p)$ となる。よって、 c_1 と c_2 は純実数で、 j の符号には依存しない。結局、(3.28) は

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_x \\ \tilde{\mathcal{E}}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(|j|, p) & ij\tilde{\psi}(|j|, p) \\ -ij\tilde{\psi}(|j|, p) & \tilde{\varphi}(|j|, p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle H_x \rangle \\ \langle H_y \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

に帰着される ($\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$) は j と p の実関数)。これを (z, t) 空間で書き直すと、

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z, t) &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z - z', t - t') \langle \mathbf{B} \rangle(z', t') dz' dt' \\ &\quad - \mathbf{e}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z - z', t - t') \langle \mathbf{B} \rangle(z', t') dz' dt', \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.3. G.O.ROBERTS の流れにおけるカーネル ϕ_{QR}

となる。関数 φ と ψ はそれぞれ、 $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ の逆フーリエ–ラプラス変換である。これらより、Roberts の問題における誘導起電力の振る舞いは、 φ と ψ との 2 つの関数で、十分に記述できることがわかる。

このとき、平均場の分散関係は、 $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ を使って、以下のように書ける。式 (3.33) を (j, p) 空間における平均場の式 (3.2) に代入すると、

$$p^* \begin{pmatrix} \langle H_x \rangle(j, p) \\ \langle H_y \rangle(j, p) \end{pmatrix} = ij \begin{pmatrix} ij\tilde{\psi}(|j|, p) & -\tilde{\varphi}(|j|, p) \\ \tilde{\varphi}(|j|, p) & ij\tilde{\psi}(|j|, p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle H_x \rangle(j, p) \\ \langle H_y \rangle(j, p) \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

となる。ここで、

$$p^* = p + Rm^{-1}j^2 \quad (3.36)$$

とした。固有値問題 (3.35) を解くと、分散関係

$$p_{1,2}^* = \pm\tilde{\varphi}(|j|, p)j - \tilde{\psi}(|j|, p)j^2 \quad (3.37)$$

が得られる。これより、 $\tilde{\varphi}(0, p) = 0$ でなければ、 $\tilde{\varphi}$ の符号に関わらず、常に、小さい j で成長解と減衰解が存在することがわかる。分散関係の成長するブランチは

$$p^* = |\tilde{\varphi}(|j|, p)|j - \tilde{\psi}(|j|, p)j^2 \quad (3.38)$$

と書ける。対角成分 $\tilde{\varphi}$ は平均場を増幅させる。この $\tilde{\varphi}$ の絶対値が大きくなるにつれ、成長率 p は大きくなる。非対角成分 $\tilde{\psi}$ は、もし正なら平均場を弱め (乱流拡散)、もし負なら平均場を強化する。ここで注意すべきことは、もともとのキネマティックダイナモ問題は固有値を無限個もっていたのに対し、(3.37) が基本的には 2 つの固有値を表していることである。これは、3.1 節で述べたように、small-scale dynamo を無視したことによる。

分散関係 $p = p(j)$ とカーネル $\tilde{\varphi}(j, p)$ の関係は、以下のように、 (j, p) 空間上に描ける。簡単のために $\tilde{\psi}$ を定数とする。式 (3.37) は、連立方程式、

$$\tilde{\varphi} = \pm\tilde{\varphi}(j, p) \quad (3.39)$$

と

$$\tilde{\varphi} = \pm(p + \tilde{\psi}j^2)/j. \quad (3.40)$$

との解であると理解できる。したがって、この 2 つの式による 2 つの等高線の交点が、 (j, p) 平面において分散関係を与える。この関係は、分散関係の振る舞いにとって重要な $\tilde{\varphi}(j, p)$ の特徴を特定する際の目安となる。

以下では、 (z, t) 空間におけるカーネル ϕ_{qr} を表すために、ステップ応答 $\Phi(z, t)$ と $\Psi(z, t)$ 、

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &\equiv \int_0^t \varphi(z, t') dt' \\ \Psi(z, t) &\equiv \int_0^t \psi(z, t') dt' \end{aligned} \quad (3.41)$$

を使う。これらは、ステップ関数の形で与えられた種磁場

$$\langle B \rangle = \langle B_0 \rangle \delta(z) \Theta(t) \quad (3.42)$$

に対する応答を表す。ここで、 $\langle B_0 \rangle$ は種磁場の強さ、 $\delta(z)$ はデルタ関数、そして $\Theta(t)$ はステップ関数

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq t' \leq t \\ 0 & \text{for } t < t' < \infty \end{cases} \quad (3.43)$$

である。この種磁場を与えたとき、誘導起電力は

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q(z, t) &= \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \phi_{qr}(z - z', t - t') \langle B_0 \rangle_r \Theta(t') \delta(z') \\ &= \Phi(z, t) \langle B_0 \rangle_q - \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial z} \varepsilon_{qrs} e_r \langle B_0 \rangle_s. \end{aligned} \quad (3.44)$$

に帰着される。式 (3.44) は、種磁場 $\langle B \rangle$ が時間 $t = 0$ で面 $|z| = 0$ に与えられ、 $t > 0$ で維持されたときに、いかに Φ と Ψ が応答するか、ということを表している。

空間 (z, t) における応答 Φ および Ψ は、空間 (j, p) における $\tilde{\varphi}$ および $\tilde{\psi}$ に対し、シンブルな近似関係をもつ。時間 t 領域と成長率 p 領域の間のラプラス変換より、近似的に

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(j, p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} \varphi(z, t) e^{-pt - ijz} dt \\ &\sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ijz} dz \int_0^{1/p} \varphi(z, t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z, t = 1/p) e^{-ijz} dz \end{aligned} \quad (3.45)$$

が得られる。同様にして、 $\tilde{\psi}(j, p)$ と $\Psi(z, t)$ も近似的に

$$\tilde{\psi}(j, p) \sim \int_0^{\infty} \Psi(z, t = 1/p) e^{-ijz} dz \quad (3.46)$$

の関係にある。つまり、 (j, p) 空間で $p = 1/t (> 0)$ のときの $\tilde{\varphi}$ および $\tilde{\psi}$ は、時間 t のときの Φ および Ψ のフーリエ変換と見なせばよい。

伝統的な α および β は、 $\tilde{\varphi}$ および $\tilde{\psi}$ 、また、 Ψ および Ψ の空間積分と以下のような関係にある。伝統的な α は、時間的かつ空間的に一様な平均場 $\langle B \rangle$ と誘導起電力の間の比例係数として、定義される。種磁場 $\langle B \rangle$ が定数であるとき、誘導起電力 (3.34) は

$$\mathcal{E}(z, t) = \langle B \rangle \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \varphi(z - z', t - t') \quad (3.47)$$

と得られる。この結果、伝統的な α は

$$\alpha = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \varphi(z - z', t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z, t \rightarrow \infty) dz \quad (3.48)$$

となる。この定式化では、 α は、時間が十分たった極限での Φ の空間積分である。また、 $\tilde{\varphi}$ と α の関係は、(3.48) と (3.45) より、

$$\alpha = \tilde{\varphi}(j=0, p=0) \quad (3.49)$$

である。さらに、種磁場が z に比例するとき、つまり、定数 A として $\langle B \rangle(z) = Aze_x$ とかけるとき、誘導起電力 (3.34) は

$$\mathcal{E}(z, t) = Aze_x \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z-z', t-t') dz' dt' - Ae_y \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z-z', t-t') dz' dt' \quad (3.50)$$

と帰着する。一方、 $\langle B \rangle(z) = Aze_z$ を、 β の定義である (3.8) に代入すると、 $\mathcal{E}_y = -\beta A$ を得る。これと (3.50) の y 成分を比較して、

$$\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(z, t \rightarrow \infty) dz \quad (3.51)$$

が得られる。つまり、 α と同様に、 β は Ψ の空間積分である。式 (3.51) と (3.46) より、 $\tilde{\psi}$ との関係は

$$\beta = \tilde{\psi}(j=0, p=0) \quad (3.52)$$

と書ける。

関数 $\{\Phi(z, t), \Psi(z, t)\}$ および $\{\tilde{\varphi}(j, p), \tilde{\psi}(j, p)\}$ の 2 組はそれぞれ、以下のような長所をもっている。まず、 $\{\Phi(z, t), \Psi(z, t)\}$ は、短時間および短距離の応答を示すのに適している。一方、 $\{\tilde{\varphi}(j, p), \tilde{\psi}(j, p)\}$ の組は、長時間および長距離の応答をみる際に適当である。前者が、物理的空間における関数であるため、直観的な理解がしやすいのに対し、後者は、(3.38) の関係があることから、誘導起電力と分散関係の関係を理解するために有益である。

3.3.2 数値計算

この節では、 $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \Phi$ および Ψ の計算方法を説明する。まず、(3.25) を使い、ずれ場 H' を計算する。このとき、 $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$ と $\{\Phi, \Psi\}$ の組で計算方法が異なる。前者 $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$ の組では、 $H'(x, y, j, p)$ を求めるために、種磁場 $\langle H \rangle$ を与えて、 (j, p) 空間において (3.25) 式を計算する。後者 $\{\Phi, \Psi\}$ の組では、 $H'(x, y, j, t)$ を得るために、種磁場として $\langle \tilde{B} \rangle = \langle \tilde{B}_0 \rangle \theta(t)$ を与え、 (j, t) 空間で解く。この計算の離散化方法は、後述する。次に、(3.19) より、 $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$ に対しては $\tilde{\mathcal{E}}(j, p)$ を、 $\{\Phi, \Psi\}$ に対しては $\tilde{\mathcal{E}}(j, t)$ を求める。最後に、応答 $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$ を、(3.33)、つまり

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_x \\ \tilde{\mathcal{E}}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(|j|, p) & ij\tilde{\psi}(|j|, p) \\ -ij\tilde{\psi}(|j|, p) & \tilde{\varphi}(|j|, p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle H_x \rangle \\ \langle H_y \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

より、決める。一方、応答 $\{\Phi, \Psi\}$ は、2ステップを経て、決める。まず $\{\tilde{\Phi}(|j|; t), \tilde{\Psi}(|j|; t)\}$ を、

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_x(|j|; t) \\ \tilde{\mathcal{E}}_y(|j|; t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}(|j|; t) & ij\tilde{\Psi}(|j|; t) \\ -ij\tilde{\Psi}(|j|; t) & \tilde{\Phi}(|j|; t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \tilde{B}_0 \rangle_x \\ \langle \tilde{B}_0 \rangle_y \end{pmatrix} \quad (t > 0). \quad (3.53')$$

より、計算する。その後、 $\tilde{\Phi}(j; t)$ と $\tilde{\Psi}(j; t)$ を逆フーリエ変換し、 (z, t) 空間における $\Phi(z, t)$ と $\Psi(z, t)$ を得る。上述の式からわかるように、 $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$ および $\{\Phi, \Psi\}$ を計算するためには、種磁場をそれぞれ、 $\langle H \rangle = (1, 0)$ および $\langle \tilde{B}_0 \rangle = (1, 0)$ と与えれば十分である。

本研究の計算領域は、磁気レイノルズ数で $1/64 \leq Rm \leq 10$ である。それよりも大きい $Rm > 10$ で計算するためには、厚さ $\delta \sim \mathcal{O}(Rm^{-1/2})$ の境界層の時間発展を、3次元空間で十分に追えるだけの、さらに長時間の数値計算が必要となる。

空間 (j, p) における $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ の計算では、(3.25) 式の離散化を以下のように行った。ずれ場 H' は、 x と y に対し周期的なので、フーリエ級数で、

$$H'(x, y, j, p) = \sum_{m=-m_s}^{+m_s} \sum_{n=-n_s}^{+n_s} h_{mn}(j, p) e^{imx} e^{iny}, \quad (3.54)$$

と展開できる。ここで、 m と n は整数で、 m_s および n_s は打ち切り次数を表す。これより、(3.25) をフーリエ展開すると、

$$\begin{aligned} \{p^* + Rm^{-1}(m^2 + n^2)\} h_{mn} + \frac{1}{2}(mh_{m,n-1} - mh_{m,n+1} + nh_{m-1,n} - nh_{m+1,n}) \\ - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_{y,m(n-1)} + h_{y,m(n+1)} \\ h_{x,(m-1)n} + h_{x,(m+1)n} \\ i(h_{x,(m-1)n} - h_{x,(m+1)n} - h_{y,m(n-1)} + h_{y,m(n+1)}) \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{2} ij(h_{m-1,n} + h_{m+1,n} - h_{m,n-1} - h_{m,n+1}) \\ + \frac{1}{2} ij \begin{pmatrix} -(h_{x,-10} + h_{x,10} - h_{x,0-1} - h_{x,01}) - i(h_{z,0-1} - h_{z,01}) \\ -i(h_{z,-10} - h_{z,10}) - (h_{y,-10} + h_{y,10} - h_{y,0-1} - h_{y,01}) \\ 0 \end{pmatrix} = r_{mn} \end{aligned} \quad (3.55)$$

となる。右辺の r_{mn} は、(3.25) の右辺のフーリエ級数の係数であり、

$$\begin{aligned} r_{1,0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -ij & 0 \\ 1 & -ij \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle H_x \rangle \\ \langle H_y \rangle \end{pmatrix}, \quad r_{-1,0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -ij & 0 \\ 1 & -ij \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle H_x \rangle \\ \langle H_y \rangle \end{pmatrix} \\ r_{0,1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ij & 1 \\ 0 & ij \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle H_x \rangle \\ \langle H_y \rangle \end{pmatrix}, \quad r_{0,-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ij & 1 \\ 0 & ij \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle H_x \rangle \\ \langle H_y \rangle \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.56)$$

その他の m, n では $r_{mn} = 0$

で与えられる。この h_{mn} に対する連立方程式 (3.55) の計算には、LINPACK の計算コードを用いた。

一方、 Φ および Ψ の計算の場合には、 $H'(x, y, j; t)$ を計算するために、(3.55) 式を変更して用いる。成長率とともにある項 $ph_{m,n}$ を時間微分 $\partial h_{m,n}/\partial t$ に置き換え、 $h_{m,n}(j; t)$ の時間発展を求める。時間積分は、時間間隔 $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ でオイラー法により、実行した。初期条件は、 $H' = 0$ 、つまり、任意の m および n に対して $h_{m,n}(j; 0) = 0$ とした。

そして、 $h_{m,n}$ が得られた後、ずれ場 H' または $h_{m,n}$ が生成する誘導起電力 $\tilde{\mathcal{E}}$ を、

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_x \\ \tilde{\mathcal{E}}_y \\ \tilde{\mathcal{E}}_z \end{pmatrix} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{H}' \rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i(h_{z,-10} - h_{z,10}) - (h_{y,-10} + h_{y,10} - h_{y,0-1} - h_{y,01}) \\ (h_{x,-10} + h_{x,10} - h_{x,0-1} - h_{x,01}) + i(h_{z,0-1} + h_{z,01}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

より計算する。

打ち切り次数は、 $\tilde{\varphi}$ および $\tilde{\psi}$ の計算値が $Rm \leq 10$ で 10^{-8} 以内に収束するように、 $m_s = n_s = 9$ とした。さらに、 $\tilde{\Phi}(z, t)$ および $\tilde{\Psi}(z, t)$ の計算では、波数 j に対し 321 点: $Rm < 1/4$ のとき $0 \leq j \leq 32$ で間隔 $\Delta j = 0.1$ 、 $1/4 \leq Rm \leq 10$ のとき $0 \leq j \leq 64$ で $\Delta j = 0.2$ をとった。この結果、 $\Phi(z, t)$ および $\Psi(z, t)$ は 4% 以内に収束した。

3.4 結果: 平均誘導起電力 ϕ_{qr} の特徴

この節では、Roberts の流れ (3.9) による応答 $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \Phi$ および Ψ の数値結果とその特徴を示す。

まず、(3.48) および (3.49) で定義された、伝統的な α を計算する。これは、磁気レイノルズ数 Rm の関数として、誘導起電力の全体的な振る舞いをみるためである。その数値結果が図 3.5 であり、過去の研究で示された漸近解も同時に描いてある。磁気レイノルズ数が小さいとき: $Rm \ll 1$ のとき、first-order smoothing approximation (G.O.Roberts, 1972; Rädler *et al.*, 2002) より、

$$\alpha \sim -Rm \quad (3.58)$$

と与えられる。詳しくは、3.4.1 節で触れる。また $Rm \rightarrow \infty$ のときは、flux expulsion に基づいた境界層理論 (Childress, 1979; Anufriyev & Fishman, 1982; Soward, 1987) より、

$$\alpha \sim -0.5327(2/Rm)^{1/2} \quad (3.59)$$

と得られる。本研究の数値結果はこれらの漸近解をよく再現している。さらに、これらの近似の適切さより、3 つの領域を見出すことができる。まず $Rm \lesssim 1/4$ のとき (領域 1) は、first-order smoothing approximation がなりたち、 $Rm \gtrsim 4$ のとき (領域 3) は、境界層理論がなりたつ。その中間 $1/4 \lesssim Rm \lesssim 4$ (領域 2) は、領域 1 と 3 の遷移領域である。後に 3.4.2 節で見ると、領域 2 において、 Rm とともに非局所性と非瞬間性が増す。以下の 3 つの小節では、 $Rm = 1/32$ (領域 1) のとき、 $Rm = 1/4, 1$ および 4 (領域 2) のとき、および $Rm = 8$ (領域 3) のときの応答 $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \Phi$ と Ψ を記載する。

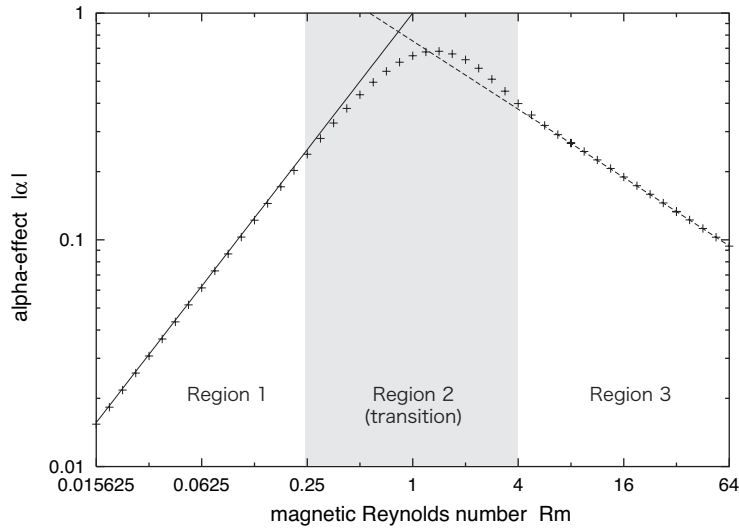


図 3.5: 式 (3.48) または (3.49) で定義された α の絶対値と、磁気レイノルズ数の関係。十字印は、 $j = 1/64$ で $p^*(j)/j$ から見積もった $|\alpha|$ を表す。ここで、 p^* は、成長ブランチの、修正した固有値 p^* (3.36) である。実線と破線は、それぞれ、 $Rm \ll 1$ における解析的近似解 (Eq. (3.58)) と $Rm \gg 1$ における解析的近似解 (Eq. (3.59)) を表す。

3.4.1 領域 1 : $Rm \lesssim 1/4$

この節では、 $Rm \lesssim 1/4$ のときに、 φ と ψ が伝統的な α 効果と β 効果に帰着することを確認する。

図 3.6a は、 $Rm = 1/32$ で、種磁場 (3.42) によって強制された応答 Φ の時間発展を、コンターで示している。負の Φ が $t = 0$ でほぼ瞬間的に生成され、 $t \sim Rm$ の後、定常となる。この時間 $t \sim Rm$ は、本研究の無次元化における拡散時間に相当する。この Φ は、種磁場に近く $|z| \sim 0$ に集中する。応答 Ψ も同様に振る舞う。定常な正の Ψ は $|z| = 0$ の近くに集中して、 $t \lesssim Rm$ 以内にほぼ瞬間的に生成される (図 3.6b)。これらより、 Rm が十分小さいとき、 Φ および Ψ は瞬間的かつ局所的な応答を示すことがわかる。

図 3.7 は、 (j, p) 空間における $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ のコンターを、いくつかの Rm で示している。これは、(3.45) および (3.46) の関係を通して、図 3.6 と対応する。応答 $\tilde{\varphi}(j, p)$ は、 $\text{Re}[p]$ にわずかに依存し、 j に弱い依存性をもつ。この p に対するきわめて弱い依存性より、応答が瞬間的であることがわかる。また、 j に対する弱い依存性は、応答が局所的であることを示し、これは磁気拡散に起因する (後述)。応答 $\tilde{\psi}$ も同様な振る舞いを示す (図 3.7b)。したがって、 (j, p) 空間における $\tilde{\varphi}$ および $\tilde{\psi}$ は、 (z, t) 空間における Φ および Ψ の結果と一致して、 $Rm \lesssim 1/4$ のときの $\varphi(z, t)$ および $\psi(z, t)$ が局所的かつ瞬間的であることを示す (図 3.6)。

磁気レイノルズ数 $Rm \ll 1$ の場合には、 φ と ψ の解析解を簡単に求めることができる。まず、どの項が (3.25) におけるバランスに寄与するかを考えよう。左辺が右辺の外

3.4. 結果: 平均誘導起電力 ϕ_{QR} の特徴

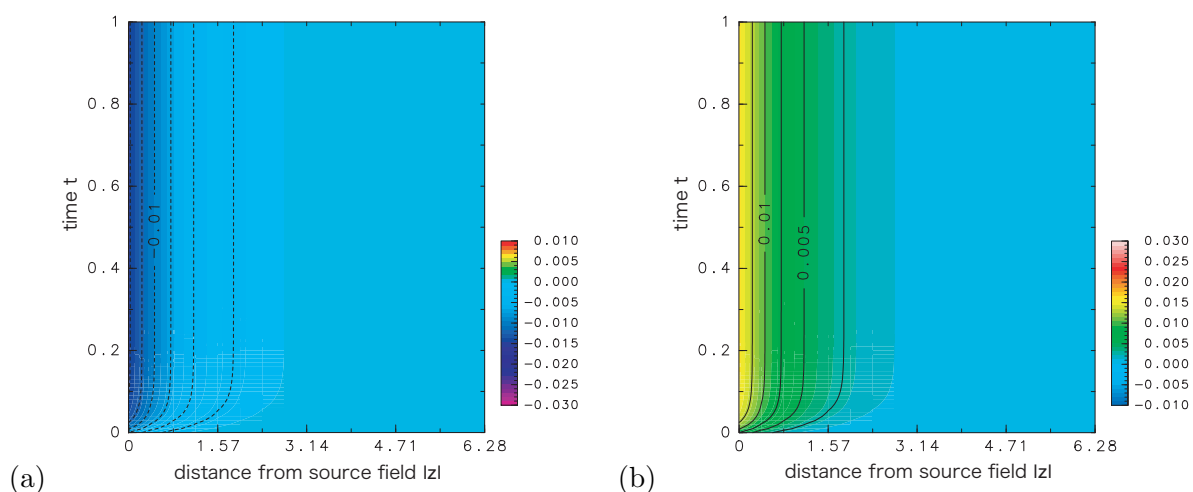


図 3.6: 応答 (a) Φ と (b) Ψ の (z, t) 空間における等高線。 $Rm = 1/32$ のとき。横軸は、種磁場 $\langle B \rangle$ をおいた面からの距離 $|z|$ を表す。縦軸は、種磁場を与えてからの時間 t である。点線と薄い実線の等高線、および、色は、その強さを表す (点線と実線はそれぞれ、負と正の値)。点線と実線の間隔は 0.0025。応答 Φ と Ψ は、 $t \sim Rm = 1/32$ まで生成され、その後、定常に維持される。

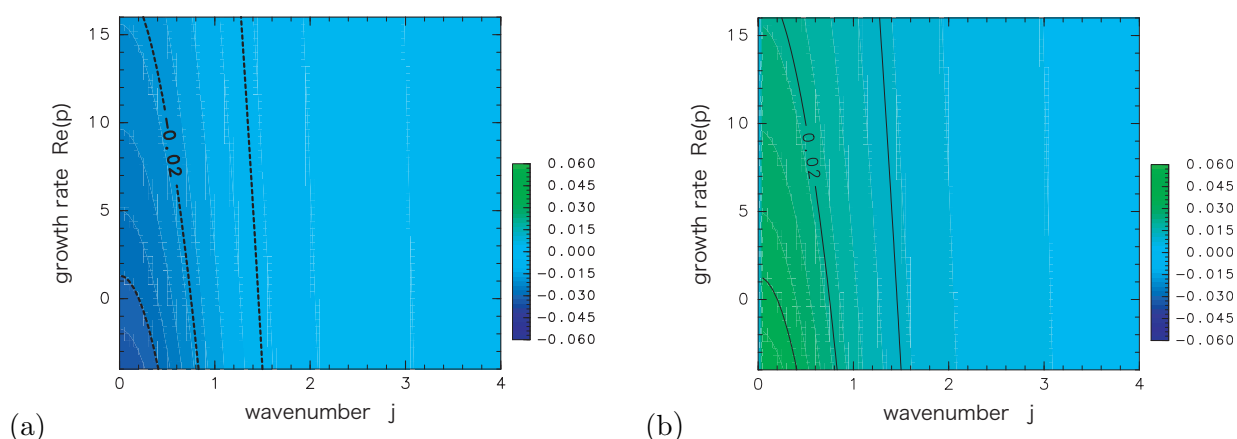


図 3.7: カーネル (a) $\tilde{\varphi}$ と (b) $\tilde{\psi}$ の (j, p) 空間における等高線。 $Rm = 1/32$ のとき。点線と薄い実線の等高線、および、色は、その強さを表す (点線と実線はそれぞれ、負と正の値)。点線と実線の間隔は 0.01。カーネル $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ は、ほぼ p に依存しない。また、 $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ が j とともに減衰するのは、磁気拡散のためである。

3.4. 結果: 平均誘導起電力 ϕ_{QR} の特徴

力項とバランスするためには、 $Rm \ll 1$ かつ $j = \mathcal{O}(1)$ のとき、

$$\mathbf{H}' \sim Rm \langle \mathbf{H} \rangle \quad (3.60)$$

である。さらに、

$$p = \mathcal{O}(Rm^{-1}) \quad (3.61)$$

を仮定すると、ずれ場の式 (3.25) は

$$\left(p - Rm^{-1} \tilde{\nabla}^2 \right) \mathbf{H}' = -\tilde{\nabla} \times (\mathbf{u} \times \langle \mathbf{H} \rangle) \quad (3.62)$$

となる。ずれ場 \mathbf{H}' 、および、(3.62) の右辺の項を、(3.54) で定義されたフーリエ級数で展開すると、(3.62) は

$$\{p^* + Rm^{-1}(m^2 + n^2)\} \mathbf{h}_{m,n} = \mathbf{r}_{m,n} \quad (3.63)$$

に帰着される。ここで、 $\mathbf{r}_{m,n}$ は (3.56) で定義されたものである。式 (3.63) は簡単に解くことができ、そのフーリエ変換より、

$$\mathbf{H}' = \sum_{m,n} \frac{1}{p^* + Rm^{-1}(m^2 + n^2)} \mathbf{r}_{m,n} e^{imx + iny} \quad (3.64)$$

が得られる。右辺の $\mathbf{r}_{m,n}$ の項に (3.56) を代入すると、次数 $(m, n) = (\pm 1, 0)$ と $(0, \pm 1)$ 以外の項は、すべて消える。結果、式 (3.62) の解は、

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{p^* + Rm^{-1}} \begin{pmatrix} -ij(\cos x - \cos y) & \cos y \\ \cos x & -ij(\cos x - \cos y) \\ -\sin x & \sin y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle H_x \rangle \\ \langle H_y \rangle \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

と得られる。これと流れとの外積 $\mathbf{u} \times \mathbf{H}'$ をとり、平均操作をすると、誘導起電力

$$\tilde{\mathcal{E}} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{H}' \rangle = \frac{1}{p^* + Rm^{-1}} \begin{pmatrix} -1 & ij \\ -ij & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle H_x \rangle \\ \langle H_y \rangle \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

を得る。したがって、 (j, p) 空間における $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ は

$$\tilde{\varphi}(j, p^*) = -\tilde{\psi}(j, p^*) = -\frac{1}{p^* + Rm^{-1}} \quad (3.67)$$

となる。これを (3.30) より、 (z, t) 空間における φ と ψ に変換すると

$$\varphi(z, t) = -\psi(z, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Rm^{-1}(1+j^2)t} e^{ijz} dj \quad (3.68)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{Rm^{-1}t}} e^{-Rm^{-1}t - \frac{z^2}{4Rm^{-1}t}} \quad (3.69)$$

3.4. 結果: 平均誘導起電力 ϕ_{QR} の特徴

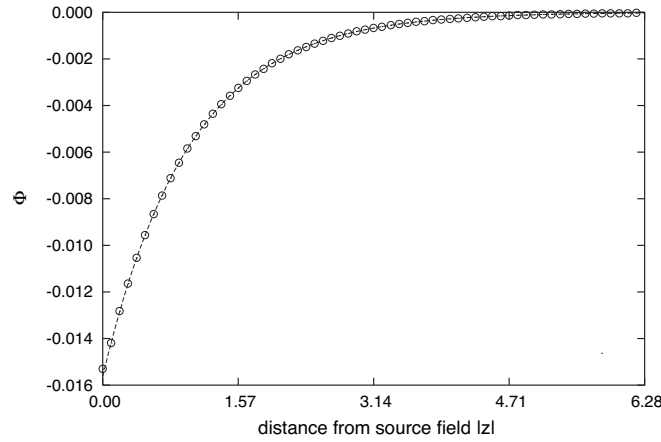


図 3.8: 応答 $\Phi(|z|, t)$ の数値 [丸印] と、解析的な近似解 (3.71) [点線] の比較。 $Rm = 1/32$ のとき。横軸は、 $z = 0$ 面からの距離を表す。

である。ここで、積分公式

$$\int_{s_r - i\infty}^{s_r + i\infty} \frac{1}{A + s} e^{st} ds = 2\pi i e^{-At} \quad (3.70)$$

を使った (s は複素数 $s = s_r + is_i$ 、 A は定数)。拡散時間の 2 倍程たったとき ($t \sim 2Rm$)、応答 φ と ψ はほとんど 0 となり、積分された応答 Φ と Ψ は定常値の 10% 以内になる。式 (3.69) の積分より、 Φ と Ψ の定常状態は

$$\Phi(z, t \rightarrow \infty) = -\Psi(z, t \rightarrow \infty) = -\frac{1}{2} Rm e^{-|z|} \quad (3.71)$$

と得られる。また積分公式

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-ax - b^2/x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2b\sqrt{a}} \quad (a, b > 0) \quad (3.72)$$

を使用した (a と b は正の定数)。この解析解 (3.71) が数値結果をよく再現するということが、図 3.8 でわかる。これらの解析的結果は、 $Rm \ll 1$ のときの φ および ψ の局所性と瞬間性を明確に示している。

また、伝統的な α および β は、3.3.1 節で説明した 2 つの方法で求められる。空間 (z, t) における Φ と Ψ より、(3.71) を (3.48) および (3.51) に代入すると、

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, t \rightarrow \infty) d\xi = -Rm, \\ \beta &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi, t \rightarrow \infty) d\xi = Rm \end{aligned} \quad (3.73)$$

となる。同じ結果は、(3.67) を (3.49) と (3.52) に代入することで、

$$\alpha = \tilde{\varphi}(0, 0) = -Rm, \quad (3.74)$$

$$\beta = \tilde{\psi}(0, 0) = Rm \quad (3.75)$$

と得られる。さらに、 $p \ll Rm^{-1}$ ($t \gg Rm$) かつ $j \ll 1$ のとき、応答 $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ は

$$\tilde{\varphi} = -\tilde{\psi} = -Rm \quad (3.76)$$

と帰着されることから、伝統的な α と β が $p \ll Rm^{-1}$ かつ $j \ll 1$ のときには適当であるがわかる。

3.4.2 領域 2 (遷移領域) : $1/4 \lesssim Rm \lesssim 4$

図 3.9 と 3.10 は、遷移領域 $1/4 \lesssim Rm \lesssim 4$ における応答を示す。図 3.9 は、 (z, t) 空間における $\{\Phi, \Psi\}$ を $Rm = 1/4, 1$ と 4 で示し、図 3.10 は (j, p) 空間における $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$ を同じ磁気レイノルズ数で示す。カーネル $\{\Phi, \Psi\}$ および $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$ は、 Rm が増加するにつれて、非局所性と非瞬間性を増加させる。

図 3.9 i)a と ii)a はそれぞれ、 $Rm = 1/4$ そして 1 のときのカーネル Φ を示す。図 3.6a ($Rm \ll 1/4$) との類似することから、局所性および瞬間性がまだ保持されていることがわかる。しかし、これらはすでに (3.71) と差ができており、この差は Rm とともに増加する。式 (3.71) が適当な場合、 ΦRm^{-1} の定常状態の $z = 0$ での大きさは $1/2$ であるべきなのに対し、数値結果における値は、 $Rm = 1/4, 1$ でそれぞれ $0.48, 0.36$ である。また、 $Rm = 1$ のとき、定常状態に達するまでにかかる時間は、(3.71) から期待される時間よりも少し短い。つまり、 $\Phi(z = 0, t)$ は、拡散時間 $tRm^{-1} = 1$ ですでに定常値の 10% となる。関数 $\Phi(z, t \rightarrow \infty)$ の空間構造は、 $Rm = 1/4$ と 1 のとき、ほぼ $e^{-|z|}$ である。

磁気レイノルズ数 $Rm = 4$ のとき、非瞬間性および非局所性は顕著となる。図 3.9 iii)a より、初期状態では、負の Φ が $|z| = 0$ の周りに生じ、 $t \sim 2$ までは時間とともに、 z 方向に広がっていく。その後、その広がりには止まり、 Φ は $t \sim 4$ まで増加していく。そして、 $t \sim 4$ のとき、 $\pi \lesssim |z| \lesssim 4$ で応答の符号が正に転じる。応答は $tRm^{-1} \sim 4$ で定常になるまで弱い振動を伴う。この時間は、(3.69) から期待される時間よりも遅い。また、定常状態における振幅は $|\Phi(z = 0, t \rightarrow \infty)Rm^{-1}| \sim 0.12$ と、(3.71) よりもはるかに小さい。

空間 (j, p) におけるカーネル $\tilde{\varphi}$ は、(3.45) に従って、対応する特徴を示す (図 3.10 a)。式 (3.67) が適用できる場合、カーネル $|\tilde{\varphi}Rm^{-1}|$ は $j = p = 0$ で 1 となる。しかし、計算結果は、 $Rm = 1/4$ と 1 のとき、それぞれ 0.97 と 0.75 であることを示す。一方、 $Rm = 4$ のとき (図 3.10 iii) a)、 $\tilde{\varphi}(j, p)$ が j および p に対して単調でない依存性をもつことから、非瞬間性と非局所性は顕著となることがわかる。特に、領域 $0 \lesssim j \lesssim 1$ かつ $-0.5 \lesssim p \lesssim 0$ で 2 つの特徴が現れる。その 2 つとは、 $(j, p) \sim (0.5, 0)$ から $(j, p) \sim (1, -0.5)$ へ広がる谷構造と、 $(j, p) \sim (1/2, -2/5)$ 近くでの特異なリング構造である。

非対角成分 $\Psi(z, t)$ もまた、 Rm の増加に伴い、非瞬間性と非局所性を強める (図 3.9 b)。式 (3.71) からの差も Rm とともに大きくなり、 $\Phi = -\Psi$ の関係はもはや成り立たない。式 (3.71) によると、定常状態での応答 $|\Psi Rm^{-1}|$ は $z = 0$ のとき $1/2$ となるはずだが、計算結果は、 $Rm = 1/4$ で 0.47 、 $Rm = 1$ で 0.33 である。この $Rm = 1/4$ のとき (図 3.9 i)b)、 Ψ の空間構造はほぼ $e^{-|z|}$ を保持するものの、その符号は $|z| \sim (5/2)\pi$ で変化する。また、 $Rm = 1$ のとき (図 3.9 ii)b)、 $\Phi = -\Psi$ の関係からのずれは明らかと

3.4. 結果: 平均誘導起電力 ϕ_{QR} の特徴

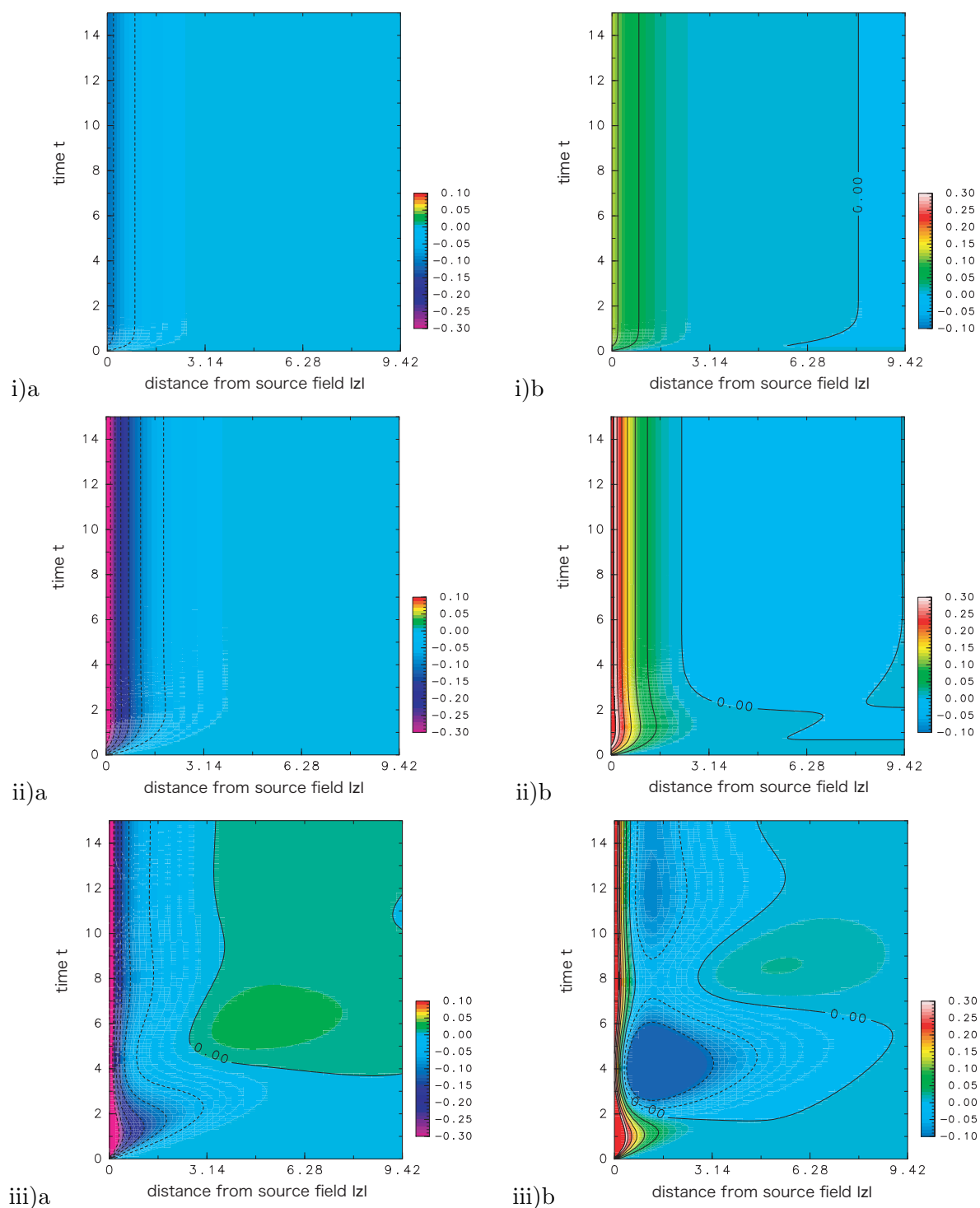


図 3.9: 応答 (a) Φ と (b) Ψ の (z, t) 空間における等高線。(i) $Rm = 1/4$, (ii) $Rm = 1$, (iii) $Rm = 4$ のとき。軸と色は、図 3.6 と同じだが、そのスケールは異なる。点線と実線の等高線の間隔は 0.05 である。非局所性と非瞬間性が Rm とともに強くなる。

3.4. 結果: 平均誘導起電力 ϕ_{QR} の特徴

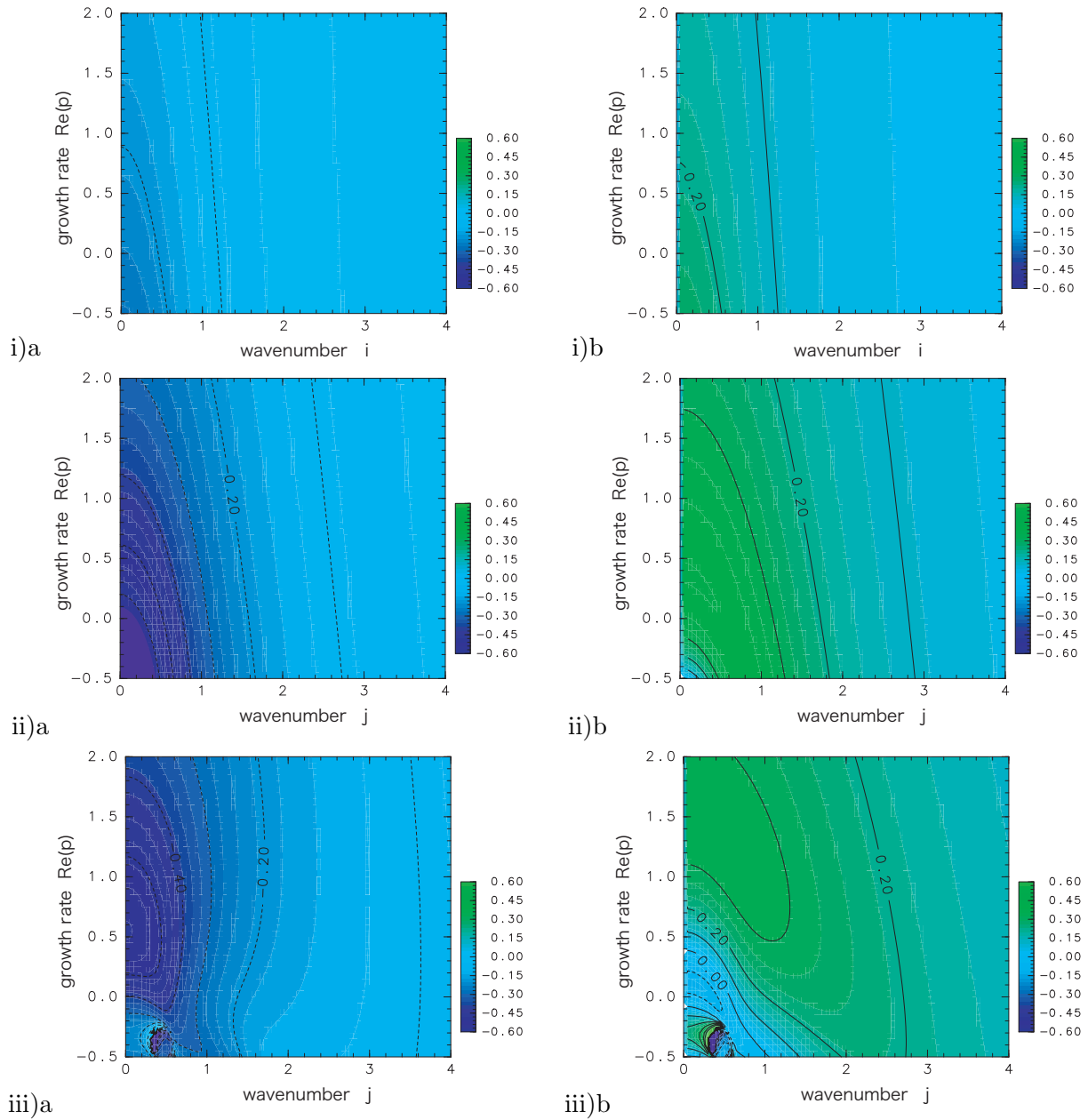


図 3.10: カーネル (a) $\tilde{\varphi}$ と (b) $\tilde{\psi}$ の (j, p) 空間における等高線。(i) $Rm = 1/4$, (ii) $Rm = 1$, (iii) $Rm = 4$ のとき。軸と色は図 3.7 と同じだが、スケールは異なる。点線と実線の間隔は 0.1 である。

3.4. 結果: 平均誘導起電力 ϕ_{QR} の特徴

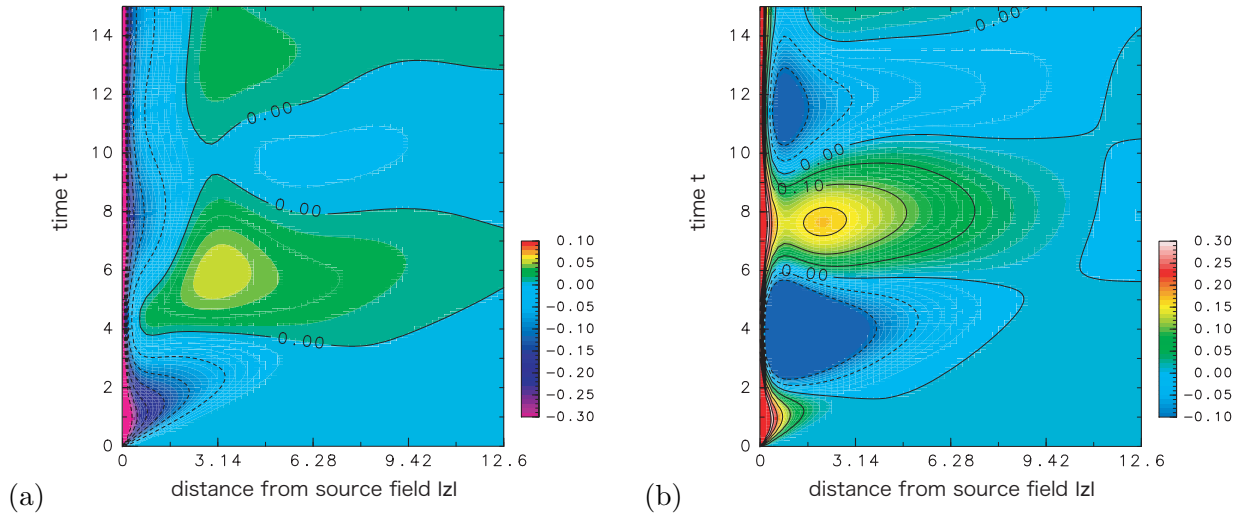


図 3.11: 応答 (a) Φ と (b) Ψ の (z, t) 空間における等高線。 $Rm = 8$ のとき。軸と色は、図 3.6 と同じだが、そのスケールは異なる。点線と実線の等高線の間隔は 0.05 である。応答 Φ と Ψ は、まず、時間とともに $|z|$ 方向へ広がり、その後、時間と共に振動する。そして、 $(|z|, t) \sim (\pi, t)$ で、 Φ の正のピークをもつ。

なる。応答 Ψ は、 $tRm^{-1} \sim 1$ で z 方向に大きく広がり、 $tRm^{-1} \sim 4$ で定常状態に近づく。定常状態では、 $|z| \sim (3/4)\pi$ で符号が変化する。この位置は、 $Rm = 1/4$ のときに比べて、種磁場に近い。さらに、 $Rm \sim 4$ (図 3.9 iii) b) のとき、非瞬間性と非局所性が顕著となる。正の応答 Ψ は初期状態で $|z| = 0$ の周りに生成され、 $t \sim 1$ まで、時間とともに z 方向へ広がる。その後、 $|z| \sim \pi/2$ を中心とした負の領域が広がり、 $t \sim 4$ で最大となるまで、 Ψ は減少する。負の領域は $t \sim 7$ で再び 0 に戻り、 $t \sim 22$ で定常に達するまで振動を伴った振る舞いをする。

空間 (j, p) におけるカーネル $\tilde{\psi}$ の振る舞いは、 (3.46) に従って、 Ψ の振る舞いを反映している。カーネル $\tilde{\psi}$ の大きさは、 (3.67) から期待される大きさよりも小さい。式 (3.67) が成り立つときには $|\tilde{\psi}(0, 0)Rm^{-1}|$ は 1 となるべきだが、その値は $Rm = 1/4$ で 0.94 である。くわえて、 (3.67) は j および p の単調減少関数だが、 $Rm = 1$ の $\tilde{\psi}$ は単調でない (図 3.10 ii) b))。また、 $(j, p) \sim (0, 1/4)$ から $(j, p) \sim (3/4, -1/2)$ にかけて広がる、小さい丘がある。この丘が通る $(j, p) \sim (1/2, 0)$ は、 $\Psi(z, t)$ の定常状態における、波長 $\sim 4\pi$ の滑らかな波状構造に対応する (図 3.9 ii) b))。最後に、 $Rm = 4$ のとき (図 3.10 iii) b))、カーネル $\tilde{\psi}$ は、 $(j, p) \sim (1/2, 1/4)$ から $(j, p) \sim (1, -1/2)$ へとおる、負の谷構造と、 $(j, p) \sim (1/2, -2/5)$ を中心とした特異的なリング構造をもつ。この谷は、 (3.46) より、 $t \sim 4$ の負の Ψ に対応する。

3.4. 結果: 平均誘導起電力 ϕ_{QR} の特徴

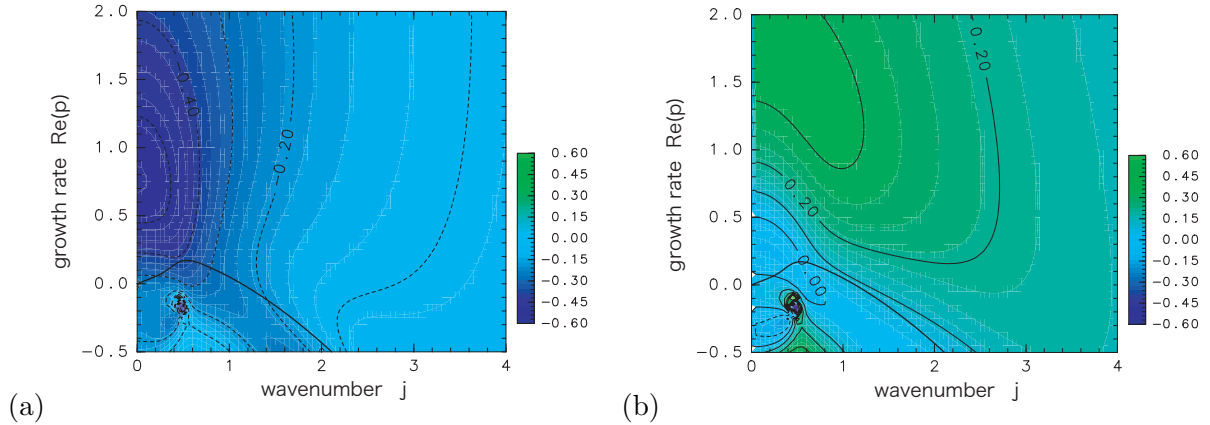


図 3.12: カーネル (a) $\tilde{\varphi}$ と (b) $\tilde{\psi}$ の (j, p) 空間における等高線。 $Rm = 8$ のとき。軸、色と線は、図 3.7 と同じだが、そのスケールは異なる。点線と実線の等高線の間隔は 0.1 である。太い実線は、最大成長率の分散関係を表す。カーネル $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ は、 j および p に強く依存する。

3.4.3 領域 3 : $Rm \gtrsim 4$

磁気レイノルズ数 $Rm \gtrsim 4$ のときの応答 Φ は、非瞬間的かつ非局所的な振る舞いを示す。図 3.11a は $Rm = 8$ のときの応答 Φ である。時間 $t = 0$ で種磁場を与えた後、まず種磁場の近く $|z| = 0$ に負の Φ が生成され、 $t \sim 2$ まで z 方向に広がる。そして、 Φ は増加し始め、 $t \sim 4$ のとき領域 $\pi/2 \lesssim |z| \lesssim 4\pi$ で正となり、 $t \sim 6$ かつ $|z| \sim \pi$ のときに最大値をとる。その後、振動を伴いながら、定常状態へ近づく。また、この振動に加えて、境界層が形成される。この境界層は、図でいうと、 $|z| = 0$ の周りで Φ が負となる領域にあたる。この境界層は、誘導起電力の局所的かつ瞬間的な部分を表している。

図 3.12a は、 $Rm = 8$ のときの (j, p) 空間における $\tilde{\varphi}$ を示す。式 (3.45) が、 Φ と、 $\tilde{\varphi}$ の p の正の領域との対応を表す。成長率 $p \gtrsim 0.5$ のとき、磁気レイノルズ数 $Rm = 4$ および $Rm = 8$ における $\tilde{\varphi}$ は、同様に振る舞う。式 (3.45) に従い、 $Rm = 4$ および $Rm = 8$ における Φ は、 $t \lesssim 2$ によく似ている。この類似性は、誘導起電力の初期発展が移流によるものであり、拡散には影響されないことを示す。その後、拡散が効き始め、 $Rm = 4$ と $Rm = 8$ との違いを生む。分散関係に関連して特に重要なのは、 $Rm = 8$ のとき、 $(j, p) \sim (1/2, 1/6)$ から $(j, p) \sim (3/2, -1/2)$ にかけて存在する谷である。その分散関係との関係は、次節で議論される。この谷は、 (z, t) 空間において、 $t \gtrsim 4$ のときに波数 $j \sim 1/2$ で卓越する波状構造に関連する (図 3.11a)。カーネル $\tilde{\varphi}$ の p が負の領域は、解釈するのが難しい。多くの特異点が存在し、その一つは図 3.12a で $(j, p) \sim (1/2, -1/6)$ の周りに現れているもので、 (j, p) 平面で環状構造をもつ。これらの特異点の解析は行っていない。

図 3.13a は、3つの p 値で、 j の関数として $\tilde{\varphi}$ を示している。まず $p = 2.0$ のとき、絶対値 $|\tilde{\varphi}|$ は j に対して単調減少し、かつ、それは滑らかである。しかし、 $p \lesssim 0.3$ のとき、 j に対する依存性は単調でなくなる。特に、 $p \sim 1/6$ のとき、 $\tilde{\varphi}|$ は $j \sim 1/2$ でピークを

3.4. 結果: 平均誘導起電力 ϕ_{QR} の特徴

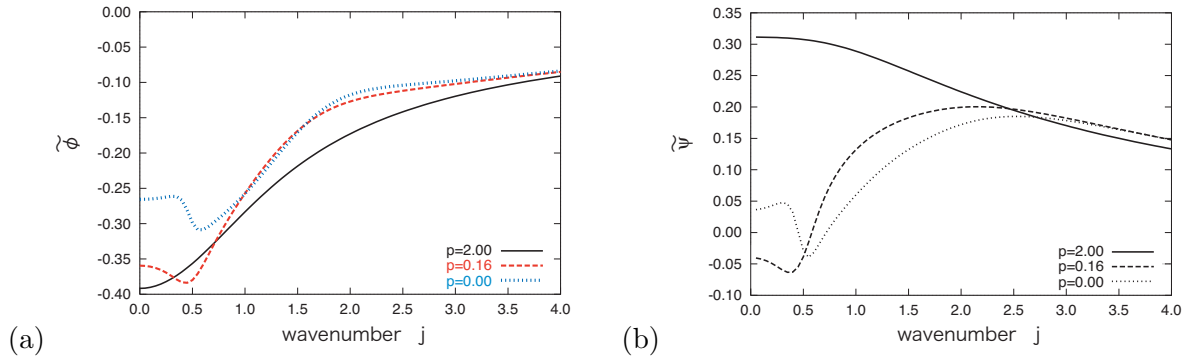


図 3.13: (a) $\tilde{\varphi}$ と (b) $\tilde{\psi}$ の波数 j 依存性。 $Rm = 8$ のとき。実線、点線および実線は、それぞれ、 $p = 2.0, 0.16$ と 0.0 での $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ を表す。対角成分のカーネル $\tilde{\varphi}$ はつねに負で、 $(j, p) \sim (1/2, 1/6)$ でピークをもつ。非対角成分のカーネル $\tilde{\psi}$ は、 p が大きいときには正だが、 $(j, p) \sim (1/2, 1/6)$ では負のピークをもつ。

もつ。このピークが、図 3.11a において、 $t \sim 6$ に現れた波長約 4π の Φ の波構造をもたらす。

非対角成分の応答 Ψ と $\tilde{\psi}$ も同様に、非局所的かつ非瞬間的な振る舞いを示す。図 3.11b と図 3.12b はそれぞれ、 $Rm = 8$ のときの、 (z, t) 空間における $\Psi(z, t)$ と (j, p) 空間における $\tilde{\psi}(j, p)$ を示す。正の Ψ が $0 \lesssim t \lesssim 2$ に広がり、(3.46) より、 $p \gtrsim 0.5$ における $\tilde{\psi}$ の広い正の領域に対応するということがわかる。応答 $\Psi(z, t)$ は、 $t \sim 2$ のとき $0 \lesssim |z| \lesssim 2\pi$ で負に転じ、周期約 8 で振動的な振る舞いを見せる。負の Ψ は負の乱流拡散を意味し、それはダイナモ作用を強化しうる。負の値は、 $j \lesssim 1$ かつ $0 \lesssim p \lesssim 0.5$ のとき $\tilde{\psi}$ にも現れる。カーネル $\tilde{\psi}$ が、分散関係におけるピークの近く $j \sim 1/2$ で 0 となることは興味深い。式 (3.46) より、これは $t \sim 6$ で Ψ が 0 になることに対応する。

図 3.13b は、3 つの p 値における関数 $\tilde{\psi}(j, p)$ を示す。まず $p = 2.0$ のとき、 $\tilde{\psi}$ は j とともに単調減少し、任意の j で正である。しかし、 $p \lesssim 0.5$ のとき、負の $\tilde{\psi}$ が現れ、負の拡散を示している。そして、 $p = 0.16 \sim 1/6$ のとき、応答 $\tilde{\psi}$ は $j \sim 1/2$ で負のピークをもつ。この j および p のとき、 φ はピークをもった。

過去の研究 (Soward, 1987, 1989; Plunian & Rädler, 2002b) における、拡張した α 効果の計算は、カーネル ϕ_{qr} の一部のみを表すものである。Soward (1987, 1989) と Plunian & Rädler (2002b) はともに分散関係に興味があったため、分散関係上の拡張した α のみに注目した。分散関係は、 $j-p$ 平面における一つの曲線と考えることができる。それに対し、本研究の興味は、カーネル ϕ_{qr} (3.5) の一般的な特徴にあり、分散関係上だけに制限されたものでない。したがって、本研究では、全 $j-p$ 平面で、 ϕ_{qr} または一般化した α の振る舞いを調べることを目的とした。実際に、Plunian & Rädler (2002b) の定義に従って、分散関係上の $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ を切り出すと (図 3.14)、彼らの論文の Fig.3 と一致した結果を得る。図 3.14 より、分散関係が最大値をもった $j \sim 1/2$ において、 $|\tilde{\varphi}|$ が最大値をもち、 $\tilde{\psi}$ がほぼ値をもたないことがわかる。また、分散関係上における $\tilde{\psi}$ が $0.2 \lesssim j \lesssim 0.6$ で負の値をとり、負の乱流拡散が分散関係の形成にも寄与しているだろうことが示唆される。

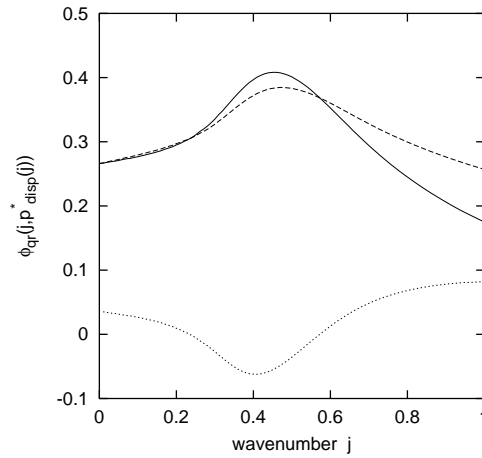


図 3.14: 拡張した α 効果 $\hat{\alpha}(j) = |\tilde{\varphi}(j, p_{\text{disp}}(j))| - j\tilde{\psi}(j, p_{\text{disp}}(j))$ [実線]。ここで、 $p = p_{\text{disp}}(j)$ は Roberts の分散関係。 $Rm = 8$ のとき。点線と破線はそれぞれ、 $|\tilde{\varphi}|$ と $\tilde{\psi}$ を表す。

しかし、これは未解釈である。

3.5 ϕ_{qr} による分散関係

本節では、3.4 節で得られた、 $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ の近似形を使って、Roberts のキネマティックダイナモの分散関係を解釈する。3.5.1 節では、 $Rm \ll 1$ のときの分散関係の厳密な表現を与える。3.5.2 節では、 $Rm \gtrsim 4$ のときの平均場の成長メカニズムを、非局所的かつ非瞬間的な誘導起電力を使用して、半定量的に説明する。最後に、3.5.3 節は、磁力線のねじれより、非局所的かつ非瞬間的な効果の生成を、直観的に説明する。

3.5.1 $\tilde{\varphi}$ および $\tilde{\psi}$ による平均場の分散関係： $Rm \ll 1$

応答 (3.67) の解析解より、 $Rm \ll 1$ のときの分散関係の成長ブランチの振る舞いを説明することができる。式 (3.67) を (3.37) に代入すると、4 つの固有値

$$p_{1,2,3,4}^* = -\frac{1}{2Rm} \pm \frac{1}{2Rm} \sqrt{1 - 4Rm^2(j^2 \pm j)} \quad (3.77)$$

を得る。特に $Rm \ll 1$ のとき (3.77) は展開でき、 $4Rm^2|j^2 - j| \ll 1$ で

$$p_1^* = +Rmj - Rmj^2 + \mathcal{O}(Rm^3(j^2 - j)^2), \quad (3.78)$$

$$p_2^* = -\frac{1}{Rm} - Rmj + Rmj^2 - \mathcal{O}(Rm^3(j^2 - j)^2) \quad (3.79)$$

3.5. ϕ_{QR} による分散関係

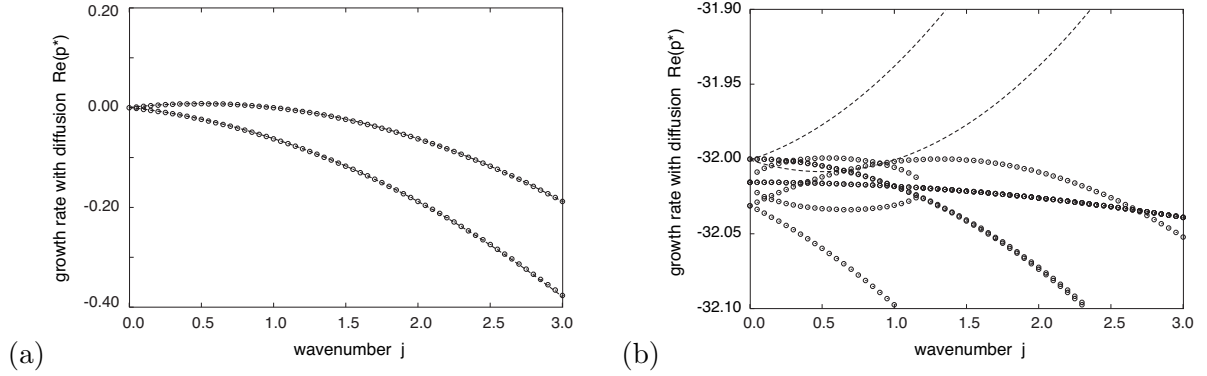


図 3.15: Roberts のキネマティックダイナモの数値的な分散関係 [丸印] と、本研究の解析解 (3.77) [点線] との比較。 $Rm = 1/32$ のとき。横軸は波数、縦軸は修正した成長率 $\text{Re}[p^*]$ である。(a) の上方および下方のブランチはそれぞれ、 α^2 -メカニズムの成長解と減衰解を表す。解析解 $p^* \sim -1/Rm$ による 2 つのブランチは、存在しない (b)。

$4Rm^2(j + j^2) \ll 1$ で

$$p_3^* = -Rmj - Rmj^2 + \mathcal{O}(Rm^3(j^2 + j^2)), \quad (3.80)$$

$$p_4^* = -\frac{1}{Rm} + Rmj + Rmj^2 - \mathcal{O}(Rm^3(j^2 + j^2)) \quad (3.81)$$

となる。2 つのブランチ p_1^* と p_3^* はそれぞれ、伝統的な α および β 効果に基づく α^2 ダイナモの、成長解および減衰解を表す。一方、その他の 2 つのブランチである p_2^* と p_4^* は、きわめて速く減衰する。しかし、これらは、見かけ上現れた解である。これらの解の導出には、 $H' \sim Rm^{-1}\langle H \rangle$ が必要だが、これでは仮定 (3.60) が破綻するためである。したがって、(3.78) と (3.80) は $Rm \ll 1$ のときの分散関係をよく近似するものの (図 3.15a)、(3.79) と (3.81) は分散関係を表現しない (図 3.15b)。よって、成長解の分散関係としては、 p_1^* (3.78) または

$$p^* = -\frac{1}{2Rm} + \frac{1}{2Rm} \sqrt{1 + 4Rm^2(j - j^2)} \quad (3.82)$$

が適切である。

上述した平均場生成は、図 3.16a で概略的に描かれている。簡単のために、 α 効果に注目し、 β 効果を無視する。式 (3.42) の初期平均場 $\langle B_0 \rangle$ が $z = 0$ に置かれている。瞬間的に、与えられた初期平均場 $\langle B_0 \rangle$ の近くに負の α 効果 (3.69) が生成される。図 3.6 で見たように、 α 効果は局所的に集中して存在する。そして、この α_1 が、(3.35) で記述されたプロセスを通して、新しく磁場 $\langle B_1 \rangle$ を誘導する。この磁場はさらに $\langle B_1 \rangle$ の周りに α_2 を生成し、 $\langle B_2 \rangle$ を生む。このようにして、時間とともに成長する、helical な平均磁場が生成される。これが、いわゆる α^2 ダイナモメカニズムで、その分散関係は (3.78) や (3.82) で記述される。

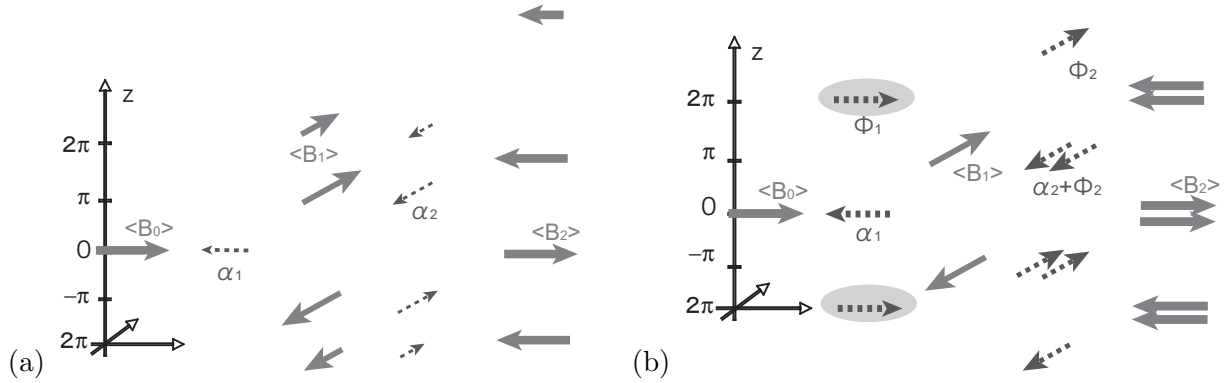


図 3.16: 平均場の生成メカニズムの概念図。(a) $Rm < 1/4$ と (b) $Rm \gtrsim 4$ のとき。縦軸は z 方向で、図 3.6 と 3.11 の横軸に対応する。 $Rm \gtrsim 4$ のとき、波数 $j \sim 1/2$ を卓越してもつ非局所的な Φ_1 が、局所的な α に加えて、生成される。そして、それらは、波数 $j \sim 1/2$ で成長する平均場 $\langle B_1 \rangle$ を誘導する。

3.5.2 $\tilde{\varphi}$ および $\tilde{\psi}$ による平均場の分散関係： $Rm \gtrsim 4$

次に、 $Rm \gtrsim 4$ のときの分散関係と、 $\tilde{\varphi}$ および $\tilde{\psi}$ の非局所的かつ非瞬間的な特徴との関連を考えよう。

分散関係の理解のためには、分散関係の近くの $\tilde{\varphi}$ の振る舞いが重要である。3.3 節で述べたように、分散関係は、 $\tilde{\varphi}$ と平均場の式 (3.40) の等高線との交点である。一方、応答 $\tilde{\varphi}(j, p)$ は、分散関係がピークをもつ $(j, p) \sim (1/2, 1/6)$ を通るような谷構造をもった (3.4.3 節)。これは、 $\tilde{\varphi}$ の谷が平均磁場の生成を強化するという意味を意味する。

このことを半定量的に説明するために、 $Rm = 8$ のときの $\tilde{\varphi}$ を近似的に表現する。特に $0 \lesssim p \lesssim 0.5$ および $0 \lesssim j \lesssim 1$ の周辺に注目すると、

$$\tilde{\varphi}(j, p) = -\varphi_0 - \frac{\varphi_1}{1 + \left(\frac{j}{j_1}\right)^2} - \frac{\varphi_2}{1 + \left(\frac{p - p_0 + q_0 j^2}{p_2}\right)^2} \quad (3.83)$$

という形を得る。ここで、 $\varphi_0 = 0.065$, $\varphi_1 = 0.234$, $j_1 = 1.23$, $\varphi_2 = 0.11$, $q_0 = 0.38$, $p_0 = 0.33$ として $p_2 = 0.18$ である (図 3.17)。右辺の第 1 項および第 2 項は、滑らかな振る舞いを表現しており、空間減衰を含んだ、瞬間的な α 効果を意味する。第 3 項は谷構造を表現しており、非局所的なメモリー効果にあたる。式 (3.83) を (3.38) に代入すると、生成される平均場の近似的な分散曲線が得られる。この分散関係は図 3.18 の点線で示されている。この曲線の計算では、 $\tilde{\psi}$ が $(j, p) \sim (1/2, 1/6)$ の周辺で小さいことから、簡単のために $\tilde{\psi} = 0$ とした。図 3.18 からわかるように、 $\tilde{\varphi}$ の非瞬間的かつ非局所的な特徴は、瞬間的かつ局所的な α 効果のみによって生成される成長率よりも、大きい成長率をうむ。

この生成メカニズムは、 (z, t) 空間における図 3.16b で、概念的に示されている。簡単のため、図 3.16a と同様に、 α 効果または φ の効果のみに注目し、 β 効果または ψ の効果は無視する。同様に、初期磁場 $\langle B_0 \rangle$ が $z = 0$ に与えられたとしよう。このとき、 $\langle B_0 \rangle$

3.5. ϕ_{QR} による分散関係

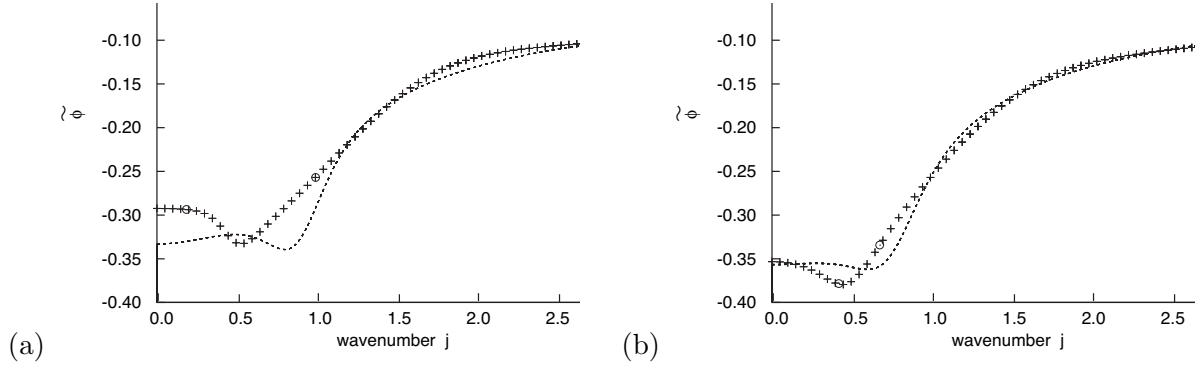


図 3.17: $\tilde{\varphi}$ の数値 [十字] と、近似式 (3.83) [点線] の比較。 $Rm = 8$ のとき、(a) $p = 0.05$ と (b) $p = 0.15$ において。白丸は、Roberts のキネマティックダイナモの数値的な分散関係との交点を示す。

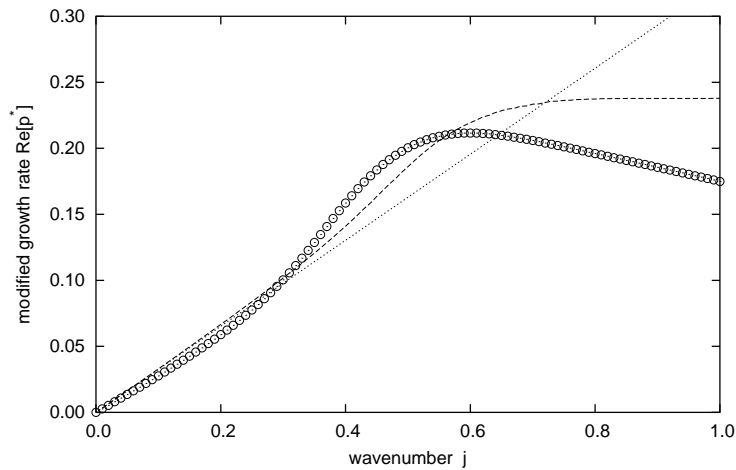


図 3.18: Roberts のキネマティックダイナモの数値的な分散関係 [丸印] と、本研究の近似解 [点線] の比較。本研究の近似解とは、 $\tilde{\psi} = 0$ と仮定し、(3.83) から求めたものである。 $Rm = 8$ のとき。横軸は波数、縦軸は修正した成長率 $\text{Re}[p^*]$ である。破線は、 $j = p = 0$ とした (3.83) より求めた分散関係である。

の周りに生成される、負の α_1 に加えて、初期磁場 $\langle B_0 \rangle$ から離れた $|z| \sim 2\pi$ の周りに、正の非局所的な効果 Φ_1 が生じる (図 3.11a)。この非局所的な効果は、 $\langle B_0 \rangle$ による局所的な α_1 とともに、 $z \sim \pi$ で平均場 $\langle B_1 \rangle$ の成長を強化し、その結果、波長 $j \sim 1/2$ の平均場を特に増幅させる。この非局所的な効果は、3.4.3 節で述べたように、 $j \sim 1/2$ の周辺における $\tilde{\varphi}(j, p)$ の谷に由来する。

3.5.3 誘導起電力と磁力線、流れ構造の関係

磁力線は、 ϕ_{qr} の生成メカニズムについて、直観的な説明を与えてくれる。また、磁力線は、MHD 数値シミュレーションの結果を解釈する際によく使われるため、磁力線を使った磁氣的メモリー効果の可視化は、それらの数値結果を解釈するときにも役立つ。

図 3.19 は、 $Rm = 8$ のときの典型的な磁力線の時間発展を示す。式 (3.1) を、初期磁場 $B(t=0) = (1, 1, 0)\delta(z)$ から計算した。この状況は、 Φ および Ψ を計算したときに似せた状況である。しかし、磁力線は平均部とずれ部に分離することができないため、(3.25) ではなく (3.1) を使った。これは、重要な違いをうむ。式 (3.25) を使って、カーネル Φ および Ψ を計算するときには、平均場 $\langle B \rangle$ は時間に依存しない。一方、(3.1) を使って磁力線を計算するときには、平均場 $\langle B \rangle$ は時間変化する。

磁力線は以下のように時間発展する。時間 $t \sim 0.5$ の磁力線は、 z 方向にはうねり、 $x-y$ 平面では約 ± 20 度ねじられ (図 3.19 i) a,c)、ねじ状の構造が形成される (図 3.19 i) a,b)。このねじ状の磁力線は、局所的かつ瞬間的な α 効果を生成する。そして、 $t \sim 2$ で、磁力線のねじれは $x-y$ 平面で ± 90 度まで増加し (図 3.19 ii) a,c)、ねじれのロープの半径は約 π まで達する (図 3.19 ii) a,b)。この時間は、負の Φ の広がり最大となる時間である (図 3.11a)。また、流れ場のセル境界の近くには、境界層が形成され、磁力線が集中するようになる (図 3.19 ii) a,c)。その後、磁力線は、列をなさない対流セルを通るようになる。磁力線のループは、図 3.1 で描いたように、一つの対流セル内で形成されるものではなく、異なるセルの間をぬっていくことで形成される。時間 $t = 6.5$ で、 z 方向に π 以上ひきのばされた磁力線は、ループをつくる。このループは、 $z \sim 0$ の周りのループと逆向きである (図 3.19 iii) b)。鉛直方向でみたとき $z \sim 2\pi$ にあるループは、 $x-y$ 平面で $(x, y) \sim (2\pi, 5\pi)$ に位置し、 $t \sim 6$ 付近で Φ に現れた正のピークに対応する (図 3.11 (a))。そして、 $t \sim 7$ のあと (cf. 拡散時間 $t = Rm = 8$)、そのループが $z \sim -2\pi, 0$ と 2π で維持され、磁場の強度は境界層で増加する。波長 4π のループの卓越は、非局所的なメモリー効果に起因する。

非局所的な誘導起電力と磁力線、流れ構造の関係は、以下のように直観的に整理することができる。ステップ応答 Φ に特徴的な構造が現れた時間に近い、 $t = 6.5$ のときで考えよう (図 3.19 iii)。局所的な α 効果と非局所的なメモリー効果の対比で考える。まず、局所的な α 効果を生成した磁力線のループは、対流セルの境界部をとる。境界領域では、水平方向への流れ u_H が支配的で、鉛直方向への流れ u_z はよわい。その結果、形成される磁力線のループは、水平方向へは対流セルの幅 ($\sqrt{2}\pi$) いっぱいに広がるのに対し、鉛直方向へはそれほど広がりをもたないような構造となる。この鉛直方向への広がりの幅は、境界層の厚さ $Rm^{-1/2}$ が決めるだろう。この結果、初期磁場の方向から見て、反時計

3.5. ϕ_{QR} による分散関係

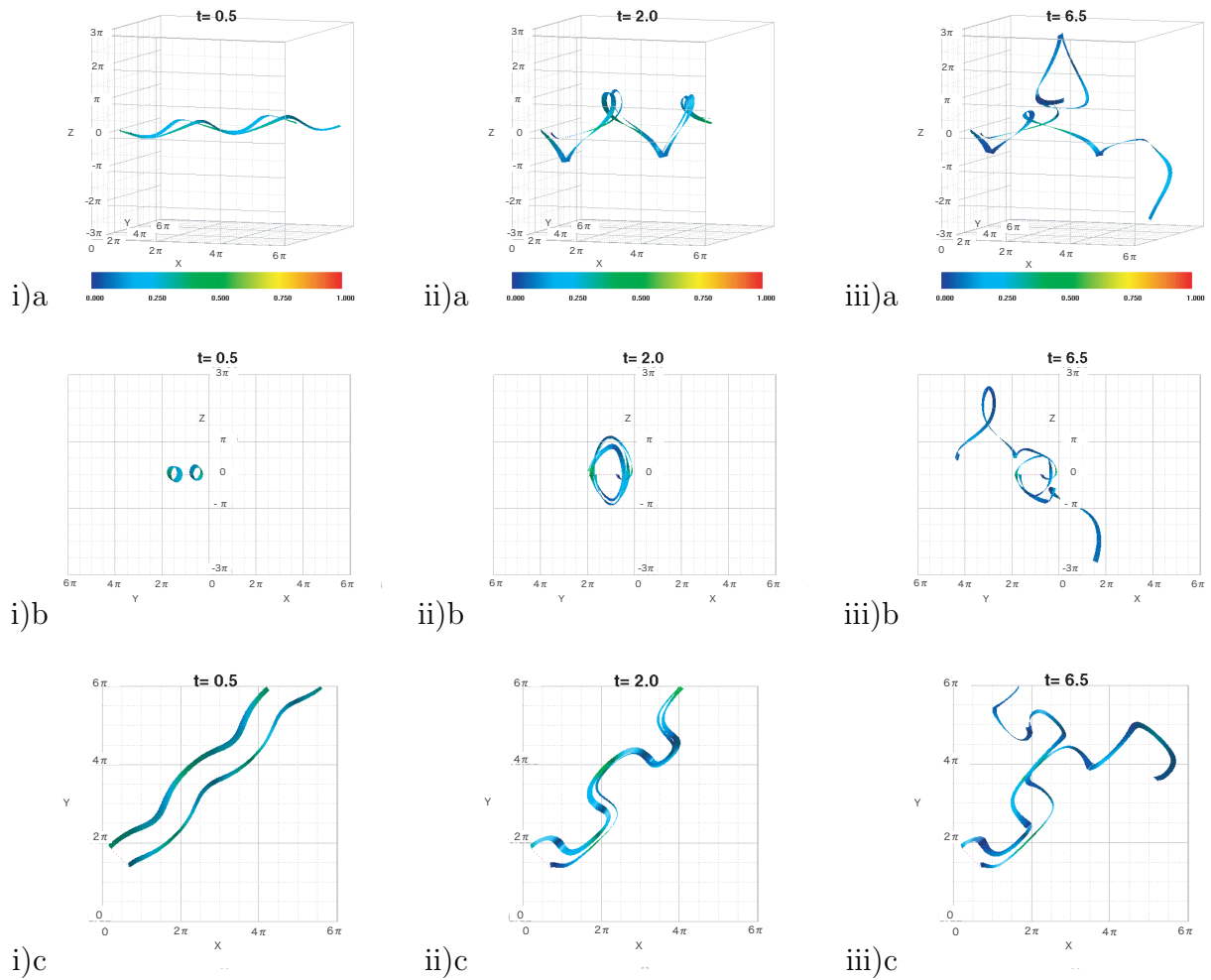


図 3.19: 磁力線の時間発展。 $Rm = 8$ のとき。2本の磁力線は、始点を $(0.78, 5.81, 0.0)$ と $(2.15, 4.44, 0.0)$ するもので、(i) $t = 0.5$, (ii) $t = 2.0$, (iii) $t = 6.5$ におけるスナップショットを示す。この図は、Roberts の流れ (3.9) を代入した誘導方程式 (3.1) を、次元 $6\pi \times 6\pi \times 6\pi$ の箱で計算して、作成された。初期磁場は $\langle B \rangle = (1, 1, 0)\delta(z)$ とした。境界条件は、 x および y 方向には周期的とし、 z 方向には、 $z = -3\pi$ および 3π で $B = 0$ とした。各時間の図は3つの方向からの視点になっており、上から下の順に、[a] $(-0.15, 0.98, -0.14)$ の方向からの視線、[b] 初期磁場の方向 $(1, 1, 0)$ からの視点、そして、[c] x - y 平面への投影、である。

回りの向きに磁力線のループができる。これが、応答 Φ で種磁場のすぐ近く $|z| \sim 0$ に生成された、負の応答に対応する。一方、非局所的なメモリー効果を生じた磁力線のループは、対流セルの内部領域で形成されている。内部領域では、対流セルの中心に向うほど、水平方向の流れよりも鉛直方向の流れが速くなる ($|u_H| \lesssim |u_z|$)。したがって、その流れによって引き伸される磁力線は、対流セルの水平方向いっぱいには広がらず、鉛直 z 方向に伸びた構造となる。その磁力線のループは、初期磁場の方向から見て、時計回りの向きとなる。この結果、鉛直方向に長い空間スケールをもった、正の応答 Φ がおこる。これらの考察から、局所的な α および非局所的なメモリー効果の空間スケールが、流れの水平成分 $u_H = (u_x, u_y)$ と鉛直成分 u_z の強さの比、または、ヘリシティの大きさで決まっているだろうことがわかる。ヘリシティ、または $|u_z/u_H|$ が大きくなるほど、誘導起電力の非局所性の空間スケールは大きくなると考えられる。

3.6 まとめと議論

本研究では、G.O.Roberts の流れにおいて、非局所的かつ非瞬間的に一般化した α 効果を計算した。誘導方程式 (3.1) を平均部 (3.2) とずれ部 (3.4) に分けることで、誘導方程式の一般的カーネル ϕ_{qr} を、空間と時間の関数として表現することができる。磁気レイノルズ数 $Rm \geq \mathcal{O}(1)$ のとき、非局所性と非瞬間性は顕著である。これらは、ステップ応答 $\Phi(z, t)$ ではっきりと見ることができる。応答はまず、移流の時間スケール τ_a で成長する。その後、振動しながら、拡散の時間スケール $\tau_d = Rm\tau_a$ で定常状態に至る。特に、 $Rm = 8$ の $\Phi(z, t)$ は、 $t \sim 6$ のとき $|z| \sim \pi$ から $|z| \sim 3\pi$ に広がる正の領域をもつ。これは、平均磁場の成長率を強化させる。

時間的な振る舞いは、磁力線の時間発展を直接計算することで直観的に示された (図 3.19)。helical な流れが磁力線をねじり、 τ_a の時間スケールで磁力線は helical となる。その後、磁力線は境界層に集中するようになり、ねじられたループは、非局所性を示しながら z 方向に広がる。このような振る舞いを、地球ダイナモ直接数値シミュレーション (Kageyama & Sato, 1997; Olson *et al.*, 1999) と比較することは、興味深いだろう。

非局所的なメモリー効果により、Roberts のキネマティックダイナモの分散関係で見られた、成長率の強化を解釈することができる。磁気レイノルズ数 $Rm = 8$ のとき、応答関数の $(j, p) \sim (1/2, 1/6)$ にあったピークは、応答関数 $\tilde{\varphi}(j, p)$ 、つまり、 α 効果を非局所的かつ非瞬間的に一般化した関数における谷構造に起因する。この谷は、 $\Phi(z, t)$ で $t \sim 6$ の $|z| \sim 2\pi$ 周辺に現れた丘に対応する。このようにして、誘導起電力の応答は、分散曲線の形を矛盾なく説明する。

本研究で示したような、G.O.Roberts のキネマティックダイナモにおける非局所的なメモリー効果は、ヘリシティをもつ流れの、普遍的な効果と考えられる。Roberts のキネマティック問題の特徴は、2次元周期性をもつ流れであることと、helicity をもつ流れであることだった。流れの helicity は、本論で述べてきたように、非局所的なメモリー効果および磁場の生成にとって必要であるのに対し、2次元周期性、つまり、無限平面に広がった流れであるという特徴は、非局所的なメモリー効果の存在には寄与しない。無限平面に

広がった流れであることの影響は、生成される磁場および誘導起電力の、無限に長い空間スケールの成分に現れる。具体的には、 z 方向への波数 j に対し、 $j \sim 0$ 成分の磁場および誘導起電力をさす。瞬間局所的な α 効果は、これらの波数成分に寄与した。一方、非局所的なメモリー効果の特徴は、 $j \sim 1/2$ という有限な波数成分、つまり、有限な空間スケールをもつということである。これは、非局所的なメモリー効果が、1対の対流セルの幅で決まるということの意味する。つまり、流れが無限に広がっておらず、有限な系にあるような場合でも、1対の対流セルの幅で規定された非局所的なメモリー効果が生成されるだろう。したがって、現実のような有限な系においても、helical な流れがあれば、非局所的なメモリー効果は生成し、むしろ、有限な系でその寄与が危ぶまれるのは、瞬間局所的な α 効果であると考えられる。

最後に、特筆すべきことは、本研究で示したメモリー効果は、流れが定常な場合でも生成するという点である。本研究では、これを磁氣的メモリーと呼んだ。乱流の有限な相関時間によってもたらされるメモリー効果である、力学的メモリー効果と区別するためである。また、本研究のメモリー効果は、それらの時間スケールが近いことから、Livermore & Jackson (2006) における transient growth と同様の効果にみえるかもしれない。transient growth は、減衰する固有ベクトルの直交しない重ね合わせのために生じる、見かけの磁場増幅である (Schmid & Henningson, 2001)。次第に定常に至るという点では、本研究におけるメモリー効果も遷移的ではあるが、この 2 つの効果は異なる。transient growth が種磁場に依存しない概念であるのに対し、メモリー効果は種磁場に対する応答だからである。

関連図書

- Anufriyev, A.P. and Fishman, V.M., Magnetic field structure in the two-dimensional motion of a conducting fluid. *Geomag. Aeron.*, 1982, **22**, 245–248.
- Brandenburg, A. and Sokoloff, D., Local and nonlocal magnetic diffusion and alpha-effect tensors in shear flow turbulence. *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.*, 2002, **96**, 319–344.
- Brandenburg, A., Rädler, K.-H., Schinner, M., Scale dependence of alpha effect and turbulent diffusivity. *Astron. Astrophys.*, 2008, **96**, 739–746.
- Busse, F.H., Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid. Mech.*, 1970, **44**, 441–460.
- Busse, F.H., Convective flows in rapidly rotating spheres and their dynamo action. *Phys. Fluids.*, 2002, **14**, 1301–1314.
- Childress, S., Alpha-effect in flux ropes and sheets. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 1979, **20**, 172–180.
- Courvoisier, A., Hughes, D.W. and Tobias, S.M., α Effect in a family of chaotic flows. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, **96**, 034503/1–4.
- Desjardins, B., Dormy, E., Gilbert, A. and Proctor, M., Introduction to self-excited dynamo action. In *Mathematical Aspects of Natural Dynamos*, edited by E. Dormy and A.M. Soward, 2007, 3–57 (CRC Press: Boca Raton).
- Fedotov, S., Ivanov, A. and Zubarev, A., Memory effects in a turbulent dynamo: Generation and propagation of a large-scale magnetic field. *Phys. Rev. E*.2002, **65**, 036313/1–5.
- Fedotov, S., Ivanov, A. and Zubarev, A., Non-local mean field dynamo theory and magnetic fronts in galaxies. *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.*.2003, **97**, 135–148.
- Hori, K., Re-examination of dynamo action by fluid motion with two-dimensional periodicity. M.Sc.dissertation, Nagoya University, 2005.
- Kageyama, A. and Sato, T., Generation mechanism of a dipole field by a magnetohydrodynamic dynamo. *Phys. Rev. E*.1997, **55**, 4617–4626.

- Käpylä, P.J., Korpi, M.J., Ossendrijver, M. and Stix, M., Magnetoconvection and dynamo coefficients III. α -effect and magnetic pumping in the rapid rotation regime. *Astron. Astrophys.*, 2006, **455**, 401–412.
- Kowal, G., Otmianowska-Mazur, K. and Hanasz, M., Dynamo coefficients in Parker unstable disks with cosmic rays and shear – The new methods of estimation. *Astron. Astrophys.* 2006, **445**, 915–929.
- Krause, F. and Rädler, K.-H., *Mean-field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*, 1980 (Akademie-Verlag: Berlin, and Pergamon Press: Oxford).
- Lanotte, A., Noullez, A., Vergassola, M., Wirth, A., Large-scale dynamo produced by negative magnetic eddy diffusivities. *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.*, 1999, **91**, 131–146.
- Livermore, P.W. and Jackson, A., Transient magnetic energy growth in spherical stationary flows. *Proc. R. Soc. A*, 2006, **462**, 2457–2479.
- Matsushima, M., A scale-similarity model for the subgrid-scale flux with application to MHD turbulence in the Earth’s core. *Phys. Earth Planet. Inter.* 2005, **153**, 74–82.
- Moffatt, H.K., *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, 1978 (Cambridge University Press: Cambridge).
- Müller, U. and Stieglitz, R., The Karlsruhe dynamo experiment. *Nonlinear Processes in Geophys.*, 2002, **9**, 165–170.
- Olson, P., Christensen, U. and Glatzmaier, G.A., Numerical modeling of the geodynamo: Mechanisms of field generation and equilibration. *J. Geophys. Res.*, 1999, **104**, 10383–10404.
- Plunian, F. and Rädler, K.-H., Subharmonic dynamo action in the Roberts flow. *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.* 2002a, **96**, 115–133.
- Plunian, F. and Rädler, K.-H., Harmonic and subharmonic solutions of the Roberts dynamo problem. Application to the Karlsruhe experiment. *magnetohydrodynamics*, 2002b, **38**, 92–103.
- Rädler, K.-H., Apstein, E. and Schuler, M., The α -effect in the Karlsruhe dynamo experiment. *Proceedings of the 3rd International Conference “Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamic and Electroconducting Flows”*, Vol.I, Aussois, France, 1997, 9–14.

- Rädler, K.-H., The generation of cosmic magnetic fields. In *From the Sun to the Great Attractor, 1999 Guanajuato Lectures on Astrophysics*, edited by D. Page and J. Hirsch, 2000, 101–172 (Springer: Berlin).
- Rädler, K.-H., Rheinhardt, M., Apstein, E. and Fuchs, H., On the mean-field theory of the Karlsruhe dynamo experiment. *Nonlin. Proc. Geophys.*, 2002, **9**, 171–187.
- Rädler, K.-H. and Brandenburg, A., Contributions to the theory of a two-scale homogeneous dynamo experiment. *Phys. Rev. E.*, 2003, **67**, 026401/1–11.
- Roberts, G.O., Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1972, **271**, 411–454.
- Roberts, P.H., Kinematic dynamo models. *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1972, **272**, 663–698.
- Roberts, P.H., Fundamentals of dynamo theory. In *Lectures on Solar and Planetary Dynamos*, edited by M.R.E. Proctor and A.D.Gilbert, 1994, 1–58 (Cambridge University Press: Cambridge).
- Schmid, P.J. and Henningson D.S., *Stability and Transition in Shear Flows*, 2001, (Springer: New York).
- Schrinner, M., Rädler, K.-H., Schmitt, D., Rheinhardt, M. and Christensen, U., Mean-field view on rotating magnetoconvection and a geodynamo model. *Astron. Nachr.*2005, **326**, 245–249.
- Schrinner, M., Rädler, K.-H., Schmitt, D., Rheinhardt, M. and Christensen, U., Mean-field concept and direct numerical simulations of rotating magnetoconvection and the geodynamo, *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.*2007, **101**, 81–116.
- Soward, A.M., Fast dynamo action in a steady flow. *J. Fluid. Mech.*1987, **180**, 267–295.
- Soward, A.M., On dynamo action in a steady flow at large magnetic Reynolds number. *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.*, 1989, **49**, 3–22.
- Steenbeck, M., Krause, F. and Rädler, K.-H., A calculation of the mean electromotive force in an electrically conducting fluid in turbulent motion, under the influence of Coriolis forces. *Z.Naturforsch.*, 1966, **21a**, 369–376 [English transl.: Roberts and Stix *The Turbulent Dynamo: A translation of a series of papers by F. Krause, K.-H. Rädler, and M. Steenbeck*, pp.29–47, 1971 (NCAR: Boulder).].
- Steenbeck, M. and Krause, F., The generation of stellar and planetary magnetic fields by turbulent dynamo action. *Z.Naturforsch.*, 1966, **21a**, 1285–1296 [English translation: Roberts and Stix, *The Turbulent Dynamo: A translation of a series of papers by F. Krause, K.-H. Rädler, and M. Steenbeck*, 49–79, 1971 (NCAR: Boulder).].

- Stieglitz, R. and Müller, U., Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Phys. Fluids*.2001, **13**, 561–564.
- Tilgner, A. and Busse, F.H., Subharmonic dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1995, **448**, 237–244.
- Tobias, S. and Weiss, N., The solar dynamo and the tachocline. In *The Solar Tachocline*, edited by D.W. Hughes, R. Rosner, N.O. Weiss, 2007, 319–350 (Cambridge University Press: Cambridge).
- Urpin, V., Mean electromotive force in turbulent shear flow. *Phys. Rev. E*.2002, **65**, 026301/1–8.
- Zheligovsky, V.A., Podvigina, O.M., Frisch, U., Dynamo effect in parity-invariant flow with large and moderate separation of scales. *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.*, 2001, **95**, 227–268.

第4章 まとめと議論

本論文では、過去のダイナモ基礎理論において α 効果が果たしてきた役割を述べた上で、その取り扱いは、考える磁気レイノルズ数に応じて注意する必要があるということを示した。従来は、磁気レイノルズ数が 1 よりも十分小さいときに導入された、瞬間局所的な α 効果を、どんな磁気レイノルズ数の場合にも適応してきた。しかし、本研究で示したように、磁気レイノルズ数が $\mathcal{O}(1)$ よりも大きいときは、瞬間局所的な α 効果だけでなく、非局所的で非瞬間的な効果の寄与が強くなる。ダイナモが駆動されるためには $\mathcal{O}(1) \geq 1$ が必要であり、また、実際に、全球的な磁場をもつ天体では $\mathcal{O}(1) \geq 1$ だろうと考えられている。したがって、天体ダイナモ作用を考える際には、その非瞬間性と非局所性を考慮した、広義の α 効果でもって、議論をする必要がある。

非瞬間性と非局所性をもった α 、つまり、非局所的なメモリー効果は、天体ダイナモ問題における話題の多くに影響を与えるだろう。以下で、その例をあげ、議論する。

まず、非局所的なメモリー効果は、地球や太陽で双極子成分が卓越する理由に関連するかもしれない。地球や太陽の磁場は、ほぼ軸対称で、双極子成分が非双極子成分に比べて、特に卓越しているような構造である (図 1.1 参照)。過去の理論における α^2 および $\alpha\omega$ メカニズムは、前者の、ほぼ軸対称な磁場の生成を説明できる。しかしながら、それらは、双極子成分も非双極子成分も同程度に生成させやすく、双極子成分が特に卓越するという点を説明できない (2.4 節)。それに対し、本研究で示した非局所的なメモリー効果は、磁場のある波長成分を特に速く成長させるという特徴をもつため、非局所的なメモリー効果を考慮した α^2 メカニズムによって、双極子成分が卓越する理由を説明できるかもしれない。ここで、本研究の結果を使用して、簡単な見積もりをしてみよう。本研究の結果によると、卓越する平均場磁場の波長成分は、一対の流れセルの水平面での長さ (3 節の定式化で、長さ $2\pi\mathcal{L}$) に対して、約 2 倍の長さをもつ波長成分 (波長約 $4\pi\mathcal{L}$) である。つまり、対流セルの一対の水平スケールと同程度の磁場波長成分が、卓越する。天体内部の対流が数対程度という細かくない対流セル構造をもつとすると (2.2.2 節)、一対の流れセルの典型的な水平スケールは、対流層の半径と同程度 $\mathcal{O}(R)$ と考えられるので、この対流セルから生成される平均磁場は $\mathcal{O}(R)$ の波長を卓越させられるだろう。したがって、非局所的なメモリー効果は、天体の大きさと同程度の磁場の波長成分、つまり、双極子成分を卓越させうるだろう。これは粗い見積もりだったが、その正確な判定は、非局所的なメモリー効果を考慮した平均場 α^2 モデルを球状の系で計算することによって、確かめることができる。

上の議論が正しいとすると、天王星および海王星における、双極子成分と四重極子成分を同程度に強くもつような磁場は、非局所的なメモリー効果の寄与が小さいためと考える

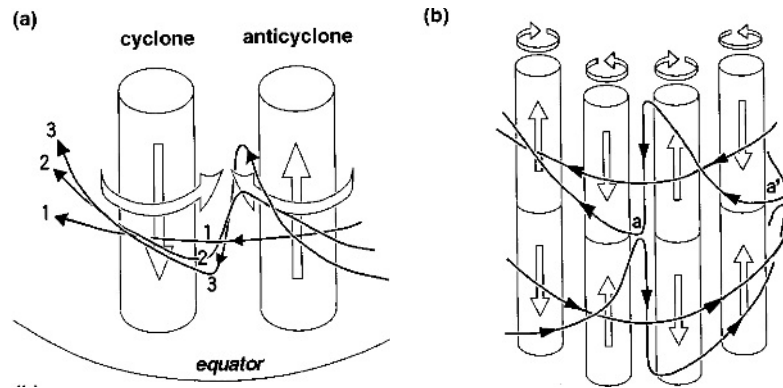


図 4.1: Kageyama & Sato (1997) による、軸双極子成分の生成過程の概念図。2 つの円柱は、上昇流と下降流からなる対流セルの対を表す。その円柱の上に重ねて描かれている太い実線が磁力線。(a) における磁力線に添えられている数字は、その時間発展を示す。

ことができるだろう。天王星および海王星の内部構造は不確かだが、磁場を生成する対流層は薄いだらうと考えられている。Stevenson (2003) の見積もりによると、天王星における磁気レイノルズ数は、地球における値よりも小さい。つまり、地球に比べて、非局所的なメモリー効果の寄与が小さく、瞬間局所的な α 効果が効いた状況になっていると考えられる。すると、P.H.Roberts (1972) などが示したように、双極子成分と四重極子成分が同程度に生成されやすい磁場となるだろう。この天王星および海王星の磁場構造の起源については、対流層の下の安定成層領域の寄与 (Stanley & Bloxham, 2004) など様々な説が提出されているが、本研究の非局所的なメモリー効果による説は、その中でもシンプルな説の一つになるだろう。しかし、天王星および海王星の場合、太陽や地球と異なり、観測的な制約が少なすぎるため、どの説が有力かを判断するのは難しいだろう。

また、本研究は MHD 直接シミュレーションの結果を解釈するための概念も与える。直接シミュレーションは $Rm \geq \mathcal{O}(1)$ のダイナモを再現しているにも関わらず、 $Rm \ll 1$ のときに基づく α 効果の概念を使用して、ダイナモ生成過程の説明を試みていた。その例の一つは、Kageyama & Sato (1997) における Fig.5 である (図 4.1)。ここでは、対流セルの境界部に掃き出されたトロイダル磁場の磁力線が、自転軸方向へ引き伸されることによって、ポロイダル成分の磁力線を生む過程が、概念的に図示された。これは、従来考えられていた α 効果のイメージとは異なる (論文では α 効果と呼んでいたけれども)。従来の α は、 $Rm \ll 1$ の場合で考えられたもので、対流セルの内部領域で、流れのねじれによって直接的に磁力線がねじられた結果、生じる。それに対し、本研究の結果、 $Rm \geq \mathcal{O}(1)$ の場合、対流セルの内部領域によってねじられた磁力線は非局所的なメモリー効果に寄与し、瞬間局所的な α 効果を生成するのは対流セルの境界部に掃き出された磁力線であることがわかった。つまり、上述の Kageyama & Sato (1997) で示されていたポロイダル磁場の生成過程は、 $Rm \geq \mathcal{O}(1)$ のときの瞬間局所的な α 効果によるものと考えられる。一方、これらの研究における非局所的なメモリー効果の寄与は不明である。単純な α が生成するダイナモは短波長成分を成長させやすいのに対し、多くの MHD シミュレーション

における磁場は双極子卓越型となっていることを考えると、そこには非局所的なメモリー効果の寄与があるかもしれない。これを明らかにするためには、磁力線および磁場データの再解析が必要である。

太陽などでさかんに使用される平均場ダイナモモデルに対しては、本研究の枠組みを用いることによって、より現実的な乱流モデルを開発できるようになる。これまで、平均場モデルへ組込むための乱流モデルを得るためには、局所的な系で乱流の性質を調べることが行われている。しかし、そこで得られた乱流の性質を近似的にモデル化する際には、瞬間局所的な α 効果のみしか考慮しない、というのが標準的である。これは、天体磁場の大規模な構造を定性的に理解しようとする際には有効だが、より定量的に、特に太陽活動の将来予測 (Dikpati *et al.*, 2006) などのために、磁場の振る舞いを議論しようとするときには、粗い結果を与えることになってしまう。本研究で示したような、非局所的なメモリー効果などを排除したことになるためである。非局所的なメモリー効果を考慮した乱流モデルは、磁場の時間的および空間的構造に対して、より定量的な議論を可能にするだろう。

関連図書

- Dikpati, M., de Toma, G., Gilman, P.A., Predicting the strength of solar cycle 24 using a flux-transport dynamo-based tool. *Geophys. Res. Lett.*, 2006, **33**, L05102.
- Kageyama, A., Sato, T., Generation mechanism of a dipole field by a magnetohydrodynamic dynamo. *Phys. Rev. E*, 1997, **55**, 4617–4626.
- Roberts, P.H., Kinematic dynamo models. *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1972, **272**, 663–698.
- Stanley, S., Bloxham, J., Convective-region geometry as the cause of Uranus' and Neptune's unusual magnetic fields. *Nature*, 2004, **428**, 151–153.
- Stevenson, D.J., Planetary magnetic fields. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 2003, **208**, 1–11.